Exercices de Colles de Sup

Thomas Budzinski

Janvier 2013 - Mai 2014

Avertissement

Ce document est une compilation d'exercices de colles posés en HX3 au lycée Louis-le-Grand en $2012-2013$ et $2013-2014$, accompagnés de rapides éléments de solutions dont je ne garantis pas l'exactitude. Ces exercices sont dans l'ensemble assez difficiles, la difficulté étant (très approximativement) indiquée par le nombre d'étoiles. Les chapitres à partir de "Géométrie affine" soit sont hors-programme, soit ont disparu du programme de MPSI en 2013.

Table des matières

1 Ensembles et applications

Exercice 1 (*) Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble de E. On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Solution. *Double inclusion.*

Exercice 2 (*) Soient E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $\Phi : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(F)$ définie par $\Phi(A) = f\langle A \rangle$.
Montrer que Φ est injective ssi f est injective.

Solution. *Si f est injective et $f(A) = f(B)$, alors $A = B$ par double inclusion. Si Φ injective, regarder sa restriction aux singletons.*

Remarque. *Marche aussi en remplaçant "injective" par "surjective".*

Exercice 3 (*) Soient E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et A, $B \in \mathscr{P}(E)$.
- Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
- Donner un exemple tel que l'inclusion soit stricte.
- Montrer qu'on a égalité si f est injective.

Solution.
- *Trivial*
- *Prendre A, B disjoints et f constante.*
- *Facile*

Exercice 4 (*) Soient E un ensemble et $f, g : E \longrightarrow E$.
- Montrer que si f et g sont injectives, alors $f \circ g$ l'est aussi.
- Donner un exemple où la réciproque est fausse.

Solution.
- *Immédiat.*
- *Prendre $E = \mathbb{N}$ (E doit être infini), $g(n) = n + 1$, $f(n) = n$ pour $n \geq 1$ et $f(0) = 1$.*

Exercice 5 (**) Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective ssi f est surjective.

Solution. *Si f est injective, $f \circ f = Id$ donc f est surjective.*
Si f est surjective, pour tout x, on écrit $x = f(y)$, ce qui donne $f(f(x)) = x$ donc f est injective.

Exercice 6 (**) Soient E, F ensembles.
Montrer qu'il existe une injection de E dans F ssi il existe une surjection de F dans E.

Solution. *Si $i : E \longrightarrow F$ injective, on pose $f(i(x)) = x$ pour $x \in E$ et on complète arbitrairement.*
Si $s : F \longrightarrow E$ surjective, on choisit $g(x)$ parmis les antécédents de x par s.

Exercice 7 (**)
- Décrire une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$.
- Montrer que pour tout $n > 0$, $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}^n$.
- Montrer que l'ensemble des suites d'entiers nulles à partir d'un certain rang est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Exercice 8 (**) Décrire une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$

Solution. *Par exemple, on peut prendre $f(n) = n + \frac{1}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $f(n + \frac{1}{m}) = n + \frac{1}{m+1}$ pour $m, n \in \mathbb{N}$ et $m \geq 2$ et $f(x) = x$ partout ailleurs.*

Exercice 9 (**) Soit E un ensemble. Montrer que E est fini ssi toute fonction f de E dans lui-même admet une partie stable non triviale.

Solution. *Si E est fini, prendre un cycle.*
Si E est infini, soit $x \in E$ et $A = \{f^n(x) | n \in \mathbb{N}\}$: si $A \neq E$, c'est bon. Sinon, A est infini donc $f^n(x) \neq x$ pour tout n et $A\backslash\{x\}$ convient.

Exercice 10 (***) Soit σ une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
Montrer que l'ensemble des n tels que $\sigma(n) \geq n$ est infini.

Solution. *Si il est fini, soit N le max des $\sigma(n)$ avec $\sigma(n) \geq n$: alors pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, on a $\sigma(n) \in [\![0, N]\!]$ donc σ induit une bijection de $[\![0, N]\!]$, mais $\sigma(N + 1) \leq N$, ce qui contredit l'injectivité.*

Exercice 11 (***) Soient E un ensemble et $f : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ croissante, i.e telle que si $A \subset B$, $f(A) \subset f(B)$. Montrer que f admet un point fixe.

Solution. *Considérer le plus grand A tel que $A \subset f(A)$: on vérifie qu'il existe car cette propriété passe à l'union, et on vérifie $f(A) = A$ par double inclusion.*

2 Calculs algébriques

Exercice 1 (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Solution. *En testant de petites valeurs, on conjecture $1 - \frac{1}{(n+1)!}$, qui se vérifie facilement par récurrence.*

Exercice 2 (*) Montrer que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ est strictement croissante.

Solution. *On calcule $u_{n+1} - u_n$, la plupart des termes se télescopent...*

Exercice 3 (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver la (ou les) valeurs de k pour laquelle $\binom{n}{k}$ est maximal.

Solution. *On calcule le quotient de $\binom{n}{k+1}$ par $\binom{n}{k}$: on a un maximum en p si $n = 2p$ et en p et $p+1$ si $n = 2p+1$.*

Exercice 4 (*) Trouver tous les $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x^3 y^4 z & = & 2 \\ xyz^4 & = & 4 \\ x^5 y z^2 & = & 16 \end{array} \right.$$

Solution. $\ln|x|$, $\ln|y|$ *et* $\ln|z|$ *vérifient un système linéaire qui donne $|x| = |y| = 1$ et $|z| = 2$. De plus, d'après les signes des équations, x, y et z sont de même signe, et on a bien deux solutions $(1, 1, 2)$ et $(-1, -1, -2)$.*

Exercice 5 (**) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$.
Quelle est la limite quand $n \to \infty$?

Solution. *On écrit $k = \sum_{i=1}^{k} 1$ et on intervertit, ou on dérive en 2 la somme des q^k.*
On trouve $2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$, donc la limite vaut 2.

Exercice 6 (**) Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{A,B \subset E} |A \cap B|$$

Solution. *On obtient $n4^{n-1}$ par double comptage, ou en en sommant sur A puis sur B, en regroupant les indices selon $|A \cap B|$ puis selon $|B|$ et en dérivant le binôme de Newton. La somme sur A donne $|B|2^{n-1}$.*

Exercice 7 (**) Soient m, n et k dans $\mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{p+q=k} \binom{m}{p} \binom{n}{q}$$

Solution. *Double comptage ou identifier le coefficient de x^k dans $(1+x)^m + n$ et $(1+x)^m(1+x)^n$ ou récurrence sale + triangle de Pascal.*

Exercice 8 (**) Soit $n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k} \in \mathbb{N}^*$ où les p_i sont premiers deux à deux disjoints. Déterminer la somme des diviseurs de n.

Solution. *On écrit chaque diviseur comme un produit de $p_i^{\beta_i}$ avec $\beta_i \leq \alpha_i$ et on factorise la somme. On obtient le produit des $\frac{p_i^{\alpha_i} - 1}{p_i - 1}$.*

Remarque. *On peut aussi calculer le produit : il vaut $n^{\frac{d(n)}{2}}$ où $d(n) = (\alpha_1 + 1) ... (\alpha_k + 1)$*

Exercice 9 (***) Soit (p_n) la suite des nombres premiers. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k}$ tend vers $+\infty$ quand $n \to \infty$.

Solution. *On commence par montrer que* $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$ *tend vers* ∞*. En effet, en tronquant la somme infinie et en développant le produit, on trouve* $P_n \geq 1 + ... + \frac{1}{n}$*. La série de terme général* $\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right)$ *diverge donc, et on montre que pour* k *assez grand, ce terme général est inférieur ou égal à* $\frac{1}{2p_k}$ *par exemple...*

3 Nombres complexes

Exercice 1 (*) Résoudre $z + \bar{z} = z^4$.

Solution. *Si* z *est solution, alors* $z^4 \in \mathbb{R}$ *donc* z *est réel, imaginaire pur, ou de la forme* $a(1+i)$ *ou* $a(1-i)$ *avec* $a \in \mathbb{R}$*, et on résout dans chaque cas. On trouve* 0*,* $\sqrt[3]{2}$*,* $-\frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}$ *et* $-\frac{1-i}{\sqrt[3]{2}}$

Exercice 2 (*) Soient u et z dans $\mathbb{C}$ avec $u \neq 1$ et $z \notin \mathbb{R}$.
Montrer que $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R}$ ssi $|u| = 1$.

Solution. *Utiliser qu'u complexe est réel ssi il est égal à son conjugué...*

Exercice 3 (*) Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \cos^3 k\theta$.

Solution. *On développe et on regroupe les sommes. On trouve finalement :*

$$\frac{3}{4} \cot \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{4} \cot \frac{3\pi}{2n}$$

Exercice 4 (*) Soient a, b, c et d des complexes tels que $a + c = b + d$ et $a + ib = c + id$.
Montrer que les points d'affixe a, b, c et d forment un carré.

Solution. *La première condition signifie que les diagonales se coupent en leurs milieux, la deuxième qu'elles sont orthogonales et de même longueur.*

Exercice 5 (**) On note $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\}$ et pour tout $z \in \mathbb{H}$, on pose $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.
Déterminer l'image de $\mathbb{D}$ par f et montrer que f est une bijection de $\mathbb{H}$ dans cette image.

Solution. *L'image est* $\mathbb{D}$ *: on peut le voir géométriquement ou calculer la bijection réciproque de* f*, qui est* $z' \longrightarrow i\frac{z'+1}{z'-1}$*, et montrer que* $f^{-1}(z') \in \mathbb{H}$ *ssi* $|z'| < 1$.

Remarque. *Pour un exo un peu plus facile, donner dès le début l'ensemble d'arrivée de* f.

Exercice 6 (**) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k \equiv 1[3]} \binom{k}{n}$$

Solution. *Appliquer le binôme de Newton aux racines cubiques de l'unité. On trouve* $\frac{2^n+\alpha(n)}{3}$ *avec* $\alpha(n) = -1, 1, 2, 1, -1, -2$ *selon la valeur de* n *modulo* 6.

Exercice 7 (**) Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{2n} \cos^{2n}\left(\theta + \frac{k\pi}{2n}\right)$$

Solution. *On développe chaque terme avec le binôme de Newton et on intervertit. Toutes les contributions s'annulent sauf celle de* $j = n$, *et on obtient* $\frac{n}{2^{2n-1}}\binom{2n}{n}$.

Exercice 8 (**) Soit ABC un triangle et M le centre du triangle équilatéral extérieur à ABC dont $[AB]$ est un des côtés. On définit de même N et P. Montrer que MNP est équilatéral.

Solution. *Soit* $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ *: on a* $m - b = \omega(m - a)$ *donc on a les affixes de* m, n *et* p, *et on calcule* $\frac{p-n}{m-n} = -\omega^2$, *donc le triangle est équilatéral, ou on calcule directement les longueurs...*

Exercice 9 (***) Soient $z_1, ..., z_k \in \mathbb{C}$ de modules inférieurs ou égaux à 1. Montrer qu'il existe $\epsilon_1, ..., \epsilon_k \in \{-1, 1\}$ tels que $|\epsilon_1 z_1 + ... + \epsilon_k z_k| \leq \sqrt{3}$.

Solution. *Le cas* $k = 2$ *est facile, par exemple avec l'identité du parallélogramme. On raisonne ensuite par récurrence : soit* $n \geq 3$ *: pour que ça marche, il suffit de trouver* i, j *et* ϵ *tels que* $|z_i + \epsilon z_j| \leq 1$. *Or, on regarde l'hexagone de sommets* z_1, z_2, z_3, $-z_1$, $-z_2$, $-z_3$, *qu'on peut supposer non croisé quitte à permuter les* z_i. *Alors un des angles au centre est plus petit que* $\frac{\pi}{3}$, *donc le côté correspondant est plus petit que* 1 *par Al-Kashi, donc c'est bon.*

4 Fonctions usuelles

Exercice 1 (*) Résoudre l'équation :

$$\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$$

Solution. *On prend la tangente, on obtient* $\frac{3x}{1-2x^2}$ *donc* $x = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$.

Exercice 2 (*) Montrer la formule :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

Solution. *On calcule en utilisant la formule qui donne* $\tan(\arctan x + \arctan y)$, *ou on passe par les complexes.*

Remarque. *Intérêt : calculer des décimales rapidement.*

Exercice 3 (*) Soient $a, b, x \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$. Montrer l'inégalité :

$$0 < be^{-ax} - ae^{-bx} < b - a$$

Solution. *A gauche, évident (regrouper les* a *et les* b*). A droite, dériver par rapport à* x*.*

Exercice 4 (*) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 x^k \ln x dx$$

Solution. *On intègre par partie en intégrant* x^k*, on trouve* $-\frac{1}{(k+1)^2}$.

Remarque. *Si le calcul n'est pas fait facilement, ne pas poser de problèmes en* 0*...*

Exercice 5 (**) Trouver les couples de réels (a, b) tels que le système suivant admet des solutions :

$$\begin{cases} \cosh x + \cosh y & = & a \\ \sinh x + \sinh y & = & b \end{cases}$$

Solution. *On remplace par des exponentielles, ce qui donne* $e^x + e^y = a + b$ *et* $e^{-x} + e^{-y} = a - b$ *donc* $e^{x+y} = \frac{a+b}{a-b}$*, ce qui donne une équation de degré* 2 *pour* e^x*. Il faut et il suffit que* $a > 0$ *et* $a^2 \geq b^2 + 4$*.*

Exercice 6 (**) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$. Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\frac{\ln 1+ax}{\ln 1+bx}$.
Montrer que f est croissante.

Solution. *On dérive* f *: on veut montrer que le numérateur est positif. On met donc tout au même dénominateur et on dérive le numérateur : c'est positif, donc* f' *est croissante et* $f'(0) = 0$ *donc c'est bon.*

Exercice 7 (**) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Calculer :

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt$$

Solution. *On fait les deux changements de variables qui s'imposent et on termine en intégrant par partie. On trouve* $2(\sin x - x \cos x)$*.*

Exercice 8 (**) Trouver une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Solution. *On sait que argsh est une primitive de* $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$*, et on s'y ramène par des changements de variables affines. On trouve* $\operatorname{argsh}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$*.*

Exercice 9 (**) Donner une primitive de $x(\tan x)^2$.

Solution. *Une primitive de* $(\tan x)^2$ *est* $\tan x - x$ *donc on peut intégrer par partie. A la fin, on utilise la primitive de* $\tan$ *:* $\ln|\cos x|$*, et on trouve* $x\tan x - \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2}$.

Remarque. *Pour éviter les problèmes avec la valeur abolue, on peut demander une primitive sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 10 (***) Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$.

Solution. *On introduit* $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x dx$ *: par le changement de variables* $\frac{\pi}{2} - x$*, on a* $I = J$*, et* $I + J = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + I$ *en regroupant les termes et en faisant un changement de variables linéaire, d'où* $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Remarque. *Pour que l'exo soit abordable, il faut au moins introduire* J.

5 Equations différentielles

Exercice 1 (*) Résoudre $y''' - 3y'' + y' - 3y$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = y''(0) = 0$.

Solution. *On pose* $z = y' - 3y$ *et on résout l'équation en* z*, puis on trouve* y *par la méthode classique :* $y(t) = \frac{e^{3t}}{10} + \frac{9}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t$.

Exercice 2 (*) Résoudre le système :

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x + y \end{cases}$$

avec $y(0) = 0$ et $x(0) = 1$.

Solution. *En sommant les deux équations, on trouve* $x' + y' = 2x$ *donc* y *est* $\mathscr{C}^2$ *et* $y'' = 2x$*. En remplaçant* x *dans la deuxième équation, on obtient une équation en* y *qui donne* $y(t) = e^t(A\cos t + B\sin t)$ *et* $A = 0$*, puis* $x(t) = Be^t\cos t$ *donc* $B = 1$*, et on vérifie que cette solution marche...*

Remarque. *Autre solution : trouver l'équa diff linéaire d'ordre* 1 *vérifiée par* $z = x + iy$*...*

Exercice 3 (*) Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(a - x)$.

Solution. *On dérive l'équation et on montre que* $f'' + f = 0$*. On trouve finalement* $f(x) = A\sin(x + \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2})$ *avec* $A \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (*) Résoudre $y' = \sin x \cos y$.

Solution. *On sépare les variables, et on utilise la primitive de* $\frac{1}{\cos t}$*, qui est* $\ln\tan\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}$*. On trouve* $y = 2\arctan\lambda e^{-\cos x} + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Remarque. *On pourra admettre que si* $\cos y$ *tape* 0*,* y *est constante.*

Exercice 5 (**) Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, T-périodique. Montrer que l'équation $y' + ay = f$ admet une unique solution T-périodique.

Solution. *On écrit la solution explicitement avec la variation de la constante, et le changement de variable $v = u - T$ permet d'exprimer $y(t + T)$ de manière plus agréable, d'où un téléscopage dans la différence $y(t + T) - y(t)$.*

Remarque. *On peut aussi demander ce qu'il se passe pour a complexe : pour a non multiple de $\frac{2i\pi}{T}$, ça marche pareil et, pour $a = \frac{2ik\pi}{T}$, on a aucune ou une infinité de solutions selon la nullité du k-ème coefficient de Fourier de f.*

Exercice 6 (**) Trouver toutes les solutions $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$y'' + y = \max(e^x, 1)$$

vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

Solution. *On résout sur $\mathbb{R}^+$ (on trouve $y = 1 - \cos x$) et $\mathbb{R}^-$ (où on a $y = \frac{1}{2}(e^x - \cos x - \sin x)$). Il ne reste plus qu'à vérifier le raccord en 0. Pour cela, on calcule y' et on vérifie que $y''(0) = 1$.*

Exercice 7 (**) Résoudre $y' = |y - t|$.

Solution. *Si $y(t_0) \leq t_0$, alors $y(t) < t$ pour tout $t > t_0$ (par l'absurde en prenant t minimal tel que ce soit faux), donc il y a 3 cas à distinguer :*

- *si $y(t) \leq t$ pour tout t, on trouve $y(t) = t - 1 - Ce^{-t}$ avec $C \geq 0$.*
- *si $y(t) \geq t$ pour tout t, on trouve $y(t) = t + 1 + Ce^{t}$ avec $C \geq 0$.*
- *si $y(t) \leq t$ ssi $t \geq t_0$, alors pour $t \geq t_0$, $y(t) = t - 1 + e^{t_0 - t}$ et, pour $t \leq t_0$, $y(t) = -t + 1 - e^{t - t_0}$, et on vérifie que le raccord est bien $\mathscr{C}^1$.*

Exercice 8 (**) Soit $\omega \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, strictement positive et croissante. Soit f une solution (définie sur $\mathbb{R}^+$) de l'équation différentielle $f'' + \omega^2 f = 0$. Montrer que f est bornée.

Solution. *On pose $g(t) = f(t)^2 + \frac{f'(t)^2}{\omega(t)^2}$, et on montre que g est décroissante en la dérivant.*

Remarque. *g est un analogue de l'énergie d'un oscillateur en physique.*

Exercice 9 (**) Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f'' + f \geq 0$. Montrer que $f(0) + f(\pi) \geq 0$.

Solution. *On pose $g(t) = f(t)\cos t - f'(t)\sin t$, et on dérive g pour montrer qu'elle est décroissante sur $[0, \pi]$, d'où le résultat.*

Exercice 10 (***) Soient $\omega_1, \omega_2 \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $\omega_1 \geq \omega_2 \geq 0$. Soit f_1 (resp. f_2) une solution non nulle de $f'' + \omega_1 f = 0$ (resp. $f'' + \omega_2 f = 0$.

- Montrer qu'entre deux 0 consécutifs de f_2, f_1 s'annule au moins une fois.
- Soit f une solution non nulle de $f'' + t^2 f = 0$. On admet que les zéros de f peuvent être énumérés par une suite croissante (t_n). Donner un équivalent de t_n.

Solution. – *Considérer le wronskien* $w = f_1' f_2 - f_1 f_2'$*, et distinguer selon les signes de* f_1 *et* f_2 *sur l'intervalle entre les deux zéros.*
– *La première question donne alors* $\frac{\pi}{t_{n+1}} \leq t_{n+1} - t_n \leq \frac{\pi}{t_n}$*, d'où successivement* $t_n \to \infty$*,* $t_{n+1} \sim t_n$ *et* $t_n \sim \sqrt{2\pi n}$ *car* $t_{n+1}^2 - t_n^2 \to 2\pi$*.*

Remarque. *Ne poser cet exo qu'après s'être assuré que les élèves ont vu les suites. Le fait qu'on puisse énumérer les zéros est une conséquence de l'unicité dans Cauchy-Lipschitz, et est donc inabordable en sup...*

6 Suites

Exercice 1 (*) Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\sup_{x,y \in A} |x-y| = \sup A - \inf A$$

Solution. *Le sens* $\leq$ *est immédiat. Pour l'autre, soient* $\epsilon > 0$*,* $x \in A$ *tel que* $x > \sup A - \frac{\epsilon}{2}$ *et* $y \in A$ *tel que* $y < \inf A + \frac{\epsilon}{2}$*. Alors* $|x-y| \geq \sup A - \inf A - \epsilon$*.*

Exercice 2 (*) Soit u une suite bornée telle que $(u_{n+1} - u_n)$ est monotone. Montrer que u converge.

Solution. *On suppose* $(u_{n+1} - u_n)$ *décroissante : si elle tend vers* $-\infty$ *ou vers une limite non nulle,* u *ne peut être bornée, donc elle tend vers* 0*, donc est positive, donc* u *est croissante et bornée, donc c'est bon.*

Exercice 3 (*) Soit $x \in \mathbb{R}$: étudier la convergence de :

$$\left(\frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + ... + \lfloor nx \rfloor}{n^2} \right)$$

Solution. *On encadre* $\lfloor x \rfloor$ *par* x *et* $x+1$*, on trouve* $\frac{x}{2}$*.*

Exercice 4 (* puis **) Etudier la convergence de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.
Donner un équivalent en $+\infty$.

Solution. *u est positive et croissante. De plus, si elle est bornée par* C*, alors* $u_{n+1} \geq u_n + e^{-C}$ *pour tout* n*, absurde, donc* u *tend vers* $+\infty$*.*
Pour l'équivalent, la comparaison avec une équation différentielle suggère de calculer $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$*, qui tend vers* 1*, donc* $e^{u_n} \sim n$ *par Cesaro, donc* $u_n \sim \ln n$*.*

Exercice 5 (* puis **) Etudier la convergence de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
Donner un équivalent en $+\infty$.

Solution. *u est positive et décroissante, donc converge, forcément vers* 0*. De plus, une comparaison avec une équation différentielle suggère* $u_n \sim \frac{1}{n}$*. On calcule donc* $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{u_{n+1}}$*, qui tend vers* 1*, donc avec Cesaro on trouve* $u_n \sim \frac{1}{n}$*.*

Exercice 6 (* puis **) On définit u par récurrence par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_0 + ... + u_n}$. Etudier la convergence de u en $+\infty$, puis donner un équivalent.

Solution. *u est croissante et doit donc tendre vers $+\infty$ car la série de terme général u_n diverge. De plus, $u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n$ soit $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{u_{n+1}+u_n}$ qui tend vers $\frac{1}{2}$ car $u_{n+1} \sim u_n$, donc par Cesaro $u_n \sim \frac{n}{2}$.*

Exercice 7 (**)

- Soit u une suite réelle bornée qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer que u converge.
- Soit u une suite bornée telle que la suite $(u_n + \frac{u_{2n}}{2})$ tende vers 1. Montrer que u converge et déterminer sa limite.

Solution.

- *Sinon, on peut extraire une sous-suite qui reste à distance supérieure à ϵ de l'unique valeur propre, absurde.*
- *Si λ est valeur d'adhérence, alors $2-2\lambda$ l'est aussi. Si $\lambda \neq \frac{2}{3}$, on construit une suite non bornée de valeurs d'adhérences, absurde. $\frac{2}{3}$ est donc l'unique valeur d'adhérence, d'où le résultat.*

Remarque. *Autre deuxième question possible : (a_n+b_n) tend vers 0 et $e^{a_n}+e^{b_n}$ tend vers 2 : on montre qu'alors a et b sont bornées et la seule valeur d'adhérence possible de a est 0.*

Exercice 8 (**) Soit u une suite réelle telle que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle.

Solution. *Soient $x < y$ des valeurs d'adhérence, $z \in]x, y[$ et $\epsilon > 0$: il existe N tel que $|u_{n+1}-u_n| < \epsilon$ pour $n \geq N$. De plus, il existe $m \geq N$ tel que $|u_m-x| < \epsilon$ et $n > m$ tel que $|u_n - y| < \epsilon$. Il existe alors k entre m et n tel que $|u_k - z| < \epsilon$.*

Remarque. *Si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue et $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0, alors si $x < y$ sont deux valeurs d'adhérence, tous les réels de $[x, y]$ sont valeurs d'adhérence donc points fixes de f, et u doit passer dans $]x, y[$, donc est stationnaire, absurde. u a donc une unique valeur d'adhérence, donc converge par l'exo précédent.*

Exercice 9 (**) Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que $\left(\frac{\sigma(n)}{n}\right)$ converge. Que peut-on dire de la limite ?

Solution. *Soit l la limite : si $l < 1$, soit $l < l' < 1$: pour n assez grand, $\sigma(n) \leq l'n$ donc il existe n_0 tel que $\sigma([\![0, n_0]\!]) \subset [0, l'n_0]$: absurde par cardinalité. Si $l > 1$, alors pour $n \geq N$, $\sigma(n) > n$, mais alors une valeur avant N ne peut être atteinte : absurde.*

Exercice 10 (**) Soit u suite réelle telle que $u_{n+1} = |u_n - n|$ pour tout n. Donner un équivalent de u.

Solution. *Il existe n_0 tel que $u_{n_0} < n_0$ car sinon u décroîtrait trop vite pour rester positive. Par récurrence, on trouve alors $u_n \leq n$ pour tout $n \geq n_0$, donc $u_{n+1} = n - u_n$. On peut alors écrire la suite explicitement comme une somme alternée, dont on calcule les deux parties. On trouve $u_n \sim \frac{n}{2}$.*

Exercice 11 (**) Pour tout n, on note u_n la solution de $u_n^3 + nu_n = 1$. Donner un développement asymptotique à deux termes de u.

Solution. *Pour tout n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ donc u tend vers 0 donc $u_n^3 = o(nu_n)$ donc (nu_n) tend vers 1. On pose donc $u_n = \frac{1}{n} - v_n$: $\left(\frac{1}{n} - v_n\right)^3 = nv_n$ donc $nv_n \sim \frac{1}{n^3}$ et $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.*

Exercice 12 (***)

- Soit u une suite réelle telle que pour tous m et n de $\mathbb{N}^*$, $u_{m+n} \leq u_m + u_n$. Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge ou tend vers $-\infty$.
- Soit c_n le nombre de chemins autoévitants sur le réseau carré issus d'un point fixé. Montrer que $(c_n^{\frac{1}{n}})$ converge.

Solution.

- *Soit $\alpha = \inf_n \frac{u_n}{n}$ et $\epsilon > 0$ (on uppose α fini) : il existe m tel que $u_m \leq (\alpha + \epsilon)m$. Soit alors $n = km + r$ avec $r < m$:*

$$\frac{u_{km+r}}{km+r} \leq \alpha + \epsilon + \frac{\max_{r \in [\![0,m-1]\!]} u_r}{km} \leq \alpha + 2\epsilon$$

  pour k assez grand, donc $\frac{u_n}{n} \leq \alpha + 2\epsilon$ pour n assez grand, donc $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers α.
  Si $\alpha = -\infty$, on raisonne de manière similaire.
- *La suite est sous-multiplicative, d'où le résultat en passant au logarithme.*

7 Structures algébriques

Exercice 1 (*) Soient G un groupe et $A \subset G$.
Montrer que l'ensemble des $g \in G$ tels que $gA = A$ est un sous-groupe de G.

Solution. *On l'écrit...*

Exercice 2 (*) Montrer que les groupes $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$ sont non-isomorphes deux à deux.

Solution. *Dans le deuxième, tout élément admet une "moitié", contrairement aux deux autres.*
Sinon, on peut dire que le premier est engendré par un élément et pas le troisième...

Exercice 3 (*) Que peut-on dire d'un groupe G dont les seuls sous-groupes sont $\{e\}$ et G ?

Solution. *Il est engendré par tout élément non neutre donc est cyclique, d'ordre premier.*

Exercice 4 (*) Trouver tous les sous-corps de $\mathbb{Q}$.

Solution. *Un tel sous-corps contient 0 et 1, donc $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et finalement $\mathbb{Q}$.*

Exercice 5 (*) Montrer qu'il n'existe pas de morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[i]$ dans $\mathbb{Z}$.

Solution. *Si φ est un tel morphisme, alors $0 < \varphi(i)^2+1 = \varphi(i^2+1) = \varphi(0) = 0$, ce qui est absurde.*

Exercice 6 (* puis **) Soient p premier et G l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe n tel que $z^{p^n} = 1$.

- Montrer que G est un sous-groupe infini de $(\mathbb{C}, \cdot)$.
- Déterminer tous les sous-groupes de G.

Solution.
- *Si z et z' sont dans G, prendre le max de n et n'...*
- *Si H contient un élément d'ordre p^n, alors il contient toute les racines p^n-ièmes de l'unité. Si H contient des éléments de rang arbitrairement grand, il est donc G. Sinon, il est contenu dans un groupe cyclique et est cyclique lui-même.*

Exercice 7 (* puis **) Soit G un groupe fini tel que pour tout x de G, $x^2 = e$.

- Montrer que G est commutatif.
- Si H est un sous-groupe de G et $x \notin H$, calculer le cardinal du sous-groupe engendré par H et x.
- En déduire que $|G|$ est une puissance de 2.

Solution.
- *On écrit la condition pour xy, x et y.*
- *$2|H|$, car ce groupe est $H \cup xH$.*
- *On construit une suite croisante de sous-groupe en partant de l'élément neutre...*

Remarque. *Si il reste un peu de temps : en déduire qu'un groupe de cardinal $2p$ avec p premier impair admet un élément d'ordre p. (Utiliser le théorème de Lagrange et raisonner par l'absurde...)*

Exercice 8 (**) Soient A et B deux parties d'un groupe fini G avec $|A|+|B| > G$.
Montrer que $AB = G$.

Solution. *Soit $x \in G$: on veut a dans A tel que $a^{-1}x \in B$, où $a^{-1}x$ prend $|A|$ valeurs différentes, donc forcément au moins une dans B.*

Exercice 9 (**) Soit G un groupe fini de cardinal pair. Montrer qu'il existe x dans G tel que $x^2 = e$.

Solution. *Les éléments différents de leur inverse se regroupent deux à deux. Il reste l'élément neutre, et forcément au moins un autre...*

Exercice 10 (**) Soit G qui n'a qu'un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini.

Solution. *Tous les éléments de G sont d'ordre fini, donc G est une réunion finie de sous-groupes finis, d'où le résultat.*

Exercice 11 (**) Soit G un groupe commutatif de cardinal pq avec p et q premiers distincts. Montrer que G est cyclique.

Solution. *Si on a x d'ordre p et y d'ordre q, xy est d'ordre pq donc c'est bon. Il reste le cas où tous les éléments sont d'ordre 1 ou p :*

Exercice 12 (* puis **)

- Soit A un anneau commutatif dont les seuls idéaux sont A et $\{0\}$. Montrer que A est un corps.
- Soit A un anneau commutatif dont tous les idéaux sont premiers. Montrer que A est un corps.

Solution.

- *Soit $x \in A$ avec $x \neq 0$: xA est un idéal non nul, donc $xA = A$, et il existe $a \in A$ tel que $xa = 1$, donc x est inversible et A est un corps.*
- *Soit $x \in A$ avec $x \neq 0$: $x^2 \in x^2A$ donc $x \in x^2A$ donc $x = x^2a$ avec $a \in A$, soit $x(ax-1) = 0$, donc $ax = 1$ et x est inversible.*

Exercice 13 (* puis **) Soit A l'ensemble des rationnels dont le dénominateur sous forme irréductible est impair.
Montrer que A est un anneau muni de l'addition et de la multiplication usuelles, et déterminer ses éléments inversibles et ses idéaux.

Solution. *Il est immédiat que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Les inversibles sont les rationnels de numérateur et dénominateur impairs sous forme irréductible. De plus, pour tout k, 2^kA est un idéal de A. On montre que ce sont les seuls : si I est un idéal, on prend $\frac{2^kp}{q}$ dans I avec p et q impairs, et k minimal...*

Exercice 14 (***) Soit a un élément d'un anneau A. Montrer que le nombre d'inverses à gauche de a est 0, 1 ou une infinité.

Solution. *Il suffit de montrer que si a admet deux inverses à gauche, alors il en admet une infinité. Soient x et x' de tels inverses : on veut montrer que le noyau de $y \longrightarrow ya$ est infini. Si il est fini, soit k dedans : a^nk est dedans pour tout n, donc il existe $p < q$ tels que $a^pk = a^qk$, donc $x^{q-p}k = k$. On obtient alors une contradiction en considérant $k = 1 - ax$: on a bien $ka = 0$ et, si il est nul, a est inversible à droite et à gauche donc l'inverse est unique, et sinon $xk = 0 \neq k$.*

8 Dénombrement et arithmétique

Dans toute la feuille, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1 (*) On trace n droites au tableau, deux à deux non parallèles, trois à trois non concourrantes. En combien de régions divisent-elles le tableau ? Combien y a-t-il de triangles sur la figure ?

Solution. *La n-ième droite coupe les $n-1$ précédentes, donc passe par n régions et les coupe en deux, donc ajoute n régions. De plus, on a 1 région pour 0 droite, donc le nombre de régions vaut :*

$$1 + 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

Le nombre de triangles formés est $\binom{n}{3}$.

Exercice 2 (*) Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

Solution. *On traite les cas un par un modulo* 9 *si on est patient, où on développe puis factorise* $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$.

Exercice 3 (*) Soit x un nombre de 6 chiffres et y le nombre obtenu en déplaçant à la fin le premier chiffre de x. Montrer que y est divisible par 13 si et seulement si x l'est.

Solution. *Si* a *est le premier chiffre, on a* $y = 10*(x - a*10^6) + a = 10*x + a*(1-10^6)$ *donc il suffit de vérifier* $10^6 \equiv 1 \mod 13$.

Exercice 4 (*) Soient $a, b \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que si $a \equiv b \mod n$, alors $a^n \equiv b \mod n^2$.

Solution. *On factorise* $a^n - b^n$ *: le facteur simple est divisible par* n *par hypothèse, et l'aute l'est car c'est une somme de* n *termes tous congrus mod* n.

Exercice 5 (*) Soit p premier avec $p \geq 4$.
Montrer $p \equiv 1 \mod 24$

Solution. *Raisonner modulo* 8 *et* 3.

Exercice 6 (*) Trouver tous les $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a \wedge b = 30$ et $a \vee b = 600$.

Solution. *On écrit* $a = 30a'$ *et* $b = 30b'$ *: on a* $a'b' = 20$ *et* $a' \wedge b' = 1$*, donc on peut trouver les* (a', b') *possibles, donc* (a, b) *est* $(30, 600)$, $(120, 150)$, $(150, 120)$ *ou* $(600, 30)$.

Exercice 7 (* puis **) Soit E de cardinal n. Combien y a-t-il de lois de composition commutatives sur E ? Et si on leur demande en plus d'admettre un élément neutre ?

Solution.
- $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$
- *Si on fixe l'élément neutre, il impose le résultat de* n *calculs, ce qui laisse* $n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ *lois possibles. Par unicité de l'élément neutre, on a donc* $n^{\frac{n(n-1)}{2}+1}$ *possibilités.*

Exercice 8 (**) Soient E un ensemble de cardinal n et u_n le nombre d'involutions de E.
Trouver une relation de récurrence sur les u_n.

Solution. $u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n$

Exercice 9 (**) Soient k et n : combien y a-t-il de $(a_1, ..., a_k) \in \mathbb{N}^n$ tels que $a_1 + a_2 + ... + a_k = n$?

Solution. *Astuce : cela revient à fixer $a_1+1, a_1+a_2+2, ..., a_1+...+a_k+k = n+k$. Le nombre de manières de faire ça est $\binom{n+k-1}{k-1}$, d'où le résultat.*
Sinon, récurrence : si on note $S_{n,k}$ le nombre de manières de le faire, on a $S_{n,k} = S_{n,k-1} + S_{n-1,k-1} + ... + S_{0,k-1}$ donc il suffit de trouver une formule et de la montrer par récurrence sur k...

Exercice 10 (**) Soit E de cardinal n : un dérangement de E est une bijection de E dans E sans point fixe. On note D_n le nombre de dérangements de E.

- Montrer que $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$ pour tout $n \geq 1$.
- En déduire que $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, puis écrire D_n sous la forme d'une somme.

Solution.
- *Si $n+1$ est envoyé sur lui-même en composant deux fois le dérangement, il reste un dérangement de $n-1$ éléments, d'où le deuxième terme. Sinon, le dérangement s'écrit comme la composée d'une transposition et d'un dérangement de n éléments.*
- *La formule est vraie pour $n = 1$ ou $n = 2$, donc reste vraie par récurrence. On en déduit :*

$$D_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

Exercice 11 (**) Calculer la valuation 2-adique de $5^{2^n} - 1$.

Solution. *On trouve $n+2$, par récurrence sur n.*

Exercice 12 (**) Montrer que la somme de deux nombres premiers consécutifs n'est jamais un produit de deux nombres premiers.

Solution. *Si le premier est 2, la somme est 5. Sinon, la somme est paire donc un des deux facteurs est 2. De plus, si $p_n + p_{n+1} = 2q$, alors $p_n < q < p_{n+1}$, ce qui est absurde.*

Exercice 13 (**) Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a^b = b^a$.

Solution. *On écrit $d = a \wedge b$, $a = da'$ et $b = db'$: on a, en supposant $a \leq b$: $d^{b-a}a'^b = b'^a$ donc $a' = 1$, donc on peut écrire $b = ka$, d'où $a^{ka} = b^a$ et $a^k = ak$, donc $a^{k-1} = k$, ce qui est impossible dès que $k \geq 3$. On trouve finalement (a, a) pour tout $a > 0$, $(2, 4)$ et $(4, 2)$.*

Exercice 14 (**) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x \wedge y + x \vee y = y + 4$.

Solution. *$x \wedge y$ vaut 1, 2 ou 4. Dans le premier cas, les solutions sont $(0, -3), (-2, -1), (4, 1), (2, 3)$. Dans le second, on trouve $(0, -2)$ et $(4, 2)$. Dans le dernier, $(4, 4k)$ pour tout k et $(4k', 0)$ pour tout k' impair.*

Exercice 15 (**) Montrer que le rationnel suivant n'est pas entier :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Solution. *Regarder la valuation 2-adique : on a un unique terme de v_2 minaimale dans la somme...*

Exercice 16 (***) Soit A une partie de $\mathbb{N}$ stable par addition. Montrer qu'il existe n et k tels que $A \cap [\![n, +\infty[\![= k\mathbb{N} \cap [\![n, +\infty[\![$.

Solution. *On note k le PGCD de tous les éléments de A et on traite d'abord le cas $k = 1$: on a $k = PGCD(a_1, a_2, ..., a_m)$ où les a_i sont dans A, donc le théorème de Bézout donne des u_i dans $\mathbb{Z}$ tels que $\sum_{i=1}^{m} u_i a_i = 1$, donc A contient deux entiers consécutifs l et $l+1$, donc tous les entiers à partir de l^2. Dans le cas $k > 1$, il suffit de considérer $\frac{A}{k}$.*

9 Continuité

Exercice 1 (*) Soit f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ croissante, telle que $x \longrightarrow \frac{f(x)}{x}$ est décroissante.
Montrer que f est continue.

Solution. *Soit (x_n) qui tend vers x par valeurs inférieures : on a $\frac{x_n}{x} f(x) \leq f(x_n) \leq f(x)$, donc $(f(x_n))$ tend vers $f(x)$ par le théorème des gendarmes, et le cas supérieur est simiaire.*

Exercice 2 (*) Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tout x, $f(2x) = -f(x)$.

Solution. *En itérant la relation et en utilisant la continuité en 0, $f(x) = f(0)$ pour tout x, donc $f = 0$.*

Exercice 3 (*) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ décroissante.
Montrer que f admet un unique point fixe.

Solution. *Unicité évidente. Pour l'existence, suffit de montrer que $f(x) - x$ n'esp pas de signe constant.*

Exercice 4 (*) Soient f uniformément continue bornée et g continue. Montrer que $g \circ f$ est uniformément continue.

Solution. *L'image de f est un compact, sur lequel g est uniformément continu.*

Exercice 5 (**) Soient f et g continues sur $[a, b]$. Pour tout t de $\mathbb{R}$, on pose :

$$h(t) = \sup_{[a,b]} f + tg$$

Montrer que h est continue.

Solution. *Pour tous x, $f(x) + tg(x)$ est lipschitzienne en t, de rapport $|g(x)|$ majoré par le max de g sur $[a, b]$, donc h est lipschitzienne.*

Exercice 6 (**) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose :

$$g(x) = \sup_{[x,x+1]} f$$

Montrer que g est continue.

Solution. *On utilise la définition et on distingue des cas...*

Exercice 7 (**) Soit f injective vérifiant la propriété des valeur intermédiaires. Montrer que f est continue.

Solution. *Par l'absurde : sinon, il existe $\epsilon > 0$ $(x_n) \longrightarrow x$ telle que $f(x_n) \geq f(x) + \epsilon$, mais alors $f(x) + \epsilon$ admet une infinité d'antécédents par f...*

Exercice 8 (**) Soient f et g continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer qu'il existe x tel que $f(x) = g(x)$.

Solution. *Sinon, par exemple, $f(x) < g(x)$ pour tout x. Or, les points fixes de f sont stables par g, d'où une contradiction en regardant le plus grand.*

Exercice 9 (**) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f admet une limite finie l en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est uniformémément continue sur $\mathbb{R}$.

Solution. *Soit $\epsilon > 0$: il existe M tel que pour $|x| \geq M$, $|f(x) - l| \leq \frac{\epsilon}{3}$. On utilise alors la continuité uniforme sur $[-M, M]$.*

Exercice 10 (**) Soit f uniformément continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(n)$ tend vers $+\infty$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Contre-exemple si la continuité n'est pas uniforme ?

Solution. *Il existe δ tel que si $|x-y| \leq \delta$ alors $|f(x)-f(y)| \leq 1$ donc $|f(\lfloor x \rfloor) - f(x)|$ se majore par une constante...*

Exercice 11 (**) Soit f uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout x, $|f(x)| \leq A|x| + B$.

Solution. *Il existe δ tel que $|f(x) - f(y)| \leq 1$ dès que $|x - y| \leq \delta$ donc $|f(x)| \leq |f(0)| + n$ dès que $|x| \leq n\delta$.*

Exercice 12 (***) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante, et D l'ensemble des points en lesquels f n'est pas continue. Montrer que D est au plus dénombrable.

Solution. *En chaque discontinuité, on peut glisser un rationnel entre la limite à droite et la limite à gauche.*

Exercice 13 (***) Montrer que l'ensemble des maxima locaux d'une fonction f continue est dénombrable.

Solution. *Tout maximum local est le max de f sur un intervalle à bornes rationnelles, d'où une surjection de $\mathbb{Q}^2$ dans l'ensemble des maxima locaux.*

10 Dérivation

Exercice 1 (*) Soit f définie par $f(x) = \exp\frac{x-1}{x^2}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Etudier le caractère $\mathscr{C}^1$ de f.

Solution. *On vérifie que f est continue, et on vérifie que la dérivée tend vers 0 en 0 par croissances comparées...*

Exercice 2 (*) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, il existe un unique $\varphi(x)$ tel que :

$$\int_x^{\varphi(x)} e^{t^2}$$

puis montrer que φ est $\mathscr{C}^1$.

Solution. *On note F une primitive de e^{t^2} : on a $\varphi(x) = F^{-1}(1 + F(x))$, donc on peut conclure car F' ne s'annule pas.*

Exercice 3 (*) Soit f dérivable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout x qui n'est pas dans $[a, b]$, il existe au moins une tangente à la courbe passant par x.

Solution. *Choisir c qui maximise $\frac{f(c)}{c-x}$.*

Exercice 4 (*) Montrer qu'une fonction convexe bornée sur $\mathbb{R}$ est constante.

Solution. *Si par exemple $a < b$ et $f(a) < f(b)$, alors pour $x \geq b$, $f(x)$ est au-dessus d'une droite de coefficient directeur strictement positif...*

Exercice 5 (**) Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit f par $f(x) = (1 - x^2)^n$ pour $|x| \leq 1$, et $f(x) = 0$ sinon. Déterminer la classe de f.

Solution. *f est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$, en utilisant le théorème de prolongement de la dérivée. De plus, une récurrence montre que pour $k \leq n$, $f^{(k)}$ est de la forme $(2x)^k n(n-1)...(n-k+1)(1-x^2)^{n-k} + P(x)(1-x^2)^{n-k+1}$, où P est un polynôme, donc quand x tend vers 1 ou -1 avec $|x| < 1$, $f^{(n)}(x)$ tend vers une constante non nul, donc par le théorème de prolongement de la dérivée, les dérivées n-ièmes à gauche et à droite de f en 1 et -1 sont différentes, donc f n'est pas n fois dérivable.*

Exercice 6 (**) Soit P une fonction polynomiale de degré n. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet au plus $n + 1$ solutions.

Solution. *Récurrence sur n : pour montrer le résultat pour P, on l'utilise pour P'.*

Exercice 7 (**) Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable, vérifiant $f^2 + (1 + f')^2 \leq 1$. Montrer que f est nulle.

Solution. *Il est immédiat que f est croissante et bornée. Si $f(x) \geq \epsilon$, alors pour $y \geq x$, $f'(y) \geq 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, donc f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, absurde. Même chose si $f(x) \leq -\varepsilon$.*

Exercice 8 (**) Soit P un polynôme de degré impair et $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $|f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$ pour tous n et x.
Montrer que f est nulle.

Solution. *P s'annule, par exemple en 0, donc toutes les dérivées de f sont nulles en 0. Pour tout x, il existe donc c enter 0 et x tel que $f(x) = \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$, ce qui tend vers 0 en faisant tendre n vers l'infini.*

Exercice 9 (**) Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f et f'' soient bornées, respectivement par M_0 et M_2.
Montrer que f' est bornée par $2\sqrt{M_0 M_2}$.

Solution. *Pour tout h, la formule de Taylor-Lagrange donne f' bornée par $2\frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$, qu'on optimise en prenant $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$.*

Remarque. *Se généralise : en majorant la dérivée n-ième et la fonction, on majore toutes les dérivées intermédaires, mais il faut résoudre un système...*

Exercice 10 (**) Soient f et g dérivables convexes sur $[0, 1]$ telles que $\max(f, g)$ est positive sur $[0, 1]$.
Montrer qu'il existe α dans $[0, 1]$ tel que $(1 - \alpha)f + \alpha g$ soit positive.

Solution. *Quitte à retirer une constante, on peut supposer que f est négative sur exactement $[a, b]$, et g sur $[b, c]$. On choisit alors α tel que $(1 - \alpha)f'(b) + \alpha g'(b) = 0$*

Remarque. *Si les fonctions ne sont pas supposées dérivables, considérer les dérivées à droite et à gauche...*

11 Développements limités

Exercice 1 (*) Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de :

$$(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

Solution. $\ln(1 + \sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} + o(x^5)$
$(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e(1 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{24}x^2 - \frac{3}{16}x^3 + \frac{139}{1152}x^4 + o(x^4))$

Exercice 2 (*) Donner un développement limité à l'ordre 5 en 0 de :

$$\sqrt{\frac{x}{\tan x}}$$

Solution. $\tan x = x + \frac{x^3}{15} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
$\frac{x}{\tan x} = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + o(x^5)$
$\sqrt{\frac{x}{\tan x}} = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{40} + o(x^5)$

Exercice 3 (*) Donner un équivalent en 1 de :

$$x^{x^x} - x^x$$

Solution. $x^x = x + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$
$x^{x^x} = x + (x-1)^2 + \frac{3}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$

Remarque. *Peut aussi se résoudre avec des équivalent, sans DL.*

Exercice 4 (*) Soit $f(x) = 2x - \sin x$:
- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $g = f^{-1}$.
- Montrer que g admet un développement limité en 0 à tout ordre.
- Donner le DL de g en 0 à l'ordre 6.

Solution. $g(y) = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{11}{120}y^5 + o(y^6)$ *en 0.*

Exercice 5 (**) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'équation $e^x = n - x$ admet une unique solution x_n.
Donner un développement asymptotique à 3 termes de (x_n).

Solution. $x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o(\frac{\ln^2 n}{n^2})$

Remarque. *Les élèves (même bons) n'ont pas encore l'habitude des développements asymptotiques...*

Exercice 6 (**) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le polynôme $P_n = X^n - X - 1$ admet une unique racine positive x_n.
Donner un développement asymptotique à 3 termes de (x_n).

Solution. $x_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + \frac{\ln 2 - \ln^2 2}{2n^2}$

Remarque. *cf. exercice précédent.*

Exercice 7 (**) Soient x_1, ..., x_n dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$\sqrt[\alpha]{\frac{x_1^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}} \underset{\alpha \to 0}{\longrightarrow} \sqrt[n]{x_1 ... x_n}$$

Solution. *Faire un DL en α à l'ordre* 1.

Exercice 8 (***) Soit u telle que $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. Donner un équivalent de u.

Solution. *Un DL montre que* $(u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2})$ *tend vers* $\frac{1}{3}$, *d'où* $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Remarque. *Pour penser à u_n^{-2}, s'inspirer de la résolution d'une équation différentielle.*

Exercice 9 (***) Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{f}$ soit $\mathscr{C}^1$.

Solution. *D'après Taylor-Young, il faut que f'' s'annule dès que f s'annule et, si c'est le cas, $\sqrt{f}$ est dérivable.*
Si $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, on montre alors $f'(x)^2 \leq 2f(x)M(x)$, avec $M(x) = \sup_{[-2x,2x]} |f''|$: C'est le discriminant de P avec $P(h) \geq f(x+h) \geq 0$ pour $|h| \leq |x|$ d'après Taylor-Lagrange.
Or, le minimum de P est atteint en $h_{min} = \frac{f'(x)}{M(x)}$, et on a bien $|h_{min}| \leq |x|$ par Taylor-Lagrange.

Remarque. *Infaisable sans indication (donner au moins la majoration avec $M(x)$), mais nombreuses occasions de donner des idées...*

12 Polynômes

Exercice 1 (*) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Donner le reste de la division euclidienne de $(\sin\theta X + \cos\theta)^n$ par $X^2 + 1$.

Solution. $\sin(n\theta)X + \cos(n\theta)$ *(le reste est de degré 1 et on évalue en i.)*

Exercice 2 (*) Soient $P = X^3 - X - 1$ et α, β, γ ses racines.
Calculer $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$.

Solution. *En utilisant $\alpha^4 = \alpha^2 + \alpha$, on trouve 2.*

Exercice 3 (*) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ ssi pour tout z de $\mathbb{C}$, on a $|P(z)| \geq |Im(z)|^n$.

Solution. *Un sens est trivial et pour l'autre, factoriser $P(x+iy)$.*

Exercice 4 (*) Trouver tous les automorphismes d'algèbre de $\mathbb{C}[X]$.

Solution. *Un endomorphisme est uniquement déterminée par l'image de X, qui doit être de degré 1 pour avoir un automorphisme.*

Exercice 5 (**) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, ..., a_n$ des entiers deux à deux distincts.
On pose $P = (X - a_1)...(X - a_n) - 1$.
Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Solution. *On écrit $P = AB$ et on montre $(A + B)(a_i) = 0$ pour tout i donc $A + B = 0$ et $P = 1 - A^2$, absurde.*

Exercice 6 (**) Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant et $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers p tels qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $p|P(n)$. Montrer que $\mathscr{P}$ est infini.

Solution. *Si $p_1, ..., p_k \in \mathscr{P}$, on considère $P(mP(0)p_1...p_k)$, avec m assez grand pour ne pas avoir de problème.*

Exercice 7 (**) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien existe-t-il de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que $X^n - 1 | P^2 - X$?

Solution. *Pour n pair, en évaluant en -1, il n'y a pas de solution.*
Pour n impair, on a deux choix possibles pour $P(1)$ et pour chaque couple de racines conjuguées n-ièmes de l'unité, soit a priori $2^{\frac{n+1}{2}}$ choix. Chacun convient, car alors $\overline{P(\overline{X})} - P(X)$ a n racines donc est nul donc $P \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 8 (**) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe P_1 et P_2 dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = P_1^2 + P_2^2$.

Solution. *On le montre pour des polynômes irréductibles, et pour un produit de sommes de deux carrés.*

Exercice 9 (**) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et soit $Q = P + P' + ... + P^{(n)}$.
Montrer que $Q(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution. *P est de degré pair et son coefficient dominant est positif, donc Q admet un minimum en x_0, et on montre $Q(x_0) \geq 0$.*

Exercice 10 (**) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x-k} \geq 1$$

- Montrer que E est une réunion finie d'intervalles disjoints
- Calculer la somme des longueurs de ces intervalles.

Solution.
- *On étudie la fonction sur chaque $[i, i+1]$ et sur $[n, +\infty[$.*
- *Il suffit de calculer la somme des solutions de l'équation correspondante, ce qu'on fait en se ramenant à une équation polynomiale. On trouve $\frac{n(n+1)}{2}$.*

Exercice 11 (**) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(k) = \frac{k}{k+1}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Combien vaut $P(n+1)$?

Solution. *En considérant $Q = (X+1)P - X$, on trouve $P(n+1) = \frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}$.*

Exercice 12 (***) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \longrightarrow f(x, y)$ soit polynomiale et pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x, y)$ soit polynomiale. Montrer que f est une fonction polynomiale en 2 variables.

Solution. *Pour tout d, soit E_d l'ensemble des x tels que $deg(y \longrightarrow f(x, y)) \leq d$ et d tel que E_d est infini. Soient L_i les polynômes interpolateurs élémentaires en $0, 1, ..., d$: pour $x \in E_d$ et $y \in \mathbb{R}$, on a $f(x, y) = \sum_{i=0}^{d} f(x, i) L_i(y)$. Cette dernière application est polynomiale car $f(x, i)$ est polynomiale en x, et égale à f partout car, à y fixé, elles coïncident pour une infinité de valeurs de x.*

13 Fractions rationnelles

Exercice 1 (*) Décomposer en éléments simples, sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{X^3}{(X^2+1)^2}$$

Solution. $\frac{X^3}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{2(X-i)} + \frac{i}{4(X-i)^2} + \frac{1}{2(X+i)} - \frac{i}{4(X+i)^2} = \frac{X}{X^2+1} - \frac{X}{(X^2+1)^2}$

Exercice 2 (*) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Z}$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, donner la dérivée p-ième de :

$$\frac{1}{X^2 - 2X\cos\alpha + 1}$$

Solution. $\frac{2i}{\sin\alpha}(-1)^p p!(\frac{1}{(X-e^{i\alpha})^{p+1}} - \frac{1}{(X-e^{-i\alpha})^{p+1}})$

Exercice 3 (*) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Solution. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$, *donc la somme vaut* $\frac{1}{4}$.

Exercice 4 (*) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F, G_0, ..., G_{n-1}$ des fractions rationnelles. On suppose que :

$$F^n + G_{n-1}F^{n-1} + ... + G_1 F + G_0 = 0$$

Montrer que chaque pôle de F est pôle d'au moins un des G_i.

Solution. *Si a est un pôle, on écrit $F = \frac{P}{(X-a)^\alpha Q}$ et on multiplie l'identité par $(X-a)^{n\alpha}$.*

Exercice 5 (**) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Ecrire sous sa forme irréductible la fraction rationnelle :

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^k}{X - \omega^k}$$

Solution. *$F = \frac{P}{X^n-1}$ avec $deg(P) \leq n-1$. Pour évaluer P en ω^k, on multiplie F par $X - \omega^k$ et on fait tendre X vers ω_k, ou on dérive $X^n - 1$ en ω^k. On trouve $F = \frac{n}{x^n-1}$.*

Exercice 6 (**) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, scindé à racines simples non nulles $x_1, ..., x_n$.

- Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}$.
- Combien vaut $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)}$?

Solution. *Ecrire la décomposition en élément simples de $\frac{1}{P}$ en 0. Pour la deuxième question, multiplier par X et faire tendre X vers l'infini : on trouve 1 si $n = 1$, 0 sinon.*

Exercice 7 (**) Trouver tous les $(F, G) \in \mathbb{C}(X)^2$ tels que $F \circ G \in \mathbb{C}[X]$.

Solution. *Si P ou Q est constant, on a bien $F \circ G \in \mathbb{C}[X]$.*
Sinon, on montre que G prend toutes les valeurs sauf éventuellement λ si $G = \lambda + \frac{1}{Q}$ avec Q non constant. Or, G ne doit pas atteindre les pôles de F, donc F a au plus un pôle.
Si F n'a pas de pôle, F est un polynôme et on montre que G en est un aussi.
Sinon, $F = \frac{P}{(X-\lambda)^n}$ et $G = \lambda + \frac{1}{Q}$, d'où $F \circ G = Q^n P(\lambda + \frac{1}{Q})$, qui est un polynôme ssi $deg(P) \leq n$.

Exercice 8 (**)
- Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ en fonction des racines de P et de leurs multiplicités.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, scindé à racines simples $x_1, ..., x_n$. Calculer :

$$\sum_{i=1} \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)}$$

Solution. *On décompose $\frac{P''}{P'}$ en introduisant les racines de P', puis on permute les sommes et on reconnaît la décomposition de $\frac{P'}{P}$ pour trouver 0.*

Exercice 9 (***)
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, ..., z_n$ les racines de $X^n + 1$. Montrer que pour tout P de $\mathbb{C}_n[X]$, on a :

$$XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$$

- Si $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = \sup_{|z|=1} |P(z)|$.
  Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $\|P'\| \leq n\|P\|$.

Solution.
- *Par linéarité, il suffit de le montrer pour les X^l. On pose donc $F = \frac{X^l}{X^n+1}$ et on calcule $F'(1)$ de deux manières différentes (directement et en décompoant F en éléments simples)*
- *On applique la formue précédente à un z de module 1 et on majore comme on peut par l'inégalité triangulaire. Il reste à traiter les $\frac{|z_k|}{|(z_k-1)^2|}$. Or, en posant $z_k = e^{i\theta}$, on trouve que $\frac{z_k}{(z_k-1)^2} \in \mathbb{R}^-$. Leur somme vaut alors $-\frac{n^2}{4}$ d'après la première question pour $P = 1$, ce qui permet de conclure.*

Remarque. *Pour penser à la fraction rationnelle de la première question, les dénominateurs de l'expression font penser à des dérivées...*

14 Espaces vectoriels

Exercice 1 (*) Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, V et W deux sous-espaces de E et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Montrer que $f(V) \subset f(W)$ ssi $V + Ker(f) \subset W + Ker(f)$.

Exercice 2 (*) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que pour tout x de E, la famille $(x, f(x))$ est liée.
Montrer que f est une homothétie.

Exercice 3 (*) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ telles que $f \circ g = Id$.
Montrer que $g \circ f$ est une projection et donner son noyau et son image.

Solution. *$Im(g \circ f) = Im(g)$ et $Ker(g \circ f) = Ker(f)$.*

Exercice 4 (*) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projections dans E avec $Im(p) = Im(q)$.
Montrer que pour tout λ de $\mathbb{K}$, $\lambda p + (1 - \lambda)q$ est une projection de même image que p et q.

Exercice 5 (*) Soient p une projection dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \notin \{0, 1\}$.
Montrer que $p - \lambda Id$ est un isomorphisme.

Solution. *On écrit un polynôme de degré 2 qui annule $p - \lambda$ pour trouver l'inverse, ou on le fait avec les mains (noyau+image...)*

Exercice 6 (**) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_1, E_2 des sous espaces de E isomorphes tels que $E = E_1 \oplus E_2$.
Montrer que E_1 et E_2 ont un supplémentaire commun dans E.

Solution. *Soit $\Phi : E_1 \to E_2$ un isomorphisme : $F = Im(Id - \Phi)$ convient.*

Exercice 7 (**) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et V_1, ..., V_n des sous-espaces de E différents de E. Montrer que $E \neq V_1 \cup ... \cup V_n$.

Solution. *Traiter le cas $n = 2$ puis raisonner par récurrence : si $x \notin V_n$, $y \notin V_1 \cup ... \cup V_{n-1}$ et $y \in V_n$, il existe λ tel que $x + \lambda y \notin V_1 \cup ... \cup V_n$.*

Exercice 8 (**) On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :
- Montrer que les endomorphismes f de $\mathbb{C}$ sont exactement les $z \to az + b\bar{z}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.
- Donner une condition nécessaire sur a et b pour que f soit bijective.

Solution. *f est bijective ssi $|a| \neq |b|$.*

Remarque. *Calculs un peu lourds pour la surjectivité.*

Exercice 9 (**) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe un unique $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g = Id$. Montrer que f est un automorphisme avec $g = f^{-1}$.

Solution. *On montre que $g + g \circ f - Id$ est un inverse à droite de f, d'où $g \circ f = Id$.*

Remarque. *En plus de l'astuce, difficulté logique (utilisation de l'unicité...)*

Exercice 10 (**) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projections dans E avec $Im(p) \subset Ker(q)$, et $r = p + q - pq$.
Montrer que r est une projection et trouver son image et son noyau.

Solution. *$Ker(r) = Ker(p) \cap Ker(q)$ et $Im(r) = Im(p) \oplus Im(q)$.*

Exercice 11 (***) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et G un sous-groupe fini de $GL(E)$. Soit V un sous-espace de E stable par G.
Montrer que V admet un supplémentaire stable par G.
On pourra admettre que tout sous-espace admet un supplémentaire.

Solution. *Soit p projection sur V et $q = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} g^{-1} \circ p \circ g$: on vérifie que q est une projection d'image V, et on prend $W = Ker(q)$.*

Remarque. *Exercice accessible en donnant q et en décomposant en deux questions, mais reste difficile (somme double indexée par autre chose que des entiers, le fait qu'on puisse développer n'est pas forcément évident...)*

15 Dimension finie

Dans toute la feuille, sauf indication contraire, E, F, G et E_i sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et $n = dim(E)$.

Exercice 1 (*) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et E_0, E_1, ..., E_{k+1} avec $E_0 = E_k = 0$.
Soit pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $f_i \in \mathscr{L}(E_i, E_{i+1})$. On suppose que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $Ker(f_{i+1}) = Im(f_i)$.
Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^i dim(E_i) = 0$$

Solution. *Appliquer la formule du rang à tous les f_i.*

Exercice 2 (*) Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$.
Montrer que $rg(v \circ u) = rg(u)$ ssi $Im(u) \cap Ker(v) = \{0\}$.

Solution. *Appliquer la formule du rang à la restriction de v à $Im(u)$.*

Exercice 3 (*) Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = 0$ et $u + v$ est inversible.
Montrer que $rg(u) + rg(v) = n$.

Exercice 4 (*) Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer qu'il existe $v \in \mathscr{L}(F, E)$ tel que $u \circ v \circ u = u$.

Solution. *Définir v sur une base de $Im(u)$.*

Exercice 5 (**) Montrer que la famille des fonctions $x \longrightarrow \cos \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ est libre.

Solution. *Si la somme des $a_i \cos \lambda_i x$ est nulle, on obtient en dérivant n fois en 0 que la somme des $\lambda_i^n a_i$ est nulle donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, le a_i devant le plus grand λ_i est nul et on continue par récurrence...*

Exercice 6 (**) Soient U et V des sous-espaces de E.
Montrer que U et V ont un supplémentaire commun ssi $dim(U) = dim(V)$.

Solution. *Un sens est trivial. Pour l'autre, peut le faire par récurrence descendante sur $dim(U)$, en prenant un vecteur dans $E \backslash (U \cup V)$.*

Exercice 7 (**) Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps fini à q éléments.

- Calculer $|GL(E)|$.
- Donner le nombre de sous-espaces de E de dimension k pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Solution.
- $|GL(E)| = (q^n - 1)(q^n - q)...(q^n - q^{n-1})$
- $\frac{(q^n-1)(q^n-q)...(q^n-q^{n-k+1})}{(q^k-1)(q^k-q)...(q^k-q^{k-1})}$

Exercice 8 (**) Déterminer toutes les sous-algèbres de dimension finie de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution. *Si f est dans une telle algèbre, f admet un polynôme annulateur, donc ne prend qu' un nombre fini de valeurs et est constante.*

Exercice 9 (**) Soient $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$ des réels et F l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque $[x_i, x_{i+1}]$ est affine.
Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie et donner sa dimension.

Solution. *$f \in F$ est uniquement déterminée par les $f(x_i)$ donc $dim(F) = n+1$.*

Exercice 10 (**) Si $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ sont deux corps, on note $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ la dimension de $\mathbb{L}$ en tant que $\mathbb{K}$-ev.
Soient $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$ trois corps. Montrer que :

$$[\mathbb{M} : \mathbb{K}] = [\mathbb{M} : \mathbb{L}][\mathbb{L} : \mathbb{K}]$$

Solution. *On note $(e_1, ..., e_k)$ une base de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$ et $(f_1, ..., f_l)$ une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{L}$, et on vérifie que les $e_i f_j$ forment une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{K}$.*

Exercice 11 (**) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, nilpotent. Montrer que $u^n = 0$.

Solution. *La suite $(rg(u^n))$ décroît strictement puis est stationnaire en 0, donc elle atteint 0 avant le rang n.*

Remarque. *Autre solution : Soit q l'indice de nilpotence et x tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$. On montre que $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ est libre.*

Exercice 12 (**) Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{A}(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) | u \circ v \circ u = 0\}$.
Montrer que $\mathscr{A}(u)$ est un sous-espace de $\mathscr{L}(E)$ et donner sa dimension.

Solution. *$dim(\mathscr{A}(u)) = n^2 - rg(f)^2$: il faut $v(Im(u)) \subset Ker(u)$, donc on a $n - rg(f)$ degrés de liberté pour chaque vecteurs d'une base de $Im(f)$, et n pour les autres.*

Exercice 13 (**) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :

$$rg(u^3) + rg(u) \geq 2rg(u^2)$$

Solution. *Appliquer la formule du rang aux restrictions de u à $Im(u)$ et $Im(u^2)$.*

Exercice 14 (***) Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble de tous les sev de E. Trouver toutes les fonctions f de $\mathscr{A}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous U et V :

$$f(U+V) = f(U) + f(V) - f(U \cup V)$$

Solution. *Les fonctions affines de la dimension marchent. Pour montrer que ce sont les seules, on montre que deux droites D_1 et D_2 ont toujours la même image, en appliquant l'hypothèse à D_1 et D_3, puis à D_2 et D_3, où ces deux couple de droites engendrent le même plan.*
On montre ensuite par récurrence sur la dimension des sous-espaces qu'on a bien une fonction affine...

Exercice 15 (***) Trouver tous les idéaux à gauche de $\mathscr{L}(E)$. (I est un idéal à gauche si c'est un sous-espace de $\mathscr{L}(E)$ et pour tous $f \in \mathscr{L}(E)$ et $g \in I$, $f \circ g \in I$.)

Solution. *Ce sont les $\{f \in \mathscr{L}(E) | V \subset Ker(f)\}$ avec V sous-espace de E.*
Pour cela, on montre le lemme de factorisation suivant : pour $u, v \in \mathscr{L}(E)$, il existe f et g tels que $Ker(f \circ u + g \circ v) = Ker(u) \cap Ker(v)$:
Soient U, V des supplémentaires de $Ker(u) \cap Ker(v)$ dans $Ker(u)$ et $Ker(v)$, et W supplémentaire de $Ker(u) + Ker(v)$ dans E. On choisit alors f tel que $f \circ u$ soit l'identité sur V et 0 sur W, et g tel que $g \circ v$ soit l'identité sur U et sur W (en utilisant le lemme de factorisation classique avec 1 endomorphisme...)
On pose donc $V = \bigcap_{f \in I} Ker(f)$: c'est une intersection finie, donc le lemme permet de conclure.

Remarque. *Pour que l'exercice soit plus abordable, poser le lemme de factorisation à un endomorphisme, puis à deux, puis conclure.*

16 Matrices

Dans toute la feuille, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1 (*) Soit A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ avec des 2 sur la diagonale et des 1 partout ailleurs. Calculer A^k pour tout k de $\mathbb{N}$.

Solution. *On a $A = I_n + J$ avec $J^2 = nJ$, donc le binôme de Newton donne $A^k = I_n + \frac{n^k - 1}{n-1} J$.*

Exercice 2 (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le produit de n matrices triangulaires supérieures strictes de $M_n(\mathbb{R})$ est nul.

Solution. *On montre par récurrence sur k que le coefficient (i, j) du k-ième produit partiel est nul si $j - i < k$*

Exercice 3 (*) Déterminer le sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ engendré par $GL_n(\mathbb{R})$.

Solution. *Il s'agit de $M_n(\mathbb{R})$. Pour cela, on montre par exemple que $I_n + E_{i,j}$ est inversible pour tous i, j.*

Exercice 4 (*) On suppose $n \geq 3$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = (i+j-2)^2$. Quel est le rang de A ?

Solution. *Avec des opérations élémentaires sur les colonnes (ou les lignes, au choix), on majore le rang par 3. Pour l'égalité, on peut par exemple effectuer quelques opérations sur les lignes...*

Exercice 5 (*) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe P inversible telle que PA soit la matrice d'une projection.

Solution. *Soit on écrit $A = QJ_rR$ et on prend $P = R^{-1}Q^{-1}$, soit on passe par les endomorphismes : on cherche g inversible telle que $f \circ g \circ f = f$ et, pour cela, il suffit de définir g sur une base de $Im(f)$.*

Exercice 6 (*) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Déterminer la trace de l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui à M associe AMB.

Solution. *On calcule sa matrice dans la base canonique, et on trouve $tr(A)tr(B)$.*

Exercice 7 (**) Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout i, on ait :

$$|a_{i,i}| > \sum_{i \neq j} |a_{i,j}|$$

Montrer que A est inversible.

Solution. *Soit $X = (x_i)$ tel que $AX = 0$ et i avec $|x_i|$ maximal : on montre $|x_i| = 0$ en projetant $AX = 0$ sur la i-ème coordonnée.*

Exercice 8 (**) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs et dont la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. Une telle matrice et dite strictement stochastique.
Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ et $k \in \mathbb{N}$, on note $a_{i,j}^{(k)}$ les coefficients de A^k. On pose aussi $\alpha_j^{(k)} = \min_i a_{i,j}^{(k)}$, $\beta_j^{(k)} = \max_i a_{i,j}^{(k)}$ et $\delta_j^{(k)} = \alpha_j^{(k)} - \beta_j^{(k)}$. Enfin, soit $\epsilon = \min_{i,j} a_{i,j}$.

- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est strictement stochastique.
- Montrer $\alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}$ et $\delta_j^{(k+1)} \leq (1-2\epsilon)\delta_j^{(k)}$.
- En déduire que $(a_{i,j}^{(k)})_k$ converge pour tous i, j.

Solution. *Chaque étape est facile...*

Remarque. *Intérêt : chaînes de Markov, avec $a_{i,j} = \mathbb{P}(X_{k+1} = j | X_k = i)$. La matrice limite a des colonnes proportionnelles, ce qui montre la convergence vers une loi limite indépendante de l'état de départ.*

Exercice 9 (**)
- Soit $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = C_{j-1}^{i-1}$ pour $i, j \in [\![1, n+1]\!]$.
  Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
- En déduire le nombre a_n de dérangements (i.e de permutations sans points fixes) dans S_n.

Solution.
- *On reconnaît la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme qui à $P(X)$ associe $P(X+1)$.*
- *On sait que $n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k$, et la première question permet de résoudre le système. On trouve $a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$.*

Exercice 10 (**) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, non inversible. Montrer qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout λ de $\mathbb{R}$, $A + \lambda B$ soit inversible.

Solution. *Quitte à passer à une matrice équivalente, on peut prendre A triangulaire supérieure stricte. $B = I_n$ convient alors.*

Exercice 11 (**) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à une matrice "sous-triangulaire", i.e de la forme $(b_{i,j})$ avec $b_{i,j} = 0$ si $i - j \geq 2$.

Solution. *Si f est un endomorphisme, il faut trouver une base (e_i) telle que la matrice de f dans cette base soit sous-triangulaire. On construit donc cette base par récurrence : si $f(e_k) \notin Vect(e_1, ..., e_k)$, on prend $e_{k+1} = f(e_k)$ et sinon, on prend un vecteur quelconque...*

Exercice 12 (**) Montrer que toute matrice nilpotente est de trace nulle.

Solution. *On montre le résultat par récurrence : le noyau est non trivial, donc la matrice N est semblable à une matrice de première colonne nulle et, si on note $N' \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ la sous-matrice en bas à droite, un calcul par blocs montre que N' est nilpotente et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.*

Remarque. *Il est plus gentil de poser l'exo sous la forme "montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte".*

Exercice 13 (***) Soient p premier impair, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $Tr(A^p) \equiv Tr(A)[p]$.

Solution. *Le résultat est trivial sur la base canonique et on passe facilement de A à kA avec $k \in \mathbb{Z}$. Il suffit donc de montrer $Tr((A+B)^p) \equiv Tr(A^p)+Tr(B^p)[p]$. Pour cela, on développe la somme et on regroupe les termes égaux à "rotation" près : ils sont de même trace donc leur somme est nulle, et il ne reste plus que les termes A^p et B^p.*

Exercice 14 (***) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, ..., A_k$ des parties de $[\![1, n]\!]$ telles que $|A_i|$ est impair pour tout i et $|A_i \cap A_j|$ et pair pour tous $i \neq j$.
Montrer que $k \leq n$.

Solution. *Soit $A \in M_{n,k}(\mathbb{F}_2)$ définie par $a_{i,j} = 1$ ssi $i \in A_k$. Les hypothèses signifient que ${}^tMM = I_k$, donc $k = rg(I_k) \leq rg(M) \leq n$.*

Exercice 15 (***) Déterminer l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ qui peuvent se mettre sous la forme $BC - CB$ avec $B, C \in M_n(\mathbb{R})$.

Solution. *En prenant $B = Diag(1, ..., n)$ avec des λ_i et en choisissant bien C, on obtient toutes les matrices de diagonale nulle.On montre ensuite, par récurrence sur n, que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle (comme ce n'est pas une homothétie, on trouve une base qui annule le coefficient $(1,1)$ et on applique l'hypothèse de récurrence).*

Remarque. *La deuxième partie de l'exo (toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle) peut être posée seule.*

17 Groupe symétrique

Dans toute la feuille, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1 (*) Soit $\sigma \in S_{2n}$ définie par $\sigma(k) = 2k - 1$ et $\sigma(n + k) = 2k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer $\epsilon(\sigma)$.

Solution. *On utilise la parité du nombre d'inversions :* $\epsilon(\sigma) = (-1)^{1+2+...+(n-1)} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Exercice 2 (*) Si $\sigma \in S_n$, on note P_{sigma} la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de coefficient $\delta_{i,\sigma(j)}$. Montrer que $\sigma \longrightarrow P_\sigma$ est un morphime de groupe de S_n dans $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (*) Soient $\sigma = (a_1\, a_2\, ...\, a_k)$ un cycle de S_n et $\pi \in S_n$. Déterminer $\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$.
En déduire le centre de S_n.

Solution.
- *C'est le cycle $(\pi(a_1)\, \pi(a_2)\, ...\, \pi(a_k))$.*
- *Si π est dans le centre, on applique le résultat pour σ transposition. On obtient $\pi = Id$, sauf si $n = 2$.*

Exercice 4 (**) Soit G un groupe fini de cardinal n. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de S_n.

Solution. *G agit fidèlement sur lui-même, donc s'"inclut" dans S_G.*

Exercice 5 (**) Soit p un nombre premier impair. Combien y a-t-il de $\sigma \in S_{2p}$ tels que $\sigma^p = Id$?

Solution. *Il n'y a que trois décompositions en cycles à supports disjoints possibles, ce qui donne* $\binom{2p}{p}(p-1)!^2 + \binom{2p}{p}(p-1)! + 1$.

Exercice 6 (**) Montrer que S_n est engendré par $(1\,2)$ et $(1\,2\,...\,n)$.

Solution. *En conjuguant la transposition par les puissances du cycle, on obtient les transpositions $(i\; i+1)$, qui engendrent S_n.*

Exercice 7 (**) Trouver tous les morphismes de groupes de S_n dans $(C^*, *)$.

Solution. *Les transpositions étant conjuguées, elles ont la même image* 1 *ou* -1. *De plus, comme elles engendrent* S_n, *le morphisme est entièrement déterminé par leurs images. Si c'est* 1, *c'est le morphisme trivial et si c'est* -1, *c'est la signature.*

Exercice 8 (**) Montrer que A_n est engendré par les 3-cycles.

Solution. A_n *étant l'ensemble des produit d'un nombre pair de transpositions, il suffit d'engendrer les produits de deux tranpositions. Le seul cas non trivial est celui où les deux tranpositions sont à supports disjoints. On a alors par exemple* $(a\,b\,c) \circ (b\,c\,d) = (a\,b)(c\,d)$.

Exercice 9 (***) Soient p premier impair et $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Pour $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on pose $\sigma(x) = ax$.
Montrer que $\epsilon(\sigma) = 1$ ssi a est un carré.

Solution. *Si* a *est un carré,* σ *en est un aussi donc* $\epsilon(\sigma) = 1$.
Sinon, si d *est l'ordre de* a *modulo* p, σ *se décompose en* $\frac{p-1}{d}$ *cycles à support disjoints, donc* $\epsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{p-1}{d}}$. *Il reste donc à montrer* $v_2(d) = v_2(p-1)$, *ce qui est vrai car* $a^{\frac{p-1}{2}} \neq 1$, *parce que* $X^{\frac{p-1}{2}} - 1$*ne peut admettre plus de* $\frac{p-1}{2}$ *racines et admet déjà les carrés.*

Exercice 10 (***) Soit H un sous-groupe de S_n de cardinal $\frac{n!}{2}$. Montrer que $H = A_n$.

Solution. *On montre d'abord que* H *est distingué : pour* $\sigma \in H$ *on a* $\sigma H = H$ *donc, par bijectivité de* $\sigma \longrightarrow \sigma \circ \pi$, *on a* $\sigma H = G \backslash H$, *et de même à droite, donc* H *est bien distingué. Or,* $H \neq S_n$ *donc* H *ne contient pas toute les transpositions, donc n'en contient aucune. On en déduit, par récurrence sur* k, *que* H *contient un produit de* k *transposition ssi* k *est pair.*

18 Déterminants

Dans toute la feuille, $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 1 (*) Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ ou $i = 1$ ou $j = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.
Calculer $det(A)$.

Solution. *Si on note* Δ_n *ce déterminant, en développant par rapport à la deuxième colonne on obtient* $\Delta_n = \Delta_{n-1} - 1$, *d'où* $\Delta_n = 2 - n$.

Exercice 2 (*) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} \in \{-1, 1\}$ pour tous i et j.
Montrer que $det(A)$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

Solution. *Le déterminant ne change pas en ajoutant la première colonne à toutes les autres, et tout est alors pair.*

Exercice 3 (*) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est triangulaire, alors $Com(A)$ l'est aussi.

Solution. *Si A est triangulaire supérieure et $i < j$, la matrice obtenue en virant la i-ème ligne et la j-ème colonne est triangulaire supérieure avec au moins un terme diagonal nul. $Com(A)$ est donc triangulaire inférieure.*

Exercice 4 (*) Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A admet un inverse dans $M_n(\mathbb{Z})$ ssi $det(A) \in \{-1, 1\}$.

Solution. *Si B inverse de A, $det(A)det(B) = 1$ donc $det(A) \in \{-1, 1\}$.*
Si $det(A) \in \{-1, 1\}$, A^{-1} s'exprime avec la comatrice.

Exercice 5 (**) Trouver le déterminant de A avec pour tous i et j, $a_{i,j} = |i - j|$.

Solution. *On retire la première colonne à tout le monde, puis la deuxième pour simplifier presque tous les termes sous la diagonale. On n'a alors plus qu'une permutation qui donne un produit non nul, et $det(A) = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.*

Exercice 6 (**) Soit Φ l'application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ qui à M associe $M + tr(M)I_n$.
Calculer le $det(\Phi)$.

Solution. *On calcule la matrice de Φ dans la base canonique : $a_{i,j}^{k,l}$ vaut 2 si $(i, j) = (k, l)$ et $k = l$, 1 si un seul des deux se produit et 0 sinon. La matrice est triangulaire par bloc donc $det(\Phi)$ est égal au déterminant de la matrice avec des 2 sur la diagonale et des 1 partout ailleurs. Ce déterminant se calcule par récurrence en retirant la première colonne et vaut $n + 1$.*

Exercice 7 (**) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $Com(A)$ en fonction de celui de A.

Solution. *Si $rg(A) = n$, alors $rg(Com(A)) = n$ d'après la formule pour A^{-1}.*
Si $rg(A) = n - 1$, alors $A^tCom(A) = 0$ donc $rg(Com(A)) \leq 1$. De plus, A admet $n - 1$ colonnes libres. Elles forment une matrice de rang $n - 1$, donc ses n lignes forment une famille de rang $n - 1$, donc on peut en supprimer une pour avoir une famille libre. On peut donc extraire de A une matrice carrée de taille $n - 1$ inversible, donc $Com(A) \neq 0$ et $rg(Com(A)) = 1$.
Si $rg(A) < n - 1$, toute famille de $n - 1$ colonnes est liée, donc aucune matrice extraite de taille $n - 1$ n'est inversible, donc $Com(A) = 0$.

Exercice 8 (**) Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$, semblables dans $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

Solution. *Soit $P = Q + iR$ une matrice de passage sur $\mathbb{C}$: pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $A(Q + tR) = (Q + tR)B$, donc il suffit de trouver t tel que $Q + tR$ soit inversible. Or, $P(X) = det(Q + XR)$ est un polynôme non nul car $P(i) \neq 0$, donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $P(t) \neq 0$, d'où le résultat.*

Exercice 9 (***) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Calculer $det(A)$ avec $a_{i,j} = P(i+j-2)$.

Solution. *On retire à chaque colonne la précédente, et on itère le procédé pour faire apparaître les dérivées discrètes successives de P, puis on fait pareil avec les lignes. On n'a alors plus qu'une permuation donnant un produit non trivial. On trouve alors $det(A) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta^{n-1} P(0)^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)!^n a_{n-1}^n$ où a_{n-1} est le coefficient de X^{n-1} dans P.*

Remarque. *On peut éviter la dernière étape en P de degré $n-2$, ou au contraire la rendre plus longue et douloureuse en le prenant de degré n...*

Exercice 10 (***) Calculer $det(A)$ avec $a_{i,j} = PGCD(i,j)$.

Solution. *On peut écrire :*

$$PGCD(i,j) = \sum_{d|i,j} \varphi(d) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{k|i} \varphi(k) \mathbb{I}_{k|j}$$

où φ est la fonction indicatrice d'Euler. A s'écrit donc comme le produit d'une matrice triangulaire inférieure, d'une matrice diagonale et d'une matrice triangulaire supérieure. On trouve donc :

$$det(A) = \prod_{k=1}^{n} \varphi(k)$$

Remarque. *Il y a une autre solution un peu moins parachutée en essayant d'effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes pour trouver une "bonne" matrice par laquelle multiplier A.*

19 Intégration

Exercice 1 (*) Soit $A_0 ... A_{n-1}$ un polygone régulier inscrit dans le cercle unité avec $A_1(1,0)$.
Déterminer la limite de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} A_0 A_k$.

Solution. *En passant par les sommes de Riemann, on trouve $\frac{4}{\pi}$.*

Exercice 2 (*) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $T > 0$. On suppose que $x \longrightarrow \int_x^{x+T} f(t)dt$ est constante.
Montrer que f est T-périodique.

Solution. *On dérive par rapport à x.*

Exercice 3 (*) Soient $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec φ convexe. Montrer que :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(t))dt$$

Solution. *Passer par les sommes de Riemann.*

Remarque. *L'inégalité de Jensen discrète a bien été vue en cours plus tôt.*

Exercice 4 (*) Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,2\pi],\mathbb{R})$ convexe. Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)dt \geq 0$$

Solution. *Intégrer par partie deux fois en dérivant f.*

Exercice 5 (**)

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$: $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Montrer :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2$$

- Soient $A_1, ..., A_n$ des points sur le cercle unité dans le plan. Montrer qu'il existe M sur le cercle unité tel que $\prod_{k=1}^{n} MA_k = \sqrt{2}$.

Solution. *Développer le carré et, pour la deuxième question, prendre $P = \prod_{k=1}^{n}(X - z_k)$.*

Exercice 6 (**) Soient $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\int_0^1 x^k f(x)dx = 0$.
Montrer que f s'annule au moins n fois sur $]0,1[$.

Solution. *Par l'absurde, si f ne s'annule qu'en $a_1, ..., a_k$ avec $k < n$ et on considère $\int_0^1 Pf$ avec $P = \prod_{i=1}^{k} X - a_i$.*

Exercice 7 (**) Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+^*)$ strictement croissante.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x)^n = \int_0^1 f(t)^n dt$ admet une unique solution x_n dans $[0,1]$.
- Montrer que (x_n) converge vers une limite à préciser.

Solution. *(x_n) converge vers 1 : il suffit de montrer que, si $a \in]0,1[$, $f(x_n)^n \geq f(a)^n$ pour n assez grand, i.e $\int_0^1 \left(\left(\frac{f(t)}{f(a)}\right)^n - 1 \right) dt \geq 0$. En comparant avec des fonctions en escalier, on montre que la partie négative de cette dernière intégrale est bornée, alors que la partie positive tend vers $+\infty$.*

Exercice 8 (**) Soient $a > 0$ et $f, g \in \mathscr{C}^0([0,a],\mathbb{R})$ croissantes. Montrer :

$$a\int_0^a fg \geq \left(\int_0^a f\right)\left(\int_0^a g\right)$$

Solution. *Au choix : passer par les sommes de Riemann pour discrétiser et montrer l'inégalité de Chebychev par récurrence (ou autrement...), ou dériver par rapport à a.*

Exercice 9 (**) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ avec $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = a$. Montrer que :

$$\int_0^1 f''(t)^2 dt \geq 3a^2$$

et déterminer les cas d'égalité.

Solution. *Taylor-Lagrange avec reste intégral donne* $\int_0^1 (1-t)f''(t)dt = -a$, *d'où le résultat par Cauchy-Schwarz. Pour le cas d'égalité, prendre* $f''(t) = b(1-t)$, *en déduire* f *et choisir* b *pour que les conditions soient vérifiées.*

Exercice 10 (***) Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Donner un équivalent de $\int_0^1 x^n f(x)dx$.

Solution. $\frac{f(1)}{n}$ *: il suffit de montrer que* $\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))dx$ *tend vers* 0. *Pour cela, on sépare l'intégrale en deux en* $1-\delta$ *tel que* $|f(t)-f(1)| \leq \epsilon$ *sur* $[1-\delta,1]$ *etc...*

20 Séries

Exercice 1 (*) Déterminer les valeurs de a, b et c telles que la série de terme générale $a\sqrt{n} + b\sqrt{n-1} + c\sqrt{n-2}$ converge.
Si elle converge, calculer sa somme.

Solution. *Pour que le terme général tende vers* 0, *il faut* $a+b+c=0$. *Dans ce cas, la suit est équivalent à* $\frac{c-a}{2\sqrt{n}}$ *si* $a \neq c$, *donc il faut* $a = c$, *ce qui suffit bien. On a alors une somme téléscopique, qui vaut* $-a$.

Exercice 2 (*) Pour quelles valeurs de α la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln n}\right)$ converge-t-elle ?

Solution. *Développement asymptotique à deux termes : le premier converge par le critère spécial des séries alternées, le second converge ssi* $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 3 (*) Soient (u_n) positive et $\alpha > 0$ telle que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})$.
Donner un équivalent de (u_n).

Solution. *On écrit* $\ln u_{n+1} - \ln u_n$ *et on trouve par sommation des équivalents* $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$.

Exercice 4 (**) Pour tout $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$.
Montrer que $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$.

Solution. *Comparer avec une intégrale...*

Exercice 5 (**) Soient Σu_n et Σv_n des séries absolument convergentes et, pour tout n, $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$.
Montrer que la série de terme général w_n converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Solution. *Il faut montrer que* $\sum_{k,l\leq n, k+l>n} u_k v_l$ *tend vers* 0. *Pour cela, on le majore par* $\sum_{k>\frac{n}{2} \text{ ou } l>\frac{n}{2}} |u_k||v_l|$.

Exercice 6 (**)

- Soit Σu_n une série à termes positifs divergente. Montrer qu'il existe une série Σv_n à termes positifs divergente telle que $v_n = o(u_n)$.
- Soit Σu_n une série à termes positifs convergente. Montrer qu'il existe une série Σv_n à termes positifs convergente telle que $u_n = o(v_n)$.

Solution. *Choisir les sommes partielles de v_n "plus petites" que celles de u_n, par exemple la racine ou le log. Pour la deuxième, il faut travailler sur les restes (on peut prendre la racine par exemple).*

Exercice 7 (**) Soit Σu_n une série convergente de terme général positif décroissant et de somme S. On suppose que pour tout n, $u_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}$. Montrer que pour tout $x \in [0, S]$, il existe $A \subset \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n \in A} u_n = x$.

Solution. *Construire A par récurrence, en gardant n ssi on ne dépasse pas x en ajoutant u_n...*

Exercice 8 (***) Soit (u_n) une suite complexe telle que Σu_n converge absolument et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\Sigma_{n=0}^{+\infty} u_n^k = 0$. Montrer que $u_n = 0$ pour tout n.

Solution. *Pour k grand, les u_n de module maximal dominent tous les autres. Si on suppose que ce sont $u_1, ..., u_m$, on peut les supposer de module 1 et on a alors $\sum_{i=1}^{m} u_i^k \longrightarrow 0$. En posant $P_k(X) = X^k(X - z_1)...(X - z_{m-1})$, comme P_k annule $z_1, ..., z_{m-1}$, on a $P(z_m) \longrightarrow 0$ donc $z_m \in \{z_1, ..., z_{m-1}\}$. Par le même type de calcule, on obtient $z_1 = ... = z_m$, donc la suite est constante, donc nulle.*

21 Espaces euclidiens

Sauf indication contraire, E est un espace euclidien de dimension n.

Exercice 1 (*) Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ défini par $a_1x_1 + ... + a_nx_n$, où les a_i sont non tous nuls. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.

Solution. *On écrit $p(x) = x - \lambda(a_1, ..., a_n)$ et on trouve λ.*

Exercice 2 (*) Soient F et G deux sous-espaces de E de même dimension. Montrer qu'il existe $u \in O(E)$ tel que u(F)=G.

Solution. *On choisit complète une base de F et une base de G en deux bases de E. En les orthogonalisant, on obtient deux bases (f_i) et (g_i), et on prend u qui envoie la première base sur la deuxième.*

Remarque. *Attention, il faut compléter avant d'appliquer Gram-Schmidt pour que ça soit bien propre...*

Exercice 3 (*) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, trigonalisable. Montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

Solution. *On orthogonalise une base de trigonalisation avec Gram-Schmidt.*

Exercice 4 (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensembles des matrices de $O_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs.

Solution. *Les colonnes sont orthogonales, donc les $A_j = \{i | a_{i,j} \neq 0\}$ sont disjoints. Comme aucun n'est vide, ce sont des singletons, donc A est une matrice de permutation.*

Exercice 5 (*) On note $E = \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ et, pour f et g dans E on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg + f'g'$$

On pose également $V = \{f \in E | f'' = f\}$ et $W = \{f \in E | f(0) = f(1) = 0\}$.
- Vérifier que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire pour lequel V et W sont supplémentaires orthogonaux.
- Soient α et β dans $\mathbb{R}$. Déterminer la plus petite valeur possible, pour $f \in E$ avec $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$, de $\int_0^1 f^2 + f'^2$.

Solution.
- *Intégrer par parties pour qu'ils soient orthogonaux, et résoudre $f'' = f$ avec conditions au bord pour qu'ils soient supplémentaires.*
- *Soit p la projection orthogonale sur V : on cherche à minimiser $\|f\|^2$ avec $p(f) = \frac{\beta - e^{-1}\alpha}{e - e^{-1}} e^x + \frac{e\alpha - \beta}{e - e^{-1}} e^{-x}$, donc il faut prendre f égale à cette dernière fonction.*

Exercice 6 (**) Soit p une projection de E. Montrer que p est une projection orthogonale ssi pour tout x de E, $\|p(x)\| \leq \|x\|$

Solution. *Si p est orthogonale, c'est trivial. Si la relation est vraie, on prend $x \in Im(p)$ et $y \in Ker(p)$, et on applique l'hypothèse à $x + \lambda y$ pour tout réel λ. On en déduit $\langle x, y \rangle = 0$, d'où le résultat.*

Exercice 7 (**) On munit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, et on pose $H = \{f \in E | f(0) = 0\}$.
Déterminer $H^\perp$.

Solution. *Soit $g \in H^\perp$: on pose $f(x) = x^2 g(x)$: l'intégrale de fg est nulle, donc $xg(x) = 0$ pour tout x et g est nulle.*

Exercice 8 (**) Montrer que les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan engendrent $O(E)$.

Solution. *Récurrence sur la dimension : ça marche pour $n = 2$ et, en dimension plus grande, on fixe $x_0 \neq 0$: une réflexion envoie x sur $f(x)$, et on applique l'hypothèse de récurrence à $\{f(x_0)\}^\perp$.*

Exercice 9 (**) Déterminer le centre de $O(E)$.

Solution. *Soit u dans le centre : u commute avec toutes les réflexions hyperplanes, donc laisse fixe tous les hyperplans, donc toutes les intersections d'hyperplans, donc toutes les droites.*

Exercice 10 (**) Soient $A_1, ...A_k$ des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ qui commmutent deux à deux. Montrer qu'il existe Q orthogonales telle que $Q^{-1}A_iQ$ soit diagonale pour tout i.

Solution. *Par récurrence sur k : on diagonalise A_k en BON. Les sous-espaces propres sont stables par tous les autres A_i, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux restrictions de $A_1, ..., A_{k-1}$ à chacun des sous-espaces propres.*

Remarque.
- *Avant de poser l'exo, s'assurer que le théorème spectral a été vu...*
- *Variante : montrer que si A et B symétriques vérifient $A^3 = B^3$, alors $A = B$.*

Exercice 11 (**) Soit $P = (p_{i,j})$ orthogonale. Montrer que $|\sum_{i,j} p_{i,j}| \leq n$.

Solution. *Soient $f_1, ..., f_n \in \mathbb{R}^n$ les colonnes de P : la somme vaut $\langle \sum_{i=1}^n e_i, \sum_{j=1}^n f_j \rangle$, d'où le résultat par Cauchy-Schwartz.*

Exercice 12 (***) Soient $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}^n$. Montrer l'inégalité :

$$|det(u_1, ..., u_n| \leq \prod_{i=1}^n \|u_i\|$$

Solution. *Soit U la matrice des coordonnées des u_i dans la base canonique : le procédé de Gram-Schmidt montre qu'il existe une matrice triangulaire T avec des 1 sur la diagonale telle que $TU = P$ soit orthogonale, donc $U = T^{-1}P$. On a donc $det(U) = det(P)$, et le fait d'appliquer T^{-1} augmente forcément les normes, car ajoute des vecteurs orthogonaux. On est donc ramenés au cas où les u_i forment une base orthogonale, qui se ramène à celui d'une base orthonormée en divisant tout par le rpoduit des $\|u_i\|$. Or, le déterminant d'une matrice orthogonale vaut ± 1, donc c'est bon.*

Exercice 13 (***) Soient G un sous-groupe fini de $GL(E)$ et U un sous-espace de E stable par G. Montrer que U admet un supplémentaire stable.

Solution. *Pour $x, y \in E$, on pose $\langle x, y \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g(x), g(y) \rangle$ et on vérifie que c'est un produit scalaire. Les éléments de G sont des isométries pour ce produit scalaire, donc on peut prendre le supplémentaire orthogonal de U.*

22 Géométrie affine

Sauf indication contraire, E désigne un espace affine de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1 (*) Soit F un sous-espace affine de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F pour que $Vect(F) = E$.

Solution. *Si $dim(F) < n - 1$, F s'inclut dans un hyperplan, donc n'engendre pas E. Si F est un hyperplan, il faut et il suffit qu'il ne contienne pas 0.*

Exercice 2 (*) Soit f une application affine de E dans E. Montrer que f admet un unique point fixe ssi $(Id - \vec{f})$ est inversible.

Solution. *Si on a un unique point fixe, il n'existe aucun x non nul avec $\vec{f}(x) = x$.*
Réciproquement, on écrit $f = \vec{f} + a$, et le point fixe est l'antécédent de a par $Id - \vec{f}$.

Exercice 3 (**) Soient $A_1, ..., A_k \in E$. Existe-t-il $B_0, ..., B_n$ avec $B_0 = B_n$ tels que pour tout i de $[\![0, k-1]\!]$, A_i soit le milieu de $[B_{i-1}, B_i]$.

Solution. *B_i doit être l'image de B_{i-1} par la symétrie de centre A_i. On cherche donc un point fixe de la composée de ces symétries centrales : si k est impair, la partie linéaire est $-Id$ donc un unique point convient. Si k est pair, c'est une translation, donc tous les points ou aucun conviennent selon la somme alternée des A_i.*

Exercice 4 (**) Soit G un groupe fini de transformations affines de E. Montrer qu'il existe un $x \in E$ stable par tous les éléments de G.

Solution. *On prend un élément quelconque de G, et on moyenne ses images par les éléments de G.*

Exercice 5 (**) Soit f une application linéaire de E dans E telle que la distance de M à $f(M)$ ne dépende pas de M.
Montrer que f est une translation.

Solution. *La distance de x à $\vec{f}(x)$ est bornée, donc $\vec{f} - Id$ est une application linéaire bornée, donc nulle, d'où le résultat.*

Remarque. *On peut remplacer "constante" par "bornée".*

Exercice 6 (**) On suppose E muni d'une structure euclidienne. Soit S une sphère de centre O et f une application affine telle que $f(S) = S$. Montrer que $f(O) = O$ et que f est une isométrie.

Solution. *Il faut caractériser O par des propriétés affines. Or, O est le centre de symétrie de la sphère, donc il va être envoyé sur un centre de symétrie, et on montre qu'il est unique. Il est ensuite facile de montrer que f isométrie.*

Exercice 7 (* puis *)** Soit $A \subset E$: on définit l'enveloppe convexe $Conv(A)$ de A comme le plus petit convexe de E contenant A.
Montrer que $Conv(A)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de A.
Montrer qu'en fait tout point de $Conv(A)$ peut s'écrire comme barycentre d'au plus $n+1$ points de A.

Solution. *Soit $c \in Conv(A)$: on a $c = \sum_{i=0}^{m} \mu_i a_i$, et si $m > n$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a_0 a_i} = 0$ soit, en posant $\lambda_0 = -\lambda_1 - ... - \lambda_m$, $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i a_i = 0$ avec $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$. On peut alors "perturber" l'expression de c par $t \sum_{i=0}^{m} \lambda_i a_i = 0$, où t est choisi pour éliminer un des coefficients. Il faut donc $t = -\frac{\mu_i}{\lambda_i}$ où i est tel que $\lambda_i \neq 0$ et, pour que les autres coefficients restent positifs, il faut prendre un tel i avec $\frac{\mu_i}{\lambda_i}$ minimal.*

Exercice 8 (***) Soit K un compact (ou un fermé borné) convexe non vide de E et A un ensemble fini d'applications affines qui laissent stables K et commutent deux à deux.
Montrer qu'il existe un élément de K stable par tous les éléments de A.

Solution. *Pour $A = \{u\}$, on choisit $x \in K$ et pose $x_k = \frac{x+u(x)+\ldots+u^{k-1}(x)}{k}$. La suite (x_k) admet une valeur d'adhérence et, en majorant $\|u(x_k) - x_k\|$, on montre que cette valeur d'adhérence est bien un point fixe.*
Pour A fini, on raisonne par récurrence sur la taille de A : l'ensemble des points fixes communs aux $j-1$ premières applications est un compact convexe non vide par hypothèse de récurrence, stable par la j-ième car ça commute.

Remarque.
- *Nécessite Bolzano-Weierstrass en dimension finie.*
- *Borel-Lebesgue permet de traiter le cas A infini.*
- *Pour justifier : si u isométrie, on voit qu'il faut moyenner et si u constante ou "rétrécit", on voit qu'il faut regarder $u^k(x)$ pour n grand...*

23 Etude métrique des arcs paramétrés

Exercice 1 (*) Calculer la longueur de la courbe d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$.

Solution. *Il faut à la fin intégrer $2|\cos\frac{\theta}{2}|$, et on obtient 8.*

Exercice 2 (*) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer le rayon de courbure de la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en ses intersections avec les axes de coordonnées.

Solution. *On trouve $\frac{a^2}{b}$ et $\frac{b^2}{a}$.*

Exercice 3 (**) Soient f et g deux arcs paramétrés par abscisse curviligne avec $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$. On suppose de plus que f et g ont la même courbure. Montrer que $f = g$.

Solution. *On écrit les formules de Frénet : $\vec{T} + i\vec{N}$ vérifie la même équadiff pour f que pour g, qu'on sait résoudre, donc $\vec{T}$ est le même pour f que pour g, donc OK.*

Remarque. *Variante : donner $R(s)$ et demander les courbes qui marchent, par exemple $R(s) = s$ pour $s \in \mathbb{R}_+^*$: on trouve alors, si la base de Frénet à $s = 1$ est la base canonique, $\vec{T}(s) = (\cos(\ln s), \sin(\ln s)$*

Exercice 4 (**) Soit $M \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2$ un arc paramétré et, pour tout $s \in \mathbb{R}^+$, $R(s)$ son rayon de courbure en s (supposé partout non nul), et $O(s)$ le centre de courbure.

- Montrer que pour tous s_1 et s_2, $\|O(s_1) - O(s_2)\| \leq |R(s_1) - R(s_2)|$.
- En déduire que, si R croît vers une limite finie, M converge vers un cercle (i.e la distance de M au cercle tend vers 0).

Solution. *Pour la première question, calculer la dérivée de O en utilisant la formule de Frénet : ça se simplifie...*
Pour la deuxième, on montre que O admet une limite O_0, et que la distance entre M et O_0 converge...

Exercice 5 (**) On dit qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ est d'aire nulle si pour tout $\epsilon > 0$, on peut le recouvrir par des rectangles dont la somme des aires est inférieure ou égale à ϵ.
Soit $\gamma \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que l'image de γ est d'aire nulle, et que le résultat reste vrai si une seule des coordonnées est $\mathscr{C}^1$ et l'autre $\mathscr{C}^0$.

Solution. *Dans le premier cas, utiliser le fait que γ est lipschitzienne. Dans le deuxième, une coordonnée est lipschitzienne et l'autre uniformément continue.*

Remarque. *Le résultat reste vrai pour des arcs dérivables (difficile), mais est faux pour des arcs continus.*

Exercice 6 (***) Soient $f, g \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, convexes, telles que $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ et $f \leq g$.
Montrer que la longueur de la courbe représentative de f est supérieure à celle de g.

Solution. *On commence par se ramener au cas où g est affine par morceaux (par convergence uniforme de la dérivée...). On traite ensuite ce cas par récurrence sur le nombre de segments (en autorisant f à n'être que $\mathscr{C}^1$ par morceaux : le cas $n = 1$ est une conséquence de l'inégalité de Jensen continue, et l'hérédité se fait en prolongeant le premier segment de g et en l'intersectant avec la courbe de f.*

24 Espaces vectoriels normés

Exercice 1 (*) Montrer que $\mathbb{Q}$ ne peut pas s'écrire comme l'intersection d'un ouvert et d'un fermé de $\mathbb{R}$.

Solution. *Si c'était le cas, le fermé ne pourrait être que $\mathbb{R}$, ce qui est absurde car $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert.*

Exercice 2 (*) Soient E un evn et A une partie convexe de E. Montrer que son intérieur et son adhérence sont aussi convexes.

Solution. *Trivial pour l'adhérence. Pour l'intérieur, prendre le min des deux rayons.*

Exercice 3 (*) Soient E un evn et H un hyperplan de E. Montrer que H est fermé ou dense.

Solution. *$\overline{H}$ contient H. On montre donc que c'est H ou E.*

Remarque. *On peut aussi demander un exemple d'hyperplan dense (fonctions nulles en 0 dans $\mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme 1).*

Exercice 4 (*) Soient E un evn de dimension finie et P l'ensemble des projections de $\mathscr{L}(E)$.
Montrer que P est un fermé de $\mathscr{L}(E)$.

Solution. *Utiliser la caractérisation $f^2 = f$.*

Exercice 5 (**) Montrer qu'une partie convexe dense A d'un evn E de dimension finie est E tout entier.

Solution. *Récurrence sur la dimension : il suffit de montrer que l'intersection de A avec un hyperplan H est dense dans H, la convexité étant évidente. Pour cela, on prend un point de chaque côté proche d'un point de H etc...*

Exercice 6 (**) Soient E l'espace des suites réelles bornées muni de la norme $\|.\|_\infty$, et F le sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang.
Quelle est l'adhérence de F ?

Solution. *C'est le sous-espace des suites qui tendent vers 0.*

Exercice 7 (**) On munit $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme infinie.
- Montrer que l'ensemble des fonctions surjectives dans $[0,1]$ est fermé.
- Que peut-on dire de l'ensemble des fonctions injectives ?

Solution.
- *Le complémentaire est ouvert : si f n'est pas surjective, elle évite un voisinage de 0 ou de 1, donc les fonctions proches de f aussi.*
- *Cet ensemble n'est ni fermé (prendre les fonctions $x \longrightarrow \frac{x}{n}$) ni ouvert (on peut "perturber" l'identité pour la rendre non injective).*

Exercice 8 (**) Soient $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. Pour toute $f \in E$, on pose $N(f) = \int_0^1 |f|\varphi$.
Donner une CNS sur φ pour que N soit une norme.

Solution. *φ doit être positive et l'ensemble des points où elle s'annule doit être d'intérieur vide.*

Exercice 9 (**) Soient E un evn et A une partie de E. Pour tout x de E, on pose $d_A(x) = \inf_{y\in A} \|x - a\|$.
- Montrer que d_A est continue.
- Si A et B sont deux parties de E, à quelle condition a-t-on $d_A = d_B$?

Solution.
- *d_A est en fait 1-lipschitzienne...*
- *$d_A = d_B$ ssi $\bar{A} = \bar{B}$.*

Remarque. *$\|d_A - d_B\|_\infty$ est la distance de Hausdorff entre A et B : on a donc une distance sur l'ensemble des fermés...*

Exercice 10 (***) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et B une partie de $\mathbb{R}^n$ convexe, symétrique, fermée, bornée et d'intérieur non vide (pour la norme euclidienne). Montrer qu'il existe une norme N sur $\mathbb{R}^n$ telle que B soit la boule unité pour N.

Solution. *On pose $N(x)^{-1} = \inf\{\lambda > 0 | \lambda x \notin B\}$: l'homogénéité et le caractère défini positif sont immédiats, l'inégalité triangulaire est une conséquence de la convexité, et N vérifie bien la condition demandée...*

Exercice 11 (***) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle $(X^n) \longrightarrow P$.

Solution. *Dans les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$, les vecteurs e_i de la base canonique vérifient $\|e_i\| = 1$. On va s'en inspirer...*
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose donc $Q_n = 2^n(X^n - P)$. Problème : ce n'est pas forcément une base, mais $deg(Q_n) = n$ pour $n > deg(P)$. On remplace donc Q_n par X^n pour $n \leq deg(P)$. On a bien une base et on peut prendre la norme 1 ou la norme ∞ pour cette base...

25 Fonctions de deux variables

Exercice 1 (*) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en tout point, telle que ces dérivées partielles soient bornées sur U.
Montrer que f est continue sur U.

Solution. *En majorant les dérivées, on a que f est lipschitzienne.*

Remarque. *Sans l'hypothèse de bornitude, on a le contre-exemple classique $\frac{xy}{x^2+y^2}$...*

Exercice 2 (*) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ telle que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f est linéaire.

Solution. *On montre que f est égale à sa différentielle en 0 (il suffit en fait que f soit différentiable en 0...)*

Exercice 3 (*) Trouver toutes les $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Solution. *Ce sont les fonctions de la forme $\varphi(x - y)$ avec $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour cela, changement de variables ou poser $\varphi(x) = f(x, 0)$.*

Exercice 4 (**) Soient A une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(A)$ est un intervalle.

Solution. *Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que $f(A)$ est connexe.*

Exercice 5 (**) Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ dont la matrice jacobienne soit en tout point antisymétrique. Montrer que f est affine, i.e il existe a linéaire et $b \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = a(x) + b$ pour tout x.

Solution. *En notant f_1, f_2 les composantes et D_1, D_2. les dérivations seloon les coordonnées, le théorème de Schwarz et l'antisymétrie donnent pour tous i, j, k :*

$$D_i(D_j f_k) = -D_i(D_k f_j) = -D_k(D_i f_j) = D_k(D_j f_i) = D_j(D_k f_i) = -D_j(D_i f_k) = -D_i(Djf_k)$$

donc la différentielle est constante, d'où le résultat.

Exercice 6 (**) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que pour tout x de $\mathbb{R}^2$, le gradient de f en x est orthogonal à x. Que peut-on dire de f ? Et en remplaçant "orthogonal" par "colinéaire" ?

Solution. *f est constante : $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ne dépend pas de r, et continuité en 0.*
Avec "colinéaire", $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ne dépend que de r donc s'écrit $\varphi(r)$ avec φ de classe $\mathscr{C}^1$ et de dérivée nulle en 0.

Exercice 7 (***) Soit K un convexe compact (i.e fermé borné) de $\mathbb{R}^2$ et, pour tout x de $\mathbb{R}^2$, $d_K(x) = \inf_{y \in K} \|y - x\|$, où $\|.\|$ est la norme euclidienne.
Montrer que d_K est $\mathscr{C}^1$ sur le complémentaire de K et calculer sa différentielle (on pourra admettre que l'inf est toujours atteint). où est le problème pour K non convexe ?

Solution. *Le gradient en x vaut $\frac{x-y}{\|x-y\|}$, où y est le point où l'inf est atteint. Pour avoir ça, on majore $d_K(x+h)^2$ par la distance de $x+h$ à y, et on la minore en utilisant le fait que K est séparé de x par la perpendiculaire à $x-y$ passant par y.*
Pour K non convexe, l'antécédent n'est plus forcément unique...

26 Réduction des endomorphismes

Sauf indication contraire, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1 (*) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $r \in [\![0, n]\!]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ telle que $u^2 = \lambda u$ et $rg(u) = r$. Quelle est la trace de u ?

Exercice 2 (*) Trouver toutes les $M \in M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle telles que $M^3 - 4M^2 + 4M = 0$.

Solution. *On applique le lemme des noyaux : le deuxième bloc a pour seule valeur propre 2 donc sa trace vaut $2r$ donc $r = 0$ et $M = 0$.*

Exercice 3 (*) Soient $A, B, M \in M_n(\mathbb{R})$ avec A et B diagonalisables, et $k \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que si $A^k M B^k$, alors $AMB = 0$.

Solution. *Il suffit d'utiliser le fait que $Ker(A^k) = Ker(A)$ et $Im(B^k) = Im(B)$.*

Exercice 4 (*) Montrer que l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui à M associe $M + tr(M)I_n$ est diagonalisable, et donner ses valeurs propres.

Solution. *1 est valeur propre de multiplicité $n^2 - 1$, et $n+1$ en est une, de vecteur propre I_n.*

Exercice 5 (**) Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ et A la matrice de taille $2n$ dont les coefficients sur l'"antidiagonale" sont les a_i, avec des 0 ailleurs.
CNS pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?

Solution. *On a des blocs $2 * 2$ invariants, donc il suffit que pour tout k, a_k et a_{n+1-k} soient tous deux nuls ou tous deux non nuls. Pour être diagonalisable sur $\mathbb{R}$, il faut qu'ils soient de même signe.*

Exercice 6 (**) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$.
Montrer que $det(A) > 0$.

Solution. *D'après le lemme des noyaux, on peut scinder en deux parties : une homothétie de rapport positif (donc OK), et un endomorphisme annulé par un polynôme de degré 2 sans racines réelles. Pour conclure, par exemple, le polynôme caractéristique admet les deux racines conjuguées de ce polynôme de degré 2, avec même multiplicité car il est réel, donc le det, i.e le produit des racines, est positif, ou alors on diagonalise sur $\mathbb{C}$...*

Exercice 7 (**) Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ consituée de 4 blocs A.
Montrer que A est diagonalisable ssi B l'est.

Solution. *Si A est diagonalisable, on trouve une base. Si B est diagonalisable, B est annulé par P scindé à racines simples, donc $\frac{1}{2}P(2A) = 0$ donc A est annulée par un polynôme scindé à racines simples.*

Exercice 8 (**) Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont diagonalisables (sur $\mathbb{R}$).
Montrer que G est commutatif.
En déduire les valeurs possibles du cardinal de G.

Solution. *Pour la première question, les seules valeurs propres possibles sont 1 et -1, donc $A^2 = I_n$ si $A \in G$, donc le groupe est abélien. Pour la deuxième, on codiagonalise les éléments de G. A conjugaison près, G est donc un sous-groupe du groupe des matrices diagonales à coefficients diagonaux -1 ou 1, donc son cardinal divise 2^n par le théorème de Lagrange.*

Remarque. *Le théorème de Lagrange est hors programme, la deuxième question est difficile.*

Exercice 9 (***) Déterminer l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$.

Solution. *Si A admet une valeur propre double, on peut perturber un peu pour ne plus être diagonalisable.*
Sinon, le polynôme caractéristique est continu, donc il suffit de montrer qu'un polynôme assez proche d'un polynôme scindé à racines simples l'est aussi. Dans $\mathbb{R}$, on peut dire qu'il existe $x_1 < ... < x_{n+1}$ tels que les $P(x_i)$ soient de signes alternés.