

Corrigé du TD2 : CW-complexes

Exercice 1. Premiers exemples de CW-complexes \star

1. On considère l'inclusion canonique $i : A \hookrightarrow X$ et l'application constante $c_* : A \rightarrow *$. On note $j_X : X \rightarrow X \cup_A *$ et $j_* : * \rightarrow X \cup_A *$ les applications canoniques. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow c_* & & \downarrow j_X \\ * & \xrightarrow{j_*} & X \cup_A * \end{array}$$

On considère $\pi_X : X \rightarrow X/A$ la projection et $\pi_* : * \rightarrow X/A$ l'application définie par $* \mapsto \{A\}$. D'après la propriété universelle du recollement $X \cup_A *$, il existe une unique application continue $\varphi : X \cup_A * \rightarrow X/A$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & X & & \\ \downarrow c_* & & \downarrow j_X & \searrow \pi_X & \\ * & \xrightarrow{j_*} & X \cup_A * & \xrightarrow{\varphi} & X/A \\ & \searrow \pi_* & & \nearrow & \end{array}$$

De plus, l'application $j_X : X \rightarrow X \cup_A *$ est continue et constante sur A . Elle se factorise donc en une application continue $\psi : X/A \rightarrow X \cup_A *$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_X} & X \cup_A * \\ \downarrow \pi_X & \searrow \psi & \\ X/A & & \end{array}$$

Par construction, l'application ψ est inverse de φ et ce sont des homéomorphismes.

2. Pour $n = 0$, le résultat est trivial. La droite réelle \mathbb{R} est un CW-complexe : comme ensemble de 0-cellules on prend \mathbb{Z} , et comme ensemble de 1-cellules on prend les segments $[n, n + 1]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ensuite pour tous $n \geq 2$, \mathbb{R}^n admet une structure de CW-complexe produit puisque \mathbb{R} est localement compact (voir Exercice 9). On peut aussi donner une structure explicite avec comme ensemble de 0-cellules \mathbb{Z}^n , comme 1-cellules tous les segments de longueur 1 entre ces points etc.

En revanche, un CW-complexe est fini si et seulement si l'espace est compact (voir Exercice 7). Ainsi, pour $n \geq 1$ l'espace \mathbb{R}^n n'admet pas de décomposition cellulaire finie.

3. (a) On rappelle que la sphère est homéomorphe à l'espace obtenu en identifiant tous les points de la frontière de \mathbb{D}^n . De plus, l'homéomorphisme obtenu se restreint en un homéomorphisme entre \mathbb{D}^n et \mathbb{S}^n privé d'un point (que nous appellerons e^0). Ainsi, \mathbb{S}^n peut être munie de la décomposition cellulaire avec

- une cellule de dimension 0, qui est e^0
- une cellule $e^n = \mathbb{S}^n \setminus e^0$ de dimension n , avec pour application caractéristique le morphisme quotient $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n / \partial \mathbb{D}^n \simeq \mathbb{S}^n$.

- (b) D'autre part, on peut également voir \mathbb{S}^n comme union disjointe $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n_{++} \cup \mathbb{S}^{n-1} \cup \mathbb{S}^n_{--}$, où

$$\mathbb{S}^n_{++} = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n, x_n > 0\}$$

et

$$\mathbb{S}_{--}^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n, x_n < 0\},$$

et où on a identifié $\{x_n = 0\} \cap \mathbb{S}^n$ avec \mathbb{S}^{n-1} . La projection sur le plan $\{x_n = 0\}$ induit un homéomorphisme entre $\mathbb{S}_+^n = \mathbb{S}_{++}^n \cup \mathbb{S}^{n-1}$ et \mathbb{D}^n , qui se restreint en un homéomorphisme entre \mathbb{S}_{++}^n et l'intérieur de \mathbb{D}^n . Il en est de même pour \mathbb{S}_{--}^n . Ainsi, nous pouvons définir une décomposition cellulaire sur \mathbb{S}^n par récurrence sur n de la manière suivante : la décomposition cellulaire de \mathbb{S}^0 , qui est l'union de deux points, est constituée des deux 0-cellules naturelles. Supposons la décomposition cellulaire construite au rang $n - 1$. La décomposition cellulaire de \mathbb{S}^n est alors donnée par

- deux n -cellules \mathbb{S}_{++}^n et \mathbb{S}_{--}^n avec pour applications caractéristiques les homéomorphismes $\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}_+^n$ et $\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}_-^n$.
- les k -cellules pour $k \leq n$ de \mathbb{S}^{n-1} déjà construites, vues comme sous-espaces de \mathbb{S}^n via l'inclusion $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$, avec les mêmes applications caractéristiques, composées avec l'injection $\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n$.

Cela donne une décomposition cellulaire avec deux k -cellules pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, et de k -squelette \mathbb{S}^k pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

4. On utilise la représentation du tore \mathbb{T} comme quotient du carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

Comme 0-cellule, on prend le point $(0, 0)$.

Comme 1-cellules, on prend les deux segments $[0, 1] \times \{0\}$ et $\{0\} \times [0, 1]$, dont les extrémités sont toutes recollées sur l'unique 0-cellule.

Enfin, on aura une 2-cellule, donnée par la projection canonique $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}$. (noter que le carré $[0, 1]^2$ est homéomorphe au disque $\overline{D^2}$).

Exercice 2. Espaces projectifs ★ ★

1. La restriction de l'application quotient $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ à \mathbb{S}^n est continue surjective. Deux points x et y dans \mathbb{S}^n ont même image dans $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ si et seulement si $x = \pm y$, donc cela induit une bijection continue

$$\mathbb{S}^n / \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n.$$

Construisons également la réciproque : pour cela, on part de l'application continue

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{S}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto \left(\frac{x_0}{\|x\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x\|} \right) \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. En composant cela par l'application quotient $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n / \{\pm 1\}$, on voit qu'on peut passer au quotient pour obtenir une application continue $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^n / \{\pm 1\}$, réciproque de la précédente. On a donc bien un homéomorphisme. Cela prouve en particulier que $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ est compact, car $\mathbb{S}^n / \{\pm 1\}$ l'est. On procède de même avec $\mathbb{C}\mathbb{P}^n : \mathbb{S}^{2n+1}$ apparaît comme sphère unité de \mathbb{C}^{n+1} vu comme \mathbb{R}^{2n+2} . Cela montre d'ailleurs que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ est compact : en effet, $\mathbb{S}^{2n+1} / \mathbb{S}^1$ est quasi-compact en tant qu'image du compact \mathbb{S}^{2n+1} par l'application quotient, qui est continue. Pour montrer que cet espace est séparé, soient $x, y \in \mathbb{S}^{2n+1}$ d'images distinctes dans $\mathbb{S}^{2n+1} / \mathbb{S}^1$. Par compacité de \mathbb{S}^1 , la fonction $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\lambda \mapsto \|x + \lambda y\|$ atteint son minimum, qui est > 0 d'après l'hypothèse sur x et y . En choisissant $\epsilon < \frac{1}{2} \min_{\lambda \in \mathbb{S}^1} \|x + \lambda y\|$ on construit des voisinages saturés disjoints de x et y en posant

$$V_x := (\cup_{\lambda \in \mathbb{S}^1} B(\lambda x, \epsilon)) \cap \mathbb{S}^{2n+1}$$

et en définissant V_y de même.

2. On a une application bien définie et continue

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{y}{x} \end{aligned}$$

passant au quotient en une bijection continue

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \setminus \{[0 : 1]\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\} / \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}.$$

L'inverse de cette bijection est donné par l'application, continue également, donnée par la composée

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\} \rightarrow \mathbb{RP}^1 \setminus \{[0 : 1]\} \\ z &\mapsto (1, z) \mapsto [1 : z] \end{aligned}$$

Ainsi, le complémentaire du point $[0 : 1]$ dans \mathbb{RP}^1 est homéomorphe à \mathbb{R} . D'autre part, \mathbb{RP}^1 est compact, et donc le compactifié d'Alexandrov de \mathbb{R} , c'est-à-dire \mathbb{S}^1 . Le même raisonnement fonctionne pour montrer que \mathbb{CP}^1 est le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire \mathbb{S}^2 .

Remarque : on peut également directement utiliser l'homéomorphisme $\mathbb{S}^1/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{RP}^1$ établi à la question précédente, puis montrer que l'application continue $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ définie par $z \mapsto z^2$ (on voit ici \mathbb{S}^1 comme l'ensemble des complexes de module 1) induit un homéomorphisme $\mathbb{S}^1/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{S}^1$. Pour le corps des complexes cette méthode est un peu plus compliquée, car il faut dans ce cas montrer $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{S}^2$. (Cela se fait via la *fibration de Hopf*)

3. **L'espace projectif réel.** L'espace \mathbb{RP}^0 est un point, donc un CW-complexe constitué d'une unique 0-cellule. Par récurrence, on suppose qu'on a muni \mathbb{RP}^{n-1} d'une structure de CW-complexe avec une i -cellule pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, et telle que pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, le i -squelette soit \mathbb{RP}^i . Nous avons vu que \mathbb{RP}^n est homéomorphe à $\mathbb{S}^n/\{\pm 1\}$, mais aussi à l'espace obtenu en identifiant les points diamétralement opposés de la frontière $\partial \mathbb{D}^n \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ de \mathbb{D}^n . On peut donc écrire \mathbb{RP}^n comme une union disjointe $\mathbb{D}^n \cup (\mathbb{S}^{n-1}/\{\pm 1\}) = \mathbb{D}^n \cup \mathbb{RP}^{n-1}$. On prend pour décomposition cellulaire de \mathbb{RP}^n celle de \mathbb{RP}^{n-1} , à laquelle on ajoute une n -cellule d'application caractéristique l'application quotient $\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$.

L'espace projectif complexe On procède de manière analogue aux espaces projectifs réels. \mathbb{CP}^0 est un point. On rappelle que \mathbb{CP}^n est obtenu comme quotient de la sphère $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par l'action naturelle de \mathbb{S}^1 , où l'on voit la sphère comme l'espace

$$\{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}, |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1\}.$$

Le sous-ensemble de \mathbb{S}^{2n+1} consistant des points dont la dernière coordonnée z_{n+1} est un réel positif ou nul est de la forme

$$\{(z, \sqrt{1 - |z|^2}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^+, |z| \leq 1\}$$

C'est le graphe de la fonction $z \mapsto \sqrt{1 - |z|^2}$, et par projection sur \mathbb{C}^n il est homéomorphe à la boule \overline{D}^{2n} , de frontière \mathbb{S}^{2n-1} correspondant à l'ensemble des points de \mathbb{S}^{2n+1} de dernière coordonnée z_{n+1} nulle. Tout point de \mathbb{S}^{2n+1} de dernière coordonnée non-nulle est équivalent sous l'action de \mathbb{S}^1 à un unique point de dernière coordonnée réelle et strictement positive. Ainsi, on voit que \mathbb{CP}^n peut être vu comme la boule \overline{D}^{2n} dont on a identifié les points de la frontière $\partial \overline{D}^{2n} = \mathbb{S}^{2n-1}$ sous l'action de \mathbb{S}^1 . On écrit donc $\mathbb{CP}^n = \overline{D}^{2n} \cup \mathbb{CP}^{n-1}$ (union disjointe), avec une $2n$ -cellule d'application caractéristique l'application quotient $\overline{D}^{2n} \rightarrow \mathbb{CP}^n$. Par récurrence, on voit que \mathbb{CP}^n a une structure de CW-complexe avec une unique cellule en chaque dimension paire, et aucune cellule de dimension impaire.

4. (a) Soit $U_0 = \{[x_0 : \dots : x_n] \in K\mathbb{P}^n, x_0 \neq 0\}$, qui est ouvert car d'image réciproque l'ouvert $V_0 = \{(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}, x_0 \neq 0\} \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'application quotient $q : K^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow K\mathbb{P}^n$. Tout élément de U_0 peut, en divisant par la première coordonnée, s'écrire sous la forme $[1 : x_1 : \dots : x_n]$.

Ainsi, l'application ϕ_0 de l'énoncé, obtenue comme composée de q avec l'application continue

$$\begin{aligned} K^n &\rightarrow K^{n+1} \setminus \{0\} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (1, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

est continue et bijective. D'autre part, on a une application continue et surjective bien définie

$$\begin{aligned} V_0 &\rightarrow K^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\rightarrow \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right), \end{aligned}$$

passant au quotient en une application $U_0 \rightarrow K^n$ continue réciproque de ϕ_0 , ce qui montre que ϕ_0 est un homéomorphisme.

- (b) De la même manière, en posant $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in K\mathbb{P}^n, x_i \neq 0\}$, on montre que U_i est homéomorphe à K^n . L'ensemble $\{U_0, \dots, U_n\}$ forme un recouvrement de $K\mathbb{P}^n$.

Exercice 3. Propriétés des CW-complexes ★★

- Puisque f est continue, nous avons $f(\mathbb{D}^n) \subset \overline{f(\mathbb{D}^n)} = \bar{C}$. D'autre part, $f(\mathbb{D}^n)$ est compact comme image du compact \mathbb{D}^n (X étant supposé séparé), donc c'est un fermé de X . Ainsi, $f(\mathbb{D}^n)$ est un fermé qui contient $f(\mathbb{D}^n) = C$, et est contenu dans l'adhérence de C . On a donc bien $f(\mathbb{D}^n) = \bar{C}$. Ainsi, \bar{C} est compact, et peut être vu comme l'union disjointe de la cellule $C = f(\mathbb{D}^n)$ et du compact $f(\partial\mathbb{D}^n)$. Ce dernier sera par conséquent parfois noté (par abus!) $\partial\bar{C}$.
- Le k -squelette est une union de cellules, donc il reste à montrer qu'il est fermé. D'après la question précédente, pour tout $n \leq k$ et pour toute n -cellule C , l'adhérence de C dans X est incluse dans X_k , et donc $X_k \cap \bar{C} = \bar{C}$ est bien fermé dans \bar{C} . Soit maintenant C une n -cellule avec $n > k$, d'application caractéristique $f : \mathbb{D}^n \rightarrow X$. Nous avons par définition $\bar{C} \cap X_k = f(\partial\mathbb{D}^n) \cap X_k$, qui est inclus dans un nombre fini de cellules de dimension $\leq k$. Soient C_1, \dots, C_m ces cellules, alors, leurs adhérences étant incluses dans X_k , on a

$$\bar{C} \cap X_k = \bar{C} \cap \bigcup_{i=1}^m \bar{C}_i,$$

qui est bien fermé dans \bar{C} .

Remarque Plus généralement, c'est un bon exercice (très conseillé!), de montrer que si X' est un sous-espace topologique de X qui est une union de cellules, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- X' , avec sa partition en cellules induite, est un CW-complexe.
- X' est fermé.
- Pour toute cellule e contenue dans X' , l'adhérence \bar{e} est également contenue dans X' .

Cela donne trois caractérisations commodes des sous-complexes d'un CW-complexe.

- On suppose que $X_{n-1} \neq X_n$, de sorte qu'on a au moins une n -cellule. On note e_1^n, \dots, e_k^n les n -cellules. Par définition du CW-complexe, en écrasant le sous-espace X_{n-1} de X_n on identifie les points de toutes les frontières des e_i^n (sans toucher à leurs intérieurs, qui sont inclus dans $X_n \setminus X_{n-1}$). Chaque e_i^n est homéomorphe à \mathbb{D}^n , donc si on identifie tous les points de la frontière de e_i^n , on obtient un espace homéomorphe à \mathbb{S}^n . Puisque dans X_n/X_{n-1} tous les points provenant des frontières des e_i^n sont identifiés, X_n/X_{n-1} est un bouquet de k sphères \mathbb{S}^n .
- (a) Voir [1, page 522]
- (b) Si X est fini, alors comme X est séparé et est une union finie de compacts, il est par conséquent compact.

Réciproquement, supposons X compact. Tout d'abord, il est nécessairement de dimension finie. En effet, dans le cas contraire, soit (u_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que pour tout n , le complexe X ait une u_n -cellule. Pour tout $n \geq 0$, on choisit un point x_n dans une u_n -cellule et on note S l'ensemble de tous les x_n . Notons que pour toute k -cellule C , l'ensemble $\bar{C} \cap S$ est fini (contenu dans $\{x_0, \dots, x_k\}$), donc fermé. Cela montre que l'ensemble S est fermé, et donc compact. D'autre part, chaque sous-ensemble de S , par le même argument, est fermé dans X , donc aussi dans S . Par conséquent, S a la topologie discrète, ce qui est impossible puisqu'il est compact et infini.

On montre maintenant par récurrence sur n que pour tout n , le n -squelette de X ne contient qu'un nombre fini de cellules. Pour cela on utilisera le fait que pour tout n , X_n est fermé dans X , donc compact. On utilisera également le petit résultat suivant, bien utile :

Lemme Soit X un CW-complexe de dimension n . Alors toute n -cellule de X est ouverte dans X .

Preuve : Soit C une n -cellule de X , et soit C' une autre cellule. Comme C' est nécessairement de dimension $\leq n$, son adhérence n'intersecte pas C , de sorte que $(X \setminus C) \cap \bar{C}' = \bar{C}'$ est fermé, d'où $X \setminus C$ fermé, d'où le résultat.

Reprenons notre récurrence.

Pour $n = 0$, X_0 est discret, et compact, donc fini. Supposons le résultat vrai pour n . Soit $\{e_i\}_{i \in I}$ l'ensemble des $n + 1$ -cellules de X , avec $f_i : \bar{D}^{n+1} \rightarrow X_{n+1}$ l'application caractéristique.

$$V_i = f_i \left(\left\{ x \in D^{n+1}, |x| < \frac{3}{4} \right\} \right)$$

et

$$W_i = f_i \left(\left\{ x \in D^{n+1}, |x| \leq \frac{1}{2} \right\} \right).$$

Chaque W_i est compact, donc fermé dans X_{n+1} . D'autre part, V_i est ouvert dans e_i car $(f_i)|_{D^{n+1}} : D^{n+1} \rightarrow e_i$ homéomorphisme. Par le lemme, V_i est ouvert dans X_{n+1} . On pose alors $U = X_{n+1} \setminus \cup_{i \in I} W_i$, qui est un ouvert de X_{n+1} , de sorte que $\{U\} \cup \{V_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert du compact X_{n+1} , ce qui implique que I est fini.

Remarque : la même méthode se généralise pour montrer qu'un compact d'un CW-complexe X est contenu dans la réunion d'un nombre fini de cellules de X .

(c) On commence par montrer le lemme suivant, dont le sens direct est une application immédiate :

Lemme Soit $n \geq 1$, et soient x et y deux points contenus dans le n -squelette de X . Alors s'il existe un chemin de x vers y dans X , il en existe un dans X_n .

Preuve : Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Comme $\gamma([0, 1])$ est compact, il n'est contenu que dans un nombre fini de cellules. Nous pouvons donc supposer que l'image de γ est incluse dans le N -squelette pour un $N \geq n + 1$. Soit e_i une N -cellule qui intersecte l'image de γ . On définit alors

$$t_0 := \inf\{t \in [0, 1], \gamma(t) \in e_i\} \quad \text{et} \quad t_1 := \sup\{t \in [0, 1], \gamma(t) \in e_i\}.$$

Rappelons que e_i est ouverte dans X_N : ainsi, $\gamma^{-1}(e_i)$ est un ouvert, on a $\gamma(t_0) \notin e_i$ et $\gamma(t_1) \notin e_i$, mais les deux appartiennent à $\partial \bar{e}_i$. Cet espace est l'image de S^{N-1} par une application continue, donc, puisque $N \geq n + 1 \geq 2$, il est connexe par arcs. On peut donc remplacer la partie de γ entre t_0 et t_1 par un arc contenu dans le $N - 1$ -squelette de X . Par récurrence, on a le résultat.

Pour l'implication réciproque, on va raisonner par récurrence, en montrant que pour tout $n \geq 1$, X_n est connexe par arcs. Le cas $n = 1$ est vrai par hypothèse. Supposons que pour un certain n , X_n est connexe par arcs. Soient x et y deux points de X_{n+1} . Si tous les deux sont dans X_n , on a un chemin continu qui les relie dans X_n . Sinon, supposons par exemple que $x \in X_{n+1} \setminus X_n$. Alors x appartient à une $n + 1$ -cellule. Par connexité par arcs de l'adhérence de celle-ci (comme image de \bar{D}^{n+1} par une application continue), on peut relier x à un point x_1 de la frontière de la cellule, qui appartient par conséquent au n -squelette. On peut de même si nécessaire remplacer y par un point y_1 du n -squelette, et l'hypothèse de récurrence conclut.

Exercice 4. Les différents quotients du carré $\star \star$

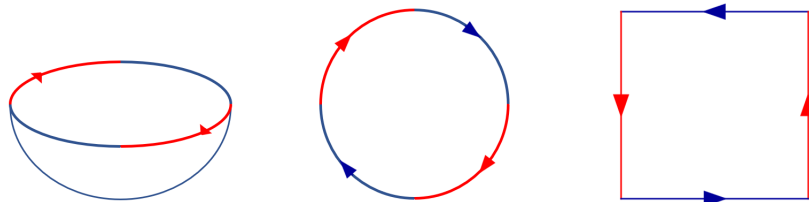
Pour (a) et (b), les structures de CW-complexes sont similaires à celle du tore \mathbb{T} (voir exercice 5).

Pour (c), l'espace \mathbb{RP}^2 est homéomorphe au quotient $\mathbb{S}^2/\{\pm 1\}$. Géométriquement, ce quotient s'identifie à un demi-hémisphère dont on aurait recollé le bord de sorte que $(0, y, z) \sim (0, -y, -z)$ pour tous $(y, z) \in \mathbb{S}^1$ en

coordonnées cartésiennes. On note $N := (1, 0, 0)$ le pôle nord de la sphère \mathbb{S}^2 . La projection stéréographique $p_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y, z) \mapsto \frac{1}{1-x}(y, z)$ est un homéomorphisme. Si on le restreint à l'hémisphère sud, il induit un homéomorphisme

$$\mathbb{S}^1 / \{\pm 1\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{D}^2 / \{(x, y) \sim (-x, -y) \mid (x, y) \in \partial \mathbb{D}^2\}.$$

Le choix d'un homéomorphisme entre le disque et le carré permet ensuite de conclure.



Exercice 5. Produits de CW-complexes ***

Voir [1, page 524]

Références

[1] A. Hatcher. *Algebraic Topology*, Copyright © 2002 by Cambridge University Press.
<http://pi.math.cornell.edu/hatcher/AT/AT.pdf>