

## TD11 : Homologie singulière II

Applications du cours ★ à préparer en l'avance et corriger en début de séance  
 Pour s'entraîner et approfondir ★★ à traiter pendant la séance  
 Pour aller plus loin ★★★ facultatifs

### Exercice 1. Calculs d'homologie ★

1. **Bouquet d'espaces.** Soient  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  deux espaces topologiques correctement pointés. Calculer  $H_n(X \vee Y)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  en fonction des groupes d'homologie de  $X$  et de  $Y$ .
2. **Suspension.** Soit  $X$  un espace topologique. On rappelle que son cône  $CX$  est l'espace quotient  $X \times I / X \times \{1\}$ , et la suspension  $SX$  de  $X$  est l'espace quotient  $CX / (X \times \{0\})$ . Calculer l'homologie de  $SX$  en fonction de l'homologie de  $X$ .
3. **Tore et bouquets de sphères** Montrer que le tore  $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  a les mêmes groupes d'homologie singulière que le bouquet  $B = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$  mais que ces deux espaces ne sont pas homotopiquement équivalents.
4. **La bouteille de Klein** Calculer les groupes d'homologie de la bouteille de Klein.
5. **L'espace privé d'un cercle** Calculer l'homologie du complémentaire d'un cercle dans  $\mathbb{R}^3$ .
6. **Parachute.** Calculer l'homologie du « parachute » obtenu en recollant les trois sommets de  $\Delta^2$ .

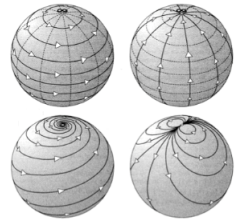


### Exercice 2. Degré d'une application ★

Soit  $n \geq 1$  et  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  une application continue. On définit le degré de  $f$  est comme le nombre entier  $\deg(f)$  tel que, pour tout  $z \in H_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z})$ , on ait  $f_*(z) = \deg(f)z$ .

1. Montrer que cette définition du degré coïncide avec celle de l'exercice 2 du TD3 et que les résultats suivants sont encore vrais :
  - (a)  $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$ .
  - (b) Deux applications sont homotopes alors elles ont le même degré.
  - (c) Si  $\deg(f) \neq 0$  alors  $f$  est surjective. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  une application continue sans point fixe. Montrer que  $\deg f = (-1)^{n+1}$ .  
*Indice.* On pourra montrer que toute application continue, sans point fixe est homotope à l'application antipodie.
3. Montrer que pour toute application continue,  $f : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$ , sans point fixe, il existe  $x_0 \in \mathbb{S}^n$  tel que  $f(x_0) = -x_0$ . En déduire qu'il n'existe pas d'application continue,  $f : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$ , telle que  $x$  est orthogonal à  $f(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{S}^{2n}$ .
4. Soit  $G$  un groupe non-trivial agissant librement sur  $\mathbb{S}^{2n}$  par homéomorphismes. Montrer que  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
5. **Champs de vecteurs.**
  - (a) On suppose  $n$  impair. Montrer qu'il existe sur  $\mathbb{S}^n$  un champ de vecteurs tangents continu ne s'annulant pas.
  - (b) Montrer le théorème de la « boule chevelue » : tout champ de vecteurs tangents continu sur  $\mathbb{S}^n$  avec  $n$  pair s'annule en au moins un point.

*Remarque.* On note  $\rho(n)$  le nombre maximum de champs de vecteurs tangents à la sphère  $\mathbb{S}^n$  linéairement indépendants en chaque point. D'après un théorème de Hurewicz, Radon, Eckman et Adams, ce nombre peut être déterminé de façon explicite : si l'on décompose l'entier  $n$  en  $n = (2a + 1)2^b$  avec  $b = c + 4d$  et  $0 \leq c \leq 3$ , on montre que  $\rho(n) + 1 = 2^c + 8d$ .



### Exercice 3. Le théorème de Brouwer et ses applications ★★

**Théorème de Brouwer :** Soit  $n \geq 0$ . Toute application continue  $D^n \rightarrow D^n$  de la boule de dimension  $n$  dans elle-même, avec  $n \geq 0$ , a un point fixe.

1. Montrer le théorème de Brouwer.

*Indice :* Dans le cas  $n \geq 1$ , on pourra raisonner par l'absurde en considérant une application  $f : D^n \rightarrow D^n$  qui n'a pas de point fixe et en déduire une rétraction de  $D^n$  sur son bord  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

2. Soit  $f : D^n \rightarrow D^n$  une application continue. Montrer qu'il existe un point  $x \in D^n$  tel que  $f(x) = 2x$ .
3. Montrer que toute application continue, homotopiquement triviale,  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ , admet un point fixe.
4. Soient  $f_1, \dots, f_n : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ , des fonctions continues telles que  $f_i(x) \geq 0$ , en tous les points  $x$  dont la  $i$ -ième coordonnée vaut 0, et  $f_i(y) \leq 0$ , en tous les points  $y$  dont la  $i$ -ième coordonnée vaut 1. Alors, il existe un point  $(a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$  en lequel toutes les fonctions  $f_i$  s'annulent.
5. Une matrice réelle  $A = (a_{ij})$  est dite *non-négative* si  $a_{ij} \geq 0$ , pour tout couple  $(i, j)$ .  
Montrer que toute matrice de  $M_n(\mathbb{R})$ , non négative et inversible, a une valeur propre réelle  $\lambda > 0$ , admettant un vecteur propre  $(a_1, \dots, a_n)$ , avec  $a_i \geq 0$  pour tout  $i$ .

### Exercice 4. Produit de sphères ★★

Soient  $n$  et  $m$  deux entiers naturels. Calculer les groupes d'homologie du produit  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ .

### Exercice 5. Homologie singulière de la surface de genre $g$ ★★★

1. Soit  $X_g$  une sphère dont on a retiré  $2g$  ouverts disjoints  $D_i^2$  homéomorphes au disque  $D^2$ ,  $1 \leq i \leq 2g$ . Calculer l'homologie de  $X_g$ , ainsi que l'application induite en homologie par

$$\bigsqcup_{i=1}^{2g} \partial D_i^2 \hookrightarrow X_g .$$

2. En utilisant la question précédente, calculer les groupes d'homologie de  $S_g$ , pour  $g \geq 1$ .

*Remarque.* Nous verrons dans le TD suivant sur l'homologie cellulaire, une autre manière de calculer l'homologie de n'importe quelle surface.

3. Soient  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  et  $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$  deux ensembles de points distincts de  $S_g$ .
  - (a) Calculer l'homologie de  $S_g \setminus X$ , le complémentaire de  $X$ .
  - (b) Calculer l'homologie du quotient  $S_g/Y$ .
  - (c) Calculer l'homologie de  $(S_g \setminus X)/Y$ .

### Exercice 6. Homologie de quelques espaces « pathologiques » ★★★

1. Calculer l'homologie de la droite à deux origines, et plus généralement de la droite à  $n$  origines.
2. Calculer l'homologie de l'adhérence dans  $\mathbb{R}^2$  du graphe de la fonction  $\sin(1/x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ .

