TD12 : Homologie cellulaire

Applications du cours $\star$	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir $\star\star$	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin $\star\star\star$	*facultatifs*

Exercice 1. Homologie cellulaire de quelques espaces $\star$

Soient R un groupe abélien et $n \geq 0$. Calculer l'homologie à coefficients dans R des espaces suivants :

1. La sphère $\mathbb{S}^n$,
2. Les espaces projectifs complexes $\mathbb{CP}^n$ et $\mathbb{CP}^\infty$,
3. L'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ et $\mathbb{RP}^\infty$,
4. La surface S_g de genre $g \geq 1$. En déduire l'homologie du tore $\mathbb{T}$.
5. Trouver deux espaces qui ont même homologie à coefficients dans $\mathbb{Q}$ mais pas à coefficients dans $\mathbb{Z}$,
6. Trouver deux espaces qui ont même homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais pas à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 2. Caractéristique d'Euler $\star\star$

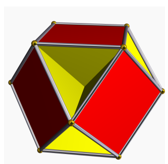
Soit X un CW-complexe fini. Pour tout $k \geq 0$, on note c_k le nombre de k-cellules de X. La *caractéristique d'Euler* de X est l'entier $\chi(X) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i c_i$.

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Montrer que $\chi(X)$ peut également être calculée par la formule
$$\chi(X) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_F H_i(X;\mathbb{K}).$$
2. Calculer la caractéristique d'Euler des surfaces S_g et S'_g pour tout $g \geq 0$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les entiers g et h pour qu'il existe un revêtement de S_g par S_h.
4. On suppose que le CW-complexe fini X s'écrit comme l'union de deux sous-complexes A et B. Montrer que
$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$
5. Soient X et Y des CW-complexes finis. Expliquer comment $X \times Y$ peut être muni d'une structure de CW-complexe fini, et montrer que $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

Exercice 3. Homologie cellulaire et produit $\star\star$

Soient X et Y deux CW-complexes. On suppose que X ou Y est localement fini (par exemple que l'un des deux est compact).

1. Construire une structure de CW-complexe sur le produit $X \times Y$.
2. Montrer que l'on a un isomorphisme naturel au niveau des complexes de chaînes cellulaires
$$C_\bullet^{cw}(X \times Y) \cong C_\bullet^{cw}(X) \otimes C_\bullet^{cw}(Y)$$
3. Calculer l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$ pour $m, n \geq 1$.



Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à coline.emprin@ens.psl.eu, ou venir me voir au bureau T12.

Exercice 4. Espaces de Moore ⋆⋆

Étant donnés un groupe abélien G et un entier $n \geq 1$, on appelle *espace de Moore* pour (G, n) un CW-complexe X tel que $H_n(X, \mathbb{Z}) \simeq G$ et $\tilde{H}_i(X) = 0$ pour $i \neq n$.

1. Construire un espace de Moore pour $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et n quelconque.
2. Construire un espace de Moore pour G abélien de type fini et n quelconque.
3. Construire un espace de Moore pour G et n quelconques.
4. Soient $(G_i)_{i\geq 1}$ des groupes abéliens. Construire un espace topologique connexe par arcs X tel que $H_i(X, \mathbb{Z}) = G_i$ pour tout $i \geq 1$.

Exercice 5. Points antipodaux ⋆⋆⋆

Calculer l'homologie des espaces suivants :

1. Le quotient de $\mathbb{S}^2$ obtenu en identifiant les points antipodaux de son équateur.
2. Le quotient de $\mathbb{S}^3$ obtenu en identifiant les points antipodaux de son équateur $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$.