TD2 : CW-complexes

Applications du cours ⋆	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir ⋆ ⋆	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin ⋆ ⋆ ⋆	*facultatifs*

Exercice 1. Premiers exemples de CW-complexes ⋆

1. Soit $A \subset X$ un sous-ensemble d'un espace topologique X. On considère l'inclusion canonique $A \hookrightarrow X$ et l'application constante $A \to *$. Montrer que le recollement $X \cup_A *$ est homéomorphe à X/A.
2. Soit $n \geq 0$. Est-ce que $\mathbb{R}^n$ admet une structure de CW-complexe ? De CW-complexe fini ?
3. Soit $n \geq 1$. Montrer que $\mathbb{S}^n$ admet une structure de CW-complexe
   (a) avec seulement deux cellules ;
   (b) dont le k-squelette soit homéomorphe à $\mathbb{S}^k$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.
4. Munir le tore $\mathbb{T}$ d'une structure de CW-complexe.

Exercice 2. Espaces projectifs ⋆ ⋆

Soit K un corps (on supposera ici que $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'espace $K\mathbb{P}^n$ est défini comme le quotient de $K^{n+1}\backslash\{0\}$ par l'action du groupe multiplicatif K^* agissant par homothéties. Pour tout $(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1}\backslash\{0\}$, on note $[x_0 : \ldots : x_n]$ son image dans $K\mathbb{P}^n$. On définit $K\mathbb{P}^\infty$ comme l'union $\bigcup_{n\geq 0} K\mathbb{P}^n$.

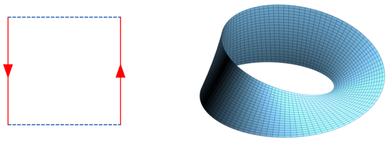
1. (a) Le sous-groupe $\{\pm 1\}$ de $\mathbb{R}^*$ agit sur $\mathbb{S}^n$ par multiplication. Montrer que le quotient $\mathbb{S}^n/\{\pm 1\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$.
   (b) Le sous-groupe $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{C}$ constitué des nombres complexes de module 1 agit sur $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par multiplication. Montrer que le quotient $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.
   (c) En déduire que $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ et $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ sont compacts.
2. Montrer que $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$ et que $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.
3. Munir les espaces $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ et $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ pour $n \geq 0$, ainsi que $\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$ et $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ d'une structure de CW-complexe.
4. (a) Pour $n \geq 1$, montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} K^n & \to & K\mathbb{P}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & [1 : x_1 : \ldots : x_n] \end{array}$$
   définit un homéomorphisme entre K^n et un ouvert U_0 de $K\mathbb{P}^n$ que l'on explicitera.
   (b) En déduire que $K\mathbb{P}^n$ admet un recouvrement par $n+1$ ouverts homéomorphes à K^n et que le complémentaire de chacun de ces ouverts est homéomorphe à $K\mathbb{P}^{n-1}$.

Exercice 3. Propriétés des CW-complexes ⋆ ⋆

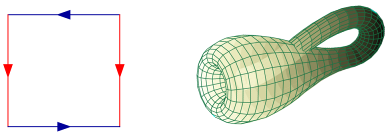
1. Soit X un CW-complexe, et soit C une cellule de dimension n de X. Considérons une application caractéristique $f : \bar{D}^n \to X$ de C. Montrer que l'adhérence de C dans X coïncide avec $f(\bar{D}^n)$.
2. Soit X un CW-complexe, et soit $k \geq 0$ un entier. Montrer que le k-squelette X_k de X est un sous-complexe de X.
3. Soit X un CW-complexe. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, l'espace quotient X_k/X_{k-1} est soit un point, soit homéomorphe à un bouquet de sphères de dimension k.
4. Montrer qu'un CW-complexe est
   (a) normal, et en particulier séparé.
   (b) compact si et seulement s'il est fini.
   (c) connexe par arcs si et seulement si son 1-squelette l'est

Exercice 4. Les différents quotients du carré ⋆⋆

1. Le ruban de möbius $\mathbb{M}$ est défini comme l'espace topologique quotient de $[0,1]\times[0,1]$ par l'identification $(x,0)\sim(1-x,1)$, pour tous $x\in[0,1]$. Munir $\mathbb{M}$ d'une structure de CW-complexe.



2. La bouteille de Klein $\mathbb{B}$ est l'espace topologique quotient de $[0,1]\times[0,1]$ par l'identification $(x,0)\sim(x,1)$ et $(0,y)\sim(1,1-y)$ pour tous $x,y\in[0,1]$. Munir $\mathbb{B}$ d'une structure de CW-complexe.



3. Montrer que $\mathbb{RP}^2$ est homéomorphe à l'espace topologique quotient de $[0,1]\times[0,1]$ par l'identification $(x,0)\sim(1-x,1)$ et $(0,y)\sim(1,1-y)$ pour tous $x,y\in[0,1]$. En déduire une structure de CW-complexe sur $\mathbb{RP}^2$.

Exercice 5. Produits de CW-complexes ⋆⋆⋆

Soient X et Y deux CW-complexes.

1. Est-ce que le produit cartésien $X\times Y$ muni de la topologie produit est toujours un CW-complexe ?
2. Que se passe t-il si X et Y sont localement compacts ? Si X ou Y est localement fini ?