TD4 : Le groupe fondamental

Applications du cours ⋆	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir ⋆ ⋆	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin ⋆ ⋆ ⋆	*facultatifs*

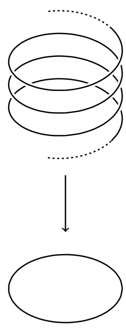
Exercice 1. Groupe fondamental d'un groupe topologique ⋆

1. Principe de Eckmann-Hilton : Soit X un ensemble. On suppose que X est équipé de deux produits, c'est-à-dire de deux applications $* : X \times X \to X$ et $\circ : X \times X \to X$ vérifiant les conditions suivantes :
   (i) Chaque loi admet une unité 1_* et $1_\circ$, respectivement.
   (ii) L'application $* : X \times X \to X$ est compatible avec l'opération $\circ$, c'est-à-dire :
   $$(x \circ x') * (y \circ y') = (x * y) \circ (x' * y').$$
   Montrer que les deux applications produits sont égales, et qu'elles définissent une structure de monoïde commutatif sur X.
2. Montrer que le groupe fondamental d'un groupe topologique est abélien. (On rappelle qu'un groupe topologique est un espace topologique muni d'une loi de groupe pour laquelle la multiplication et le passage à l'inverse sont continus).

Exercice 2. Le groupe fondamental du cercle ⋆

Le but de cet exercice est de calculer le groupe fondamental du cercle unité $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. On note I l'intervalle $[0, 1]$. On considère l'application exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, définie par $\exp(t) = e^{2i\pi t}$.
Soit $\gamma : I \to \mathbb{S}^1$ un lacet basé en 1 dans $\mathbb{S}^1$.

1. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{Z}$, il existe un unique chemin $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}$ tel que $\exp \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et $\tilde{\gamma}(0) = x_0$. Le chemin $\tilde{\gamma}$ s'appelle un *relèvement* de γ.
2. Montrer que $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$ est un nombre entier qui ne dépend pas du choix de point de départ de $\tilde{\gamma}$. La différence $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$ s'appelle le *degré* de γ.
3. Pour tout entier n, on note $\gamma_n : I \to \mathbb{S}^1$ le lacet définit par $\gamma_n(t) = e^{2i\pi nt}$. Calculer le degré de γ_n.
4. Soient γ_1 et γ_2 deux lacets homotopes de base 1 dans $\mathbb{S}^1$. Montrer que γ_1 et γ_2 ont le même degré.
   On admettra le lemme suivant qui sera démontré dans la partie sur les revêtements.
   Lemme (Relèvement des homotopies) : Soient γ_1 et γ_2 deux lacets de $\mathbb{S}^1$ basés en x_0 et homotopes à extrémités fixées via $H : I^2 \to \mathbb{S}^1$. Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe un unique relèvement $\tilde{H} : I^2 \to \mathbb{R}$ tel que $\exp \circ \tilde{H} = H$, et $\tilde{H}(0, 0) = y_0$.
5. On considère l'application $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}$ qui associe à tout élément $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ le degré de γ. Montrer que cette application est bien définie et est un isomorphisme de groupes.



Exercice 3. Degré d'une application ⋆

1. Soit $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ une application continue et soit $x \in \mathbb{S}^1$. On note $n_x(f) \in \mathbb{Z}$ le nombre tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{S}^1, x) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\deg"'] & \pi_1(\mathbb{S}^1, f(x)) \arrow[d, "\deg"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "\times n_x(f)"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

   (a) Montrer que pour tout chemin d'origine y et d'extrémité x, on a un diagramme commutatif de morphisme de groupes (où $\phi_\gamma([\alpha]) = [\gamma^{-1}\alpha\gamma]$)

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{S}^1, x) \arrow[rr, "\phi_\gamma"] \arrow[dr, "\deg"'] & & \pi_1(\mathbb{S}^1, y) \arrow[dl, "\deg"] \\
& \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

   (b) Montrer que le nombre n_x est indépendant de x. On l'appelle le degré de f, et on le note $\deg(f)$.

2. Montrer que $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.
3. Montrer que deux applications sont homotopes si, et seulement si elles ont le même degré.
4. Montrer que si $\deg(f) \neq 0$ alors f est surjective. La réciproque est-elle vraie ?
5. Montrer que si f est injective alors $|\deg(f)| = 1$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4. Théorème de Borsuk-Ulam ⋆ ⋆

Le théorème de Borsuk-Ulam dit que pour tout $n \geq 1$ et pour toute application continue $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$, il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

1. Prouver le théorème pour $n = 1$.
2. On souhaite montrer le théorème pour $n = 2$. On raisonne par l'absurde et on suppose donc qu'il existe une application $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui vérifie, pour tout x, $f(x) \neq f(-x)$.
   (a) Montrer que si $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ vérifie $g(-x) = -g(x)$ alors g est de degré impair.
   (b) Soit l'application $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ définie par

$$g : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$

   Observer que $g(-x) = -g(x)$ et en déduire le théorème pour $n = 2$ en considérant $g \circ \iota : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ où ι est l'inclusion de $\mathbb{S}^1$ comme équateur dans $\mathbb{S}^2$.

3. Montrer le théorème de Lusternik-Schnirelmann : Soient A, B, C trois fermés de $\mathbb{S}^2$ dont la réunion recouvre $\mathbb{S}^2$. Montrez que l'un des fermés contient deux points antipodaux.

Exercice 5. Point base et groupe d'homotopie d'un produit ⋆ ⋆

1. On suppose que X est connexe par arcs. Soient x_0 et x_1 des points de X. Montrer que les groupes $\pi_k(X, x_0)$ et $\pi_k(X, x_1)$ sont isomorphes pour tous $k \geq 0$.
2. Soient (X, x_0) et (Y, y_0) des espaces topologiques pointés, et soit $k \geq 1$ un nombre entier. Montrer que

$$\pi_k(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_k(X, x_0) \times \pi_k(Y, y_0).$$

Exercice 6. Sphéroïdes $\star\star$

Soit (X, x_0) un espace topologique pointé, et soit $k \geq 1$ un nombre entier.

1. Soit $s_0 \in \mathbb{S}^k$ un point de la sphère $\mathbb{S}^k$. Décrire l'opération de groupe sur $\pi_k(X, x_0)$ en termes des applications $(\mathbb{S}^k, s_0) \to (X, x_0)$.
2. Si $k \geq 2$, montrer que le groupe $\pi_k(X, x_0)$ est abélien.

Exercice 7. Groupe fondamental de certains groupes linéaires $\star\star$

1. Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer le nombre de composantes connexes des groupes suivants : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que l'application $SU_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ qui à une matrice associe sa première colonne induit un homéomorphisme entre $SU_2(\mathbb{C})$ et $\mathbb{S}^3$.
3. En déduire le groupe fondamental des groupes topologiques $SU_2(\mathbb{C})$, $U_2(\mathbb{C})$ et $GL_2(\mathbb{C})$.
4. Calculer le groupe fondamental de $SO_2(\mathbb{R})$, de $GL_2(\mathbb{R})_+$ (composante connexe de $GL_2(\mathbb{R})$ formée des matrices de déterminant positif) et de $GL_2(\mathbb{R})_-$ (composante connexe de $GL_2(\mathbb{R})$ formée des matrices de déterminant négatif).

Exercice 8. Homotopie libre $\star\star\star$

Soit X un espace topologique non vide et connexe par arcs, et soit x un point de X. On appelle *lacet libre* dans X une application continue $f : [0,1] \to X$ telle que $f(0) = f(1)$. Deux lacets libres f_0 et f_1 sont dits *librement homotopes* s'il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que, pour tout $t \in [0,1]$, on ait $H(t,0) = f_0(t)$, $H(t,1) = f_1(t)$, et $H(0,t) = H(1,t)$. Montrer que l'ensemble des classes d'homotopie libre est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de $\pi_1(X, x)$.

Exercice 9. Théorème de Brouwer $\star\star\star$

Soit $n \geq 1$. On note $\mathbb{D}^n$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. Le théorème de Brouwer dit que toute application continue $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ admet un point fixe.

1. Prouver le théorème pour $n = 1$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de rétraction $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ et en déduire le théorème pour $n = 2$.
3. Expliquer pourquoi le théorème de Brouwer est équivalent au résultat suivant : soit Δ^n un n-simplexe. Alors toute fonction $f : \Delta^n \to \Delta^n$ admet un point fixe.
4. Une *triangulation* de Δ^2 est la donnée d'un ensemble fini S de points de Δ^2 contenant les sommets de Δ^2, ainsi que d'un ensemble fini T de triangles de sommets appartenant à S, d'intérieurs disjoints, recouvrant Δ et telle que l'intersection de deux tels triangles soit ou bien vide, ou bien un côté de chacun des deux, ou bien un sommet de chacun des deux.
   On considère une triangulation (S,T) d'un 2-simplexe Δ^2 (que l'on voit comme un triangle $A_1A_2A_3$).
   Un *coloriage de Sperner* est une fonction $c : S \to \{1,2,3\}$ telle que
   — Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $c(A_i) = i$.
   — Pour tout $v \in S$ appartenant au côté A_iA_j, $c(v) \in \{i,j\}$.
   Montrer que pour tout coloriage de Sperner c il existe nécessairement un triangle $B_1B_2B_3 \in T$ tel que $c(\{B_1, B_2, B_3\}) = \{1,2,3\}$.
5. On se propose de donner une autre démonstration du théorème de Brouwer. Soit $f : \Delta^2 \to \Delta^2$ une fonction continue (supposée sans point fixe). Expliquer comment on peut utiliser f pour munir toute triangulation (S,T) de Δ^2 d'un coloriage de Sperner. En prenant des triangulations de diamètres de plus en plus petits, aboutir à une contradiction.