$\mathbb{R}$ structure o-minimale.

son graphe est définissable

**Lemme 17** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définissable, $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que $\forall x \in I$ on a $f(x) > x$. Alors il existe $d \in I$ tel que l'ensemble $\{x < d \mid f(x) > d\}$ est infini.

Intervalle = intervalle ouvert non vide avec extremités dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

**Dém** On écrit $I = (a,b)$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soit

$B = \{x \in I \mid \forall y \in (a,x),\ f(y) < f(x)\}$.

**Cas 1** $B$ est infini.

Alors $B$ contient un intervalle ouvert $J$. Prenons $c \in J$, soit $d = f(c) > c$. Alors $J \cap (c,d)$ est infini, tous ses éléments satisfont $f(x) > d \overset{=f(c)}{}$, par définition de $B \supset J$.

**Cas 2** $B$ est fini. (ou $b$ si $B = \emptyset$)

Soit $b_0 = \min B$. Alors $\forall t \in (a, b_0)$ il existe $t' < t$ dans $I$ tel que $f(t') \geq f(t)$. Si $c \in (a, b_0)$ alors : $f(c) > c$, et on construit une suite décroissante (stricte) $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $I$, avec $t_0 = c$, telle que $f(t_{i+1}) \geq f(t_i) > c$. Ce qui donne le résultat

**Corollaire 18** (Théorème de Ramsey définissable) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, tel que $I^2 (= I \times I) = X_1 \cup \dots \cup X_r$, avec les $X_i$ définissables. Alors il existe un intervalle ouvert $\emptyset \neq J \subseteq I$ et $i \in \{1, \dots, r\}$ tels que si $a < b \in J$ alors $(a,b) \in X_i$.

**Dém** Par o-minimalité, pour tout $a \in I$ il existe $a' > a$ et $i = i(a) \in \{1, \dots, r\}$ tel que $\{a\} \times (a, a') \subseteq X_i$. En effet $I = \bigcup_{i=1}^{r} X_i(a)$, où $X_i(a) = \{b \in I \mid (a,b) \in X_i\}$.

Par o-minimalité, un des $i^{-1}(j)$ est infini, et donc il existe un intervalle ouvert $J' \subseteq I$ et $i_0 \in \{1, \dots, r\}$ tels que $\forall a \in J'$, $i(a) = i_0$. Si $a \in J'$ on pose $s(a) =$

$\sup\{s \in I \mid \{a\} \times (a,s) \subseteq X_{i_0}\}$

Alors $s(x) > x \quad \forall x \in J'$, et par o-minimalité et le lemme 17, il existe un intervalle ouvert non vide $J \subseteq J'$ et $d > J$ tel que pour tout $x \in J$ on a $s(x) > d$. Alors si $a<b$ sont dans $J$, comme $s(a) > b$, on a $(a,b) \in X_{i_0}$.

Déf Une fonction $f : S^{\subset \mathbb{R}^n} \longrightarrow U^{\subset \mathbb{R}^m}$ est définissable si son graphe est définissable.

Remarque : Le Corollaire 18 est vrai si on remplace $I^2$ par $I \times J$, $J$ un intervalle ouvert.

Remarque bis Nous avons utilisé la chose suivante :
Soit $I$ un intervalle ouvert, $a \in I$, et $Y_i$, $i = 1, \dots, r$ une partition définissable de $I$. Alors il existe $i$, et $a' \in I$, $a' > a$, tels que $(a, a') \subset Y_i$.
On utilise pour cela la description de la partition (Supposons $I$ connexe) : il existe $c_0, c_1, \dots, c_k, c_{k+1}$, avec $(c_i, c_{i+1}) \subseteq I$ pour $i = 0, \dots, k$, $c_1, \dots, c_k \in I$, $I = (c_0, c_{k+1})$ et tels que chaque $(c_i, c_{i+1})$ est contenu dans un (unique) $Y_j$. Soit $i$ l'unique indice tel que $a = c_i$ ou bien $a \in (c_i, c_{i+1})$.

Théorème de monotonicité 19 Soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction définissable. Alors il existe $a_0 = a < a_1 < \dots < a_{k+1} = b$ tels que sur chaque $(a_i, a_{i+1})$, la fonction $f$ est ou bien constante, ou bien strictement monotone et continue. (On peut avoir $a = -\infty$, $b = +\infty$)

Dém

Posons

$A_1 = \{x \in I \mid f$ est loc$^t$ constante en $x\}$

$A_2 = \{x \in I \mid f$ est strictement croissante sur un voisinage de $x\}$

$A_3 = \{x \in I \mid f$ est strictement décroissante sur un voisinage de $x\}$.

On montre alors que $I \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ est fini. Sinon il contiendrait un intervalle ouvert non vide $J$.

Soient $X_1 = \{(x,y) \in J^2 \mid f(x) = f(y)\}$,

$X_2 = \{(x,y) \in J^2 \mid f(x) < f(y)\}$ et $X_3 = \{(x,y) \in J^2 \mid f(x) > f(y)\}$

Ils forment une partition de $J^2$. Par le corollaire, il existe $J_0 \subseteq J$ intervalle ouvert, et $i \in \{1,2,3\}$, tel que si $a < b$ sont dans $J_0$ alors $(a,b) \in X_i$. Donc $J_0 \subseteq A_i$, contradiction.

Les $A_i$ sont ouverts et définissables.

On se réduit donc au cas où $f$ est localement constante, ou loc$^t$ strictement croissante, ou loc$^t$ strictement décroissante, sur l'intervalle $I = (a,b)$. Les trois cas se prouvent de la même façon, faisons le cas strictement croissant,

pour $c \in (a,b)$ on définit $s(c) = \sup\{x \in (c,b) \mid f$ est croissante sur $(c,x)\}$ et on montre que $s(c) = b$. Pareil pour $\inf\{x \in (a,c) \mid f$ croissante sur $(x,c)\}$

Le fait que $f$ soit continue est facile : $f$ est clairement injective. Donc $f(I)$ est infini, contient un intervalle ouvert $J \neq \emptyset$, et puisque $f$ est strictement croissante et $I$ est connexe, $f^{-1}(J)$ est un intervalle ouvert $\subseteq I$.
On va montrer que $\{x \in I \mid f$ n'est pas continue en $x\}$ est fini. Sinon, il contiendrait un intervalle ouvert $I_0$. Par ce que nous avons montré, $I_0$ contient un intervalle ouvert $I_1$ sur lequel $f$ définit un homeomorphisme avec $f(I_1)$. Cela contredit la définition de $I_0$.

Donc l'ensemble des points de $I$ où $f$ n'est pas continue est fini. On montre ensuite que si $f$ est loc$^t$ continue sur un intervalle ouvert, alors elle est continue. (Argument déjà utilisé : soit $c \in (a,b)$ ; on définit $s(c) = \inf\{x \in (a,b) \mid f$ est continue sur $(x,c]\}$ et on montre que $s(c) = a$. Pareil de l'autre côté.

<u>Corollaire</u>[20] Soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction définissable. On suppose qu'elle est bornée sur $(a,b)$, càd : il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in (a,b)$, $c < f(x) < d$. Alors $\lim_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim_{x \to b^-} f(x)$ existent, et sont dans $[c,d]$.

<u>Dém</u> Par le théorème de monotonicité, il existe $a_1 > a$ tel que $f$ est continue sur $(a,a_1)$, et constante, ou bien strictemet monotone. Si elle est constante c'est clair. Si elle est strictemet croissante alors on a $\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in (a,a_1)\}$