Notes du cours sur l'o-minimalité

(cours du 8 avril 2022. Les sections 4 et 5 sont en supplément)

Zoé Chatzidakis

1 Un peu d'histoire

Nous savons déjà que le corps ordonné des réels est une structure o-minimale (et en fait, tout corps réel clos). La question est de trouver d'autres structures o-minimales sur le corps des réels. On montre que malheureusement on peut avoir deux structures o-minimales sur le corps des réels, dont l'union n'engendre pas une structure o-minimale: il n'existe donc pas de structure "maximale o-minimale" sur le corps des réels. La notion de structure o-minimale date de 1985, et a été un peu changée : au départ, il n'y avait pas d'hypothèse sur l'ordre, il pouvait avoir des extrémités et ne pas être dense. Les résultats généraux que nous avons vu en classe ont été obtenus pendant la période 1985 – 1990. Voici une chronologie (incomplète) des structures o-minimales enrichisssant celle du corps des réels.

1.1. Les fonctions analytiques restreintes
La structure $\mathbb{R}_{an}$ (voir -ci dessous pour les définitions) a été étudiée par Gabrielov en 1968, sous une autre forme (les ensembles finiment sous-analytiques, donnant la structure $\mathbb{R}_{FS}$). Il suit de ses résultats que $\mathbb{R}_{FS}$ est o-minimale. Ce même résultat est ensuite obtenu par Denef et Van den Dries en 1988. Les résultats de Gabrielov permettent de trouver des sous-structures de $\mathbb{R}_{FS}$ dont la théorie est modèle complète: il suffit pour cela que la collection de fonctions analytiques (restreintes) servant à définir les ensembles qu'il considère, soit stable par dérivées partielles. Cela donne en particulier que les structures

$$(\bar{\mathbb{R}}, \exp \restriction [0,1]), \quad (\bar{\mathbb{R}}, \exp \restriction [0,1], \sin \restriction [0,2\pi], \cos \restriction [0,2\pi])$$

($\bar{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <)$ sont o-minimales et *modèle-complètes* (si $K \subset L$ satisfont les mêmes énoncés que la structure, alors $K \prec L$: toute formule à paramètres dans K qui est satisfaite dans L l'est aussi dans K. De façon équivalente : tout ensemble définissable est la projection d'un ensemble définissable sans quantificateurs).

1.2. Ajouter l'exponentielle
La modèle complétude et l'o-minimalité de $(\bar{\mathbb{R}}, \exp \restriction [0,1])$ avaient été indépendamment montrées par Wilkie en 1992 (les logiciens ne connaissaient pas encore les résultats de Gabrielov.) Peu après il étend son résultat à l'exponentielle totale: $(\bar{\mathbb{R}}, \exp)$ est o-minimale et modèle-complète. Ces deux résultats sont finalement publiés en (1996).

La question de la décidabilité de la a théorie de $\mathbb{R}_{exp}$ se pose. En particulier il faut pouvoir décrire les équations satisfaites par les éléments de la sous-structure engendrée par $0, 1$ (ou plutôt, le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ clos par l'exponentielle et par le log.) Est-ce que $\exp(\exp(1))$ est algébrique. Macintyre et Wilkie montrent que si l'on suppose la conjecture de Schanuel pour les réels, alors la théorie de $\mathbb{R}_{\exp}$ est décidable.
Conjecture de Schanuel. Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors

$$\mathrm{tr.deg}(\mathbb{Q}(a_1, \dots, a_n, \exp(a_1), \dots, \exp(a_n))) \geq n.$$

L'o-minimalité de la structure $\mathbb{R}_{an,\exp}$ est ensuite obtenue en 1994 par Van den Dries et Miller, puis (avec une preuve différente) par Van den Dries, Macintyre et Marker.

1.3. Les fonctions et chaînes Pfaffiennes

Une source importante de structures o-minimales est obtenue en utilisant les chaînes Pfaffiennes. SOit $U \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert. Une suite $(f_1, \dots, f_n)$ de fonctions C^∞, $f_i : U \to \mathbb{R}$, est une *chaîne Pfaffienne* si pour tout $i \geq 1$ et pour tout $1 \leq j \leq m$,

$$\frac{\partial^j f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, f_1(\bar{x}), \dots, f_i(\bar{x})].$$

Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est *Pfaffienne* si elle fait partie d'une chaîne Pfaffienne. Cette notion a été introduite par Khovanskii dans les années 1970, et il a montré des résultats de finitudes d'ensembles de zéros de fontions Pfaffiennes. Ses résultats sont d'ailleurs utilisés dans certaines preuves de Wilkie. Plusieurs résultats sont ensuite obtenus, probablement un des plus forts et le plus facile à comprendre est le suivant:
Théorème (Karpinski, Macintyre) (Je ne suis pas tout à fait sûre de l''enoncé ...) *Soit $\tilde{\mathcal{R}}$ une expansion o-minimale du corps ordonné $\mathbb{R}$. Then $\tilde{\mathcal{R}}_{\mathrm{Pfaff}}$ est o-minimale, où $\tilde{\mathcal{R}}_{\mathrm{Pfaff}}$ est obtenue en ajoutant au langage toutes les fonctions C^1 définie sur $\mathbb{R}^n$ (pour un n), et qui sont Pfaffiennes sur $\tilde{\mathcal{R}}$.*

Il manque quelques définitions. Une fonction est Pfaffienne sur $\tilde{\mathcal{R}}$ si elle fait partie d'une chaîne Pfaffienne sur $\tilde{\mathcal{R}}$. Une chaîne $(f_1, \dots, f_k)$ de fonctions C^1, $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, est Pfaffienne sur $\tilde{\mathcal{R}}$ si pour tout $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq m$, il existe une fonction $g_{i,j}$ définissable dans $\tilde{\mathcal{R}}$ telle que

$$\frac{\partial^j f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) = g_{i,j}(\bar{x}, f_1(\bar{x}), \dots, f_i(\bar{x})).$$

Une version plus forte est obtenue pratiquement en même temps par Speissegger : on ajoute des feuilles de Rolle.

Je devrais aussi mentionner que les résultats des théoriciens des modèles sur les structures o-minimales ont attiré beaucoup d'attention des géomètres réels. L'"école de Dijon" notamment, avec Lion, Moussu, Roche, Rolin, ... a été extrêmement active dans le domaine dans les années 1990 (et encore maintenant, d'ailleurs). Certains des résultats de Wilkie utilisent aussi des résultats antérieurs de Charbonnel.

2 La structure $\mathbb{R}_{an}$

Nous allons montrer, avec quelques boites noires, que $\mathbb{R}_{an}$ est o-minimale. Rappel:

$$\mathbb{R}_{an} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <, \tilde{f})_{m\in\mathbb{N}, f\in\mathbb{R}\{X_1,\ldots,X_m\}}$$

where $\mathbb{R}\{X_1, \ldots, X_m\}$ est l'anneau de éries formelles en $X_1, \ldots, X_m$ qui convergent sur un voisinage de $[-1, 1]^m =: I^m$, et

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I^m \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a aussi $\mathcal{L}_{an} = \{+, -, \cdot, 0, 1, <, \tilde{f}\}_{m\in\mathbb{N}, f\in\mathbb{R}\{X_1,\ldots,X_m\}}$

Définition 2.1. (i) $X \subseteq \mathbb{R}^m$ est *semi-analytique en* $x \in \mathbb{R}^m$ si x a un voisinage ouvert U tel que $U \cap X$ est une union finie d'ensembles de la forme

$$\{y \in U \mid f(y) = 0, g_1(y) > 0, \ldots, g_k(y) > 0\}$$

où f et les g_i sont analytiques.

(ii) $X \subseteq \mathbb{R}^m$ est *semi-analytique* s'il est semi-analytique en chaque point de $\mathbb{R}^m$. Il suffit de le vérifier pour les $x \in \mathrm{cl}(X)$.

(iii) $X \subseteq \mathbb{R}^m$ est *sous-analytique en* $x \in \mathbb{R}^m$ si x a un voisinage ouvert U, et il existe un semi-analytique **borné** $S \subset \mathbb{R}^{m+n}$ tel que $U \cap X = \pi(S)$, où $\pi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ est la projection sur les m premières coordonnées.

(iv) $X \subseteq \mathbb{R}^m$ est *sous-analytique* s'il est sous-analytique en chaque point de $\mathbb{R}^m$.

Les semi-analytiques de $\mathbb{R}^m$ forment une algèbre de Boole, contenue dans la classe des sous-analytiques, qui est close par intersections et unions finies.

2.2. Propriétés importantes

(1) Les sous-analytiques de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$ sont exactement les semi-analytiques. Ce n'est pas vrai pour $m > 2$.

(2) Un semi-analytique **borné** n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, et chaque composante connexe est semi-analytique. (*Borné*: est contenu dans une boite (fermée) avec extrémités dans $\mathbb{R}$)

(3) Les sous-analytiques **bornés** de $\mathbb{R}^m$ sont exactement les $\pi(S)$, où S est un semi-analytique borné de $\mathbb{R}^{m+n}$. Un sous-analytique borné n'a donc qu'un nombre fini de composantes connexes, et elles sont sous-analytiques.

(4) Si $X \subset \mathbb{R}^m$ est sous-analytique, alors $\mathbb{R}^m \setminus X$ l'est aussi.

(5) La clôture d'un semi-analytique est semi-analytique. Et donc la clôture d'un sous-analytique est un sous-analytique.

(1), (2) et (5) sont prouvés par Lojasiewicz (1965, Notes IHES), (3) est facile, et (4) est dû à Gabrielov (1968). C'est (4) qui fera tout marcher (et (3)).

Définition 2.3. $X \subseteq \mathbb{R}^m$ est *finiment sous-analytique* si son image par l'application

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto \Big(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}}, \dots, \frac{x_m}{\sqrt{1+x_m^2}}\Big)$$

est un sous-analytique.

On remarque que l'application ci-dessus définit une bijection avec $(-1,1)^m$, et elle est analytique. Elle envoie $[-1,1]^m$ sur $[-1/2,1/2]^m$. Un ensemble finiment sous-analytique n'aura donc qu'un nombre fini de composantes connexes, et elles seront finiment sous-analytiques. On définit maintenant $\mathbb{R}_{FS} = (\mathbb{R}, X)_{m\in\mathbb{N}, X\subseteq\mathbb{R}^m \text{finiment sous-analytique}}$. On remarque que les graphes de l'addition, de la soustraction, de la multiplication sont finiment sous-analytiques (et même finiment semi-analytiques).

Théorème 2.4. *La structure $\mathbb{R}_{FS}$ est o-minimale.*

Démonstration. On a vu que $\mathbb{R}_{FS}$ contient les graphes des opérations d'anneau, et d'autre part, le résultat de Gabrielov (2.2(4) ci-dessus), nous donne que $\mathbb{R}_{FS}$ élimine les quantificateurs. En effet, si $X \subseteq \mathbb{R}^m$ est finiment sous-analytique, alors son complément l'est aussi. D'autre part il est clair que les finiment sous-analytiques sont clos par intersections et unions finies, et par projection. Par 2.2(3), les sous-ensembles définissables de $\mathbb{R}$ ont un nombre fini de composantes connexes, qui sont semi-analytiques, donc des intervalles ou des points.

2.5. On voit facilement que toute fonction $\tilde{f}$ de $\mathcal{L}_{an}$ est définissable dans $\mathbb{R}_{FS}$: Si ρ est l'application $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, alors $\rho(\Gamma(\tilde{f}))$ est analytique, et donc définissable dans R_{FS}. Il suit donc que $\mathbb{R}_{an}$ sera o-minimale, puisque tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ d/'efinissable dans $\mathbb{R}_{an}$ l'est dans $\mathbb{R}_{FS}$.
Nous allons maintenant montrer que tous les ensembles définissables dans $\mathbb{R}_{FS}$ sont aussi définissables dans $\mathbb{R}_{an}$. Pour cela, il suffit de montrer que les semi-analytiques bornés sont définissables dans $\mathbb{R}_{an}$. On remarque la chose suivante:
Soit f une fonction analytique, définie sur un fermé borné, disons une boîte fermée B. Chaque point $a \in B$ a un voisinage ouvert (petite boite ouverte B_a) sur lequel le développement de Taylor de f en a, noté $T_a(f)$, converge et définit f. Par compacité, un nombre fini de ces boites B_a suffit, disons $B_1, \dots, B_r$. Par o-minimalité, on peut supposer que $T_a(f)$ converge sur un voisinage de $\mathrm{cl}(B_i), i = 1, \dots, r$ (on diminue un peu les boîtes s'il le faut). Et maintenant, on définit une bijection affine entre la boite fermée $\mathrm{cl}(B_i)$ et I^m, ce qui donne le résultat.
Le fait qu'on puisse se restreindre à des fonctions dont le domaine est fermé borné, vient de 2.2(5). On en déduit que les sous-analytiques bornés sont bien définissables dans $\mathbb{R}_{an}$.

Dans [3], les auteurs donnent une axiomatisation de $T_{an} = \mathrm{Th}(\mathbb{R}_{an})$. Elle permettra ensuite de décrire les fonctions définissables.

2.6. L'axiomatisation de T_{an}. On considère les clôtures universelles des formules suivantes
(**AC1**) Pour $f, g \in \mathbb{R}\{X_1, \dots, X_m\}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\widetilde{f+g}(x) = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x), \ \widetilde{fg}(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$

$$\textstyle\bigwedge_i |x_i| \leq 1 \to \tilde{0}(x) = 0 \wedge \tilde{1}(x) = 1, \ \bigvee_i |x_i| > 1 \to \tilde{0}(x) = \tilde{1}(x) = 0.$$

(**AC2**) $\bigwedge_i |x_i| \leq 1 \to \tilde{X}_i = x_i$, $\bigvee_i |x_i| > 1 \to \tilde{X}_i = 0$.
(**AC3**) Si $f \in \mathbb{R}\{X_1, \dots, X_n\}$, et $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]$ sont tels que $g_i(0, 0, \dots, 0) = 0$ et $f(g_1 m \dots, g_n) \in \mathbb{R}\{X_1, \dots, X_m\}$ et $g(I_m) \subset I_n$ ($g = (g_1, \dots, g_n)$), alors

$$\bigwedge_i |x_i| \leq 1 \to \widetilde{f(g_1, \dots, g_n)}(x) = \tilde{f}(g_1(x), \dots, g_n(x)).$$

(**AC4**) Si $f, g \in \mathbb{R}\{X_1, \dots, X_m\}$, $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$, $a = (a_1, \dots, a_m) \in I^m$ sont tels que $g = T_a(f)(\epsilon X_1, \dots, \epsilon X_m)$ ($T_a(f)$ est le développement de Taylor de f en a ; cela nous dit que $T_a(f)$ converge sur un voisinage de $[-\epsilon, \epsilon]^m$), alors

$$(\bigwedge_i |x_i| \leq 1 \wedge \bigwedge_i |\tilde{a}_i + \tilde{\epsilon} x_i| \leq 1) \to \tilde{f}(\tilde{a}_1 + \tilde{\epsilon} x_1, \dots, \tilde{a}_m + \tilde{\epsilon} x_m) = \tilde{g}(x).$$

$\tilde{\epsilon}$ et $\tilde{a}_i$ sont les fonctions valant ϵ ou a_i sur I^m, et 0 en dehors.

Théorème 2.7. *La théorie T_{an} est axiomatisée dans le langage $\mathcal{L}_{an} \cup \{^{-1}\}$ par:*
(1) Les axiomes pour les corps ordonnés (cela inclut l'axiome définissant l'inverse: $\forall x\,(x \neq 0 \to x^{-1}x = 1) \wedge (x = 0 \to x^{-1} = 0)$).
(2) Les schémas d'axiomes universels (AC1) – (AC4).
(3) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, un axiome disant que tout élément positif a une racine n-ième.

Remarque 2.8. (1) La structure $\mathbb{R}_{an}$ élimine les quantificateurs dans le langage $\mathcal{L}_{an} \cup \{^{-1}\}$; la preuve est longue, j'en donnerai peut-être quelques ingrédients. Elle suit en fait d'un reśultat antérieur de Denef et Van den Dries, qui est le suivant :
On considère la structure obtenue sur l'intervalle $[-1, 1]$ ($\subset \mathbb{R}$) de la façon suivante :
pour toute fonction $f \in \mathbb{R}\{X_1, \dots, X_m\}$ **qui prend ses valeurs dans** $[-1, 1]$, on ajoute un symbole $\bar{f}$ au langage, et on l'interprète par f. De cette façon on obtient un langage $\mathcal{L}_{an,res}$. Notez que la multiplication est dans le langage, mais pas l'addition. On aura cependant la fonction $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2)/2$. L'axiomatisation de T_{an} a une généralisation à ce contexte, que je note $T_{an,res}$. On ajoute à $\mathcal{L}_{an,res}$ une fonction binaire D, interprétées par

$$D(x, y) = \begin{cases} x/y & \text{si } |x| \leq |y| \neq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème (Denef, van den Dries).Th($[-1, 1]$) *dans le langage $\mathcal{L}_{an,res} \cup \{D\}$ admet l'élimination des quantificateurs.*

La preuve du résultat de Denef et van den Dries est longue, et difficile. Elle contient quelques astuces, et utilise pas mal d'outils utiles en analyse (Théorèmes de Préparation et Division de Weierstrass par exemple). Il est assez clair que, étant donné un modèle

K de T_{an}, on peut définir dans K la $\mathcal{L}_{an,res}$-structure $[-1,1]_K$, et qu'elle sera un modèle de $T_{an,res}$. Réciproquement, en utilisant la fonction $\rho : x \mapsto x/\sqrt{1+x^2}$, on arrive à interpréter la $\mathcal{L}_{an} \cup \{^{-1}\}$-structure $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$. Van den Dries, Macintyre et Marker remarquent alors que la preuve de Denef et van den Dries passe aux modèles de $T_{an,res} \cup$ {axiome définissant D}. Et ils en déduisent leur résultat d'é.q. dans $\mathcal{L}_{an} \cup \{^{-1}\}$. (Cette dernière déduction consiste en des manipulations logiques, elle leur prend deux lignes, elle me prend deux pages). Le morceau difficile est donc la preuve de Denef-Van den Dries.

(2) Il suit maintenant que si $K \models T_{an}$, et L est une sous-structure de K (donc un sous-corps ordonné) dont les éléments positifs ont des racines n-ièmes, alors $L \models T_{an}$, et aussi $L \preceq K$ ($L \prec K$: Toute formule à paramètres dans L qui est satisfaite dans K l'est aussi dans L).

2.9. Description des fonctions définissables. On considère maintenant le langage $\mathcal{L}'_{an} = \mathcal{L}_{an} \cup \{^{-1}, \sqrt[n]{\ }, n \geq 2\}$, et on obtient le résultat suivant:

Corollaire 2.10. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définissable dans $\mathbb{R}_{an}$, alors il existe des termes $t_1, \dots, t_k$ du langage $\mathcal{L}'_{an}$ tels que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, il y a un i tel que $f(a) = t_i(a)$. C'est à dire, f est* définie par morceaux *par des $\mathcal{L}'_{an}$-termes. (Il existe une partition définissable du domaine de f, telle que sur chaque élément de la partition, f est donnée par un terme t_i).*

La démonstration suit du lemme suivant:

Lemme 2.11. *Soit T une théorie dans un langage $\mathcal{L}$, qui est universelle, complète et élimine les quantificateurs. Si K est un modèle, et f une fonction définissable dans K, alors f est définie par morceaux par des $\mathcal{L}(K)$-termes.*

Démonstration. Supposons que non, soit $\varphi(x)$ la $\mathcal{L}(K)$-formule définissant f et considérons l'ensemble suivant de formules (de $\mathcal{L}(K)$):

$$\Sigma(x) = \{\neg\varphi(x, t(x)) \mid t \text{ un terme de } \mathcal{L}(K)\}.$$

Alors cet ensemble de formules est finiment satisfaisable dans K, donc est réalisé dans une extension élémentaire M de K, par un uplet c. La sous-structure N de M engendrée par K et c est donc un modèle de T, et est une sous-structure élémentaire de M. Cependant, comme c réalise Σ, elle ne contient pas d'élément satisfaisant $\varphi(c, y)$, ce qui nous donne une contradiction. □

2.12. L'axiomatisation de $T_{an,exp}$
On considère le langage $\mathcal{L}_{an,exp} = \mathcal{L}_{an} \cup \{\exp\}$, et la théorie $T_{an,exp}$ obtenue en ajoutant à T_{an} les clôtures universelles des axiomes suivants:
(**E1**) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
(**E2**) $x < y \to \exp(x) < \exp(y)$
(**E3**) $x > 0 \to \exists y \ \exp(y) = x$
(**E4$_n$**) $x > n^2 \to \exp(x) > x^n$, pour $n \in \mathbb{N}^{>0}$.
(**E5**) $-1 \leq x \leq 1 \to \exp(x) = \widetilde{\exp}(x)$.
Si on agrandit le langage avec une fonction $\underline{\log}$, on rajoutera l'axiome suivant pour obtenir $T_{an,exp,log}$.
(**L**) $(x > 0 \to \exp(\underline{\log}(x)) = x) \wedge (x \leq 0 \to \underline{\log}(x) = 0$. L'axiome E3 devient inutile.

Théorème 2.13. (1) *$T_{an,exp,log}$ élimine les quantificateurs dans le langage $\mathcal{L}_{an} \cup \{\exp, \underline{\log}\}$.*
(2) *La théorie $T_{an,exp}$ est complète.*

Et de la même façon que pour T_{an}, on obtient que

Corollaire 2.14. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définissable dans $\mathbb{R}_{an,exp,log}$, alors f est donnée par morceaux par des $\mathcal{L}_{an,exp,log}$-termes.*

On remarque que les fonctions $^{-1}$ et $\sqrt[n]{\ }$ sont (presque) des termes: $x > 0 \to x^{-1} = \exp(-\underline{\log}(x))$, et $x > 0 \to \sqrt[n]{x} = \exp(\frac{1}{n}\underline{\log}(x))$.

3 Quelques ingrédients des boites noires

Nous voulons montrer que T_{an} élimine les quantificateurs dans le langage $\mathcal{L}_{an} \cup \{^{-1}\} =: \mathcal{L}_{an,^{-1}}$. Ce n'est pas exactement le résultat de Denef et Van den Dries, mais [3] prétend que c'est prouvé exactement de la même façon. On va essayer. Le contexte de [2] est de travailler à l'intérieur de I, et de montrer l'éq dans le langage $\mathcal{L}_{an} \cup \{D\}$, où $D(x, y) = x/y$ si $y \neq 0$ et $|x| \leq |y|$, et 0 sinon.

3.1. Lemme de base. *Soient $X = (X_1, \ldots, X_m)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ avec $n > 0$, et $\varphi(X, Y)$ une $\mathcal{L}_{an}$-formule sans quantificateurs. Alors il existe une $\mathcal{L}_{an,^{-1}}$-formule sans quantificateurs $\psi(X, Z_1, \ldots, Z_{n-1})$ telle que*
(1) $\mathbb{R} \models (\forall X(\exists Y\ \varphi(X, Y) \leftrightarrow \exists Z\ \psi(X, Z)$;
(2) *Dans ψ, la fonction $^{-1}$ n'est appliquée quà des termes ne contenant pas (du tout) les variables Z_i.*

3.2. Preuve de l'élimination des quantificateurs à partir du Lemme de base.
Donc à partir d'une $\mathcal{L}_{an}$-formule existentielle, nous obtenons une autre formule existentielle avec moins de quantificateurs, mais dans un langage plus grand. L'astuce est de faire l'induction sur n, pour tout m. On regarde d'abord les formules de $\mathcal{L}_{an,^{-1}}$ sans quantificateurs $\theta(X, Y)$, avec $^{-1}$ qui n'apparait jamais sur des termes contenant des Y_i; on la transforme en une $\mathcal{L}_{an}$-formule sans quantificateurs $\theta'(X, U, Y)$, qui est obtenue en replaçant chaque occurrence de $^{-1}$ par une nouvelle variable. Plus précisément :
A chaque terme $t(X)$ auquel $^{-1}$ est appliquée, on prend une nouvelle variable U_t. On associe aux termes t apparaissant dans θ des nouveau termes $t^\#$ définis par induction de la façon suivante: Si t est une variable ou une constante, alors $t^\# = t$; supposons $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ ($f \in \mathcal{L}_{an}$), alors $t^\# = f(t_1^\#, \ldots, t_n^\#)$; et enfin, si $t = s^{-1}$, alors $t^\# = U_s$. Ensuite la formule $\theta'(X, U, Y)$ est obtenue de la façon suivante:
$\bigwedge(t^\#(X, U') = 0 \wedge U_t = 0) \vee (t^\#(X, U') \neq 0 \wedge U_t t^\#(X, U') = 1) \wedge \tilde{\theta}(X, U, Y)$ où $\tilde{\theta}$ est obtenue de façon évidente à partir de θ, en remplaçant chaque $t(X)^{-1}$ par U_t. J'ai mis un U' dans $t^\#(X, U')$ pour insister sur le fait que U' est un sous-uplet de U, et en particulier ne contient pas U_t. On voit que les valeurs de U sont uniquement déterminées par celles de X. Et on a

$$\mathbb{R} \models \forall X, Y, U(\theta(X, Y) \leftrightarrow \theta'(X, U, Y)).$$

On s'aperçoit alors que le Lemme de base s'applique à ces formules: on trouve $\theta^*(X, U, Z) \in \mathcal{L}_{an,^{-1}}$, où $^{-1}$ ne concerne que des termes en (X, U), telle que

$$\mathbb{R} \models \forall X, U(\exists Y\ \theta'(X, U, Y)) \leftrightarrow (\exists Z\ \theta^*(X, U, Z).$$

Finalement, on obtient donc une formule sans quantificateur $\psi(X, W)$ telle que $\mathbb{R} \models \forall X, W\ (\psi(X, W) \rightarrow \rho(X, W))$ où $\rho(X, W)$ est une formule sans quantificateur exprimant chaque élément du uplet W comme un $\mathcal{L}_{an,^{-1}}$-terme en X. Et de plus on a

$$\mathbb{R} \models \forall X, W\ (\psi(X, W) \leftrightarrow \exists Y\ \varphi(X, Y)) >$$

Donc, on démarre avec une $\mathcal{L}_{an,^{-1}}$ formule sans quantificateurs $\theta(X, Y)$, avec $^{-1}$ seulement appliqué à des termes dans lesquels les Y_i n'apparaissent pas. Le lemme de base appliqué à $\theta'(X, U, Y)$ nous donne Z et ψ, avec $|Z| = |Y| - 1$, ψ une $\mathcal{L}_{an,^{-1}}$-formule dans laquelle $^{-1}$ n'est pas appliquée aux termes contenant des Z_i, et telle que pour tout X, U, on a

$$\mathbb{R} \models \forall X, U\ (\exists Y \theta'(X, U, Y) \leftrightarrow \exists Z \psi(X, U, Z)).$$

On recommence la procédure pour diminuer le nombre de quantificateurs existentiels, et finalement on obtient une $\mathcal{L}_{an,^{-1}}$-formule sans quantificateurs telle que

$$\mathbb{R} \models \forall X(\exists Y\ \theta(X, Y) \leftrightarrow \rho(X))$$

Lemme 3.3. *Soit T une théorie dans un langage $\mathcal{L}$, et $f : M^n \rightarrow M$ une fonction définissable (sans paramètres) dans un modèle M de T, qui est définissable par morceaux par des termes du langage, chaque morceau étant définissable par une formule sans quantificateurs. On suppose de plus que les morceaux définissent une partition de N^n dans tout modèle N de T. Soit $\psi(x, y)$ la formule définissant le graphe de f. On suppose que $T \cup \{\forall x, y\ (y = f(x)) \leftrightarrow \psi(x, y)\}$ élimine les quantificateurs dans le langage $\mathcal{L}_f := \mathcal{L} \cup \{f\}$. Alors T élimine les quantificateurs dans $\mathcal{L}$.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe des $\mathcal{L}$-formules sans quantificateurs $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$ partitionnant M^n dans tout modèle M de T, et des termes $s_1(x), \ldots, s_k(x)$ de $\mathcal{L}$ tels que la formule

$$\psi(x, y) = \bigvee_{i=1}^{k} (\psi_i(x) \wedge y = s_i(x)) \qquad (*)$$

définit le graphe de la fonction f dans tout modèle de T. J'appellerai une fonction pouvant être définie de cette façon, un *quasi-$\mathcal{L}$-terme.*

Nous allons montrer que toute fonction définie par un $\mathcal{L}_f$-terme est un quasi-$\mathcal{L}$-terme. On remarque tout de suite que si $t_1(y), \ldots, t_m(y)$ sont des quasi-$\mathcal{L}$-termes, et $\varphi(z)$ est une $\mathcal{L}$-formule sans quantificateurs, alors modulo T_f, $\varphi(t_1(y), \ldots, t_m(y))$ est équivalente à une $\mathcal{L}$-formule sans quantificateurs:
Pour chaque i, soient $\psi_{i,j}(y)$ et $s_{i,j}(y)$ $(1 \leq j \leq j(i))$, les $\mathcal{L}$-formules et $\mathcal{L}$-termes définissant

t_i. Alors, si u parcourt l'ensemble des fonctions $\{1,\dots,m\}$ satisfaisant $1 \le u(i) \le j(i)$, la $\mathcal{L}$-formule

$$\theta(y) := \bigvee_u (\bigwedge_i \psi_{i,u(i)}(y) \wedge \varphi(s_{1,u(1)}(y),\dots,s_{m,u(m)}(y))) \tag{**}$$

convient. Notons que les $\bigwedge_i \psi_{i,u(i)}(y)$ forment bien une partition de $M^{|y|}$.

La démonstration que tout $\mathcal{L}_f$-terme est un quasi-$\mathcal{L}$-terme, est par induction sur la complexité du terme. En gardant la même notation que ci-dessus, si $t(y) = g(t_1(y),\dots,t_m(y))$ où $g \in \mathcal{L}$, alors la formule $\theta(y,z)$ définissant le graphe de $t(y)$ est

$$\bigvee_u (\bigwedge_i \psi_{i,u(i)}(y) \wedge z = g(s_{1,u(1)}(y),\dots,s_{m,u(m)}(y))).$$

C'est bien un quasi-$\mathcal{L}$-terme. Supposons maintenant que $t = f(t_1,\dots,t_n)$; avec la même notation nous avons alors

$$\bigvee_{\ell=1}^{k} \bigvee_u (\bigwedge_i \psi_{i,u(i)}(y) \wedge \psi_\ell(s_{1,u(1)}(y),\dots,s_{n,u(n)}(y)) \wedge z = s_i(s_{1,u(1)}(y),\dots,s_{n,u(n)}(y),z))$$

définit le graphe de $t(y)$, et montre que t est bien un quasi-$\mathcal{L}$-terme.

4 Corps valués

Une bonne référence est A.J. Engler, A. Prestel, *Valued fields*, chez Springer.

Définition 4.1. Un corps valué est un corps K muni d'une application v (la *valuation*) définie sur $K^\times$, prenant ses valeurs dans un groupe ordonné abélien $(\Gamma,+)$, et satisfaisant:

- $v(xy) = v(x) + v(y)$;

- $v(x+y) \ge \min\{v(x), v(y)\}$

v(0 n'est donc pas définie, on étend souvent v à K en ajoutant un élément ∞ à Γ, et en posant $v(0) = \infty$, $\infty + \gamma = \infty$ et $\infty > \gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Si on est rigoureux, on écrit alors Γ_∞.

Remarque 4.2. La fonction v est donc un morphisme du groupe multiplicatif de K dans le groupe additif Γ. On a $v(1) = v(1 \cdot 1) = 0$, et $v(-1) = 0$, d'où $v(x) = v(-x)$. Notons que si $v(x) < v(y)$ alors $v(x+y) = v(x)$: cela suit de $x = (x+y) + (-y)$. Notons aussi que si $v(\sum_i a_i) = 0$, et si les a_i ne sont pas tous nuls, alors il existe $i \neq j$ tels que $v(a_i) = v(a_j)$.
Associés à (K,v) nous avons l'*anneau de valuation* de v et son *idéal maximal.* On vérifie facilement que $\mathcal{O}_v = \{a \in K \mid v(a) \ge 0\}$ est un anneau, que $\mathcal{M}_v = \{a \in K \mid v(a) > 0\}$ est un idéal de $\mathcal{O}_v$, et que tout élément de $\mathcal{O}_v^\times = \mathcal{O}_v \setminus \mathcal{M}_v$, ce qui entraine que $\mathcal{M}_v$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}_v$. Le quotient $k_v = \mathcal{O}_v/\mathcal{M}_v$ est donc un corps, appelé le *corps résiduel* de la valuation. Je les note aussi $\mathcal{O}_K, \mathcal{M}_K$ et k_K, et $v(K^\times)$ est noté Γ_v ou bien Γ_K.

5 La valuation standard

Soit R un corps ordonné. Si R est archimédien (i.e., $\mathbb{N}$ cofinal dans R, alors il ne possède pas de valuation compatible avec l'ordre, c'est-à-dire, satisfaisant $|a| \leq |b|$ implique $v(a) \geq v(b)$. Supposons R non archimédien; il contient donc des éléments qui sont en valeur absolue plus grands que tous les entiers. Je fixe un tel R.

La *valuation standard* sur R, (parfois appelée *valuation naturelle*) est définie en prenant comme anneau de valuation $\mathcal{O}_v$ l'enveloppe convexe de $\mathbb{Z}$, c'est-à dire, tous les éléments apparenant à un intervalle avec extrémités dans $\mathbb{Z}$. (On pourrait également dire, avec extrémités dans $\mathbb{Q}$). Remarquez que c'est bien un anneau: si $|a|, |b| \leq n$, alors $|a+b| \leq 2n$ et $|ab| \leq n^2$. De plus c'est un anneau de valuation: si $a \in R \setminus \mathcal{O}_v$, alors $|a| > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en particulier $|1/a| < 1$; notez que $|1/a| < 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^{>0}$, on appelle $1/a$ un *infinitésimal*. Les infinitésimaux forment un indéal maximal de $\mathcal{O}_v$, $\mathcal{M}_v$. On note parfois $\mathcal{O}_v$ R^{fin}, ou $\mathrm{Fin}(R)$, et $\mathcal{M}_v$ μ_R ou $\mu(R)$.

On définit $\Gamma = R^\times/\mathcal{O}_v^\times$, avec loi de groupe celle induite par l'application $R^\times \to \Gamma$, et ordre défini par $a\mathcal{O}_v < b\mathcal{O}_v$ si et seulement si $b/a \in \mathcal{M}_v$. Et $k_v = \mathcal{O}_v/\mathcal{M}_v$. Presque par définition, k_v est archimédien, et donc se plonge, de façon unique, dans $\mathbb{R}$.
L'application res : $\mathcal{O}_v \to k_v \subseteq \mathbb{R}$ est aussi appelée l'application *partie standard*, notée st. Tout élément a de $\mathcal{O}_v$ satisfait alors $v(a-r) > 0$ pour un unique réel r. Autrement dit, a est infinitésimalement près d'un vrai réel.
On peut construire des corps R ne contenant pas $\mathbb{R}$, mais dont le corps résiduel est $\mathbb{R}$. Nous supposerons en général que R contient $\mathbb{R}$.

5.1. Exemple des séries généralisées. On prend un groupe abélien ordonné Γ, et on forme $K = \mathbb{R}((\Gamma)) = \mathbb{R}((t^\Gamma))$, les séries $a = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma t^\gamma$, avec support $\mathrm{Supp}(a) = \{\gamma \in \Gamma \mid a_\gamma\}$ bien ordonné. On a vu que c'est un anneau, et même un corps. Nous avions défini sur K une valuation, par $v(a) = \min \mathrm{Supp}(a)$. Il faut montrer que cette valuation coïncide avec la valuation standard. Pour cela, il faut supposer que K est ordonnable.
On regarde la série de Taylor associée à la fonction $f_n(x) = \sqrt{n^{-1} - x}$ au voisinage de zéro, pour $n > 0$; écrivons la $\sum_{i=0}^\infty b_i x^i$. Soit $a \in K$ avec $v(a) > 0$. Alors comme $\mathrm{Supp}(a) \subset \Gamma^{>0}$ est bien ordonné, on a que la série obtenue en développant formellement $\sum_{i=0}^\infty b_i a^i$ a un sens et appartient à K. Cela montre que pour tout ordre sur K, on aura que a est infinitésimal. Cela ne nous dit pas quel est l'ordre sur K; par exemple si $\Gamma = \mathbb{Z}$, alors t peut être positif ou négatif. Par contre si Γ contient $1/2$, alors t est positif, (mais on ne sait pas pour $t^{1/2}$). Si on décide que tous les t^γ sont positifs, alors les éléments positifs de K sont les séries a dont le coefficient de $t^{v(a)}$ est positif. La valuation standard sur K coïncide donc avec la valuation que nous avions définie auparavant.

5.2. On peut montrer que tout corps de la forme $k((t^\Gamma))$, muni de la valuation $v(a) = \min \mathrm{Supp}(a)$, est Hensélien. En fait, on peut montrer aussi qu'il n'a pas d'extension immédiate propre, i.e.: si L est un corps valué étendant (K, v), et $L \neq K$, alors ou bien le corps résiduel de L contient strictement k, ou bien le groupe de valeurs de L contient strictement Γ.
On peut aussi montrer que si Γ est divisible, alors $\mathbb{R}((t^\Gamma))$ est réel clos. Une façon de le voir

est de dire que $\mathbb{C}((t^\Gamma)) = K(i)$ n'a pas d'extension immédiate, et donc doit être algébriquement clos (puisque $\mathbb{C}$ n'a pas d'extension algebrique propre, et un groupe divisible ordonné ne peut être d'indice fini dans une extension ordonnée), et donc K est réel clos (cf Thm ?? du cours).

5.3. On considère $K := \mathbb{R}((t^\Gamma))$ comme ci-dessus, v la valuation standard. Soit $f = \sum_i b_i X^i \in \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_m]]$ une série. Alors on peut montrer que si chaque élément du m-uplet a est dans $\mathcal{M}_v$, alors le développement formel de $\sum_{i=0}^\infty b_i a^i$ est bien défini et appartient à K. Cette série définit donc une application $\hat{f} : \mathcal{M}_v^m \to K$, qui prend ses valeurs dans $f(0) + \mathcal{M}_v$. La preuve de cela suit en fait de ce que avez/aurez montré dans le DM: le DM le montre pour $m = 1$; pour le cas général, on prend pour I la réunion des supports des a_i, qui est un ensemble bien ordonné et contenu dans $\Gamma^{>0}$, et on applique le résultat du DM.

5.4. Structure $\mathcal{L}_{an}$ sur $\mathbb{R}((t^\Gamma))$.
Soit $f \in \mathbb{R}\{X_1, \ldots, X_m\}$ (séries qui convergent sur un voisinage de $[-1, 1]^m$). On définit une structure analytique sur $K := \mathbb{R}((t^\Gamma))$ de la façon suivante: tout élément a de $[-1, 1]_K^m$ s'écrit $b + \epsilon$, où $b \in [-1, 1]_\mathbb{R}$, et $\epsilon \in \mathcal{M}_v^m$. On regarde le développement de Taylor de f en b, $T_b(f)$, et on pose $\tilde{f}(a) = T_b(f)(\epsilon)$. Cela en fait un modèle de T_{an}.

References

[1] Lou van den Dries, A generalization of the Tarski-Seidenberg Theorem and some non-definability results, Bull. of the AMS 15, No 2 (1986), 189 – 193.

[2] J. Denef, L. van den Dries, *p-adic and real subanalytic sets*, Annals of Math, 128 (1988), 79 – 138.

[3] Lou van den Dries, Angus Macintyre, David Marker, The elementary theory of restricted analytiquc fields with exponentiation, Annals of Math. 140 (1994), 183 – 205.

[4] Andrei Gabrielov, Projections of semi-analytique sets, Functional Anal. Appli. 2 (1968), 282 – 291.

[5] S. Lojasiewicz, Ensembles semi-analytiques, Notes IHES, 1965.

[6] M. Karpinski, A. Macintyre, O-minimal expansions of the real field: A characterization and an Application to Pfaffian closure, `<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.45.8112 &rep=rep1&type=pdf>`

[7] P. Speissegger, The Pfaffian closure of an o-minimal structure, `https://doi.org/10.1515/crll.1999.508.189`