Examen du cours spécialisé *Corps réels clos et structures o-minimales* (M2 MathFonda, printemps 2022).

Le devoir est à faire à la maison, et à rendre le 28 avril. Vous pouvez consulter vos notes de cours, ainsi que les miennes, mais c'est tout. N'hésitez pas à me poser des questions si vous en avez. Dans tous les problèmes on peut admettre les résultats des questions précédentes.
Tous les anneaux et tous les corps sont commutatifs.

Problème 1.
Nous allons décrire les cônes pré-positifs premiers de certains anneaux de polynômes. Un cône pré-positif P de l'anneau R est *premier* si $P \cup (-P) = R$ et $P \cap (-P)$ est un idéal premier de R. Soit X une indéterminée.

(a) Décrire les cônes pré-positifs premiers de $\mathbb{R}[X]$.
(b) Soit $\bar{Q} \subset \mathbb{R}$ la clôture réelle de $\mathbb{Q}$. Décrire les cônes pré-positifs premiers de $\bar{Q}[X]$.
(c) Décrire les cônes pré-positifs premiers de $\mathbb{Q}[X]$.

Problème 2
L'ensemble des cônes pré-positifs premiers d'un anneau A est aussi appelé le spectre réel de l'anneau, noté $\mathrm{Spec}_R(A)$ ou bien $\mathrm{Sper}(A)$. On y met une topologie, dont une base d'ouverts est donnée par

$$D(a_1, \ldots, a_n) = \{P \in \mathrm{Sper}(A) \mid a_1, \ldots, a_n \in P \setminus (-P)\}.$$

On peut aussi décrire $D(a_1, \ldots, a_n\} = \{P \in \mathrm{Sper}(A) \mid -a_1, \ldots, -a_n \notin P\}$. Donc les cônes pour lesquels $a_1, \ldots, a_n$ sont strictement positifs.

(a-1) On considère l'application naturelle $\mathrm{Sper}(A) \to \mathrm{Spec}(A)$, $P \mapsto P \cap (-P)$, où $\mathrm{Spec}(A)$ est l'ensemble des idéaux premiers de A, muni de la topologie de Zariski, dont une base d'ouverts est donnée par $U(a) = \{Q \in \mathrm{Spec}(A) \mid a \notin Q\}$, pour $a \in A$. Cette application est-elle continue?
(b) Montrez que $\mathrm{Sper}(A)$ est *quasi-compact* (on peut extraire de tout recouvrement d'ouverts de $\mathrm{Sper}(A)$ un recouvrement fini).
(c) Montrez que si $P, Q \in \mathrm{Sper}(A)$, alors $P \in \mathrm{cl}(\{Q\})$ ssi $Q \subseteq P$. (On dira que P est une *spécialisation* de Q).
(d) Les fermés irréductibles de $\mathrm{Sper}(A)$ sont de la forme $\mathrm{cl}(\{P\})$, pour un $P \in \mathrm{Sper}(A)$.
(e) Si $P \subseteq Q$ et $P \subseteq R$, alors $Q \subseteq R$ ou $R \subseteq Q$, pour $P, Q, R \in \mathrm{Sper}(A)$.

Problème 3.
On travaille dans une structure $(R, <, \ldots)$ o-minimale.

(a) Montrez qu'une cellule $C \subseteq R^n$ est ouverte si et seulement si elle est de dimension n.
(b) Montrez qu'une cellule $C \subseteq R^n$ est définissablement connexe.
(c) Montrez que si $C \subseteq R^n$ est une cellule, et p est la projections sur le m première coordonnées ($m < n$) alors $p(C)$ est une cellule.
(d) Soit $C \subseteq R^n$ une cellule, avec suite associée $(i_1, \ldots, i_n)$. Soient $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r$ les indices j tels que $i_j = 1$.

(d-1) Quelle est la dimension de C?

(d-2) Soit $p : R^n \to R^r$ la projection $(x_1, x_2 \ldots, x_n) \mapsto (x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})$. Montrez que $p(C)$ est une cellule ouverte de R^r, et que p définit un homéomorphisme entre C et $p(C)$.

(e) Montrez que si $S \subseteq R^m$ est définissable et définissablement connexe, et $f : S \to R^n$ est définissable continue, alors $f(S)$ est définissablement connexe.

(f) (Rappel : $(f, g) = \{(x, y) \mid x \in (a, b), f(x) < y < g(x)\}$). Soit $C \subset R^2$ une cellule, donnée par $C = (f, g)$, où $f, g : (a, b) \to R$ sont des fonctions continues strictement décroissantes, et pour tout $x \in (a, b)$, $f(x) < g(x)$. (Recall : $(f, g) = \{(x, y) \mid x \in (a, b), f(x) < y < g(x)\}$). Soit $C^* = \{(u, v) \mid (v, u) \in C\}$; décrivez une décomposition cellulaire de R^2 qui partitionne C^*.

Problème 4.
Soit $(G, \cdot, 1, <, \ldots)$ un groupe ordonné o-minimal (non-trivial). Nous allons montrer que G est commutatif et divisible.

(a) Montrez que si H est un sous-groupe définissable de G alors $H = (1)$ ou $H = G$.

(b) Si $g \in G$, on note $C(g) = \{h \in G \mid hg = gh\}$. Que pouvez-vous dire de $C(g)$? Déduisez-en que G est commutatif.

(c) Montrez que G est divisible.

Problème 5

(a) Soit $(R, +, -, \cdot, 0, 1, < \ldots)$ un corps ordonné o-minimal. Montrez que tout élément positif de R est un carré.

(b) Soit $p(X) \in R[\bar{X}]$, $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Dites en quelques mots pourquoi l'application $R^n \to R$, $\bar{a} \mapsto p(\bar{a})$, est continue.

(c) Soient $p(X) \in R[X]$ (X une variable), et $a < b \in R$ tels que $p(a) < 0 < p(b)$. Montrez qu'il existe $c \in (a, b)$ tel que $p(c) = 0$.

(d) Montrez que (c) implique que R est un corps réel clos.

Problème 6. (L'énoncé est très long, mais il n'est pas difficile.)
Nous considérons une structure o-minimale $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <, \ldots)$ étendant la structure usuelle du corps des réels. Nous admettrons le résultat suivant:
(**Trivialisation définissable**) *Soit $f : S \to A \subseteq \mathbb{R}^m$ une fonction définissable (dans $\mathcal{R}$) et continue. Alors il existe une partition de S en sous-ensembles définissables $S_1, \ldots, S_k$ telle que les $f(S_i)$ sont distincts et forment une partition de $f(S)$, des ensembles définissables F_i ($\subseteq \mathbb{R}^{N_i}$), et des fonctions définissables $\lambda_i : S_i \to F_i$, telles que pour chaque i, $(f|_{S_i}, \lambda_i) : S_i \to (f(S_i) \times F_i)$ soit un homéomorphisme.*
La paire (λ_i, F_i) est une *trivialisation* de la restriction de f à S_i. Si $A_1, \ldots, A_r$ sont des sous-ensembles définissables de S, on peut de plus supposer que la partition (S_i) est compatible avec les A_j, i.e., qu'il existe $G_{ij} \subset F_i$ tel que pour tout i et j, $(f_i|_{A_j \cap S_i}, \lambda_i|_{A_j \cap S_i})$ définit un homéomorphisme entre $A_j \cap S_i$ et $f(A_j \cap S_i) \times G_{ij}$
On dit que $X, Y \subset \mathbb{R}^m$ ont le même *type d'homéomorphisme plongé* (??) s'il existe un homéomorphisme $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ qui envoie X sur Y.

(a) Soit $S \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ définissable. Montrez que les ensembles $S_x := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in S\}$

n'ont qu'un nombre fini de type d'homéomorphisme (plongé). Faites au moins le cas non plongé.

(b) Soit $f : U \times V \to \mathbb{R}$ une fonction définissable ($U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$), et pour $c \in V$, notons f_c la fonction $U \to \mathbb{R}$ définie par $f_c(x) = f(x, c)$, et $Z(f_c) = \{x \in U \mid f_c(x) = 0\}$. Montrez que la famille des $Z(f_c)$, $c \in V$, n'a qu'un nombre fini de types d'homéomorphisme plongé.

(c) Nous supposons maintenant que la structure o-minimale $\mathcal{R}$ contient l'exponentielle exp. On fixe m et n, et on regarde la famille $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{m,n}$ des polynômes $f(X) \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m]$ ayant au plus n termes. (I.e., de la forme $\sum_{i=1}^n a_i X_1^{\alpha_{i1}} X_2^{\alpha_{i2}} \cdots X_m^{\alpha_{in}}$, où les $a_i \in \mathbb{R}$, et les α_{ij} sont dans $\mathbb{N}$. Notez que le degré n'est pas borné.). Nous allons (presque) montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour le type d'homéomorphisme de $Z(f) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) = 0\}$, $f \in \mathcal{F}$. Nous allons d'abord fixer pour chaque $1 \leq r \leq n$ une suite de parité $\boldsymbol{\epsilon_r} = (\epsilon_{r,1}, \ldots, \epsilon_{r,m}) \in \{0, 1\}^m$, et ne considérer que des $f(X)$ satisfaisant que l'exposant de X_j dans le r-ième monôme est pair ssi $\epsilon_{r,j} = 0$; cela donne la sous-famille $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ de $\mathcal{F}$, où $\boldsymbol{\epsilon} = (\boldsymbol{\epsilon_1}, \ldots, \boldsymbol{\epsilon_n})$.

[(c-1)] On suppose tous les exposants des X_i dans $f(X)$ sont pairs (i.e., tous les $\epsilon_{r,i}$ sont nuls). Montrez qu'il existe une fonction définissable $f : \mathbb{R}^{1+2m} \to \mathbb{R}$, dont la restriction à $\mathbb{R} \times (2\mathbb{N})^m \times \mathbb{R}^m$ est exactement l'application $(c, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_1, \ldots, x_m) \mapsto c x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$.

[(c-2)] Déduisez-en qu'il n'y a qu'un nombre fini de type d'homéomorphisme plongé de $Z(f)$, pour $f \in \mathcal{F}_{\boldsymbol{\epsilon}}$.

[(c-3)] On voit bien qu'on peut faire pareil avec n'importe quelle suite $\boldsymbol{\epsilon}$. Quel est l'analogue de la fonction F donnée en (c-1) pour la suite $\boldsymbol{\epsilon_1} = (1, 1, 0, \ldots, 0)$? (Nous nous intéressons donc à ce qui se passe sur $\mathbb{R} \times (2\mathbb{N} + 1)^2 \times (2\mathbb{N})^{m-2} \times \mathbb{R}^m$.)

Problème 7. Soient $I \subset R$ un intervalle ouvert, et $f, g : I \to R$ des fonctions définissables, et a une des extrémités de I (dans R, ou bien $\pm\infty$). On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout x dans un voisinage de a.

(a) Si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$, montrez que

$$\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = \lim_{x \to a} f'(x)/g'(x).$$

(b) On suppose maintenant que $\lim_{x \to a} |f(x)| = \lim_{x \to a} |g(x)| = +\infty$. Qu'en déduisez vous sur $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$?

[Astuce: Ramenez-vous au cas où $a \in R$ est l'extrémité gauche de I.]