

# Séries thêta harmoniques

Olaf Kwiatkowski - Ferdinand Jacobé de Naurois

4 juin 2023

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Formes modulaires</b>	<b>5</b>
1.1 Définition et premières propriétés . . . . .	5
1.1.1 L'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré . . . . .	5
1.1.2 Fonctions modulaires . . . . .	6
1.1.3 Séries d'Eisenstein . . . . .	6
1.2 Formule des zéros . . . . .	9
1.3 Dimension des espaces de formes modulaires . . . . .	12
<b>2 Séries thêta</b>	<b>15</b>
2.1 Réseaux et séries thêta . . . . .	15
2.1.1 Généralités sur les réseaux . . . . .	15
2.1.2 Réseau dual . . . . .	16
2.1.3 Définition des séries thêta . . . . .	16
2.2 La formule sommatoire de Poisson . . . . .	16
2.2.1 Séries de Fourier . . . . .	17
2.2.2 Preuve de la formule sommatoire de Poisson . . . . .	18
2.3 Modularité de $\theta_L(z)$ . . . . .	19
2.3.1 L'équation fonctionnelle de $\theta_L$ . . . . .	19
2.3.2 Contraintes sur la dimension et modularité de $\theta_L$ . . . . .	21
<b>3 La gaussienne harmonique</b>	<b>23</b>
3.1 Introduction . . . . .	23
3.2 Calcul par la moyenne harmonique . . . . .	24
3.2.1 La propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques . . . . .	24
3.2.2 Le calcul de la transformée de Fourier . . . . .	25
3.3 Calcul par algèbre linéaire . . . . .	27
3.3.1 Les opérateurs $E, F, \Delta$ . . . . .	27
3.3.2 Le calcul de la transformée de Fourier, deuxième version . . . . .	31
3.4 Modularité de $\theta_{L,P}$ . . . . .	33
<b>Conclusion</b>	<b>34</b>

# Introduction

## Les formes modulaires

La théorie des formes modulaires sur le demi-plan de Poincaré a reçu ces dernières années une attention considérable. Originellement découvertes par Gauss au XIX<sup>ème</sup> siècle, elles furent presque 200 ans plus tard absolument déterminantes dans la preuve du grand théorème de Fermat par Andrew Wiles. Leur succès tient au fait que, bien que définies analytiquement comme des fonctions holomorphes vérifiant une certaine équation fonctionnelle que voici :

$$f(z+1) = f(z) \quad f\left(\frac{-1}{z}\right) = z^{2k} f(z),$$

elles portent une quantité d'informations considérable sur l'arithmétique des entiers. Par exemple, les coefficients du développement en série entière de certaines formes modulaires, les séries d'Eisenstein, sont égaux aux nombres de la forme :

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

où la somme porte sur les diviseurs de  $n$ . La connaissance de certaines relations de liaison entre les formes modulaires donne alors des identités non triviales entre les nombres  $\sigma_k(n)$ , qu'il semble parfois très difficile de prouver indépendamment des formes modulaires.

Une autre curiosité arithmétique similaire : on peut montrer que la fonction de la variable  $q = e^{2\pi iz}$  définie par :

$$\theta(q) = \sum_{a,b,c,d \in \mathbb{Z}} q^{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

est également (à peu de choses près) une forme modulaire, dont on peut dès lors calculer les coefficients du développement en série entière en utilisant la théorie générale des formes modulaires. Ceci donne alors le théorème de Jacobi, une expression exacte du nombre de manières d'écrire un entier  $n$  comme somme de 4 carrés d'entiers, qu'on note  $r_4(n)$ . Voici cette identité, qui semble être tout droit sortie d'un carnet de Ramanujan :

$$r_4(n) = 8 \sum_{\substack{d|n \\ 4 \nmid d}} d.$$

## Objectifs

Les objectifs de ce mémoire sont multiples. Le développement de la théorie générale des formes modulaires nous occupera tout au long du premier chapitre. Il sera notamment

l'occasion de calculer la dimension des espaces de formes modulaires, un point crucial permettant d'exhiber des relations de dépendance linéaire entre certaines formes modulaires. Le reste du mémoire sera consacré à l'étude des séries thêta harmoniques, une classe particulière de formes modulaires définies à partir de la donnée d'un certain réseau de  $\mathbb{R}^n$ . En particulier, on s'attachera à prouver que les séries thêta harmoniques sont, sous certaines conditions, des formes modulaires.

Ce phénomène, permettant d'associer à une certaine classe de réseaux de  $\mathbb{R}^n$  des formes modulaires, a de profondes implications en théorie des réseaux. En effet, ces formes modulaires attachées à un réseau contiennent de nombreuses informations sur ce réseau, et fournissent notamment un invariant utile : si deux réseaux sont isométriques, ils ont les mêmes formes modulaires. Faute de place, nous ne ferons qu'effleurer ces applications en théorie des réseaux, le résultat principal de ce mémoire restant la modularité des fonctions thêta harmoniques.

## Remerciements

Nous tenons à remercier chaleureusement Yi Shan pour son soutien constant, ses explications passionnantes et sa bonne humeur quotidienne. Nos indécisions poncutelles quant à la direction à prendre ont toujours été compensées par ses nombreuses bonnes idées. Nous remercions également Gaëtan Chenevier pour les quelques discussions déterminantes sur les réseaux que nous avons eu la chance d'avoir avec lui.

# Chapitre 1

## Formes modulaires

*“There are five fundamental operations of mathematics : addition, subtraction, multiplication, division, and modular forms.” - Martin Eicher.*

### 1.1 Définition et premières propriétés

Dans cette section, on définit la notion de forme modulaire. On en démontre les premières propriétés, et on donne l'exemple des séries d'Eisenstein.

#### 1.1.1 L'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré

Le groupe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  agit naturellement sur le demi-plan  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) > 0\}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \cdot : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) &\mapsto \frac{az + b}{cz + d}. \end{aligned}$$

En effet, pour tout  $z \in \mathbb{H}$ , toute matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  on a :

$$\mathrm{Im} \left( \frac{az + b}{cz + d} \right) = \frac{1}{2i} \left( \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \right) = \frac{1}{2i} \frac{(ad - bc)(z + \bar{z})}{|cz + d|^2} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz + d|^2}.$$

Si bien que pour  $z \in \mathbb{H}$ , et  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , on a  $M \cdot z \in \mathbb{H}$ . On vérifie alors que l'application  $\cdot : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  définit alors bien une action de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  sur le demi-plan supérieur  $\mathbb{H}$ . Son noyau contient  $\{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \pm I_2\}$ , donc cette action se factorise en une action de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \{\pm I_2\}$  sur  $\mathbb{H}$ .

La question naturelle est alors : quelles sont les orbites de cette action ? On définit à cet effet **le domaine fondamental de Poincaré** :

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{H}, \mathrm{Re}(z) \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], |z| \geq 1 \right\}.$$

Ce domaine est un « domaine fondamental » pour l'action de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{H}$ , ce qui signifie que chaque point de  $\mathbb{H}$  est congru à un unique point de  $\mathcal{D}$  modulo l'action de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  (si on identifie les points de la frontière de  $\mathcal{D}$  comme il se doit). Nous ne démontrerons pas ce point.

### 1.1.2 Fonctions modulaires

Les formes modulaires sont, en deux mots, les fonctions de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{C}$  invariantes sous l'action de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

**Définition 1.1.1.** Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . On dit qu'une fonction holomorphe  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  est un **fonction modulaire** de poids  $2k$  si et seulement si pour tout  $z \in \mathbb{H}$  et toute matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , on a :

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{2k} f(z). \quad (1.1)$$

*Remarque 1.1.2.* On pourrait également définir des fonctions modulaires de poids  $2k+1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , mais une telle fonction  $f$  serait nécessairement nulle.

En effet constatons que  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ; si bien que :

$$\forall z \in \mathbb{H}, f(z) = f\left(\frac{-1z+0}{0z-1}\right) = (-1)^{2k+1} f(z) = -f(z),$$

d'où la nullité de  $f$ .

*Remarque 1.1.3.* En constatant que la forme différentielle  $d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$  est égale à :

$$d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} dz = \frac{dz}{(cz+d)^2}$$

L'équation précédente se ré-écrit donc de manière beaucoup plus compacte, pour tout matrice  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  :

$$f(M \cdot z) d(M \cdot z)^k = f(z) dz^k.$$

Remarquons que  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  est engendré uniquement par les deux matrices  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Ces deux éléments vérifient les relations suivantes dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , pour  $z \in \mathbb{H}$  :

$$\begin{aligned} S^2 &= I_2, & (ST)^3 &= I_2, \\ Sz &= -\frac{1}{z}, & Tz &= z + 1. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement le lemme suivant, qui sera très pratique pour montrer qu'une fonction  $f$  donnée est une forme modulaire :

**Lemme 1.1.4.** Une fonction holomorphe  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction modulaire de poids  $2k$  si et seulement si elle est 1-périodique, et vérifie pour tout  $z \in \mathbb{H}$  :

$$f\left(\frac{-1}{z}\right) = z^{2k} f(z). \quad (1.2)$$

### 1.1.3 Séries d'Eisenstein

#### Définition

Une première manière d'obtenir des fonctions modulaires est les séries d'Eisenstein. Pour tout  $k > 1$  entier, on définit une fonction holomorphe sur  $\mathbb{H}$  en posant :

$$\forall z \in \mathbb{H}, G_k(z) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^{2k}}$$

Sous réserve que  $k > 1$ , la série converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{H}$ , et définit donc une fonction holomorphe de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{C}$ . Reste à voir qu'il s'agit bien d'une fonction modulaire.

Soit donc  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . En remarquant que  $M$  induit une permutation du réseau  $\mathbb{Z}^2$  donnée par  $(x, y) \mapsto (ax + cy, bx + dy)$ , il vient pour tout  $z \in \mathbb{H}$  :

$$\begin{aligned} G_k(M \cdot z) &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{\left(m \frac{az+b}{cz+d} + n\right)^{2k}} \\ &= (cz + d)^{2k} \cdot \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{((am + cn)z + (bm + dn))^{2k}} \\ &= (cz + d)^{2k} \cdot \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(mz + n)^{2k}} = (cz + d)^{2k} \cdot G_k(z), \end{aligned}$$

qui montre que  $G_k$  est une fonction modulaire de poids  $2k$ .

$G_k$  étant une fonction 1-périodique, on peut tâcher de l'écrire comme une fonction de la variable  $q = e^{2\pi iz}$ , ce qui revient essentiellement à déterminer son développement en série de Fourier. Ce calcul sera l'objet de la section suivante.

### Développement en la variable $q = e^{2\pi iz}$

On part de la célèbre identité, due à Euler :

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{z - n} + \frac{1}{z + n} \right)$$

où la série converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{H}$ .

Voici une manière particulièrement simple de démontrer cette identité : on remarque que  $z \mapsto \pi \cot(\pi z)$  a des pôles simples de résidus 1 à tous les entiers relatifs, et n'a aucun autre pôle. Dès lors, si l'on forme la différence  $f(z)$  des deux membres de l'égalité précédente, on obtient une fonction entière, qui est 1-périodique et est bornée dans l'espace  $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z)| > 1\}$ . C'est donc une fonction entière bornée, donc constante par le théorème de Liouville. En l'étudiant au voisinage de 0, on obtient aisément que cette constante est nulle, ce qui montre l'égalité ci-dessus.

On développe ensuite  $\cot(\pi z)$  en série géométrique de la variable  $q = e^{2\pi iz}$ , pour  $z \in \mathbb{H}$  (de sorte que  $q \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ). Il vient :

$$\pi \cot(\pi z) = \pi i \frac{e^{\pi iz} + e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} = \pi i \frac{q + 1}{q - 1} = \pi i - 2\pi i \frac{1}{1 - q} = \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{+\infty} q^n.$$

Si bien que pour  $z \in \mathbb{H}$ , et  $q = e^{2\pi iz} \in \mathbb{D}$ , il vient :

$$\pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z - n} + \frac{1}{z + n}.$$

On dérive  $2k - 1$  fois cette formule par rapport à la variable  $z$  (où  $k \in \mathbb{N}$  avec  $k \geq 2$ ), en remarquant que la dérivée de  $q$  par rapport à  $z$  est  $2\pi i q$ . Il vient :

$$-2\pi i \sum_{n=0}^{+\infty} (2\pi i)^{2k-1} n^{2k-1} q^n = (-1)^{2k-1} (2k-1)! \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^{2k}}.$$

D'où :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{1}{(2k-1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} (2\pi i)^{2k} n^{2k-1} q^n.$$

Ceci étant valable pour tout  $z \in \mathbb{H}$ , on peut également l'appliquer à  $mz$  où  $m \in \mathbb{N}^*$ . On obtient alors l'expression suivante de  $G_k(z)$ , en séparant la somme selon que  $m = 0$ ,  $m > 0$  ou  $m < 0$  :

$$\begin{aligned} G_k(z) &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^{2k}} = 2\zeta(2k) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(mz+n)^{2k}} \\ &= 2\zeta(2k) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} (2\pi i)^{2k} n^{2k-1} (q^m)^n \\ &= 2\zeta(2k) + \frac{4k(2\pi i)^{2k}}{(2k)!} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{2k-1} q^{mn}. \end{aligned}$$

En sommant d'abord sur la variable  $N = mn$ , on obtient alors la formule suivante :

$$G_k(z) = 2\zeta(2k) + \frac{4k(2\pi i)^{2k}}{(2k)!} \sum_{N=1}^{+\infty} \sigma_{2k-1}(N) q^N,$$

où  $\sigma_{2k-1}(N) = \sum_{d|N} d^{2k-1}$ , la somme portant sur les diviseurs strictement positifs de  $N$ .

On peut alors utiliser la célèbre formule :

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} B_{2k} \pi^{2k} 4^k}{2(2k)!},$$

où  $B_{2k}$  désigne le  $2k$ -ième nombre de Bernoulli, pour obtenir :

$$G_k(z) = 2\zeta(2k) \left( 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n \right).$$

On définit alors naturellement la fonction modulaire normalisée  $E_k$  par :

$$E_k(z) = \frac{1}{2\zeta(2k)} G_k(z) = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n.$$

On notera que, comme fonction de  $q$ ,  $E_k$  se prolonge naturellement en  $q = 0$ . C'est cette condition qui distinguera les formes modulaires des simples fonctions modulaires.

**Définition 1.1.5.** Toute fonction modulaire  $f$  étant 1-périodique, elle s'écrit sous la forme  $f(z) = F(q)$  où  $q = e^{2\pi iz}$  et  $F$  est une fonction holomorphe de  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  dans  $\mathbb{C}$ . La fonction  $f$  est alors appelée une **forme modulaire** si la fonction  $F$  a une singularité effaçable en  $q = 0$ .

*Remarque 1.1.6.* La théorie des singularités des fonctions holomorphes permet de donner des caractérisations équivalentes nettement plus simples du fait qu'une fonction modulaire soit une forme modulaire. En effet, en notant  $f$  une fonction modulaire, et  $F$  la fonction de  $q = e^{2\pi iz}$  associée comme dans la définition ci-dessus, on a équivalence entre les propositions suivantes :

- (i)  $f$  est une forme modulaire ;
- (ii)  $F$  est bornée au voisinage de 0 ;
- (iii)  $f(z)$  reste bornée quand  $\text{Im}(z) \rightarrow +\infty$  ;
- (iv)  $F$  se prolonge en une fonction holomorphe de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{C}$ .

En effet, (i)  $\iff$  (iv) n'est qu'une ré-écriture de la définition, (ii)  $\iff$  (iii) s'obtient immédiatement avec le changement de variable  $q = e^{2\pi iz}$ , et (ii)  $\iff$  (iv) découle de la théorie élémentaire des singularités isolées des fonctions holomorphes (qu'on ne détaille pas ici).

Par ailleurs, le développement en série de Fourier des fonctions d'Eisenstein donné ci-dessus assure que pour tout entier  $k > 1$ , la fonction  $G_k$  est non seulement une fonction modulaire, mais bien une forme modulaire.

## 1.2 Formule des zéros

Cette section est très largement inspirée de l'influent *Cours d'arithmétique* [1] de Jean-Pierre Serre. Son objectif est le démontrer un théorème donnant le nombre de zéros et de pôles, comptés avec multiplicité, d'une fonction modulaire. On fera référence à ce théorème sous le nom de « formule des zéros » ou « lemme des zéros ».

Avant de démontrer ladite formule, commençons par introduire quelques notations. On fixe une fonction  $f$  méromorphe sur  $\mathbb{H}$ . Pour tout  $p \in \mathbb{H}$ , on note  $v_p(f)$  l'ordre du zéro de  $f$  en  $p$ , qui est l'unique entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $z \mapsto f(z)/(z-p)^n$  se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de  $p$ , non nulle en  $p$ . Si de plus,  $f$  est 1-périodique, on peut considérer la fonction  $\tilde{f} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que pour tout  $z \in \mathbb{H}$ ,  $q = e^{2\pi iz}$ , on a  $\tilde{f}(q) = f(z)$ . L'ordre de  $f$  en  $\infty$ , noté  $v_\infty(f)$ , est alors naturellement défini comme l'ordre de  $\tilde{f}$  en 0. Notons que dans le cas où  $f$  est une fonction modulaire,  $v_p(f)$  ne dépend que de la classe de  $p$  modulo  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , en vertu de l'équation modulaire. On s'autorisera donc la notation  $v_{\bar{p}}(f)$  où  $\bar{p}$  désigne la classe de  $p$  modulo l'action de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . On notera également  $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ .

Soit maintenant  $f$  une fonction modulaire, de telle sorte que  $\tilde{f}$  soit une fonction méromorphe sur  $\mathbb{D}$ , et qu'on suppose non identiquement nulle. Alors, par le principe des zéros isolés,  $\tilde{f}$  n'a qu'un nombre fini de zéros et de pôles dans tout compact de  $\mathbb{D}$ . Par le changement de variable  $q = e^{2\pi iz}$ , on en déduit que  $f$  n'a qu'un nombre fini de zéros et de pôles dans le domaine fondamental :

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{H}, \quad |\Re(z)| \leq \frac{1}{2}, \quad |z| \geq 1 \right\}.$$

Autrement dit, il n'existe qu'un nombre fini de points  $p \in \mathcal{D}$  tels que  $v_p(f) \neq 0$ . La somme apparaissant dans le théorème suivant est donc bien définie.

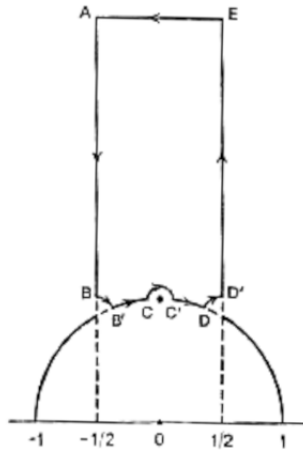
**Théorème 1.2.1.** (*La formule des zéros*) Soit  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction modulaire de

pois  $2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , de la variable  $z$ . On a alors l'égalité :

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_j(f) + \sum_{\substack{p \in \mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ p \neq i, \bar{j}}} v_p(f) = \frac{k}{6}.$$

*Démonstration.* La preuve qui suit est empruntée au *Cours d'arithmétique* [1] de Jean-Pierre Serre.

Soit  $f$  une fonction modulaire. L'idée est d'intégrer la fonction  $\frac{1}{2\pi i} \frac{f'}{f}$  sur la frontière du domaine fondamental  $\mathcal{D}$ . On suppose dans un premier temps que  $f$  n'a sur la frontière de  $\mathcal{D}$  aucun autre zéro ou pôle que  $j, i, -j^2$ . Il existe alors un contour  $\mathcal{C}$  tel que celui représenté ci-dessous, dont l'intérieur contient un représentant de chaque zéro ou pôle de  $f$  non congru à  $i$  ou  $j$  modulo  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .



En appliquant le théorème des résidus, il vient donc :

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{dz}{2\pi i} = \sum_{\substack{p \in \mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ p \neq i, \bar{j}}} v_p(f). \quad (1.3)$$

Reste donc à évaluer l'intégrale de gauche. Pour chacun des arcs de l'intégrale, on fait les remarques suivantes :

a) Le changement de variable  $q = e^{2\pi iz}$  transforme l'arc  $EA$  en un cercle  $\omega$  centré en 0, parcouru dans le sens anti-trigonométrique, et ne refermant comme unique éventuel zéro ou pôle de  $\tilde{f}$  seulement le point 0. On a donc, comme  $dq = 2\pi i dz$  et  $f'(z) = 2\pi i \tilde{f}'(q)$  :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_E^A \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\omega \frac{\tilde{f}'(q)}{\tilde{f}(q)} dq = -v_0(\tilde{f}) = -v_\infty(f).$$

b) L'intégrale de  $\frac{1}{2\pi i} \frac{f'}{f}$  sur le cercle auquel appartient l'arc  $BB'$ , parcouru dans le sens anti-trigonométrique, vaut par le théorème des résidus  $-v_j(f)$ . Lorsque le rayon de ce

cercle tend vers 0, l'angle  $B'jB$  tend vers  $\frac{2\pi}{6}$ , et donc on obtient, en intégrant le développement en série de Laurent de  $f$  en  $j$  sur l'arc  $B'B$ , quand le rayon du cercle auquel appartient l'arc  $B'B$  tend vers 0 :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_B^{B'} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \rightarrow -\frac{1}{6} v_j(f).$$

Le même argument sur les arcs des cercles  $CC'$  et  $DD'$  fournit, quand les rayons des cercles tendent vers 0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_D^{D'} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &\rightarrow -\frac{1}{6} v_{-j^2}(f) = -\frac{1}{6} v_j(f), \\ \frac{1}{2\pi i} \int_C^{C'} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &\rightarrow -\frac{1}{2} v_i(f). \end{aligned}$$

c) La translation  $T : z \mapsto z + 1$  laissant  $f$  invariante et transformant l'arc  $AB$  en l'arc  $ED'$ , on a naturellement la compensation :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_A^B \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{D'}^E \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

d) L'application  $S : z \mapsto \frac{-1}{z}$  transforme l'arc  $B'C$  en l'arc  $DC'$  (attention aux orientations!). On peut donc espérer une forme de compensation entre les intégrales le long de ces deux arcs. Précisons cela. Il vient avec le changement de variable  $z = \frac{-1}{u}$ ,  $du = \frac{1}{z^2} dz$  :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{B'C} \frac{f'(u)}{f(u)} du = \frac{1}{2\pi i} \int_D^{C'} \frac{f'(S(z))}{f(S(z))} \frac{dz}{z^2}. \quad (1.4)$$

Maintenant,  $f$  étant une fonction modulaire, on a  $f(S(z)) = z^{2k} f(z)$ , d'où, en dérivant les deux membres par rapport à  $z$  :

$$\frac{1}{z^2} f'(S(z)) = z^{2k-1} (2k f(z) + z f'(z)).$$

En injectant ce résultat dans eq. (1.4), il vient :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{B'C} \frac{f'(u)}{f(u)} du = \frac{1}{2\pi i} \int_D^{C'} \frac{z^{2k+1} (2k f(z) + z f'(z))}{z^{2k} f(z)} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_D^{C'} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{2k}{2\pi i} \int_D^{C'} \frac{dz}{z}.$$

Maintenant, comme la portion du cercle unité couverte par l'arc  $DC'$  tend vers  $\frac{1}{12}$  quand les distances  $CC'$  et  $DD'$  tendent vers 0, il vient, quand le rayon des cercles contenant les arcs  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  tend vers 0 :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_D^{C'} \frac{dz}{z} \rightarrow \frac{1}{12}.$$

Ce qui, avec le calcul précédent, donne la compensation attendue :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{B'C} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C'D} \frac{f'(u)}{f(u)} dz \rightarrow \frac{k}{6}.$$

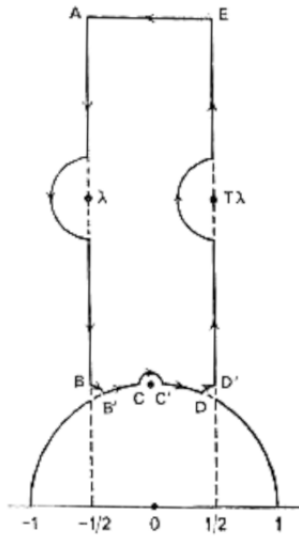
On obtient donc, en vertu des remarques a), b), c) et d), que quand le rayon des cercles qui contiennent les arcs  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  tend vers 0, on a :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz \rightarrow -v_\infty(f) - \frac{1}{6} v_j(f) - \frac{1}{3} v_i(f) - \frac{1}{6} v_j(f) + \frac{k}{6}.$$

En reprenant eq. (1.3), ceci fournit donc l'égalité attendue :

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_j(f) + \sum_{\substack{p \in \mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ p \neq i, \bar{j}}} v_p(f) = \frac{k}{6}.$$

Dans le cas où la frontière de  $\mathcal{D}$  contient un zéro ou un pôle de  $f$ , on reprend la même démonstration, avec un contour modifié comme suit (le dessin représente le cas où  $f$  a un zéro sur le segment  $AB$ , et donc également sur le segment  $D'E$ ; on procède évidemment de même si  $f$  a un zéro sur l'arc de cercle entre  $j$  et  $-j^2$ ).



□

### 1.3 Dimension des espaces de formes modulaires

La formule précédente nous permettra de déterminer complètement la structure et la dimension des espaces de formes modulaires. En effet, elle nous permet de nous assurer que les formes modulaires n'ont en un certain sens « pas trop de zéros ». Autrement dit, une forme modulaire avec trop de zéros est la forme nulle : c'est ce genre de considérations qui nous permettront de borner la dimension des espaces de formes modulaires.

Pour la suite, on dira qu'une forme modulaire  $f$  est une **forme parabolique** si :

$$\lim_{\mathrm{Im}(z) \rightarrow +\infty} f(z) = 0.$$

Introduisons quelques notations :

$$\begin{aligned} M_{2k} &= \{\text{formes modulaires de poids } 2k\}, \\ M_{2k}^0 &= \{\text{formes paraboliques de poids } 2k\}. \end{aligned}$$

Remarquons déjà que  $M_{2k}^0$  est le noyau vu dans  $M_{2k}$  de la forme linéaire  $f \mapsto \lim_{\text{Im}(z) \rightarrow +\infty} f(z)$ .

On en déduit que  $\dim M_{2k}/M_{2k}^0 \leq 1$ .

On pose :

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2,$$

où :

$$g_2 = 60G_2, \quad g_3 = 140G_3.$$

C'est une forme parabolique de poids 12 (ce que l'on voit en utilisant les valeurs de  $\zeta(4)$  et  $\zeta(6)$ ).

On peut maintenant calculer explicitement les dimensions des espaces  $M_{2k}$  de formes modulaires.

**Théorème 1.3.1.** (*dimensions des espaces de formes modulaires*)

(i) Si  $k < 0$  ou  $k = 1$   $\dim M_{2k} = 0$ .

(ii) Si  $k = 0, 2, 3, 4$  ou  $5$ ,  $M_{2k}$  est de dimension 1.

(iii) L'application  $f \mapsto \Delta f$  est un isomorphisme entre  $M_{k-6}$  et  $M_{2k}^0$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* Pour le point (i), si  $f \in M_{2k} \setminus \{0\}$  on doit écrire  $\frac{k}{6} = n_1 + \frac{n_2}{2} + \frac{n_3}{3}$ , avec  $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ .

On voit que cela est impossible si  $k < 0$  ou  $k = 1$ . Pour  $k = 2$ , on voit que  $G_2$  ne s'annule qu'en  $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$  dans le domaine fondamental. De même pour  $k = 3$ ,  $G_3$  ne s'annule qu'en  $i$ .

On obtient donc que  $\Delta$  ne s'annule pas en  $i$ . On en déduit que c'est une forme parabolique non nulle. On peut donc lui appliquer la formule des zéros. On sait déjà que  $\Delta$  s'annule en  $\infty$ , donc l'ordre de  $\Delta$  en  $\infty$  est  $\geq 1$ . Par la formule des zéros, ce zéro a pour multiplicité 1 exactement. On en déduit l'injectivité de  $f \mapsto \Delta f$ .

On en déduit que si  $f \in M_{2k}^0 \setminus \{0\}$ , on a :

$$v_p\left(\frac{f}{\Delta}\right) = \begin{cases} v_p(f) & \text{si } p \neq \infty \\ v_p(f) - 1 & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

On en déduit que  $\frac{f}{\Delta}$  est une forme modulaire de poids  $2k-12$ . Ceci démontre la surjectivité de l'application  $f \mapsto \Delta f$ , et donc (iii). On obtient (ii) en appliquant ce qui précède avec  $k \in \{0, 2, 3, 4, 5\}$ , puisque  $k-6 < 0$ ,  $M_{2k}^0 = \{0\}$ . Mais par l'existence des séries d'Eisenstein si  $k \geq 2$ , et des fonctions constantes si  $k = 0$  (qui sont modulaires), on obtient  $\dim M_{2k} = 1$  dans ces cas.  $\square$

**Corollaire 1.3.2.** Si  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\dim M_{2k} = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{6} \rfloor & \text{si } k \equiv 1 \pmod{6} \\ \lfloor \frac{k}{6} \rfloor + 1 & \text{si } k \not\equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$

*Démonstration.* On utilise en itérant l'isomorphisme entre  $M_{2k}^0$  et  $M_{k-6}$ , puis le fait que  $\dim M_{2k} = \dim M_{2k}^0 + 1$  si  $k \geq 2$ , car on dispose des séries d'Eisenstein qui ne sont pas paraboliques.  $\square$

Concluons cette section par un joli théorème sur la structure des formes modulaires.

Notons  $M = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_{2k}$

**Corollaire 1.3.3.** *On dispose d'un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres :*

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{C}[X, Y] &\rightarrow M \\ P(X, Y) &\mapsto P(G_2, G_3).\end{aligned}$$

*Démonstration.* On va montrer que  $\{G_2^\alpha G_3^\beta, 2\alpha + 3\beta = k\}$  est une base de  $M_{2k}$ . On sait déjà que le résultat est vrai si  $k \leq 3$ . Pour  $k \geq 4$ , on peut raisonner par récurrence en choisissant un couple  $(\alpha, \beta)$  tel que  $2\alpha + 3\beta = k$ , puis si  $f \in M_{2k}$ , alors on peut fixer  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $f - \lambda G_2^\alpha G_3^\beta$  est parabolique. On conclut en utilisant l'isomorphisme donné par Théorème 1.3.1.

Pour montrer que la famille est libre, remarquons que si l'on dispose d'une famille  $(\lambda_{\alpha, \beta})$  non tous nuls tels que  $\sum_{\alpha, \beta} \lambda_{\alpha, \beta} G_2^\alpha G_3^\beta = 0$ , alors  $\frac{G_2^3}{G_3^3}$  annule un polynôme à coefficients complexes non nul. On peut l'obtenir en fixant un couple  $(\gamma, \delta)$  tel que  $2\gamma + 3\delta = k$ , avec disons  $\delta$  maximal. En divisant la relation précédente par  $G_2^\gamma G_3^\delta$ , et en utilisant la relation  $2(\alpha - \gamma) + 3(\beta - \delta) = 0$  qui montre que  $2|(\beta - \delta)$  et  $3|(\alpha - \gamma)$ , on obtient le polynôme voulu. On en déduit que  $\frac{G_2^3}{G_3^3}$  est une fonction constante, ce qui est absurde car  $G_2(j) = 0$ , donc on obtiendrait  $G_2 = 0$ .  $\square$

# Chapitre 2

## Séries thêta

### 2.1 Réseaux et séries thêta

#### 2.1.1 Généralités sur les réseaux

**Définition 2.1.1.** On dit que  $L \subset \mathbb{R}^d$  est un **réseau** de  $\mathbb{R}^d$  si  $L$  vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

- (i)  $L$  est un groupe abélien libre de rang  $d$  ;
- (ii)  $L$  est un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^d$  qui l'engendre en tant que  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Définition 2.1.2.** Soit  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_d)$  une base de  $L$ . On note  $\text{disc}(L)$  le déterminant de la matrice de Gram de  $\mathbf{e}$  :  $\text{Gram}(\mathbf{e}) = (e_i \cdot e_j)_{1 \leq i, j \leq d}$ .

Cette quantité est un invariant bien défini de  $L$  car si  $\mathbf{e}'$  est une autre base de  $L$ , la matrice de passage de  $\mathbf{e}$  à  $\mathbf{e}'$  est un élément de  $\text{GL}_d(\mathbb{Z})$  noté  $P$ . On a alors :

$$\text{Gram}(\mathbf{e}') = P^T \text{Gram}(\mathbf{e}) P.$$

D'où :

$$\det \text{Gram}(\mathbf{e}') = \det(P)^2 \det \text{Gram}(\mathbf{e}).$$

Mais puisque  $P \in \text{GL}_d(\mathbb{Z})$ ,  $\det(P) = \pm 1$ , donc  $\det \text{Gram}(\mathbf{e}') = \det \text{Gram}(\mathbf{e})$ .

On peut par ailleurs interpréter  $\sqrt{\text{disc}(L)}$  comme le volume d'un domaine fondamental de  $L$ , ou encore comme le volume de l'espace compact  $\mathbb{R}^d/L$  (qui est homéomorphe à un  $d$ -tore).

#### Vocabulaire

Soit  $L \subset \mathbb{R}^d$  un réseau. On dira que  $L$  est **entier** si le produit scalaire canonique  $x \cdot y$  sur  $\mathbb{R}^d$  prend des valeurs entières sur  $L$ . On suppose  $L$  entier dans la suite.

Si  $\text{disc}(L) = 1$ , on dira que le réseau  $L$  est **unimodulaire**.

Si la forme quadratique  $x \cdot x$  prend des valeurs paires sur  $L$ , on dira que le réseau  $L$  est **pair**.

### 2.1.2 Réseau dual

**Définition 2.1.3.** On définit le **réseau dual**  $L'$  de  $L$  par :

$$L' = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall y \in L, x \cdot y \in \mathbb{Z}\}.$$

Si  $\mathbf{e}$  est une base de  $L$ , on vérifie aisément que la base duale  $\mathbf{e}^*$  de  $\mathbf{e}$ , identifiée à une base de  $\mathbb{R}^d$  via le théorème de représentation de Riesz, est une base de  $L'$ .

Notons  $A$  la matrice de  $\mathbf{e}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ , et  $B$  celle de  $\mathbf{e}^*$ . Alors on a par définition de  $\mathbf{e}^*$  :  $A^T B = I_d$ . On en déduit que  $B = (A^T)^{-1}$ . Ceci permet de remarquer que si  $L$  est un réseau unimodulaire, alors  $L$  est auto-dual :  $L' = L$ . En effet, on a dans ce cas  $A, B \in \text{GL}_d(\mathbb{Z})$ , donc le changement de base  $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{e}^*$  est un élément de  $\text{GL}_d(\mathbb{Z})$ . On en déduit que  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{e}^*$  engendrent le même réseau.

### 2.1.3 Définition des séries thêta

**Définition 2.1.4.** Soit  $L \subset \mathbb{R}^d$  un réseau. La **fonction thêta** de  $L$  est définie par :

$$\begin{aligned} \theta_L : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{x \in L} e^{i\pi z(x \cdot x)}. \end{aligned}$$

On pose  $N_L(k) = \#\{x \in L \mid x \cdot x = k\}$

On peut également exprimer  $\theta_L$  en fonction de  $q = e^{2i\pi z}$  (de façon un peu abusive si  $x \cdot x$  prend des valeurs impaires) par :

$$\begin{aligned} \theta_L(q) &= \sum_{x \in L} q^{\frac{x \cdot x}{2}} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} N_L(k) q^{\frac{k}{2}}. \end{aligned}$$

La série définissant  $\theta_L$  converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{H}$ . En effet, on peut pour  $k \in \mathbb{N}$  inclure  $N_L(k)$  boules de rayon 1 dans la boule de rayon  $k^{\frac{1}{2}} + 1$ . On en déduit  $N_L(k) = O_{k \rightarrow \infty}(k^{\frac{d}{2}})$ .

## 2.2 La formule sommatoire de Poisson

Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ . On dira que  $f$  est à **décroissance rapide** si  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \forall k \in \mathbb{N}, |\partial_\alpha f(x)| = o_{\|x\| \rightarrow +\infty}(\|x\|^{-k})$  (où  $\alpha$  désigne un multi-indice).

L'objectif de cette partie est de démontrer la formule suivante :

**Théorème 2.2.1.** (*Formule sommatoire de Poisson*)

Soit  $L \subset \mathbb{R}^d$  un réseau entier. Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  à décroissance rapide. Alors :

$$\sum_{x \in L} f(x) = \frac{1}{\sqrt{\text{disc}(L)}} \sum_{y \in L'} \hat{f}(y),$$

où pour tout  $y \in \mathbb{R}^d$  :

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i(y \cdot x)} dx.$$

### 2.2.1 Séries de Fourier

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continue et 1-périodique. Il est connu que  $f$  est somme de sa série de Fourier. Ce résultat permet de démontrer la formule sommatoire de Poisson classique, qui correspond au cas  $L = \mathbb{Z}$ . Afin de démontrer la formule dans un cadre plus général, nous allons devoir généraliser ce résultat à des fonctions  $C^\infty$  invariantes par l'action par translation d'un réseau  $L \subset \mathbb{R}^d$  que l'on fixe pour la suite.

**Lemme 2.2.2.** *Soit  $\mathcal{P} = \text{Vect}\{e_y : x \mapsto e^{2\pi i(x \cdot y)} \mid y \in L'\} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^d/L, \mathbb{C})$ . Alors  $\mathcal{P}$  est dense dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d/L, \mathbb{C})$  (muni de la norme infinie).*

*Démonstration.*  $\mathcal{P}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d/L, \mathbb{C})$  stable par conjugaison, qui contient les constantes et sépare les points. Comme  $\mathbb{R}^d/L$  est compact, on peut conclure à l'aide du théorème de Stone-Weierstrass.  $\square$

Fixons  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$  un domaine fondamental pour  $L$ . On définit un produit scalaire hermitien sur  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d/\mathbb{C})$  par :  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{\text{disc}(L)}} \int_{\mathcal{D}} f(x) \bar{g}(x) dx$ .

**Lemme 2.2.3.** *La famille  $\mathcal{E} = \{e_y \mid y \in L'\}$  est orthonormée totale.*

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_d)$  une base de  $L$  définissant le domaine  $\mathcal{D}$ . Soit  $y \neq y' \in L'$ . En utilisant la formule de changement de variables pour les intégrales :

$$\begin{aligned} \langle e_y, e_{y'} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\text{disc}(L)}} \int_{\mathcal{D}} e^{-2\pi i((y-y') \cdot x)} dx \\ &= \int_{[0,1]^d} e^{-2\pi i((y-y') \cdot (x_1 e_1 + \dots + x_d e_d))} dx_1 \dots dx_d = \delta_{y,y'} \end{aligned}$$

en séparant la dernière intégrale en un produit de  $d$  intégrales.

Il reste à montrer que  $\mathcal{P} = \text{Vect}(\mathcal{E})$  est dense dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d/L, \mathbb{C})$  (pour la norme 2), mais c'est une conséquence immédiate du Lemme 2.2.2, car l'intégrale définissant le produit scalaire hermitien  $(f, g)$  est définie sur un compact, donc la convergence uniforme implique la convergence pour la norme hilbertienne.  $\square$

**Théorème 2.2.4.** *Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $C^\infty$  invariante par  $L$ . Alors  $f$  est somme de sa série de Fourier, et la convergence est normale :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, f(x) = \sum_{y \in L'} \langle f, e_y \rangle e^{2\pi i(x \cdot y)}.$$

*Démonstration.* Posons pour tout  $y \in L'$  :

$$c_y(f) = \langle f, e_y \rangle.$$

Commençons par remarquer que si  $y = n_1 e_1^* + \dots + n_d e_d^*$ , alors une intégration par parties montre que :

$$c_y(\partial_j f) = 2\pi i n_j c_y(f)$$

où les dérivées partielles sont prises par rapport à la base  $\mathbf{e}$ . En itérant, on voit que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c_k(f) = o_{\|y\| \rightarrow +\infty}(\frac{1}{\|y\|^k})$ . On en déduit que la fonction :

$$g(x) = \sum_{y \in L'} \langle f, e_y \rangle e^{2\pi i(x \cdot y)}$$

est somme d'une série normalement convergente sur  $\mathbb{R}^d$ , donc continue, et clairement invariante par  $L$ . On en déduit que  $g$  se factorise dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d/L, \mathbb{C})$ . Par Lemme 2.2.3,  $\|g - f\|_2 = 0$ , c'est à dire :

$$\int_{\mathcal{D}} |f(x) - g(x)|^2 dx = 0$$

comme  $f - g$  est continue, on a bien  $f = g$  sur  $\mathcal{D}$ , donc sur  $\mathbb{R}^d$  car  $f - g$  est invariante par  $L$  et que  $\mathcal{D}$  est un domaine fondamental.  $\square$

## 2.2.2 Preuve de la formule sommatoire de Poisson

*Démonstration du Théorème 2.2.1.* On se place dans le cadre du Théorème 2.2.1. On se donne donc  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  à décroissance rapide. On note pour  $y \in \mathbb{R}^d$  :

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i(x \cdot y)} dx$$

la transformée de Fourier de  $f$ .

On définit pour  $t \in \mathbb{R}^d$  :

$$F(t) = \sum_{x \in L} f(t + x).$$

Comme  $f$  est à décroissance rapide, la série précédente converge normalement sur  $\mathbb{R}^d$ , et définit donc une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  invariante par  $L$  sur  $\mathbb{R}^d$ . On en déduit que  $F$  est somme de sa série de Fourier :

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, F(t) = \sum_{y \in L'} \langle F, e_y \rangle e^{2\pi i(y \cdot t)}.$$

Il reste donc à calculer les coefficients de cette série de Fourier. Or pour  $y \in L'$  :

$$\begin{aligned} \langle F, e_y \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\text{disc}(L)}} \int_{\mathcal{D}} F(t) e^{-2\pi i(y \cdot t)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{disc}(L)}} \int_{\mathcal{D}} \left( \sum_{x \in L} f(t + x) \right) e^{-2\pi i(y \cdot t)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{disc}(L)}} \sum_{x \in L} \left( \int_{\mathcal{D}} f(x + t) e^{-2\pi i(y \cdot t)} dt \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{disc}(L)}} \sum_{x \in L} \left( \int_{\mathcal{D}-x} f(t) e^{-2\pi i(y \cdot t)} dt \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{disc}(L)}} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) e^{-2\pi i(y \cdot t)} dt = \frac{1}{\sqrt{\text{disc}(L)}} \hat{f}(y). \end{aligned}$$

On justifie l'interversion entre intégrale et somme par le théorème de Fubini et le fait que  $f$  est intégrable car à décroissance rapide. L'avant dernière égalité provient du fait que  $\mathcal{D}$  est un domaine fondamental, donc ses translatés recouvrent  $\mathbb{R}^d$ , et ne se chevauchent que sur un ensemble de mesure nulle.

On obtient la formule souhaitée en prenant  $t = 0$ .  $\square$

## 2.3 Modularité de $\theta_L(z)$

On va montrer dans cette section, en utilisant la formule sommatoire de Poisson, que les séries thêta sont des formes modulaires. On fixe donc un réseau unimodulaire pair  $L \subset \mathbb{R}^d$ , où  $d \in \mathbb{N}^*$  est un multiple de 8, et on considère la série thêta associée, en la variable  $q = e^{2\pi iz}$  :

$$\theta_L(z) = \sum_{x \in L} q^{\frac{x \cdot x}{2}} = \sum_{x \in L} e^{\pi iz(x \cdot x)}.$$

Le fait que le réseau  $L$  soit pair assure que pour tout  $x \in L$ ,  $\frac{x \cdot x}{2}$  est un entier, si bien que la formule ci-dessus définit bien une fonction holomorphe de  $q$  dans le disque ouvert  $\mathbb{D}$ , et donc une fonction holomorphe 1-périodique de la variable  $z \in \mathbb{H}$ .

On souhaite montrer que sous les hypothèses qui précèdent, la fonction  $\theta_L$  est une forme modulaire de poids  $2k = \frac{d}{2}$ . Comme on sait déjà que  $\theta_L(z+1) = \theta_L(z)$  pour tout  $z \in \mathbb{H}$ , et comme  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  est engendré par  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , il suffit de montrer l'égalité suivante, où on a posé  $2k = \frac{d}{2}$  :

$$\theta_L\left(\frac{-1}{z}\right) = z^{2k} \theta_L(z). \quad (2.1)$$

Seulement, a priori,  $2k = \frac{d}{2}$  n'est même pas entier. On va cependant voir que pour qu'il existe un réseau unimodulaire pair dans  $\mathbb{R}^d$ , il faut que  $d$  soit multiple de 8.

### 2.3.1 L'équation fonctionnelle de $\theta_L$

Pour éviter les problèmes liés aux racines carrées multivaluées, on va commencer par se placer sur la demi-droite  $i\mathbb{R}_+^*$ . Soit donc  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . On va démontrer l'égalité suivante :

**Théorème 2.3.1.** (*Équation fonctionnelle pour la fonction  $\theta_L$* )

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , on a :

$$\theta_L\left(\frac{i}{t}\right) = t^{2k} \theta_L(it) \quad (2.2)$$

où on a posé  $2k = \frac{d}{2}$ , qui se ré-écrit (en utilisant au passage le fait que  $k = \frac{d}{4}$  est un entier pair) :

$$\sum_{x \in L} e^{-\frac{\pi}{t} x \cdot x} = t^{2k} \sum_{x \in L} e^{-\pi t(x \cdot x)} \quad (2.3)$$

*Démonstration.* On fixe dans toute la suite un tel  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , dans l'optique de démontrer la formule 2.2. On considère la fonction  $f : x \mapsto e^{-t\pi(x \cdot x)}$ . Cette fonction est de classe  $C^\infty$  à décroissance rapide à l'infini, et satisfait donc bien les hypothèses de la formule sommatoire de Poisson. Dans l'optique de lui appliquer la formule en question, calculons sa transformée de Fourier  $\hat{f}$ . On a, pour tout  $y \in \mathbb{R}^d$  :

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i(y \cdot x)} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d e^{-\pi t x_j^2 - 2\pi i x_j y_j} dx_1 dx_2 \dots dx_d.$$

D'où, en séparant l'intégrale du produit en produit des intégrales :

$$\hat{f}(y) = \prod_{j=1}^d \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x_j^2 - 2\pi i x_j y_j} dx_j = \prod_{j=1}^d \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2 - 2\pi i x y_j} dx. \quad (2.4)$$

Afin de calculer cette intégrale, on s'intéresse à la fonction :

$$g : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2 - 2\pi x z} dx$$

Les théorèmes de dérivation sous le signe intégral assurent que la fonction  $g$  est holomorphe sur le plan  $\mathbb{C}$ . De plus, il est aisé de calculer  $g$  dans le cas où  $z$  est réel. En effet, on a alors par un changement de variable élémentaire :

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2 - 2\pi x z} dx = e^{\frac{\pi}{t} z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t (x + \frac{z}{t})^2} dx = e^{\frac{\pi}{t} z^2} \sqrt{\frac{1}{t}}.$$

Cette expression reste naturellement valable dans le cas où  $z$  est un complexe quelconque, en vertu du théorème des zéros isolés (ou, selon les auteurs, le principe du prolongement analytique), les deux membres étant des fonctions holomorphes. En évaluant cette égalité en  $z = iy_j$ , il vient donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2 - 2\pi x iy_j} dx = e^{-\frac{\pi}{t} y_j^2} \sqrt{\frac{1}{t}}.$$

On en déduit alors le calcul de  $\hat{f}$ , en reportant cette intégrale dans 2.3 :

$$\hat{f}(y) = \prod_{j=1}^d \left( e^{-\frac{\pi}{t} y_j^2} \sqrt{\frac{1}{t}} \right) = \frac{1}{t^{d/2}} e^{-\frac{\pi}{t} y \cdot y}.$$

On est maintenant en mesure d'appliquer la formule sommatoire de Poisson à la fonction  $f$ . Il vient, en notant  $L'$  le réseau dual de  $L$  :

$$\sum_{x \in L} f(x) = \frac{1}{\mu(\mathbb{R}^d/L)} \sum_{y \in L'} \hat{f}(y).$$

On utilise alors l'unimodularité de  $L$ , qui assure non seulement que  $L = L'$ , mais également que  $\mu(\mathbb{R}^d/L) = 1$ . Il vient dès lors :

$$\sum_{x \in L} f(x) = \sum_{x \in L} \hat{f}(x).$$

Le calcul de  $f$  mené précédemment fournit donc l'égalité :

$$\sum_{x \in L} e^{-\pi t(x \cdot x)} = \frac{1}{t^{d/2}} \sum_{x \in L} e^{-\frac{\pi}{t}(x \cdot x)}.$$

qui se ré-écrit :

$$\sum_{x \in L} e^{-\frac{\pi}{t}(x \cdot x)} = t^{2k} \sum_{x \in L} e^{-\pi t(x \cdot x)},$$

qui est exactement la formule 2.3. Ceci conclut la preuve de l'équation fonctionnelle de la série  $\theta_L$ .  $\square$

Ainsi, on a obtenu que pour  $z = it$  avec  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , on a :

$$\theta_L \left( \frac{i}{t} \right) = t^{d/2} \theta_L(it).$$

Ce qui se ré-écrit :

$$\theta_L\left(\frac{-1}{z}\right) = \left(\frac{z}{i}\right)^{d/2} \theta_L(z)$$

où la racine carrée est l'unique racine carrée positive. Cependant, il reste un facteur  $i$  à faire disparaître, ainsi qu'un problème d'exposant non entier à régler. Ceci sera l'objet de la section suivante.

### 2.3.2 Contraintes sur la dimension et modularité de $\theta_L$

Reprenons l'équation fonctionnelle précédente, valable pour tout  $z \in i\mathbb{R}_+^*$  :

$$\theta_L\left(\frac{-1}{z}\right) = \left(\frac{z}{i}\right)^{d/2} \theta_L(z). \quad (2.5)$$

On note que si l'on parvient à démontrer que  $d$  est en fait un multiple de 8, tous nos problèmes s'envolent : le facteur  $\left(\frac{z}{i}\right)^{d/2}$  devient alors  $z^{2k}$  avec  $k = \frac{d}{4}$  entier, et on obtient bien une équation fonctionnelle de forme modulaire (valable a priori uniquement sur la demi-droite  $i\mathbb{R}_+^*$ , mais s'étendant à tout le demi-plan  $\mathbb{H}$  par le principe des zéros isolés, les deux membres étant holomorphes sur  $\mathbb{H}$ ).

On va donc dans cette section s'attacher à montrer le :

**Théorème 2.3.2.** *Si  $L \subset \mathbb{R}^d$  est un réseau unimodulaire pair, alors  $d$  est un multiple de 8.*

*Démonstration.* On continue de noter  $\theta_L$  la série thêta associée au réseau  $L$ . On commence par noter que l'équation 2.5 se prolonge naturellement par rigidité à tout le demi-plan  $\mathbb{H}$ . En effet, la fonction :

$$z \mapsto \theta_L\left(\frac{-1}{z}\right) - \left(\left(\frac{z}{i}\right)^{1/2}\right)^d \theta_L(z)$$

(où on a pris la détermination principale de la racine carrée, définie par  $(re^{i\theta})^{1/2} = re^{i\frac{\theta}{2}}$  pour  $r \in \mathbb{R}_+$ , et  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ ) est holomorphe sur  $\mathbb{H}$ , et nulle sur  $i\mathbb{R}$ . Elle est donc identiquement nulle, par le principe des zéros isolés. On en déduit la formule suivante, valable pour tout  $z \in \mathbb{H}$  :

$$\theta_L\left(\frac{-1}{z}\right) = \left(\left(\frac{z}{i}\right)^{1/2}\right)^d \theta_L(z) \quad (2.6)$$

où on note  $w^{\frac{1}{2}}$  la racine carrée principale d'un complexe  $w$ .

Le membre de gauche est égal à  $\theta_L(S \cdot z)$ , avec les notations habituelles :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'idée va alors être d'itérer l'équation 2.6, en remarquant que  $(TS)^3 = I_2$ . On note en effet que :

$$TS = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique est  $X^2 + X + 1$ , diviseur de  $X^3 - 1$ . Le théorème de Cayley-Hamilton assure donc que  $(TS)^3 = I_2$ . Dès lors, il vient pour tout  $z \in \mathbb{H}$  :

$$\theta_L((TS)^3 z) = \theta_L(z).$$

En utilisant l'équation 2.6 et le fait que  $\theta_L$  soit invariante par  $z \mapsto Tz$ , il vient alors :

$$\begin{aligned} \theta_L(z) &= \theta_L((TS)^3 z) = \left( \left( \frac{(TS)^2 z}{i} \right)^{1/2} \right)^d \theta_L((TS)^2 z) \\ &= \left( \left( \frac{(TS)^2 z}{i} \right)^{1/2} \right)^d \left( \left( \frac{(TS)z}{i} \right)^{1/2} \right)^d \theta_L((TS)z) \\ &= \left( \left( \frac{(TS)^2 z}{i} \right)^{1/2} \right)^d \left( \left( \frac{(TS)z}{i} \right)^{1/2} \right)^d \left( \frac{z}{i} \right)^{1/2} \theta_L(z). \end{aligned}$$

La fonction  $\theta_L$  n'est pas identiquement nulle, et donc par intégrité de l'anneau des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{H}$ , il vient pour tout  $z \in \mathbb{H}$  :

$$\left( \left( \frac{(TS)^2 z}{i} \right)^{1/2} \left( \frac{(TS)z}{i} \right)^{1/2} \left( \frac{z}{i} \right)^{1/2} \right)^d = 1. \quad (2.7)$$

Calculons le membre de gauche. On a :

$$\frac{(TS)^2 z}{i} \frac{(TS)z}{i} \frac{z}{i} = \frac{ST^{-1}z}{i} \frac{TSz}{i} \frac{z}{i} = \frac{1}{i^3} \frac{-1}{z-1} \left( \frac{-1}{z} + 1 \right) z = -i.$$

Le nombre :

$$\omega = \left( \frac{(TS)^2 z}{i} \right)^{1/2} \left( \frac{(TS)z}{i} \right)^{1/2} \left( \frac{z}{i} \right)^{1/2}$$

est donc une des deux racines carrées de  $-i$ , donc une racine primitive 8-ième de l'unité. L'équation  $\omega^d = 1$  ci-dessus assure donc que 8 divise  $d$ , comme annoncé.  $\square$

Comme annoncé au début de la section, la contrainte  $8|d$  fait s'envoler tous nos problèmes. En effet, en posant  $k = \frac{d}{4}$ , on obtient :

**Corollaire 2.3.3.** *Si  $L \subset \mathbb{R}^d$  est un réseau unimodulaire pair, alors la fonction  $\theta_L$  est une forme modulaire de poids  $2k = \frac{d}{2}$ .*

*Démonstration.* On a montré dans la section précédente que pour tout  $z \in i\mathbb{R}_+^*$ , on a :

$$\theta_L \left( \frac{-1}{z} \right) = \left( \frac{z}{i} \right)^{d/2} \theta_L(z).$$

Maintenant, 8 divisant  $d$ , cette formule devient, pour tout  $z \in i\mathbb{R}_+^*$  :

$$\theta_L \left( \frac{-1}{z} \right) = z^{2k} \theta_L(z)$$

où  $k$  est l'entier  $\frac{d}{4}$ . Cette formule étant valable pour tout  $z \in i\mathbb{R}_+^*$  et les deux membres de l'équation étant holomorphes sur  $\mathbb{H}$ , le principe du prolongement analytique permet alors de conclure que cette équation reste valable sur tout  $\mathbb{H}$ , ce qui prouve que  $\theta_L$  est une forme modulaire de poids  $2k$ .  $\square$

# Chapitre 3

## La gaussienne harmonique

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va voir que la série thêta étudiée au chapitre précédent est un cas particulier d'un résultat beaucoup plus large. En effet,  $L$  étant un réseau unimodulaire pair,  $\theta_L$  n'est pas la seule forme modulaire que l'on peut obtenir à partir du réseau  $L$ . Précisons cela.

Soit  $L \subset \mathbb{R}^n$  un réseau unimodulaire pair. Par le chapitre précédent, ceci impose que  $n$  soit un multiple de 8. Soit  $P$  un polynôme harmonique (c'est à dire, tel que  $\Delta P = 0$ ) homogène de degré  $d$ . On considère la fonction de la variable  $q = e^{2\pi iz}$  (où  $z \in \mathbb{H}$ ) suivante :

$$\theta_{L,P}(z) = \sum_{x \in L} P(x) q^{\frac{x \cdot x}{2}} = \sum_{x \in L} P(x) e^{\pi iz(x \cdot x)}. \quad (3.1)$$

Ceci définit bien une fonction holomorphe en la variable  $q \in \mathbb{D}$  car le réseau  $L$  est pair (si bien que pour tout  $x \in L$ ,  $\frac{x \cdot x}{2}$  est un entier). C'est donc une fonction holomorphe 1-périodique en la variable  $z \in \mathbb{H}$ . Si  $d$  est impair, cette fonction dégénère en la fonction nulle. On supposera donc dans la suite que  $d$  est un entier pair.

On va montrer que sous les hypothèses qui précèdent, cette fonction  $\theta_{L,P}$  est une forme modulaire de poids  $2k = \frac{n}{2} + d$ . On notera que si on prend  $P = 1$ , on retrouve le résultat de la partie précédente.

Pour cela,  $SL_2(\mathbb{Z})$  étant engendré par les deux matrices  $S$  et  $T$ , il suffit de vérifier que l'équation suivante est vérifiée :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \quad \theta_{L,P} \left( \frac{-1}{z} \right) = z^{\frac{n}{2} + d} \theta_{L,P}(z).$$

(ici,  $z^{\frac{n}{2}}$  est bien défini car on a vu que 8 divise  $n$ ).

Par le théorème des zéros isolés, il suffit en fait de vérifier cette égalité seulement sur  $i\mathbb{R}_+^*$  (les deux membres étant des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{H}$ ). En posant  $z = it$ ,  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , on est donc ramené à montrer l'égalité suivante, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\theta_{L,P} \left( \frac{i}{t} \right) = (it)^{\frac{n}{2} + d} \theta_{L,P}(it).$$

Comme  $n$  est un multiple de 8 et  $d$  est un entier pair, cette équation se ré-écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \theta_{L,P} \left( \frac{i}{t} \right) = (-1)^{\frac{d}{2}} t^{\frac{n}{2}+d} \theta_{L,P}(it).$$

Soit, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\sum_{x \in L} P(x) e^{-\frac{\pi}{t}(x \cdot x)} = (-1)^{\frac{d}{2}} t^{\frac{n}{2}+d} \sum_{x \in L} P(x) e^{-\pi t(x \cdot x)}. \quad (3.2)$$

C'est cette équation 3.2 que nous allons démontrer dans les sections précédentes, prouvant ainsi que  $\theta_{L,P}$  est une forme modulaire de poids  $\frac{n}{2} + d$ .

Encore une fois, le résultat découlera de la formule sommatoire de Poisson, appliquée à la fonction lisse à décroissance rapide suivante (ici,  $t \in \mathbb{R}_+^*$  est fixé) :

$$f : x \mapsto P(x) e^{-\pi t(x \cdot x)}.$$

Toute la difficulté résidant dans le calcul de la transformée de Fourier  $\hat{f}$ , naturellement définie par la formule suivante, valable pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  :

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x \cdot y)} dx. \quad (3.3)$$

On va démontrer le résultat suivant, qui donne la valeur de la transformée de Fourier  $\hat{f}$  :

**Théorème 3.1.1.** (*Transformée de Fourier de la gaussienne-harmonique*)

Soit  $P$  un polynôme harmonique homogène à  $n$  variables, de degré  $d \geq 0$ , et  $t$  un réel strictement positif. On considère la fonction  $f : x \mapsto P(x) e^{-\pi t(x \cdot x)}$  de la variable  $x \in \mathbb{R}^n$ , dont on note  $\hat{f}$  la transformée de Fourier. On a alors, pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  :

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{i^d t^{\frac{n}{2}+d}} e^{-\frac{\pi}{t}(y \cdot y)} P(y).$$

On propose deux preuves de ce résultat. La première est originale, et utilise la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques, ainsi que la rigidité des fonctions holomorphes. La seconde est tirée du cours de Noam Elkies [2], et est fondée sur des relations algébriques entre certains opérateurs linéaires.

## 3.2 Calcul par la moyenne harmonique

On démontre dans cette section le Théorème 3.1.1 annoncé ci-dessus, en utilisant deux ingrédients : la rigidité des fonctions holomorphes, et la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques. Pour cela, commençons par démontrer cette formule de la moyenne, en utilisant le théorème de Gauss sur la divergence (un avatar du théorème de Stokes).

### 3.2.1 La propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques

On démontre dans ce paragraphe le théorème suivant, conséquence du théorème de Gauss sur la divergence :

**Théorème 3.2.1.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction harmonique (c'est à dire de classe  $\mathcal{C}^2$ , vérifiant  $\Delta f = 0$ ). Soit  $r > 0$ .

On munit la sphère unité  $\mathbb{S}^{n-1}$  de  $\mathbb{R}^n$  de sa mesure de surface normalisée du (c'est à dire que  $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} du = 1$ ). Alors, on a pour tout  $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ , tout  $r > 0$  :

$$f(y) = \int_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} f(y + ru) du.$$

Autrement dit,  $f(y)$  est égal à la moyenne de  $f$  sur la sphère de centre  $y$  et de rayon  $r$ .

*Démonstration.* Soient  $f$  et  $y$  fixés comme dans l'énoncé. On considère la fonction :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{C} \\ r &\mapsto \int_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} f(y + ru) du. \end{aligned}$$

Il est aisé de constater que la continuité de  $f$  en  $y$  assure que  $\psi(r)$  tend vers  $f(y)$  quand  $r$  tend vers 0. Pour conclure, il suffit donc de prouver que  $\psi$  est constante. Pour cela, on dérive  $\psi$  sous le signe intégral (le théorème de dérivation sous le signe intégral s'applique car on peut localement dominer les dérivées de  $f$  par des constantes, l'intégrale portant sur un compact). Il vient, pour tout  $r > 0$  :

$$\psi'(r) = \int_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} (\nabla f(y + ru) \cdot u) du.$$

Par le théorème de Gauss sur la divergence, ceci vaut, à une constante multiplicative près :

$$\int_{x \in B(0,1)} \operatorname{div}(\nabla f(y + rx)) dx = \int_{x \in B(0,1)} \Delta f(y + rx) dx = 0.$$

Ainsi,  $\psi$  est constante, et tend vers  $f(y)$  en 0. Donc, on a pour tout  $r > 0$ ,  $\psi(r) = f(y)$ , ce qui conclut.  $\square$

### 3.2.2 Le calcul de la transformée de Fourier

À l'aide de cette formule de la moyenne harmonique, on va pouvoir calculer la transformée de Fourier de la gaussienne harmonique.

*Démonstration du Théorème 3.1.1.* On conserve les notations et hypothèses du Théorème 3.1.1 :  $t$  est un réel strictement positif,  $P$  est un polynôme harmonique homogène de degré  $d$ ,  $f$  est la fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $f : x \mapsto P(x)e^{-\pi t(x \cdot x)}$ . On note  $\hat{f}$  sa transformée de Fourier, définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x \cdot y)} dx.$$

Donnons nous dès maintenant un  $y \in \mathbb{R}^n$ . Il restera fixé tout au long de la preuve. On considère ensuite la fonction de la variable complexe  $z$  :

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi z(x \cdot y)} dx. \quad (3.4)$$

De sorte que le nombre qui nous intéresse est  $\hat{f}(y) = h(i)$ . L'intérêt de cette manoeuvre est le fait qu'il est nettement plus aisé de calculer  $h(z)$  pour des valeurs réelles. Une formule

pour  $h(z)$  valable pour  $z$  réel s'étendra alors à tout le plan complexe grâce au principe du prolongement analytique.

Soit donc  $z \in \mathbb{R}$  réel. Calculons  $h(z)$ . Il vient :

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi z(x \cdot y)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} P(x) e^{-\pi t(x \cdot x) - 2\pi z(x \cdot y)} dx \\ &= e^{\frac{\pi}{t} z^2 (y \cdot y)} \int_{\mathbb{R}^n} P(x) e^{-\pi t((x \cdot x) + 2\frac{z}{t}(x \cdot y) + \frac{z^2}{t^2}(y \cdot y))} dx \\ &= e^{\frac{\pi}{t} z^2 (y \cdot y)} \int_{\mathbb{R}^n} P(x) e^{-\pi t(x + \frac{z}{t}y) \cdot (x + \frac{z}{t}y)} dx \\ &= e^{\frac{\pi}{t} z^2 (y \cdot y)} \int_{\mathbb{R}^n} P\left(u - \frac{z}{t}y\right) e^{-\pi t(u \cdot u)} du \quad \text{en posant : } u = x + \frac{z}{t}y. \end{aligned}$$

On utilise ensuite le fait que  $P$  est homogène de degré  $d$  pour obtenir, toujours pour  $z \in \mathbb{R}$  :

$$h(z) = \frac{(-z)^d e^{\frac{\pi}{t} z^2 (y \cdot y)}}{t^d} \int_{\mathbb{R}^n} P\left(y - \frac{t}{z}u\right) e^{-\pi t(u \cdot u)} du.$$

On se débarrasse du  $t$  dans l'exponentielle en posant  $x = \sqrt{t}u$ , de sorte que  $dx = t^{\frac{n}{2}} du$  :

$$h(z) = \frac{(-z)^d e^{\frac{\pi}{t} z^2 (y \cdot y)}}{t^{d+\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} P\left(y - \frac{\sqrt{t}}{z}x\right) e^{-\pi(x \cdot x)} dx. \quad (3.5)$$

Reste à voir que l'intégrale du membre de droite de Equation (3.5) est indépendante de  $z$ . Pour simplifier les notations, posons pour tout  $a > 0$  :

$$g(a) = \int_{\mathbb{R}^n} P(y + ax) e^{-\pi(x \cdot x)} dx.$$

On va montrer que  $g$  est indépendante de  $a$ . En intégrant en coordonnées polaires (c'est à dire en posant  $x = ru$  où  $r \in \mathbb{R}_+$  et  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ ), il vient, en notant  $\mathbb{S}^{n-1}$  la sphère unité munie de sa mesure de surface  $du$  :

$$g(a) = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} P(y + a(ru)) e^{-\pi(ru \cdot ru)} r^{n-1} du dr. \quad (3.6)$$

En ré-arrangeant cette intégrale, on obtient :

$$g(a) = \int_{r=0}^{+\infty} r^{n-1} e^{-\pi r^2} \left( \int_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} P(y + (ar)u) du \right) dr.$$

Maintenant, pour tout  $r \geq 0$ , par la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques, on a :

$$\frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} P(y + (ar)u) du = P(y).$$

En reprenant la formule précédente, il vient donc pour tout  $a > 0$  :

$$g(a) = P(y) \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^{+\infty} r^{n-1} e^{-\pi r^2} dr,$$

$g$  est donc constante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Comme  $g$  est clairement polynomiale (car c'est le cas de  $P$ ) en la variable  $a$ , la fonction  $g$  est donc constante sur tout  $\mathbb{R}$ , égale à  $g(0) = P(y)$ .

En injectant l'égalité  $g\left(-\frac{\sqrt{t}}{z}\right) = P(y)$  dans l'équation 3.5, on obtient donc que pour tout  $z \in \mathbb{R}$ , on a :

$$h(z) = \frac{(-z)^d e^{\frac{\pi}{t} z^2 (y \cdot y)}}{t^{d+\frac{n}{2}}} P(y).$$

Les deux membres sont des fonctions holomorphes de la variable  $z \in \mathbb{C}$  (pour le membre de droite, c'est évident, et pour le membre de gauche, c'est une conséquence du théorème d'holomorphic sous le signe intégral, au vu de la définition de  $h$ ). Par le principe du prolongement analytique, comme ces deux membres coïncident sur  $\mathbb{R}$ , ils sont égaux sur tout  $\mathbb{C}$ . Reste à évaluer en  $i$  pour obtenir :

$$\hat{f}(y) = h(i) = \frac{(-i)^d e^{-\frac{\pi}{t} (y \cdot y)}}{t^{d+\frac{n}{2}}} P(y).$$

Ainsi, on a bien démontré, pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ , la formule :

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{i^d t^{\frac{n}{2}+d}} e^{-\frac{\pi}{t} (y \cdot y)} P(y).$$

Ceci termine le calcul de la transformée de Fourier de la gaussienne harmonique. □

## 3.3 Calcul par algèbre linéaire

### 3.3.1 Les opérateurs $E$ , $F$ , $\Delta$

Cette section, à saveur plus algébrique que les précédentes, portera sur certains opérateurs agissant sur l'espace des fonctions lisses de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$ .

On note, pour tout  $d \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}_d$  l'espace des polynômes homogènes de degré  $d$ , en  $n$  variables et à coefficients complexes.

**Définition 3.3.1** (Opérateurs). On introduit maintenant quelques opérateurs linéaires de l'espace  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  dans lui-même.

· L'opérateur d'Euler  $E$ . Pour tout  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , on note  $E(f)$  la fonction :

$$E(f) : x \mapsto \sum_{j=1}^n x_j \partial_j f(x).$$

On remarque naturellement que pour tout  $P \in \mathcal{P}_d$  (où  $d \in \mathbb{N}$ ), on a  $E(P) = dP$ . La vérification, qui ne présente aucune difficulté particulière, est laissée au lecteur.

· L'opérateur norme  $F$ . C'est l'opérateur linéaire qui à une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  associe la fonction  $F(f)$  définie par :

$$F(f) : x \mapsto \|x\|^2 f(x)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne canonique sur  $\mathbb{R}^n$ .

· L'opérateur de Laplace  $\Delta$ . Il associe à une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  la fonction :

$$\Delta(f) = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 f.$$

On rappelle que les fonctions de  $\ker \Delta$  sont appelées fonctions "harmoniques".

· L'opérateur gaussien  $G_\alpha$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $G_\alpha$  est l'opérateur qui à une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  associe la fonction  $G_\alpha(f) : x \mapsto e^{-\alpha\pi(x \cdot x)} f(x)$ .

· L'opérateur identité sur  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  sera noté  $I$ .

Pour préparer le terrain, on commence par expliciter les relations de commutations entre certains de ces opérateurs.

**Lemme 3.3.2.** *Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . L'opérateur  $G_\alpha$  a pour inverse  $G_{-\alpha}$  et commute avec  $F$ . De plus, on a les relations :*

$$G_\alpha E G_{-\alpha} = E + 2\pi\alpha F, \quad G_\alpha \Delta G_{-\alpha} = \Delta + \pi\alpha(4E + 2nI) + (2\pi\alpha)^2 F.$$

*Démonstration.* On fixe  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Le fait que  $G_\alpha$  soit inversible d'inverse  $G_{-\alpha}$  est immédiat, de même que le fait que  $G_\alpha$  commute avec  $F$ . Montrons les deux autres relations de commutations. Soit donc  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ .

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} G_\alpha E G_{-\alpha}(f)(x) &= e^{-\pi\alpha(x \cdot x)} \sum_{j=1}^n x_j \partial_j (f(x) e^{\alpha\pi(x \cdot x)}) \\ &= e^{-\pi\alpha(x \cdot x)} \sum_{j=1}^n x_j \left( \partial_j f(x) e^{\alpha\pi(x \cdot x)} + f(x) 2x_j \pi e^{\alpha\pi(x \cdot x)} \alpha \right) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \partial_j f(x) + 2\pi\alpha f(x) \sum_{j=1}^n x_j^2 = E(f)(x) + 2\pi\alpha F(f)(x). \end{aligned}$$

Ce qui fournit la première égalité :  $G_\alpha E G_{-\alpha} = E + 2\pi\alpha F$ .

Démontrons maintenant la seconde. Un calcul similaire donne, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} G_\alpha \Delta G_{-\alpha}(f)(x) &= e^{-\pi\alpha(x \cdot x)} \sum_{j=1}^n \partial_j^2 (f(x) e^{\alpha\pi(x \cdot x)}) \\ &= e^{-\pi\alpha(x \cdot x)} \sum_{j=1}^n \left( \partial_j^2 f(x) e^{\alpha\pi(x \cdot x)} + 2\partial_j f(x) \partial_j (e^{\alpha\pi(x \cdot x)}) + f(x) \partial_j^2 (e^{\alpha\pi(x \cdot x)}) \right) \\ &= e^{-\pi\alpha(x \cdot x)} \sum_{j=1}^n \left( \partial_j^2 f(x) e^{\alpha\pi(x \cdot x)} + 4\pi\alpha x_j \partial_j f(x) e^{\alpha\pi(x \cdot x)} + f(x) \partial_j^2 e^{\alpha\pi(x \cdot x)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \partial_j^2 f(x) + 4\pi\alpha x_j \partial_j f(x) \right) + e^{-\alpha\pi(x \cdot x)} f(x) \sum_{j=1}^n \partial_j (2\pi\alpha x_j e^{\pi\alpha(x \cdot x)}) \\ &= \Delta(f)(x) + 4\pi\alpha E(f) + (2\pi\alpha) f(x) e^{-\alpha\pi(x \cdot x)} \sum_{j=1}^n \left( e^{\pi\alpha(x \cdot x)} + 2\pi\alpha x_j^2 e^{\alpha\pi(x \cdot x)} \right) \\ &= \Delta(f)(x) + 4\pi\alpha E(f) + 2\pi\alpha f(x) (n + 2\pi\alpha \|x\|^2) \\ &= \Delta(f)(x) + 4\pi\alpha E(f) + 2\pi\alpha f(x) + (2\pi\alpha)^2 F(f). \end{aligned}$$

On obtient donc bien la seconde égalité annoncée :  $G_\alpha \Delta G_{-\alpha} = \Delta + \pi\alpha(4E + 2nI) + (2\pi\alpha)^2 F$ .  $\square$

Avant de passer au calcul de la transformée de Fourier de la gaussienne à proprement parler, on va également expliciter les relations entre ses opérateurs et la transformée de Fourier.

Pour cela, on va introduire l'espace fonctionnel de Schwartz, cadre naturel de ces calculs de transformée de Fourier.

**Définition 3.3.3.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'espace de Schwartz  $\mathcal{S}$  est défini comme l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$  telles que pour tout  $k \geq 0$ , la différentielle  $k$ -ième de  $f$ ,  $D^k f$  est une fonction à décroissance rapide, c'est à dire vérifie pour tout  $\beta > 0$  :

$$D^k f(x) = o(\|x\|^{-\beta})$$

pour  $x \in \mathbb{R}^n$  au voisinage de l'infini.

On peut alors définir la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  dans un cadre légèrement plus formel.

**Définition 3.3.4.** L'opérateur  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  est défini, pour tout  $f \in \mathcal{S}$ , par la formule :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{F}f(y) = \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i(x \cdot y)} dx.$$

Les théorèmes de dérivation sous le signe intégral ainsi que des intégrations par parties permettent de vérifier que  $\mathcal{F}$  est bien un opérateur de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}$ .

On peut enfin expliciter le lien entre la transformée de Fourier et les opérateurs  $E$ ,  $F$  et  $\Delta$ .

**Lemme 3.3.5.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de l'espace de Schwartz, on note  $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$  sa transformée de Fourier. On a alors les résultats suivants sur les transformées de Fourier :

(i) Pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$\mathcal{F}(x_j f) = \frac{-1}{2\pi i} \partial_j \hat{f}, \quad \mathcal{F}(\partial_j f) = 2\pi i y_j \hat{f}$$

(où on note abusivement  $x_j f$  la fonction  $x \mapsto x_j f(x)$  et  $y_j \hat{f}$  la fonction  $y \mapsto y_j \hat{f}(y)$ ).

(ii) On a de plus les relations suivantes entre  $\mathcal{F}$  et les opérateurs  $E, F, \Delta$  :

$$\mathcal{F}(\Delta \hat{f}) = -4\pi^2 F(\hat{f}), \quad \mathcal{F}((2E + nI)f) = -(2E + nI)\hat{f}, \quad \mathcal{F}(Ff) = \frac{-1}{4\pi^2} \Delta(\hat{f}).$$

*Démonstration.* Seul le point (i) nécessite des arguments de nature analytique. En effet, le point (ii) découlera aisément du point (i) par linéarité et itération du point (i). Commençons donc par montrer le premier point.

(i) Soit donc  $f \in \mathcal{S}$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . En dérivant sous le signe intégral (ce qui est licite, car  $f$  est à décroissance rapide), il vient pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  :

$$\partial_j \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_j (e^{-2\pi i(x \cdot y)}) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (-2\pi i x_j) e^{-2\pi i(x \cdot y)} dx = -2\pi i \mathcal{F}(x_j f)(y).$$

Ce qui prouve la première formule. Pour la seconde, on réalise une intégration par parties

par rapport à la variable  $x_j$ . Il vient, pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(\partial_j f)(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x) e^{-2\pi i(x \cdot y)} dx \\
 &= \int_{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}} \left( \int_{x_j = -\infty}^{+\infty} \partial_j f(x) e^{-2\pi i(x \cdot y)} dx_j \right) dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} dx_n \\
 &= \int_{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}} \left( \left[ f(x) e^{-2\pi i(x \cdot y)} \right]_{-\infty}^{+\infty} \right. \\
 &\quad \left. - \int_{x_j = -\infty}^{+\infty} f(x) (-2\pi i y_j) e^{-2\pi i(x \cdot y)} dx_j \right) dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} dx_n \\
 &= 2\pi i y_j \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x \cdot y)} dx = 2\pi i y_j \hat{f}(y).
 \end{aligned}$$

Ce qui démontre la seconde formule du point (i).

(ii) Le second point est une conséquence du premier, qu'on itère en utilisant la linéarité des équations. Fixons  $f$  une fonction de l'espace de Schwartz, dont on note  $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$  la transformée de Fourier. Il vient, par linéarité et en utilisant le (i) :

$$\mathcal{F}(\Delta f) = \mathcal{F} \left( \sum_{j=1}^n \partial_j^2 f \right) = \sum_{j=1}^n \mathcal{F}(\partial_j^2 f) = \sum_{j=1}^n (2\pi i y_j)^2 \mathcal{F}(f) = -4\pi^2 F(\hat{f}).$$

De même, pour la seconde et la troisième équations, on obtient (en utilisant la notation abusive  $x_j f$  pour désigner la fonction  $x \mapsto x_j f(x)$ ) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}((2E + nI)(f)) &= \mathcal{F} \left( \sum_{j=1}^n (2x_j \partial_j f) + n f \right) = 2 \sum_{j=1}^n \mathcal{F}(x_j \partial_j f) + n \hat{f} \\
 &= n \hat{f} + 2 \sum_{j=1}^n \frac{-1}{2\pi i} \partial_j \mathcal{F}(\partial_j f) = -n \hat{f} - 2 \sum_{j=1}^n \partial_j (y_j \hat{f}) \\
 &= n \hat{f} - 2 \sum_{j=1}^n (y_j \partial_j \hat{f} + \hat{f}) = -2E(\hat{f}) - n \hat{f} = -(2E + nI) \hat{f}
 \end{aligned}$$

$$\text{et : } \quad \mathcal{F}(Ff) = \mathcal{F} \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 f \right) = \sum_{j=1}^n \mathcal{F}(x_j^2 f) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{-1}{2\pi i} \right)^2 \partial_j^2 \hat{f} = \frac{-1}{4\pi^2} \Delta(\hat{f}).$$

Ce qui démontre les deux dernières formules, et conclut donc la preuve du lemme.  $\square$

*Remarque 3.3.6.* On constate aisément en utilisant la linéarité de  $\mathcal{F}$  que la seconde formule du point (ii) est équivalente à la formule suivante, légèrement plus maniable dans certaines situations :  $\mathcal{F}(E)(f) = -(E + nI)(f)$ .

Ces quelques lemmes d'algèbre linéaire vont nous permettre de calculer la transformée de Fourier de la gaussienne harmonique, comme annoncé. Ce calcul sera l'objet de la section suivante.

### 3.3.2 Le calcul de la transformée de Fourier, deuxième version

On va commencer par donner la forme générale de la transformée de Fourier de  $f$  dans le cas où  $P$  est un polynôme homogène de degré  $d$  (pas forcément harmonique). Ceci résulte d'un calcul élémentaire.

**Lemme 3.3.7.** *Soit  $P \in \mathcal{P}_d$  homogène de degré  $d$  en  $n$  variables,  $t > 0$ . On s'intéresse à la fonction :*

$$f : x \mapsto P(x)e^{-\pi t(x \cdot x)}$$

*Il existe alors un polynôme  $Q$  de degré au plus  $d - 1$  tel que pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ , on ait :*

$$\hat{f}(y) = i^{-d} t^{-(\frac{n}{2}+d)} e^{-\frac{\pi}{t}(y \cdot y)} (P(y) + Q(y)).$$

*Remarque 3.3.8.* Ceci exprime le fait que la partie de plus haut degré du polynôme  $P$  est conservée par passage à la transformée de Fourier. Cependant, comme on le verra plus tard, dans le cas particulier où  $P$  est harmonique, le polynôme  $Q$  est nul, et donc  $P$  multiplié par la gaussienne est - à quelques constantes près - sa propre transformée de Fourier.

*Démonstration.* La preuve est une bête récurrence, associée à une petite intégration par parties. On raisonne par récurrence sur  $d$ . Le cas  $d = 0$  a déjà été traité dans le chapitre précédent : il correspond au calcul de la transformée de Fourier de la gaussienne. On fixe donc un degré  $d \geq 0$  tel que le résultat soit vérifié pour les polynômes de  $\mathcal{P}_d$ , et on le montre pour ceux de  $\mathcal{P}_{d+1}$ .

Soit donc un polynôme  $P$  homogène de degré  $d + 1$ . Par linéarité de la transformée de Fourier et de l'équation à démontrer, on peut sans perte de généralité supposer que  $P$  s'écrit sous la forme  $P = X_j P_0$  où  $P_0 \in \mathcal{P}_d$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Il vient alors, pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  :

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} P(x) e^{-\pi t(x \cdot x) - 2\pi i(x \cdot y)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} x_j P_0(x) e^{-\pi t(x \cdot x) - 2\pi i(x \cdot y)} dx.$$

Par le théorème de dérivation sous le signe intégral (qui s'applique car on peut dominer localement chacune des dérivées par des fonctions intégrables), cette dernière intégrale est égale à :

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{-2\pi i} \partial_j \left( \int_{\mathbb{R}^n} P_0(x) e^{-\pi t(x \cdot x) - 2\pi i(x \cdot y)} dx \right) \quad (3.7)$$

(où la dérivée partielle porte sur la variable  $y_j$ ).

On utilise alors l'hypothèse de récurrence au rang  $d$ , appliquée à  $P_0$ . On obtient donc l'existence de  $Q_0$  de degré au plus  $d - 1$  tel que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_0(x) e^{-\pi t(x \cdot x) - 2\pi i(x \cdot y)} dx = i^{-d} t^{-(\frac{n}{2}+d)} e^{-\frac{\pi}{t}(y \cdot y)} (P_0(y) + Q_0(y)).$$

On injecte ceci dans l'équation 3.7, et il vient, pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  :

$$\hat{f}(y) = \frac{-1}{2\pi i} i^{-d} t^{-(\frac{n}{2}+d)} e^{-\frac{\pi}{t}(y \cdot y)} \left( -\frac{\pi}{t} 2y_j (P_0(y) + Q_0(y)) + \partial_j (P_0(y) + Q_0(y)) \right).$$

On pose alors  $Q(Y) = Y_j Q_0(Y) - \frac{t}{2\pi} \partial_j (P_0(Y) + Q_0(Y))$  qui est un polynôme de degré au plus  $d$ , de sorte que :

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= i^{-(d+1)} t^{-(\frac{n}{2}+(d+1))} e^{-\frac{\pi}{t}(y \cdot y)} (y_j P_0(y) + Q(y)) \\ &= i^{-(d+1)} t^{-(\frac{n}{2}+(d+1))} e^{-\frac{\pi}{t}(y \cdot y)} (P(y) + Q(y)). \end{aligned}$$

Ceci termine la récurrence, et achève donc la preuve du lemme.  $\square$

On va maintenant pouvoir s'intéresser au cas où  $P$  est un polynôme harmonique. On fixe donc un polynôme harmonique homogène de degré  $d \geq 0$  quelconque, et on considère la fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$f : x \mapsto P(x)e^{-\pi t(x \cdot x)}.$$

Le lemme précédent assure qu'il existe, pour tout  $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , un polynôme  $Q_j \in \mathcal{P}_j$  (comme dans le paragraphe précédent,  $\mathcal{P}_j$  désigne l'espace des polynômes homogènes de degré  $j$  à coefficients complexes), avec  $Q_d = P$ , tels que :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \hat{f}(y) = \frac{e^{-\frac{\pi}{t}(y \cdot y)}}{i^d t^{\frac{n}{2}+d}} \sum_{j=0}^d Q_j(y). \quad (3.8)$$

Afin de conclure cette seconde preuve du Théorème 3.1.1, il s'agit donc de prouver que sous l'hypothèse supplémentaire " $P$  harmonique", on a  $Q_0 = \dots = Q_{d-1} = 0$ . C'est l'objet de ce second lemme :

**Lemme 3.3.9.** *Sous les notations et hypothèses de l'équation 3.8, on a :*

$$Q_0 = \dots = Q_{d-1} = 0.$$

*Démonstration.* On fixe  $P$  un polynôme harmonique homogène de degré  $d \geq 0$ , à  $n$  variables et à coefficients complexes, et on considère la fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$  :

$$f : x \mapsto P(x)e^{-\pi t(x \cdot x)},$$

où  $t$  est un réel fixé, strictement positif. On considère la transformée de Fourier  $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$  de  $f$ . Le lemme qui précède assure l'existence de  $Q_0, \dots, Q_d$  homogènes de degrés respectifs  $0, \dots, d$ , avec  $Q_d = P$ , tels que :

$$\hat{f} = \frac{1}{i^d t^{\frac{n}{2}+d}} \sum_{j=1}^n G_{\frac{1}{t}} Q_j \quad (3.9)$$

(on rappelle que les opérateurs  $G_\alpha$  sont définis au début de Section 3.3.1).

Maintenant, comme on sait que  $f = G_t P$  soit  $P = G_{-t} f$ , le caractère harmonique de  $P$  donne  $0 = \Delta P = \Delta G_{-t} f$ , si bien que  $G_t \Delta G_{-t} f = 0$ . De la même façon, comme  $P$  est homogène de degré  $d$ , on a  $EP = dP$ , si bien que  $EG_{-t} f = dG_{-t} f$ , soit  $G_t EG_{-t} f = df$ . On obtient donc les deux équations linéaires suivantes, vérifiées par  $f$ , découlant respectivement de l'harmonicité et de l'homogénéité de  $P$  :

$$G_t \Delta G_{-t} f = 0, \quad G_t EG_{-t} f = df.$$

On utilise alors Lemme 3.3.2, qui donne une expression explicite des opérateurs présents dans l'équation ci-dessus. On obtient alors, en injectant le résultat de ce lemme dans ladite équation :

$$E(f) + 2\pi t F(f) = df, \quad \Delta(f) + \pi t(4E + 2nI)(f) + (2\pi t)^2 F(f) = 0$$

On applique alors la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  aux deux membres de cette équation. En utilisant Lemme 3.3.5, on obtient donc successivement :

$$\begin{aligned} -(E + nI)(\hat{f}) - \frac{t}{2\pi}\Delta\hat{f} &= d\hat{f}, & -4\pi^2 F(\hat{f}) - 2\pi t(2E + nI)(\hat{f}) - t^2\Delta\hat{f} &= 0, \\ \text{soit : } -\Delta\hat{f} &= \frac{2\pi}{t}(E(\hat{f}) + (n + d)\hat{f}), & -\Delta\hat{f} &= \frac{4\pi^2}{t^2}F(\hat{f}) + \frac{2\pi}{t}(2E + nI)(\hat{f}). \end{aligned}$$

On identifie les deux équations précédentes, pour obtenir :

$$\frac{2\pi}{t}(E(\hat{f}) + (n + d)\hat{f}) = \frac{4\pi^2}{t^2}F(\hat{f}) + \frac{2\pi}{t}(2E + nI)(\hat{f}).$$

On divise les deux membres par  $\frac{2\pi}{t}$ , et on simplifie les quantités égales. On obtient finalement l'équation :

$$\left(E + \frac{2\pi}{t}F\right)\hat{f} = d\hat{f}. \quad (3.10)$$

En repassant aux polynômes, on va voir que cette dernière équation impose que le polynôme :

$$Q = \sum_{j=0}^d Q_j$$

est homogène de degré  $d$ . Vérifions cela. On a vu au début de la démonstration qu'on a l'égalité  $\hat{f} = i^{-dt - \frac{n}{2} - d}G_{\frac{1}{t}}Q$ . Il en découle donc que  $Q = i^{dt\frac{n}{2} + d}G_{-\frac{1}{t}}\hat{f}$ , si bien que, en utilisant Lemme 3.3.2 :

$$G_{\frac{1}{t}}E(Q) = i^{dt\frac{n}{2} + d}(G_{\frac{1}{t}}EG_{-\frac{1}{t}})(\hat{f}) = i^{dt\frac{n}{2} + d}\left(E + \frac{2\pi}{t}F\right)(\hat{f}).$$

On utilise alors l'équation 3.10, qui fournit donc :

$$G_{\frac{1}{t}}E(Q) = i^{dt\frac{n}{2} + d}d\hat{f}.$$

Ce qui se réécrit :

$$E(Q) = d \cdot i^{dt\frac{n}{2} + d}G_{-\frac{1}{t}}\hat{f} = dQ.$$

Maintenant, l'équation  $E(Q) = dQ$  ainsi obtenue impose que  $Q$  est homogène de degré  $d$ . En effet, on a  $Q = Q_0 + \dots + Q_d$  où pour tout  $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $Q_j$  est dans l'espace propre de  $E$  associé à la valeur propre  $j$ . Comme  $Q$  est lui-même dans l'espace propre de  $E$  de valeur propre  $d$ , le fait que les espaces propres de  $E$  sont en somme directe impose que  $Q = Q_d$  et  $Q_0 = \dots = Q_{d-1} = 0$ , ce qui achève la preuve du lemme.  $\square$

Des deux derniers lemmes, on déduit Théorème 3.1.1, comme attendu.

## 3.4 Modularité de $\theta_{L,P}$

Rappelons Théorème 3.1.1, démontré de deux manières différentes dans les sections précédentes :

**Théorème** (*Transformée de Fourier de la gaussienne-harmonique*)

Soit  $P$  un polynôme harmonique homogène à  $n$  variables, de degré  $d \geq 0$ , et  $t$  un réel

strictement positif. On considère la fonction  $f : x \mapsto P(x)e^{-\pi t(x \cdot x)}$  de la variable  $x \in \mathbb{R}^n$ , dont on note  $\hat{f}$  la transformée de Fourier. On a alors, pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  :

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{i^d t^{\frac{n}{2}+d}} e^{-\frac{\pi}{t}(y \cdot y)} P(y).$$

Ce théorème va nous permettre de conclure la preuve du résultat qui nous occupe, à savoir la modularité de la fonction  $\theta_{L,P}$ . Rappelons les hypothèses.  $L \subset \mathbb{R}^n$  est un réseau unimodulaire pair. En vertu des résultats du chapitre 2, ceci impose que  $n$  est un multiple de 8. On fixe également un polynôme harmonique homogène de degré  $d$  pair, à coefficients complexes, qu'on note  $P$ . On considère alors la fonction holomorphe de la variable  $z \in \mathbb{H}$ ,  $\theta_{L,P}$  définie par la série :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \quad \theta_{L,P}(z) = \sum_{x \in L} P(x) e^{i\pi z(x \cdot x)}.$$

Le fait que  $L$  est un réseau pair assure que  $\theta_{L,P}$  est 1-périodique. Pour montrer le théorème qui nous occupe, à savoir que  $\theta_{L,P}$  est une forme modulaire de poids  $\frac{n}{2} + d$ , il suffit donc de montrer l'égalité :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \quad \theta_{L,P}\left(\frac{-1}{z}\right) = z^{\frac{n}{2}+d} \theta_{L,P}(z).$$

Or, les deux membres sont des fonctions holomorphes de la variable  $z \in \mathbb{H}$ . Par le principe du prolongement analytique, il suffit donc de vérifier cette égalité pour  $z = it$ ,  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . Après ce changement de variable, l'égalité à démontrer devient donc (en prenant en compte le fait que  $n$  est divisible par 8, ce qui assure  $i^{\frac{n}{2}} = 1$ ) :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{x \in L} P(x) e^{-\frac{\pi}{t}(x \cdot x)} = i^d t^{\frac{n}{2}+d} \sum_{x \in L} P(x) e^{-\pi t(x \cdot x)}. \quad (3.11)$$

Soit  $t > 0$ . Considérons la fonction  $f : x \mapsto P(x)e^{-\pi t(x \cdot x)}$ . D'après Théorème 3.1.1, sa transformée de Fourier  $\hat{f}$  est donnée par :  $\hat{f} : y \mapsto i^{-d} t^{-\frac{n}{2}-d} P(y) e^{-\frac{\pi}{t}(y \cdot y)}$ . Ainsi, le réseau  $L$  étant unimodulaire (si bien que  $L' = L$  et  $\text{disc}(L) = 1$ ), la formule sommatoire de Poisson donne :

$$\sum_{x \in L} \hat{f}(x) = \sum_{y \in L} \hat{f}(y)$$

d'où, en utilisant l'expression de  $\hat{f}$  et de  $f$  :

$$\sum_{x \in L} P(x) e^{-\pi t(x \cdot x)} = \sum_{x \in L} i^{-d} t^{-\frac{n}{2}-d} P(x) e^{-\frac{\pi}{t}(x \cdot x)},$$

qui est exactement la formule 3.11. Ainsi, on a donc prouvé le théorème :

**Théorème 3.4.1.** *Soit  $L \subset \mathbb{R}^n$  un réseau unimodulaire pair, et  $P$  un polynôme harmonique homogène de degré  $d \geq 0$ . Alors, la formule :*

$$\forall z \in \mathbb{H}, \quad \theta_{L,P}(z) = \sum_{x \in L} e^{\pi iz(x \cdot x)}$$

définit une fonction holomorphe  $\theta_{L,P}$  sur le demi-plan  $\mathbb{H}$ , qui est une forme modulaire de poids  $\frac{n}{2} + d$ .

# Conclusion

Nous avons démontré la modularité des fonctions  $\theta_{L,P}$ ,  $L \subset \mathbb{R}^n$ ,  $P$  harmoniques de degré  $d$ , associées aux réseaux unimodulaires pairs. Pour cela on a démontré et utilise la formule sommatoire de Poisson afin de prouver une identité reliant une série définie par une fonction à sa transformée de Fourier. En utilisant cette formule, et la relation classique entre une fonction gaussienne et sa transformée de Fourier (qui est encore une gaussienne !), on a obtenu des identités vérifiées par les séries  $\theta_L$ . En utilisant la théorie des fonctions de la variable complexe on en a déduit la modularité de  $\theta_L$ .

Afin de démontrer la modularité de  $\theta_{L,P}$ , nous avons utilisé deux méthodes différentes. La première utilisait la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques afin de démontrer l'identité du théorème 3.2 par un calcul direct. La deuxième utilisait 3 opérateurs agissant sur l'espace des polynômes à  $n$  variables, ainsi que la façon dont ces opérateurs se transforment après une transformée de Fourier, pour démontrer la même identité. De nouveau la théorie des fonctions de la variable complexe nous a permis de conclure que la série  $\theta_{L,P}$  est bien modulaire de poids  $d + \frac{n}{2}$ .

La modularité de ces fonctions a de nombreuses conséquences, et possède des applications dans différents domaines des mathématiques. En théorie des réseaux, on peut utiliser la nullité des espaces de formes paraboliques en basse dimension (6, 10 et 14) afin d'obtenir des identités telles que :

$$\sum_{x \in \mathcal{R}_L} (x \cdot y)^2 = \frac{2|\mathcal{R}_L|(y \cdot y)}{n}, \quad \mathcal{R}_L = \{x \in L | x \cdot x = 2\},$$

en utilisant le polynôme harmonique  $P(x) = (x \cdot y)^2 - \frac{(x \cdot x)(y \cdot y)}{n}$ ,  $n = 8, 16, 24$ . Ce genre d'identité est le début de la classification des réseaux unimodulaires pairs en dimensions 8, 16 et 24. Remarquablement, il existe un unique réseau unimodulaire pair à isométrie près en dimension 8 :  $E_8$ , et deux en dimension 16 :  $E_8 \oplus E_8$  et  $D_{16}^+$ . On trouve une preuve de ce résultat dans [5], qui utilise des résultats présents dans [6] sur les systèmes de racines. En revanche, dès la dimension 24, la classification se complique : il existe, à isométrie près, 24 réseaux unimodulaires pairs en dimension 24, dont le célèbre réseau de Leech. Pour plus de détails concernant cette classification, consulter [4].

En théorie des nombres, ces séries peuvent être utilisées afin de démontrer de très nombreux théorèmes, parmi lesquels on peut citer le très célèbre théorème des quatre carrés de Jacobi, qui donne la formule citée en introduction :

$$r_4(n) = 8 \sum_{\substack{d|n \\ 4 \nmid d}} d.$$

Cette formule peut être obtenue en utilisant une classe un peu plus large de fonctions modulaires, possédant une symétrie restreinte à des sous groupes d'indice fini de  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

# Bibliographie

- [1] Jean-Pierre Serre, *Cours d'Arithmétique*
- [2] Noam Elkies, Math 272y : *Rational Lattices and their Theta Functions (Fall 2019)*
- [3] Gaëtan Chenevier, Jean Lannes, *Automorphic Forms and Even Unimodular Lattices*
- [4] Hans-Volker Niemeier, *Definite quadratische Formen der Dimension 24 und Diskriminante 1*
- [5] Ebelin Wolfgang, *Lattices and Codes*
- [6] James E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*