

# Mémoire de première année : théorie des catastrophes

Andreas Mignon, Santiago Reyes  
directeur de mémoire : Emmanuel Dormy

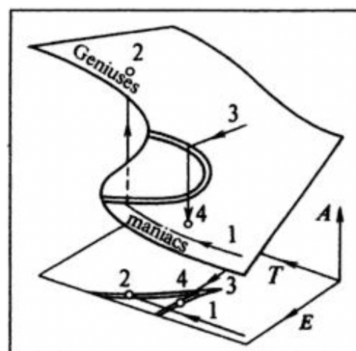
## 1 Introduction

Ce mémoire s'intéresse à la théorie des catastrophes, c'est à dire aux changements soudains dans le comportement d'un système pour de petites variations des paramètres. Nous allons présenter les catastrophes en général et nous intéresser en particulier à celles de codimension inférieure ou égale à 5 et proposer une vision géométrique à l'aide de la machine de Zeeman. Notre but est de présenter les idées principales et non une preuve complète de la classification afin de découvrir un nouveau domaine des mathématiques. Les preuves admises se retrouvent dans l'article de Christopher Zeeman cité en référence. Pour la classification des catastrophes, nous nous sommes appuyés principalement sur les notes de conférence de Zeeman : **The classification of catastrophes of codimension  $\leq 5$** .

La théorie des catastrophes a été introduite par René Thom pour comprendre la manière dont on peut observer des changements de comportements abruptes, comme les sauts sur le disque de Zeeman. En effet, la théorie des catastrophes s'intéresse aux points critiques dégénérés d'une fonction : lorsque le point critique est non dégénéré, le lemme de Morse permet de se ramener à un cas connu. Quand il est dégénéré (c'est un tel point que l'on appellera catastrophique), on peut tout de même, modulo un difféomorphisme, se ramener à une forme simple. Ce sont ces formes que l'on essaiera de classer. Ce classement permettra ensuite d'avoir une théorie applicable aux fonctions à paramètres : par exemple un potentiel  $V(x, a, b)$ , où  $a$  et  $b$  seraient des paramètres connus et où l'on chercherait les points  $x$  correspondant à la solution d'un système physique, car minimisant le potentiel.

On verra ensuite un résultat de stabilité, indiquant que si notre système se déforme un peu, alors les catastrophes induites ne changent pas. Enfin, nous nous intéresserons au cas concret du disque de Zeeman.

On retrouve les catastrophes en physique lorsqu'on parle de comportement à hystérésis, mais aussi dans la vie de tous les jours. Si dans certains domaines cela semble prometteur, comme dans l'étude du climat, la classification des catastrophes ne nous permet pas de voir quand elles ont lieu. Voici un exemple tiré du livre de Vladimir Arnold pour voir une application qualitative de cette théorie. On a en ordonné un paramètre  $A$  caractérisant la qualité d'un scientifique, et les coordonnées sur le plan  $T$  et  $E$  représente la technique et l'enthousiasme. Mais ceci ne nous donne pas une fonction, pour un même enthousiasme et technique, en fonction du chemin choisi (si l'enthousiasme a augmenté avant ou la technique) on peut avoir un génie ou un maniaque, ce qui mène à un phénomène d'hystérésis, puisque tout ceci dépend de l'histoire passé.



Voici l'enjeu principal de la classification des catastrophes:

Soit  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse.

On définit  $M_F$  par  $M_F = \{a = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) \mid (\frac{\partial F}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(a)) = 0\}$ . On note  $p_r$  la projection canonique  $p_r : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  et  $\chi_F = p_r|_{M_F}$  est la catastrophe de  $F$ . Si  $r \leq 5$  on peut réussir à classifier  $\chi_F$  localement à un difféomorphisme près.

## 2 Germes de fonctions et détermination

La notion de germe permet de se ramener uniquement à une notion locale, ce qui sera utile pour étudier les singularités de fonctions. Dans cette partie on commencera par définir les germes de fonctions pour ensuite parler du k-jet (la série de Taylor tronquée à l'ordre k). On introduira la notion de k-détermination, pour une fonction  $f$  on dit qu'elle est k déterminé si pour toute fonction  $g : f$  et  $g$  ont même k-jet implique  $f$  et  $g$  sont dans le même germe modulo un difféomorphisme. Ce passage sera crucial dans la suite puisqu'il nous permettra de travailler avec des polynômes en se ramenant aux k-jets de fonctions k-déterminées.

### 2.1: Définition: équivalence près d'un point

Soient  $M$  et  $Q$  deux variétés lisses. Pour  $x \in M$  et  $f, g \in C^\infty(M, Q)$  on dit que  $f \sim_x g$  s'il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que  $f = g$  sur  $U$ .

$\sim_x$  est une relation d'équivalence. En effet :

$f \sim_x f$  en prenant  $U=M$

$f \sim_x g$  implique que  $g \sim_x f$  par réflexivité de l'égalité

Si  $f \sim_x g$  et  $h \sim_x g$  il existe des voisinages  $U$  et  $V$  respectivement sur lesquels on a égalité et sur leur intersection  $f$  et  $h$  coïncident.

### 2.2: Définition : germe d'une fonction

On notera  $[f]_x$  la classe d'équivalence pour la relation d'équivalence  $\sim_x$  que l'on appellera également un germe. Dans la suite on confondra souvent germe et fonction (ce qui peut parfois expliquer des coquilles sur l'accord au féminin ou au masculin).

### Introduction des espaces

On a  $E_n = \{[f]_0 \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\}$  qui est un espace vectoriel réel de dimension infinie et aussi un anneau unitaire.

De même on notera  $m_n = \{f \in E_n \mid f(0) = 0\}$ .

Dans la suite lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté on notera simplement  $E$  et  $m$ .

### 2.3: Définition : anneau local

Un anneau local est un anneau unitaire commutatif ayant un unique idéal maximal.

### 2.4: Lemme

L'anneau  $E$  est un anneau local d'idéal maximal  $m$ .

**Preuve.** Il est immédiat que  $m$  est un idéal. Soit  $a \in E \setminus m$  et  $f \in a$  alors  $f(0) \neq 0$  donc  $1/f$  est définie sur un voisinage de 0. Donc 1 appartient à l'idéal engendré par  $a$  c'est à dire l'idéal engendré par  $a$  c'est  $E$ . Donc tout idéal de  $E$  est soit inclus dans  $m$  soit égal à  $E$ .  $\square$

On notera  $x_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  la projection selon la  $i$ -ème coordonnée et on confondra dans la suite le germe, la fonction et le système de coordonnées.

Le lemme suivant est très utile pour travailler avec les éléments de  $m$ .

### 2.5: Lemme

On a  $m = (x_1, \dots, x_n)_E$  où  $(x_1, \dots, x_n)_E$  est l'idéal engendré dans  $E$  par les  $x_i$

**Preuve.** Soit  $f \in m$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(tx) dt = \int_0^1 \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_i(x) dt = \sum \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt \times x_i(x)$$

On a donc  $m \subset ((x_1, \dots, x_n)_E)$ . L'inclusion réciproque est immédiate et on a donc égalité.  $\square$

On va définir quelques ensembles qui vont nous être utiles pour la classification des germes des fonctions.

### 2.6: Définition : $m^k, J^k, I^k$

On appelle  $m^k$  l'idéal engendré par les monômes en les  $(x_i)$  de degré  $k$ .

On notera  $J^k = E/m^{k+1}$ ,  $J^k = m/m^{k+1}$  et  $j^k : E \rightarrow J^k$  la projection qui est un morphisme d'anneaux.

### 2.7: Lemme

$J^k$  est un anneau local d'idéal maximal  $I^k$

**Preuve.**  $J^k$  est commutatif.

Montrons que  $j^k : \{N \text{ idéal de } E \text{ contenant } m^{k+1}\} \rightarrow \{N \text{ idéal de } J^k\}$  est une bijection. Il nous faut donc montrer que c'est une injection. Soit  $M$  et  $N$  deux idéaux différents  $n \in N$  et  $n$  n'appartenant pas à  $M$ . Si  $j^k n \in j^k M$  alors il existe  $m \in M$  et  $x \in m^{k+1}$  tel que  $n = m \times x$  et comme  $M$  est un idéal alors  $n \in M$  d'où une contradiction.

Puisque  $E$  est un anneau local et  $j^k$  est une bijection on a donc que  $J^k$  est un anneau local d'idéal maximal la projection de  $m$  c'est à dire  $I^k$ .  $\square$

### 2.8: Lemme

$J^k$  est un espace vectoriel de dimension finie engendré par les monômes en  $(x_i)_i$  de degré plus petit que  $k$ .

Soit  $f \in E$  on fait le développement de Taylor en 0 de  $f$  à l'ordre  $k$  et on aura le reste qui sera dans  $m^{k+1}$ .  $\square$

## 2.9: Définition : k-jet d'une fonction

Le  $k$ -jet de  $f$  est défini par  $j^k(f)$  c'est à dire la série de Taylor tronquée à l'ordre  $f$ . Ce n'est pas la projection dans  $J^k$ , mais  $j^k(f)$  et  $f$  ont la même projection dans  $J^k$ , ce qui justifie les notations.

Dans ce qui suit on essaiera de se ramener dès que possible à travailler avec des  $k$ -jets puisqu'ils sont plus faciles à manipuler, cependant on aura besoin de la détermination pour justifier que tous les résultats que l'on obtiendra avec les  $k$ -jets sont vrais aussi pour les fonctions initiales.

## 2.10: Définition : équivalence de germes

Soient  $f, g$  deux germes.

$f \sim g$  s'il existe un difféomorphisme  $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  tel que  $f = g(\gamma)$  ici c'est l'égalité entre germes.

$f \sim_k g$  si  $j^k f = j^k g$

Les deux relations dans la définition sont des relations d'équivalence. Énonçons le lemme suivant:

## 2.11: Définition : détermination

La détermination de  $f$  est :  $det(f) := \min\{k | \forall g \in E, f \sim_k g \implies f \sim g\}$  et elle vaut  $+\infty$  si l'ensemble est vide.

On dit alors que  $f$  est  $k$ -déterminée, si  $det f \leq k$

## 2.12: Lemme

Soit  $f$  un germe  $k$  déterminé, alors

$f \sim g \implies g$   $k$  déterminé

$f \sim_k g \implies g$   $k$  déterminé

La deuxième implication découle de la première puisque si  $f$  est  $k$ -équivalente à  $g$  comme  $f$  est  $k$ -déterminé alors  $f$  et  $g$  sont équivalentes et donc  $g$  est  $k$ -déterminé.

**Preuve.** Supposons  $f \sim g$  et  $h \sim_k g$ . Alors il existe  $\gamma_1$  tel que  $f = g(\gamma_1)$  et on a  $j^k g = j^k h \implies j^k(f(\gamma_1^{-1})) = j^k h$  et donc,

$j^k f = j^k(f(\gamma_1^{-1}(\gamma_1))) = j^k(f(\gamma_1^{-1}))j^k(f(\gamma_1)) = j^k h j^k \gamma = j^k(h(\gamma))$

Et donc  $f \sim_k h(\gamma) \implies f \sim h(\gamma)$  i.e il existe  $\gamma_2$  tel que  $f = h(\gamma_1(\gamma_2))$ , d'où  $g(\gamma_1) = h(\gamma_1(\gamma_2)) \implies g = h(\gamma_1(\gamma_2(\gamma_1^{-1})))$ .

On a donc montré que  $det g \leq det f$  et donc  $g$  est  $k$ -déterminée.  $\square$

## 2.13: Définition : $\Delta$

Soit  $f \in E$  on note  $\Delta(f) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})_E$ , l'idéal dans  $E$  engendré par les dérivées partielles de  $f$ .

$\Delta$  est indépendant du choix de coordonnées puisque  $\frac{\partial f}{\partial y_j} = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$  d'où  $(\frac{\partial f}{\partial y_i})_E \subset (\frac{\partial f}{\partial x_i})_E$  et on peut faire le même calcul dans l'autre sens puisque le changement de coordonnées est un difféomorphisme.

## 2.14: Lemme

Soit  $f \in E \setminus m$  on pose  $g = f - f(0) \in m$ , alors  $\Delta(f) = \Delta(g)$  et  $f$   $k$ -déterminé est équivalent à  $g$   $k$ -déterminé.

**Preuve.** On a les dérivés partielles de  $f$  et  $g$  qui coïncident et donc  $\Delta(f) = \Delta(g)$ .

$$h \sim_k g \implies h + f(0) \sim_k f \implies h + f(0) \sim f \implies h \sim g$$

$$h \sim_k f \implies (h - h(0) \sim_k g \text{ et } h(0) = f(0)) \implies (h - h(0) \sim g \text{ et } h(0) = f(0)) \implies h \sim f. \quad \square$$

## 2.15: Théorème de détermination

Soit  $f \in m$  alors  $m^{k+1} \subset m^2\Delta(f) \implies f$  est  $k$ -déterminée  $\implies m^{k+1} \subset m\Delta(f)$

Ce théorème sera très utile pour la suite ; il est donc recommandé de garder ce résultat en tête. Il aura un lien fort avec la codimension que nous verrons dans le chapitre suivant. De plus, il permet souvent d'établir la détermination d'une fonction ou, inversement, l'inclusion d'ensembles. La preuve est longue, mais on peut la retrouver dans les notes de conférence de Zeeman.

## 2.16: Corollaire : caractérisation de la $k$ -détermination

Soit  $f$  une fonction, alors :  $f$  finiment déterminée si et seulement si, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $m^k \subset \Delta(f)$

**Preuve.**

Si  $f$  est  $k$ -déterminé alors  $m^{k+1} \subset m\Delta(f) \subset \Delta(f)$

Si  $m^k \subset \Delta(f)$  alors  $m^{k+2} \subset m^2\Delta(f)$  et donc  $f$  est  $k+1$  déterminé.  $\square$

## 2.17: Corollaire : condition suffisante d'1-détermination

$f \in m \setminus m^2 \implies f$  1-détermine

**Preuve**

$f'(0) \neq 0$  i.e il existe  $i$  tel que  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  n'est pas dans  $m$  et donc  $\Delta(f) = E$ . Donc  $m^2\Delta(f) = m^2$  et  $f$  est 1-déterminé.  $\square$

Ceci nous permet donc de supposer que  $f \in m^2$  puisqu'on s'intéresse aux singularités.

## 2.18: Définition de l'essence

L'essence de  $f$  par rapport à la base  $(x_i)_i$  est le plus petit  $k$  tel que tous les  $x_i$  apparaissent au moins une fois dans  $j^k f$ . On le note  $Ess f$  et vaut plus l'infini si ce n'est vérifié par aucun  $k$ . L'essence d'une fonction est donc définie a priori par rapport à une base.

## 2.19: Lemme : inégalité d'essence

$Ess f \leq \det f$

**Preuve.** Supposons  $k < Ess f$  donc il existe  $x_i$  qui n'est pas présent dans  $j^k f$ . On prend  $g = j^k f$  comme germe et donc  $x_i^r$  n'est pas dans  $\Delta(g)$  pour tout  $r$  entier non nul.

On a donc que  $m^k$  n'est pas inclus dans  $\Delta(g)$  pour tout entier  $k > 0$ . Donc  $g$  n'est pas finiment

déterminé. Si  $f$  est  $k$  déterminé on aurait donc une contradiction, et donc  $essf \leq det f$ . □

L'essence est surtout utilisée pour cette dernière inégalité, qui fait un lien entre la détermination et une valeur que l'on peut facilement observer en effectuant le développement de Taylor.

### 3 Lien avec la codimension

On va maintenant introduire une nouvelle notion : la codimension de  $f$  que l'on va définir tout de suite après. Cette appellation sera justifiée dans le théorème d'appellation énoncé plus loin. Cette notion a priori abstraite est en fait directement liée à la détermination de notre germe, donc cette notion sera fondamentale pour la suite, et jouera aussi un grand rôle lors des dépliages de germe.

#### 3.1: définition : codimension

Soit  $f \in m$ , on appelle codimension de  $f$  la valeur :  $codim f = \dim_{\mathbb{R}} m/\Delta(f)$ .

Ce quotient est en fait bien défini, car : si  $f \in m^2$ , alors : Pour tout  $i$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in m$  et donc  $\Delta f \subset m$ . Sinon,  $f \in m \setminus m^2$  et donc  $\Delta f = E$  d'après un corollaire précédent, et on pose par convention  $codim f = 0$ .

**Exemple :** Si  $f : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x - 2^3$  est un germe, alors,  $\Delta f = (x_1, x_2)_E$ , et  $codim f = 1$ , car  $\mathbb{R}x_2$  est supplémentaire à  $\Delta f$ .

#### 3.2: Lemme : codimension / détermination

On a que  $codim f$  et  $det f$  sont tous deux infinis ou sont tous deux finis et alors :  $det f \leq codim f + 2$

**Preuve.**

- 1) Si  $f \notin m^2$  : alors,  $codim f = 0$  et  $f$  est 1-déterminé.  $1 \leq 2$ .
- 2) Soit  $f \in m^2$ .

En observant la séquence suivante :

$$m = m + \Delta f \supset m^2 + \Delta f \supset \dots \supset m^k + \Delta f \supset \dots$$

on peut distinguer deux cas : ou bien il existe un  $k$  minimal tel que  $m^{k-1} + \Delta f = m^k + \Delta f$ , ou bien il n'en existe pas.

Premier cas : On considère un tel  $k$ . On aura besoin de ce lemme d'algèbre générale que l'on admet :

**Lemme de Nakayama :** Soit  $A$  un anneau local,  $a$  son idéal maximal et  $N$  et  $M$  es  $A$ -modules avec  $M$  finiment engendré. Alors, :  $M \subset N + aM \Rightarrow M \subset N$ .

On a alors :  $m^{k-1} \subset m^k + \Delta f$  et  $m^{k-1}$  finiment engendré. Donc :  $m^{k-1} \subset \Delta f$ . Donc  $m^{k+1} \subset \Delta f$ , donc d'après le théorème **2.15**,  $f$  est  $k$ -déterminée et  $det f \leq k$ .

$codim f = \dim m/\Delta f \leq \dim m/m^{k-1}$  Mais  $m/m^{k-1}$  est finiment engendré par les monômes en  $x_i$  de degré plus grand que 1 et plus petite (strictement) que  $k - 1$ . Donc  $codim f$  est fini. maintenant, la suite :  $m/\Delta f \supset (m^2 + \Delta f)/\Delta f \supset \dots \supset (m^{k-1} + \Delta f)/\Delta f = 0$  est strictement décroissante puisque l'on a choisi  $k$  minimal. Cette suite comprend  $k-2$  inclusions strictes. Donc  $codim f \geq k-2 \geq det f - 2$ .

Maintenant, considérons le second cas : si  $det f$  est fini, alors  $m^k \subset \Delta f$  pour un certain  $k$  d'après la caractérisation de la  $k$ -détermination. Donc  $det f$  est fini, car sinon :  $m^k + \Delta f = \Delta f = m^{k+1} + \Delta f$ .

De plus,  $m/\Delta f \supset (m^2 + \Delta f)/\Delta f \supset \dots$  est strictement décroissante, donc  $\text{codim } f$  est infinie.  $\square$

Pour classifier les catastrophes, nous avons tout intérêt à nous placer dans  $m^2/m^{k+1}$ . En effet, on a déjà montré que nous pouvions nous placer dans  $m^2$  pour étudier nos fonctions, et  $m^2/m^{k+1}$  est l'ensemble idéal pour travailler sur les fonctions  $k$ -déterminée, puisque nous pouvons les ramener les fonctions de  $m^2$   $k$ -déterminée à leur projection dans  $m^2/m^{k+1}$ .

Le théorème suivant va ensuite illustrer la pertinence de l'appellation codimension pour les fonctions (il ne sera pas utilisé pour la suite, mais il est vecteur de sens).

### 3.3: Définition : groupe d'équivalences

On appelle  $G$  l'ensemble des germes en 0 des difféomorphismes lisses de  $\mathbb{R}^n$ . On pose aussi  $G^k = G \cap J^k$ .

On admet que  $G^k$  est un groupe de Lie et que  $T_z(zG^k) = \pi(m\Delta f)$  où  $\in m^2$  et  $z = \pi(f)$ .

### 3.4: Théorème d'appelation

Soit  $f \in m^2$ ,  $\text{codim } f = c$ , avec  $0 \leq c \leq k - 2$ .

Alors,  $zG^k$  est une sous-variété de  $m^2/m^{k+1}$  de codimension  $\text{codim } f$ .

#### Preuve.

On a  $\det f - 2 \leq \text{codim } f = c \leq k - 2 \Rightarrow \det f \leq k \Rightarrow f$   $k$ -déterminée. Donc  $m^k \subset m\Delta f$ .

D'après ce qu'on a admis **3.3**,  $T_z(zG^k) = \pi(m\Delta)$ .

Donc, la codimension de  $zG^k$  dans  $m/m^{k+1}$  est :

$$\begin{aligned} \dim I^k - \dim \pi(m\Delta f) &= \dim m^2/m^{k+1} - \dim (m\Delta f)/m^{k+1} \\ &= \dim m^2/(m\Delta f) \end{aligned}$$

Mais en fait :  $m/(m\Delta f) = m/m^2 \oplus m^2/(m\Delta f)$ , donc la codimension de  $zG^k$  dans  $I^k$  est égale à :

$$\begin{aligned} \dim m/(m\Delta f) - \dim m/m^2 &= \dim m/\Delta f + \dim \Delta f/(m\Delta f) - \dim m/m^2 \\ &= \text{codim } f + \dim \Delta f/(m\Delta f) - \dim m/m^2 \end{aligned}$$

$\dim m/m^2 = n$  (en décomposant les polynômes de  $m$  en ceux de degré 1 (de dimension  $n$  donc) et  $m^2$

#### Lemme

Si  $f \in m^2$  et  $\text{codim } f < +\infty$ , alors :  $\dim \Delta f/(m\Delta f) = n$

**Preuve du lemme :** Soit  $\in \Delta f$ . Il existe  $(\alpha_i) \in E^n$  tels que  $g = \sum_i^n \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ .

Pour tout  $i$ , on peut écrire  $\alpha_i = a_i + \mu_i$ , avec  $a_i \in \mathbb{R}$  et  $\mu_i \in m$ .

Alors,  $g \in \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + m\Delta f$ .

Donc :  $\dim \Delta f/(m\Delta f) \leq n$

Montrons l'autre sens de l'inéquation :

Supposons :  $\dim \Delta f/(m\Delta f) < n$ , alors les  $(\frac{\partial f}{\partial x_i})$  sont liés mod  $m\Delta f$ .

Alors, il existe  $(a_i) \in \mathbb{R}^n$  non tous nuls tels que :  $\sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_i \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in m\Delta f$ , pour des  $\mu_i \in m$ .

Donc, si on note le champ de vecteurs au voisinage de 0 sur  $\mathbb{R}^n$  suivant :  $= \sum_i (a_i - \mu_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $f = 0$ .

Or, non nulle en 0, puisque les  $\mu_i$  disparaissent et les  $a_i$  sont non tous nuls et  $(\frac{\partial f}{\partial x_i})$  est une base de l'espace tangent en 0.

On peut effectuer un changement local de coordonnée pour que :  $X = \frac{\partial}{\partial y_i}$  par redressement des champs de vecteurs. On a donc  $\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0$ , donc  $f$  ne dépend que de  $(y_1, \dots, y_n)$  dans la nouvelle base.

Donc, dans cette base,  $Ess f = +\infty$ . Or,  $det f \geq Ess f$ .

Le lemme de codimension/ détermination indique alors que  $codim f = +\infty$ , ce qui est impossible.  $\square$

Le lemme donne donc : la codimension de  $zG^k$  dans  $m^2/m^{k+1}$  est égale à  $c + n - n = c$   $\square$

Ce théorème justifie donc cette appellation de codimension pour  $dim m/\Delta f$ . Nous allons maintenant voir comment toute cette théorie s'articule pour étudier définir et étudier les catastrophes.

## 4 Classification des germes

On va ici se concentrer sur la classification de  $I^7$  i.e de  $m^2/m^8$ . Pour justifier que la classification de  $I^7$  est pertinente il faut montrer que si  $codim f \leq 5$  alors classifier les germes dans  $I^7$  est suffisant. Or on a montré que  $det f - 2 \leq cod f$  et donc si la codimension vaut 5 on a que  $f$  est 7 déterminé, mais 7 déterminé veut dire qu'on se place dans  $E/m^8$ . Finalement on travaille sur  $m^2/m^8$  puisqu'on s'intéresse à la classification des singularités.

Ce chapitre peut être mis de côté lors d'une première lecture, puisqu'on ne fera que classifier les germes de  $I^7$ , un résultat qui, étant admis, ne sera utilisé qu'à la fin du chapitre 6.

### 4.1: Lemme

Soit  $\pi : m \rightarrow J^1 = m/m^2$  avec  $m/m^2$  isomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , avec  $\pi = j_m^1$  alors  $\pi^{-1}(J^1 \setminus 0)$  est l'union des classes des germes de fonctions sans point critique en 0.

**Preuve.** Avec  $f \in m$ , si  $j^1 f \neq 0$  alors  $f = f_1 + \text{autres termes}$ , alors  $\Delta = E$  comme dans la preuve du lemme 2.4.  $m^2 \Delta = m^2$  et par le théorème de détermination,  $f$  est 1 déterminé. Donc  $f \sim f_1 = \sum_{i=1}^n a_i x_i = y_j$  pour un certain changement de carte. Finalement  $f \sim x_1$  par le changement de carte linéaire qui envoie  $y_j$  sur  $x_1$ , donc  $f$  est dans la même classe que  $x_1$  qui n'a pas de singularité en 0.  $\square$

On a  $J^7 = J^1 \times (J^7/J^1)$ . Comme  $(J^1 \setminus 0) \times J^7/J^1$  est composé uniquement de classes de fonctions sans singularités ( lemme précédent 4.1 ) il nous reste donc  $0 \times (J^7/J^1) = m^2/m^8 = I^7$  à classifier. On a  $f \in m^2 \Rightarrow f = q + \text{termes d'ordre supérieur}$ , avec  $q$  une forme quadratique.

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

$A = (a_{ij})$  qui est symétrique hermitienne et on définit donc le rang de  $f$  comme le rang de  $A$  (on le notera  $rg f$  ou  $\text{rang } f$ ). On a donc  $0 \leq \text{rang } f \leq n$ .

On note  $Q_\rho = \{q \mid \text{rang } q = \rho\}$ . Dans  $I^2 = m^2/m^3$  qui est difféomorphe à  $R^{\frac{1}{2}n(n+1)}$  parce que c'est l'espace des formes linéaires quadratiques on a  $I^2 = Q_n \cup Q_{n-1} \cup \dots \cup Q_0$ .

On peut démontrer avec de l'algèbre linéaire que  $Q_{n-\lambda}$  est une sous variété de  $I^2$  de codimension  $\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)$ , ce résultat est prouvé dans l'annexe.

### Remarque sur les variables inutiles et essentielles

Supposons que  $\text{rang } f = \rho$  avec ça  $f = x_1^2 + \dots + x_\rho^2 + \text{termes d'ordre supérieure}$ . On appelle  $x_1, \dots, x_\rho$  les variables inutiles et  $x_{\rho+1}, \dots, x_n$  les variables essentielles. Le lemme suivant explique cette dénomination.

Le lemme de réduction que l'on va énoncer ne sera pas utilisé dans toute sa puissance, puisque nous allons nous restreindre au germe de rang 1, mais il est tout à fait central puisqu'il permet de se

ramener directement à un polynôme, sur lequel on a des informations très fortes.

#### 4.2: Lemme de réduction

Soit  $f \in m^2$ , posons  $j^2 f = q$ . Alors :  $\forall k, \exists f' \in m^2, f \sim f'$  et tel que :  $j^k f' = q + p(x_{\rho+1}, \dots, x_n)$ , où  $p$  est un polynôme en les variables essentielles, avec  $3 \leq \text{degré des monômes de } p \leq k$ .

##### Preuve.

On procède par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 2$ , c'est immédiat par définition de  $q = j^2 f$ .

Supposons le résultat vrai au rang  $k - 1$ .

On a par récurrence :  $f \sim f'$ , avec  $j^k f' = q + p(x_{\rho+1}, \dots, x_n) + f_k(x_1, \dots, x_n)$ , avec le degré des monômes de  $q$  compris entre 3 et  $k - 1$ , et  $f_k$  est un polynôme homogène de degré  $k$ .

On va ensuite écrire :  $f_k = 2x_1 P_1 + \dots - 2x_\rho P_\rho + p_1(x_{\rho+1}, \dots, x_n)$ , où le signe de devant  $p_i$  est le signe associé à  $x_i$  dans la forme quadratique, et  $P_2$  ne contient pas de  $x_1$ ,  $P - 3$  pas de  $x_1$  et  $x_2$  et ainsi de suite.

On va maintenant incorporer les "−" et les "2" dans les polynômes et poser :  $y_i = x_i + P_i$  si  $i \leq \rho$ , et  $y_i = x_i$  sinon.

En fait, il suffit de remarquer que dans  $I^k$ ,  $y_i^2 = x_i^2 + 2x_i P_i$ , puisque les termes de degré  $\geq k + 1$  disparaissent dans  $I^k$ .

On a donc :  $j^k f' = y_1^2 + \dots - y_\rho^2 + p(x_{\rho+1}, \dots, x_n) + p_1(x_{\rho+1}, \dots, x_n)$ , puisque  $q$  et les  $2x_i P_i$  se simplifie dans les  $y_i$  (le signe étant donc conservé par construction des  $P_i$ ).  $\square$

Nous allons nous intéresser à la classifications des catastrophes dites cuspoïdes. Ce sont celles de rang  $n - 1$  (lorsque le rang est  $n$ , nous avons juste une forme quadratique, et ce n'est pas intéressant à classer). Intuitivement, on comprend que le rang élevé de  $f$  permettra d'effectuer des changements de variables efficaces, ce qui conduit au théorème suivant :

#### 4.3: Théorème : Classification des Cuspoïdes

Si  $rg f = n - 1$ , alors  $f \sim q + x_n^k$  avec  $3 \leq k \leq 7$ , ou alors  $\text{codim } f \geq 6$ , où  $q = x_1^2 + \dots - x_\rho^2$  donné par le lemme de réduction.

**Remarque** Cette classification des cuspoïdes est valable pour toute codimension, mais c'est le lemme suivant qui justifiera de s'y intéresser particulièrement.

##### Preuve.

Supposons  $\text{codim } f \leq 5$ . Le lemme de réduction donne :  $f \sim f'$ , avec  $j^k f' = q + p(x_n)$  avec  $p$  polynôme et  $3 \leq \text{degré des monômes de } p \leq 7 = 5 + 2$  (d'après le lemme de réduction 4.2).

Notons,  $k$  le plus petit degré apparaissant dans  $p$ .

$\Delta(j^k f') = \text{Vect}\{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{k-1}\}$ , donc  $m^{k+1} \subset m^2 \Delta(j^k f')$ , et donc  $j^k f'$  est  $k$ -déterminée d'après le théorème 2.15.

Puisque  $f' \sim_k j^k f$ , et  $j^k f'$  est  $k$ -déterminée, on a :

$f \sim f' \sim j^k f' = q + a_n x_n^k$ . En changeant de variable :  $y_n = a_n x_n$  -possible car  $a_n \neq 0$  (au signe près), on retrouve notre résultat  $f \sim f' \sim q + y_n^k$   $\square$ .

En fait, l'autre catégorie des catastrophes de codimension  $\leq 5$  est celle des ombilics, ceux dont la partie non quadratique est un polynôme en 2 variables (on pourrait les classer aussi, mais nous ne le ferons pas ici). Le fait que pour les petites codimensions ( $\leq 5$ ) nous n'avons pas d'autres catastrophes que celles-ci provient de ce lemme :

#### 4.4: Lemme de codimension $\geq 6$

Si  $rgf \leq n - 3$ , alors  $codim f \geq 6$ .

On ne démontrera pas ce lemme, mais cela résulte d'une comparaison entre les dimension de  $Q_{rg f}$  et la codimension de  $f$ . C'est ici que la codimension 7 intervient pour limiter cette classification.

## 5 Dépliages

Soit  $f \in m^2$ ,  $k \geq 2$ . On pose  $z = j^k f \in m^2/m^{k+1}$  ( $z$  est posé ainsi pour l'ensemble de la section). On va définir la catégorie des dépliages de  $f$ . En pratique, les dépliages sont les formes que l'on rencontre réellement, mais nous montrerons plus tard que la classification des catastrophes précédentes permet d'obtenir des résultats dessus.

**Objets :**  $(r, \alpha)$  avec  $r \in \mathbb{N}$  et  $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$  germe en 0, telle que  $\alpha|_{\mathbb{R}^n \times 0} = f$   
 $r$  est appelé la dimension du dépliage.

**Morphismes :** Un morphisme entre deux objets  $(s, \beta)$  et  $(r, \alpha)$  est un triplet :  $(\phi, \bar{\phi}, \epsilon)$ , tel que :

$\phi : (\mathbb{R}^{n+s}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+r}, 0)$  est un germe tel que :  $\phi|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = id \times 0$

$\bar{\phi} : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$  est un germe

Ces deux germes sont tels que  $\pi_r \circ \phi = \bar{\phi} \circ \pi_s$  (où,  $\pi_r : \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}^r$  et  $\pi_s : \mathbb{R}^{n+s} \rightarrow \mathbb{R}^s$  sont les projections intuitives)

$\epsilon : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  germe dans  $m^2$  tel que :  $\beta = \alpha \circ \phi + \epsilon \circ \pi_s$ .

#### 5.1: Définition : Dépliage universel

On dit qu'un dépliage  $(r, \alpha)$  de  $f$  est universel si :

pour tous  $(s, \beta)$  dépliage de  $f$ , il existe un morphisme de dépliage de  $f$  de  $(s, \beta)$  vers  $(r, \alpha)$ .

Nous allons maintenant prolonger les germes de fonctions, pour pouvoir introduire une notion de  $k$ -transversalité sur les dépliages. Cette notion assez abstraite va en fait nous servir à démontrer le théorème suivant qui permettra de définir proprement les catastrophes:

#### 5.2: Théorème de dépliage universel

Si  $f$  est finiment déterminée, alors elle admet un dépliage universel  $(c, \alpha)$  avec  $c = codim f$ , et  $c$  est en fait la dimension minimal d'un dépliage universel de  $f$ .

En fait, la notion d'universalité est très importante, puisque lorsque l'on va étudier des catastrophes dans des cas concrets, l'on commence souvent avec un dépliage : par exemple :  $n = 3$ , indique la position d'un point dans l'espace,  $r$  est le nombre de paramètres de notre système (par exemple un champ électrique que l'on peut faire bouger) et l'on souhaite étudier le potentiel de notre point lorsque les paramètres varient faiblement autour d'un certain état.

Avec ce dépliage, on va pouvoir considérer le germe  $f$  dont il est extrait, dire qu'il admet un dépliage universel, l'étudier et se ramener par pullback au cas nous intéressant. Ainsi, on pourrait classifier les catastrophes juste en étudiant les dépliages universels.

Ce théorème est donc très rassurant, parce qu'il va permettre de se ramener à un dépliage que l'on pourra en fait choisir polynômial à coefficients en les paramètres si  $f$  est suffisamment déterminée (comme le montre le théorème de préparation).

Nous allons donc ici introduire une série de théorèmes assez abstraits, mais tout s'assemblera plus tard.

**Prolongement de germes :**

Soit  $f \in m^2$ . On choisit  $e \in f$  un de ses représentants. En fait,  $\mathbb{R}^n$  agit sur  $e$  par translation :  $w \bullet e : x \mapsto e(w + x) - e(w)$ .

On peut donc appeler  $j_1 e : w \in (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\text{germe en } 0 \text{ de } w \bullet e) \in (m, f)$ .

Ceci nous permet en fait de définir de  $j_1 f$ , le germe en 0 de  $j_1 e$ . En effet, ceci est bien défini, puisque si l'on avait choisi un autre représentant  $e'$ , puisque si l'on prend  $w$  assez proche de 0,  $w \bullet e$  et  $w \bullet e'$  coïncident sur un voisinage de 0 encore restreint par ouverture. On peut considérer que  $j_1 f$  est aussi à valeurs dans  $m$  (même si en théorie ce ne serait pas tout à fait le cas, puisque c'est un germe de germe)

On peut définir de manière similaire  $j_1^k f = \pi \circ j_1 f$  où  $\pi : m \rightarrow J^k = m^2/m^{k+1}$  est une projection.

Le lemme suivant effectue un lien entre les projections des dérivées de  $f$  et les projections de  $\Delta f$ :

**5.3: Lemme de transversalité**

Le plan tangent  $T_z(\text{Im } j_1^k f)$  dans  $m^2/m^{k+1}$  est inclus dans  $\pi(\Delta f)$  et transversal à  $\pi(m\Delta f)$  (dans  $\pi\Delta f$ ) et est engendré par les  $\{j^k(\frac{\partial f}{\partial x_i})\}$

**Preuve.**

$T_z(\text{Im } j_1^k f)$  est engendré par les  $\{j^k(\frac{\partial f}{\partial x_i})\}$ . En effet, c'est le cas par la définition du plan tangent, puis par la linéarité et le caractère surjectif de  $j^k$ .

Les éléments de  $\{(\frac{\partial f}{\partial x_i})\}$  sont en fait dans  $\Delta f$ , donc en prenant  $j^k$  qui est linéaire, on montre que  $T_z(\text{Im } j_1^k f) \subset \pi(\Delta f)$ .

Par définition de  $\Delta f$ ,  $m\Delta$  et le sous-espace engendré par les  $\{(\frac{\partial f}{\partial x_i})\}$  sont transverses dans  $\Delta f$ . Donc en prenant la projection  $\pi$ , on a notre résultat. □

Maintenant, on peut faire de même pour prolonger les dépliages (au lieu de seulement des germes de fonctions de  $\mathbb{R}^n$ ):

**5.4: Définition: prolongation de dépliages**

Soit  $(r, \alpha)$  un dépliage de  $f \in m^2$ . On représente  $\alpha$  par  $\tilde{\alpha} : (\mathbb{R}^{n+r}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$

Alors, la prolongation de en  $k$ -jet du dépliage  $(r, \alpha)$  est la germe en 0 de l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+r} & \rightarrow & J^k \\ (x', y') & \mapsto & j_1^k \text{ de la germe en } 0 \text{ de } (x \in \mathbb{R}^n \mapsto \tilde{\alpha}(x' + x, y') - \tilde{\alpha}(x', y')) \end{array}$$

On appelle  $F$  le germe en 0 de cette application.

La notion de  $k$ -transversalité introduite ci-dessous n'est en apparence pas très limpide, mais elle pourrait représenter le fait que lorsque notre germe a suffisamment de liberté par rapport à l'orbite de  $f$  par les difféomorphismes, alors, on aura suffisamment de place pour trouver un dépliage universel.

**5.5: Définition :  $k$ -transversalité**

On dit qu'un dépliage  $(r, \alpha)$  de  $f$  est  $k$ -transversal si le germe  $F$  est transversal à l'orbite  $zG^k$  dans  $J^k$ .

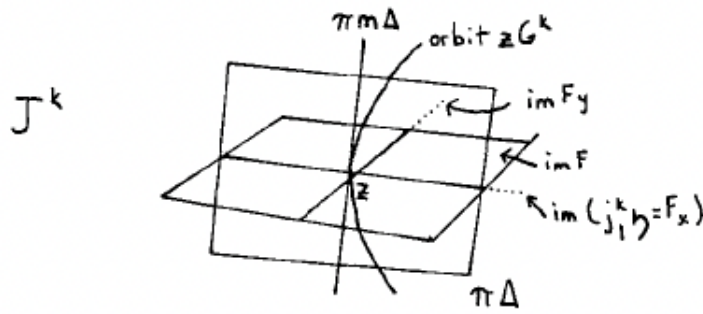


figure issue de l'article de Zeeman

On va alors introduire le sous espace vectoriel  $V_f$  de  $m$ , qui jouera en fait le rôle de  $\Delta(f)$ , mais dans l'espace des paramètres.

### 5.6: Définition : $V_f$

Soit  $(r, \alpha)$  un dépliage de  $f \in m^2$

Si l'on choisit une base  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r)$  de  $\mathbb{R}^{n+r}$

On peut choisir  $\tilde{\alpha}$  un représentant de le germe  $\alpha$ .

Pour tout  $j$  entre 1 et  $r$ ,  $\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial y_j} : (\mathbb{R}^{n+r}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial y_j}(0, 0))$ .

On peut donc considérer le germe :  $\partial_j \alpha$  le germe en 0 de  $\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial y_j} |_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} - \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial y_j}(0, 0)$ . On a donc :  $\partial_j \alpha$  est dans  $m$ , et on peut alors appeler  $V_f$  le sous espace vectoriel de  $m$  engendré par  $\{\partial_j \alpha\}$ .

Ce lemme fait un très joli lien entre nos espaces usuels pour les catastrophes et la  $k$ -transversalité. Il sera d'ailleurs toujours utilisé pour montre la  $k$ -transversalité d'un dépliage.

### 5.7: Lemme : caractérisation de la $k$ -transversalité

Un dépliage  $(r, \alpha)$  de  $f$  est  $k$ -transversal si et seulement si  $m = \Delta f + V_f + m^{k+1}$

#### Preuve.

Dans  $J^k$ , nous avons déjà vu que  $T_z(zG^k) = m\Delta f$  dans  $J^k$ .

De plus, la tangente à  $F$  (le prolongement de dépliage de  $(r, \alpha)$ ) selon  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  est  $T_z(Im j^k f)$

Le lemme de transversalité 5.3 indique que ces deux plans sont transversaux dans  $\Delta$ . La tangente à  $F$  selon la direction  $\{0\} \times \mathbb{R}^r$  est  $V_f$  par définition. Donc  $F$  est transversal à  $zG^k$  si et seulement si  $\Delta f + V_f$  engendre  $m$  dans  $J^k$ .

Donc  $(r, \alpha)$  est  $k$ -transversal si et seulement si :  $m = \Delta f + V_f + m^k$  □

Ce lemme va en fait nous permettre de construire une série de liens entre universalité et  $k$ -transversalité.

Tout d'abord, on montre que les dépliage  $k$ -transversaux existent, ce qui permettra ensuite de trouver des dépliage universels par leurs liens que l'on va montrer.

### 5.8: Corollaire : condition suffisante d'existence d'un dépliage $k$ -transversal

Si  $f$  est finiment déterminée, et que l'on note  $c$  sa codimension, alors, il existe un dépliage  $(c, \alpha)$  de  $f$  qui est  $k$ -transversal pour tout  $k > 0$ .

#### Preuve.

D'après le lemme de lien entre la détermination et la codimension,  $c = \text{codim } f$  est fini. Par définition de  $\text{codim } f$ , on peut choisir  $u_1, \dots, u_c \in m$  tel que leur images dans  $m/\Delta f$  soit une base de  $m/\Delta f$ , qui est de dimension  $c$ .

On va alors constuire le dépliage suivant de  $f : (r, \alpha)$ , avec :

$\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto f(x) + \sum_{j=1}^c y_j u_j(x)$  C'est bien défini, puisque les germes nulles en 0 forment un espace vectoriel.

On a alors :  $\frac{\partial \alpha}{\partial y_i} = u_j(x)$ , et donc :  $\partial_j \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial y_j} \Big|_{\mathbb{R}^n \times 0} - \frac{\partial \alpha}{\partial y_j}(0, 0) = u_j(x)$ , car  $\frac{\partial \alpha}{\partial y_j}(0, 0) = 0$  car  $u_j \in m$ .

On a donc :  $\{\pi(\partial_j \alpha)\}$  engendre  $m/\Delta f$  par choix des  $u_j$ . Donc  $\pi(V_f) = m/\Delta f$ . D'où :  $m = \Delta f + V_f = \Delta f + V - f + m^{k+1}$  pour tout  $k > 0$ , donc d'après le lemme précédent 5.7 ce dépliage est bien  $k$ -transversal pour tout  $k > 0$ .  $\square$

On montre ici que les dépliage universels sont  $k$ -transversaux pour  $f$  finiment déterminée, ce qui permettra d'utiliser les propriétés des dépliage  $k$ -transversaux aux dépliage universels.

### 5.9: Lemme : $k$ -transversalité des dépliage universels

Si  $f$  est finiment déterminée, et admet un dépliage universel  $(r, \alpha)$ , alors nécessairement,  $r \geq c = \text{codim}$ , et ce dépliage est  $k$ -transversal pour tout  $k > 0$ .

#### Preuve.

Soit  $(c, \beta)$  dépliage  $k$ -transversal de  $f$  donné par le lemme précédent 5.8. Par universalité de  $(r, \alpha)$ , on a un morphisme de dépliage :

$$(\phi, \bar{\phi}, \epsilon) : (c, \beta) \rightarrow (r, \alpha)$$

Donc :  $\beta(x, y) = \alpha(\phi(x, y)) + \epsilon(y) = \alpha(\phi^y(x), \bar{\phi}(y))$  (avec :  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \mathbb{R}^c$  et  $\phi^y(x) = \pi_n(\phi(y, x))$ ) pour une base  $(x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_c)$  de  $\mathbb{R}^{n+c}$

Cette dernière formule s'obtient par définition des morphismes de dépliage.

On a alors :

$$\forall j, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y_j}(x, 0) = \sum_i \frac{\partial \alpha}{\partial x'_i}(\phi^0(x), \bar{\phi}(0)) \frac{\partial \phi^y_i}{\partial y_j}(x) + \sum_q \frac{\partial \alpha}{\partial y'_q}(\phi^0(x), \bar{\phi}(0)) \frac{\partial \bar{\phi}_q}{\partial y_j}(0) + \frac{\partial \epsilon}{\partial y_j}(0)$$

Nous allons alors montrer que la première somme est dans  $\Delta f$  et que  $V_\beta \subset \Delta f + V_\alpha$ .

Si nous montrons ceci, nous aurons :

$m = \Delta f + V_\beta \Rightarrow m \subset \Delta f + V_\alpha$ , ce qui prouvera notre résultat d'après le lemme de caractérisation de  $k$ -transversalité 5.7, puisque ce résultat est vrai pour tout  $k > 0$ . On aura de plus :  $m = \Delta f + V_\alpha$ , donc  $r \leq \dim V_\alpha \geq c$ .

En fait, par définition des morphismes de dépliage,  $\phi^0 = id \times 0$  et  $\bar{\phi}0 = 0$ . Donc la première somme est bien dans  $\Delta f$ , car :  $\frac{\partial \phi^y_i}{\partial y_j} \in E$ , et  $\frac{\partial \alpha}{\partial x'_i}(\phi^0(x), \bar{\phi}(0)) = \frac{\partial f}{\partial x'_i} \in \Delta f$ .

De plus, le  $q$ -ième terme dans la seconde somme est :  $\frac{\partial \alpha}{\partial y'_q}(\phi^0(x), \bar{\phi}(0)) \frac{\partial \bar{\phi}_q}{\partial y_j}(0)$ . Donc la seconde somme est dans  $V_\alpha$ . Puisque  $\epsilon$  est un germe dans  $m^2$ ,  $\frac{\partial \epsilon}{\partial y_j}(0) = 0$ . Donc,  $V_\beta \subset \Delta f + V_\alpha$ , d'où le résultat.  $\square$

Ce lemme admis justifie en fait l'usage des dépliage  $k$ -transversaux, puisqu'ils sont isomorphes entre eux sous de bonnes conditions. Les liens entre dépliage  $k$ -transversaux et universels permettra alors de faire remonter cette propriété avec le lemme d'isomorphisme des dépliage universels.

### 5.10: Lemme d'isomorphisme des dépliage $k$ -transversaux (admis)

Si  $f$  est  $k$ -déterminée, deux dépliage  $k$ -transversaux de  $f$  sont isomorphes.

### 5.11: Lemme : isomorphisme des dépliage universels

Si  $f$  est finiment déterminée, alors deux dépliage universels de  $f$  sont isomorphes.

#### Preuve.

Par le lemme de  $k$ -transversalité des dépliage universels 5.9, les deux dépliage sont  $k$ -transversaux

(pour  $k$  tel que  $f$  soit  $k$ -déterminée, et donc isomorphes d'après le lemme d'isomorphisme des dépliages  $k$ -transversaux 5.10.  $\square$

On montre maintenant le lien le plus fort possible entre  $k$ -transversalité et universalité.

### 5.12: Caractérisation de l'universalité des dépliages

Si  $f$  est  $k$ -déterminée, alors un dépliage de  $f$  est universel si et seulement si il est  $k$ -transversal.

On peut enfin assembler tout ceci pour prouver notre théorème de dépliage universel :

### 5.13: Théorème de dépliage universel

Si  $f$  est finiment déterminée, alors elle admet un dépliage universel  $(c, \alpha)$  avec  $c = \text{codim } f$ , et  $c$  est en fait la dimension minimal d'un dépliage universel de  $f$ .

#### Preuve.

D'après la condition suffisante d'existence de dépliage  $k$ -transversaux 5.8,  $f$  en admet pour tout  $k > 0$ . En particulier, elle en admet un  $(c, \alpha)$  qui est  $k$ -transversal avec  $k = \det f$ . Donc, ce dépliage est universel d'après le lemme de caractérisation des dépliages universels 5.12, et il est de dimension  $c$ . De plus, le lemme de  $k$ -transversalité des dépliages universels 5.9 indique que l'on ne peut pas faire mieux que  $c$  pour l'universalité.  $\square$

## 6 Germes des catastrophes

Après avoir obtenu une classification de  $I^7$  et avoir travaillé avec les dépliages on va s'intéresser aux germes des catastrophes. On va voir que le germe d'une catastrophe est indépendant de : la classe de la fonction choisie pour l'obtenir et du dépliage universel choisi pour une fonction, on a donc la catastrophe d'une fonction qui est bien définie puisqu'elle ne dépend pas des choix qu'on a pu faire dans sa construction. Finalement, on aboutira à la classification des catastrophes pour des fonctions de codimension inférieure à cinq.

Soit  $f \in m^2$  et supposons que  $f$  a un dépliement  $F : \mathbb{R}^{n+r}, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ . Représentons  $F$  par une fonction  $F'$  et définissons  $M_{F'}$  le sous ensemble des points de  $\mathbb{R}^{n+r}$  où les dérivées partielles de  $F'$  sont toutes nulles. On note  $p_r$  la projection canonique  $p_r : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  et  $\chi_{F'} = p_r|_{M_{F'}}$  est la catastrophe de  $F'$ . On a donc  $0 \in M_{F'}$  parce que  $f \in m^2$ . On peut donc définir  $\chi_F$  comme le germe en 0 de  $\chi_{F'}$ . On appelle  $\chi_F$  le germe de catastrophe de  $F$ .

### 6.1: Lemme de difféomorphisme de $M_F$

Soit  $f \in m^3$  et  $\text{codim } f = c$ . Alors il existe un dépliage universel  $(c, F)$  tel que  $M_F$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^c$ . Alors  $\chi_F$  est le germe d'une carte  $\mathbb{R}^c, 0 \rightarrow \mathbb{R}^c, 0$ .

**Preuve..**  $f \in m^3 \implies \Delta \subset m^2$ . Et donc on peut choisir une base  $u_1, \dots, u_c$  pour  $m/\Delta$  telle que  $u_j(x) = x_j$  si  $j \leq n$  et un monôme de degré plus grand que 2 si  $n < j \leq c$

Soit  $F(x, y) = f(x) + \sum_{j=1}^c y_j u_j(x)$ ;  $(c, F)$  est  $k$ -transversale pour  $k > 0$  parce que  $\Delta + V_F = m$  [ $m^{k+1}$ ], et est donc universel par la caractérisation de l'universalité des dépliages 5.12 avec  $k \geq \det(f)$ .  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + y_i + \sum_{j=n+1}^c y_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0$  et donc  $M_F$  est le sous ensemble de  $\mathbb{R}^{n+c}$  pour lequel  $y_i = \psi_i(x_1, \dots, x_n, y_{n+1}, \dots, y_c)$  pour  $i$  dans  $1, \dots, n$ . Donc  $\psi$  est une carte  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^{c-n} \rightarrow \mathbb{R}_y^n$ . Le graphe d'une telle carte est difféomorphe à sa source et  $M_F$  est égal au graphe de  $\psi$  donc  $M_F$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^c$ .

Le lemme suivant va nous permettre de nous ramener aux catastrophes générées par les polynômes.

## 6.2: Lemme : catastrophe et polynôme

Supposons  $f$  finiment déterminé, et  $f = q + p$ , avec  $q = x_1^2 + \dots - x_s^2$  et  $p$  est polynomiale en  $x_1, \dots, x_n$  consistant en des monomes de degré  $\geq 3$ . Supposons  $(r, P)$  est un dépliage universel de  $p$ . Alors si  $F = q + P$ , on a que  $(r, P)$  est un dépliage universel de  $f$  et  $\chi_F = \chi_P$ .

**Preuve.** Par le lemme de  $k$ -transversalité des dépliages universels 5.9  $(r, P)$  est  $k$ -transversale pour tout  $k > 0$ , et en particulier pour  $k \geq \det p = \det f$ , le lemme caractérisation de la  $k$ -transversalité 5.7:  $m_\lambda = \Delta(p) + V_P + m^{k+1}$  avec  $m_\lambda^{k+1} \subset \Delta(p)$  le théorème de détermination 2.15 fournit  $m_\lambda = \Delta(p) + V_P$ . Ici  $\lambda = n - s$ , et  $m_\lambda$  et l'idéal de  $E_\lambda$  engendré par  $x_{s+1}, \dots, x_n$ . Similairement  $m_s$  est l'idéal de  $E_s$  engendré par  $x_1, \dots, x_s, m$  et  $E$  sont utilisés pour  $m_n$  et  $E_n$ . On a  $m_s E + m_\lambda E = m_s E + \Delta(p)E + V_P$ .

On a  $m = m_s E + m_\lambda E$  et  $V_P = V_F$ . Aussi  $\Delta(f) = \left( x_1, \dots, x_s, \frac{\partial P}{\partial x_{s+1}}, \dots, \frac{\partial P}{\partial x_n} \right) = m_s E + \Delta(p)E$   
Donc  $m = \Delta(f) + V_F = \Delta(f) + V_F + m^{k+1}$  pour  $k \geq \det f$  et donc avec le théorème : caractérisation de la  $k$ -transversalité 5.7 et le lemme :  $k$ -transversalité des dépliages universels 5.9  $(r, F)$  est universel.

SI  $i \leq s$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 2x_i$  ( $=0$  pour  $M_F$ ) et SI  $i > s$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial P}{\partial x_i}$  ( $=0$  pour  $M_F$ ) Ceci implique que  $M_F = 0 \times M_P$   
On a  $\chi_P : M_P \subset 0 \times \mathbb{R}^{r+\lambda} \rightarrow \pi \mathbb{R}^r$  et  $\chi_F : M_F \subset \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{r+\lambda} \rightarrow \pi \mathbb{R}^r$  et donc  $\chi_P = \chi_F$ .  $\square$

**Remarque :** Ceci nous permet dans le cas des catastrophes de corang 1 (le corang de  $f$  est  $n - rg f$ ) d'étudier seulement la partie polynômial  $p$ , et donc de se ramener à une seule variable essentielle.

De même avec ce lemme et son corollaire on montre l'invariance du germe de la catastrophe pour deux dépliages différents de la fonction.

## 6.3: Lemme

Supposons  $(r, \alpha)$  et  $(s, \beta)$  deux dépliements de  $f$ , et qu'il existe un morphisme  $(\phi, \bar{\phi}, \varepsilon) : (s, \beta) \rightarrow (r, \alpha)$ . Alors  $M_\beta = \phi^{-1}M_\alpha$ , et  $\chi_\beta$  est le pullback de  $\chi_\alpha$  par  $\phi, \bar{\phi}$ .

**Preuve.** On a par définition du morphisme  $\alpha^{\bar{\phi}y}(\phi^y) = -\varepsilon(y) + \beta^y$  (ici on note  $\beta^y := g(\cdot, y)$  et idem pour les autres) ce qui nous donne que  $d_x(\beta^y) = d_{\phi^y(x)}(\alpha^{\bar{\phi}y}) \circ d_x(\phi^y)$  avec  $d_x(\phi^y)$  un isomorphisme.

$\phi^0 = 1$  et donc  $\phi^y$  est un difféomorphisme pour  $y$  petit et  $d_x(\phi^y)$  est un isomorphisme pour  $y$  petit.

$$(x, y) \in M_\beta \iff d_x(\phi^y) = 0 \iff d_{\phi^y(x)}(\alpha^{\bar{\phi}y}) = 0 \iff (\phi^y x, \bar{\phi}y) \in M_\alpha \iff \phi(x, y) \in M_\alpha$$

. Donc  $M_\beta = \phi^{-1}M_\alpha$  et  $\chi_\alpha(\phi) = \bar{\phi}(\chi_\beta)$  ce qui prouve le lemme.  $\square$

## 6.4: Corollaire : équivalence catastrophes

Si  $(\phi, \bar{\phi}, \varepsilon)$  est un isomorphisme alors  $\chi_\beta \sim \chi_\alpha$ .

**Preuve.**  $\phi, \bar{\phi}$  sont des germes de difféomorphismes parce que  $\chi_\alpha(\phi) = \bar{\phi}(\chi_\beta)$ .  $\square$

## 6.5: Lemme

Si  $(r, \beta)$  et  $(r, \alpha)$  sont des dépliages universels de  $f$  de détermination finie alors  $X_\alpha \sim X_\beta$ .

**Preuve.** C'est le lemme d'isomorphisme des dépliages k-transversaux **5.10** et le corollaire équivalence catastrophes **6.4**  $\square$ .

Finalement, on va établir que le germe d'une catastrophe ne dépend que des paramètres essentiels d'une fonction et donc même avec un dépliage avec plus de paramètres on obtiendra le même germe de catastrophe.

### 6.6: Lemme : dépliages et équivalence des catastrophes

Si  $f$  est finiment déterminé et  $(s, \beta)$ ,  $(r, \alpha)$  sont des dépliage universels de  $f$  avec  $s > r$ , alors  $\chi_\beta \sim \chi_\alpha \times \mathbf{1}^{s-r}$ .

**Preuve.** Posons  $(s, \alpha')$  qui est  $(r, \beta)$  avec  $s-r$  controles déconnectés. Alors  $(s, \alpha')$  est universel et donc  $\chi_{\alpha'} = \chi_\beta$  par le lemme : dépliages et équivalence des catastrophes **6.6**. De plus  $M_{\alpha'} = M_\alpha \times \mathbb{R}^{s-r}$  et en appliquant  $\chi_{\alpha'}, \chi_\alpha$  et  $\mathbf{1}^{s-r}$  on a  $\chi_{\alpha'} \sim \chi_\alpha \times \mathbf{1}^{s-r}$ .  $\square$

### 6.7: Lemme : équivalence fonctions et équivalence catastrophes

Si  $f$  est finiment derminé et est équivalent à  $f'$ , et si  $(r, \alpha)$  et  $(r, \alpha')$  sont des dépliages uinversels respectifs alors  $\chi_\alpha \sim \chi_{\alpha'}$ .

**Preuve.** On a  $f' = f(\gamma)$  avec  $\gamma \in G$ . Posons  $\beta = \alpha(\gamma \times \mathbf{1})$ . Comme  $\gamma$  est un difféomorphisme on a donc  $\chi_\alpha \sim \chi_\beta$ . Maintenant  $\beta|\mathbb{R}^n \times 0 = \alpha_\gamma|\mathbb{R}^n \times 0 = f(\gamma)|\mathbb{R}^n \times 0 = f'|\mathbb{R}^n \times 0$ . Donc  $(r, \beta)$  est un dépliage de  $f'$ . De plus  $(r, \beta)$  est universel parce que  $(r, \alpha)$  l'est. Par le lemme : dépliages et équivalence des catastrophes **6.6**  $\chi_\beta \sim \chi_{\alpha'}$  et donc  $\chi_\alpha \sim \chi_{\alpha'}$ .  $\square$

### 6.8: Lemme : lien catastrophe et fonction

Si  $f \in m^2$  est finiment déterminé et a un germe de catatastrophe  $\chi_F$ , alors la classe d'équivalence de  $\chi_F$  dépend uniquement de la classe d'équivalence de  $f$ . De plus elle est uniquement determine par les coordonnées essentielles de  $f$ .

Ce lemme utilise tous les résultats précédents et montre que la catastrophe d'une fonction est bien défini et ne dépend pas des choix qu'on a pu faire dans sa construction.

**Preuve.** On note la classe d'équivalence  $\chi_F$  par  $[\chi_F]$ .  $[\chi_F]$  est indépendant du choix de  $f$  par le lemme : catastrophe et polynôme **6.2**, dépliage universel de  $F$  par le lemme : dépliages et équivalence des catastrophes **6.6**,  $r$  par le lemme dépliage et équivalence des catastrophes **6.6**, et de  $f$  par le lemme : équivalence fonctions et équivalence catastrophes **6.7** et le lemme : catastrophe et polynôme **6.2** montre que  $[\chi_F]$  est uniquement determine par les coordonnées essentielles de  $f$ .  $\square$

Après avoir montré qu'il est possible de parler de manière cohérente des catastrophes des fonctions, il nous reste à établir la classification à l'aide du chapitre sur la classification de  $I^7$ .

### 6.9: Corollaire

Il existe uniquement 11 germes de catastrophes si l' on restreint à ceux de  $f$  de codimension plus petite que 5.

**Preuve.** Si il y a plus de 2 coordonnées essentielles de  $f$  i.e le rang de  $f \leq n-3$ , alors le lemme de codimension  $\geq 6$  **4.4** montre que codimension  $f > 5$ . Alors on se restreint à  $n \leq 2$ .  $+f$  et  $-f$  donnent le meme  $M_F$  et donc le meme  $\chi_F$ . Alors les coordonnees essentielles distinctes donnant des

différents  $[\chi_F]$  sont  $x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^3 + xy^2, x^3 - xy^2, x^2y + y^4, x^3 + y^4, x^2y + y^5, x^2y - y^5$  et ce sont bien 11.  $\square$

### 6.10: Définition

Si  $[\chi_F]$  est l'un des 11 du lemme précédent alors  $[\chi_F]$  est appelé une catastrophe élémentaire.

### 6.11: Corollaire

Si  $f$  est finiment déterminé et  $(r, F)$  est un dépliage universel de  $f$ , avec  $r \leq 5$ , alors  $[\chi_F]$  est une catastrophe élémentaire.

Ce corollaire est donc l'aboutissement de la preuve de la classification des catastrophes. Néanmoins pour avoir des résultats de stabilité et de globalisation ils est intéressant de voir la partie pour aller plus loin.

**Preuve.** Par la remarque sur les variable inutiles et essentielles et le lemme de réduction 4.2 on a  $f \sim q + p$  et  $p \in m^3$ . Aussi le lemme de  $k$ -transversalité des dépliages universel 5.9 nous dit que  $r \geq c = \text{codimension } f$ , tel que  $c \leq 5$  et  $p$  est l'un des 11 germes précédents puisque  $p$  est au plus 7 déterminé. Avec le Lemme de difféomorphisme de  $M_F$  appliqué a  $p$  il existe un dépliage universel standard  $(c, g)$  de  $p$  tel que  $\chi_g$  est un germe  $\mathbb{R}^c, 0 \rightarrow \mathbb{R}^c, 0$ . Maintenant on utilise le lemme : catastrophe et polynôme 6.2 pour nous fournir un dépliage universel  $(c, F')$  de  $f$  tel que  $\chi_{F'} = \chi_g$ . Par le lemme dépliage et équivalence des catastrophes 6.6  $\chi_{F'} \sim \chi_F, \times 1^{r-c} = \chi_g \times 1^{r-c} : \mathbb{R}^r, 0 \rightarrow \mathbb{R}^r, 0$ . Maintenant  $[\chi_g]$  est une catastrophe élémentaire par choix et donc dans un sens évident  $[\chi_f]$  est aussi une catastrophe élémentaire. C est la meme chose que lorsqu on a dit que  $[\chi_f]$  est independant du choix de  $r$  par le lemme dépliage et équivalence des catastrophes dans le theoreme de lien entre catastrophe et fonction 6.8.  $\square$

| Name        | $k$ | Germ          | Perturbation                               |
|-------------|-----|---------------|--|
| $A_2$       | 1   | $x^3$         | $a_1x$                                     |
| $A_{\pm 3}$ | 2   | $\pm x^4$     | $a_1x + a_2x^2$                            |
| $A_4$       | 3   | $x^5$         | $a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$                   |
| $A_{\pm 5}$ | 4   | $\pm x^6$     | $a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$          |
| $A_6$       | 5   | $x^7$         | $a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ |
| $D_{-4}$    | 3   | $x^2y - y^3$  | $a_1x + a_2y + a_3y^2$                     |
| $D_{+4}$    | 3   | $x^2y + y^3$  | $a_1x + a_2y + a_3y^2$                     |
| $D_5$       | 4   | $x^2y + y^4$  | $a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2$            |
| $D_{-6}$    | 5   | $x^2y - y^5$  | $a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$   |
| $D_{+6}$    | 5   | $x^2y + y^5$  | $a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$   |
| $E_{\pm 6}$ | 5   | $x^3 \pm y^4$ | $a_1x + a_2y + a_3xy + a_4y^2 + a_5xy^2$   |

Tableau présentant la classification des germes avec leur dépliages universels

Par exemple, pour les catastrophes de corang 1, nous n'avons que des cuspoïdes, et l'on peut effectuer un nouveau classement en fonction de la codimension de ces catastrophes, pour distinguer les plis (codimension 1 : par exemple :  $x^3 + ax$ ), les cusps (codimension 2, par exemple :  $x^4 + ax^2 + bx$ ), la queue d'aronde (codimension 3, par exemple :  $x^5 + ax^3 + bx^2 + cx$ ) ou même le papillon (codimension 4 :  $x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ ), on peut aussi construire des catastrophes de codimension supérieure à partir des précédentes (nous avons listé seulement les nouvelles apparaissant). Nous n'effectuerons pas cette classification ici.

## 7 Pour aller plus loin

On va maintenant justifier l'existence de cette théorie par la notion de stabilité. Les théorèmes de cette section seront admis et ne serviront qu'à illustrer l'importance et la robustesse de cette théorie.

Pour cela, nous aurons besoin de définir la topologie de Whitney  $C^\infty$  sur les fonctions de  $F := C^\infty(\mathbb{R}^{n+r}, \mathbb{R})$ .

### 7.1: Définition : Topologie de Whitney $C^\infty$

Soit  $\mu \in F$ ,  $k \in \mathbb{N}$  on peut définir un voisinage de  $f \in F$  par :

$V_\mu^k(f) = \{g \in F \mid \forall p \in \mathbb{R}^{n+r}, |g^k(p) - f^k(p)| < \mu(p)\}$ , ou :  $g^k : p \in \mathbb{R}^{n+r} \mapsto (k\text{-jet de } w \mapsto g(p+w)) \in J_{n+r}^k$

La norme est bien définie car  $J^k$  est de dimension finie.

La topologie de Whitney est donc la topologie engendrée par ces ouverts pour  $\mu \in F$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

### 7.2: Théorème (de Thom) pour la globalisation des résultats

Si  $r \leq 5$  alors il existe un sous ensemble  $F_*$  dense des fonctions lisses tel que si  $f \in F_*$  alors  $\chi_f$  a une unique des catastrophes élémentaires comme singularités, et  $M_f$  est une variété de dimension  $r$ .

Ce résultat est intéressant puisqu'en sciences physiques on n'effectue pas des mesures ni des expériences exactes et donc on pourra toujours se ramener à une fonction pour laquelle on pourra étudier ces catastrophes.

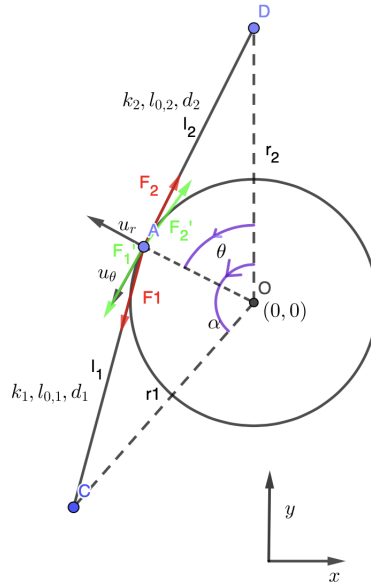
## 8 Mise en application

Pour appliquer la théorie des catastrophes à un cas concret, par exemple : étudier les minima de  $V(x, p)$  avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $p \in \mathbb{R}^r$  :

- 1) On considère notre fonction que l'on voit comme un dépliage
- 2) Il s'agit ensuite de trouver un germe dont il est extrait localement : par exemple, identifier les minima qui pourraient être problématique (point critique dégénéré).
- 3) En un tel point critique, on s'intéresse à notre germe sans les paramètres que l'on observe selon  $x$ . On trouve ensuite le rang et la codimension de  $f$  (c'est la partie difficile, mais des stratégies sont données dans le livre de Poston et Stewart cité en référence).
- 4) A partir de son rang de sa codimension, on peut donc trouver un équivalent catastrophique de notre problème, d'après la classification, pour étudier les phénomènes émergents.

## 9 La machine de Zeeman

On va aborder la théorie des catastrophes à l'aide de la machine de Zeeman.



On considère un disque de rayon 1 pouvant tourner autour de son axe. On fixe un point  $D$  à une distance  $r_2$  du centre  $O$  du disque, un point  $A$  au bord du disque. On relie  $A$  et  $D$  par un élastique de longueur à vide  $l_{0,2}$  et de raideur  $k_2$ . Ensuite, on relie le point  $A$  à un autre point mobile  $C = (x, y)$  à l'aide d'un élastique  $(l_{0,1}, k_1)$ .

On a donc un système de codimension au plus 2 et de corang 1 en étudiant le potentiel au point  $A$  paramétré par l'angle  $\theta$  : Pour  $(x, y)$  fixé on peut étudier les points d'équilibre du système.

Montrons que ce système met en évidence des catastrophes.

Paramétrons le point  $C$  par  $(r_1, \alpha)$  en coordonnées polaires.

Alors une étude géométrique et en projetant sur  $u_\theta$ , on obtient un potentiel :

$$V_{r_1, \alpha}(\theta) = \frac{k_1}{2} (\sqrt{(1 + r_1^2 - 2r_1 \cos(\theta - \alpha))} - l_{0,1})^2 + \frac{k_2}{2} (\sqrt{(1 + r_2^2 - 2r_2 \cos(\theta))} - l_{0,2})^2$$

On cherche donc le nombre de minimum de ce potentiel pour tout  $(r_1, \alpha)$ . Pour cela, on s'aide d'abord d'un programme informatique :

Le premier programme donne la surface dans l'espace des paramètres  $\mathbb{R}^2$  déterminant les coordonnées cartésiennes du point  $C$  pour lesquels  $V_{(x,y)}$  possède deux minima dans  $[0, 2.\pi[$ .

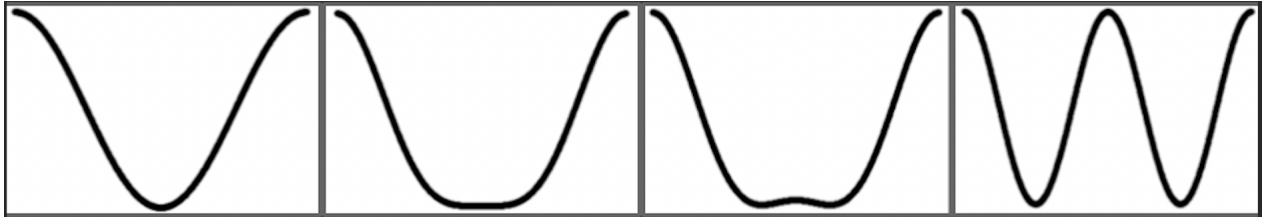


On reconnaît 4 points de rebroussement (ou points Cusps) sur le bord de cette surface. En faisant varier les longueurs à vide ou  $r_2$ , on peut faire varier la forme de cette surface, qui restera une sorte d'étoile plus ou moins déformée. (Les petits points sur la figure sont dû aux approximations informatiques).

On peut étudier aussi les déformations au voisinage de  $\theta = 0$  par exemple pour mettre en évidence le point de rebroussement situé au milieu en haut (on peut faire de même pour  $\theta$  proche de  $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ , mais c'est plus compliqué pour les points sur le côté).

Pour étudier comment se comporte le point de rebroussement en  $\theta = 0$ , puisque l'on sait que lorsque  $C$  se déplace selon l'axe  $\alpha = \pi$ , le point  $\theta = 0$  sera toujours un point d'équilibre. La question est donc de savoir si il sera stable ou non. Pour cela on peut effectuer un développement limité autour de 0 et ensuite faire varier  $r_1$  avec  $\alpha = \pi$ . (calculs en annexe)

On peut observer l'évolution des minima locaux lorsque  $C$  varie selon  $\alpha = \pi$  à l'aide d'un programme informatique.



Abscisse :  $\theta$  ; Ordonnée :  $V_{r_1, \pi}$

Graphique 1 :  $r_1 = 0$ ; Graphique 2 :  $r_1 = 5.45$ ; Graphique 3 :  $r_1 = 5.5$ ; ; Graphique 4 :  $r_1 = 6$

Le point  $\theta = 0$  passe alors de minimum local à maximum local en passant par le point cusp qui se situe aux alentours de 5.45 (pour ce cas là), ce qui provoque un phénomène catastrophique : la bifurcation. En effet, les deux autres minima locaux sont possibles pour le point  $C$  initialement à  $\theta = 0$ . Deux chemins sont possibles et le choix dépend uniquement de petites perturbations.

En développant le potentiel  $V_{r_1, \alpha}$  pour  $C$  proche de  $P$  le point Cusp, on obtient un potentiel de la forme :

$V_{r_1, \alpha} = K(x^4 + ax^2 + bx) + O(x^5)$  ( Les calculs sont faits dans l'article de Dubois et Dufour) -  $x$  est ici une nouvelle variable permettant introduite via un changement de variable (difféomorphisme donc) pour se ramener à une telle forme plus agréable - . On peut supprimer le terme en en  $O(x^5)$  par équivalence de fonction car cette fonction est 4-déterminée par sa codimension 2 (on a 2 paramètres, donc on peut se ramener à un dépliage universel de dimension au plus 2, et c'est en fait 2 parce que c'est justement un point cusp, sur les plis par exemple (les côtés de l'étoile), même si on a deux paramètres, la codimension de notre dépliage sera 1 et donc on pourra utiliser un dépliage universel de dimension seulement 1).

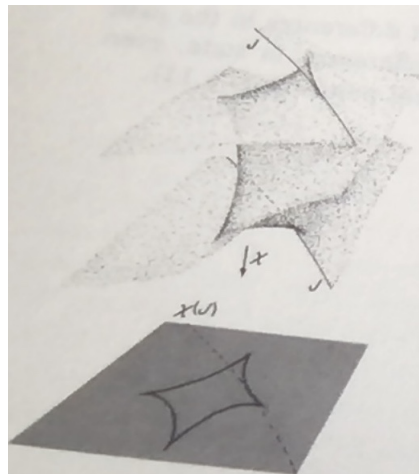


figure issue du livre de Poston et Stewart

On a ici la courbe des catastrophes du disque de Zeeman, on peut observer qu'elle est particulière, puisque les paramètres étant périodique, elle boucle sur la ligne  $J$  (aucun rapport avec un quelconque  $J^k$ ).

La hauteur représente  $x$ , et la plan inférieur correspond à l'espace des paramètres. La surface blanche est donc l'ensemble des triplets  $(x, y, z)$  tel que le potentiel ait un minimum local en ce point. Dans la plupart des cas, nous n'avons pas de catastrophes (juste un minimum usuel 1-déterminé en ce point), et mais sur la courbe dont la projection est illustrée au sol, on observe des catastrophes, les plis étant sur les côtés, tandis que les points cusps sont au coins.

Ceci peut provoquer différents phénomènes : une **bifurcation** au niveau du point cusp, alors que le point d'équilibre stable peut partir d'un côté ou de l'autre de la courbe, ou alors un **saut** lorsque l'on a un pli, lorsque l'on a deux équilibres stables et que l'un se verse brutalement dans l'autre (quand on tombe en fait de la courbe). On pourrait trouver d'autres phénomènes sur ce modèle très

riche, comme l'hystérésis : le fait que l'on puisse avoir deux équilibres stables avec l'un se vidant dans l'autre montre que la position de notre point  $A$  dépend en fait de son passé.

### Tentative d'amélioration de cette machine

On a essayé d'améliorer cette machine pour aller chercher des catastrophes plus loin. Les recherches n'ont pour le moment pas abouti totalement, mais l'on a montré que lorsque l'on prenait la constante de raideur du ressort dépendant de la longueur du ressort :  $k(l) = k_0 - \epsilon(l - l_0)$  avec  $\epsilon > 0$  petit, en s'autorisant à déplacer aussi le point  $D$ , on observe que sur une plage de  $r_2$  (pour  $r_2$ ) assez grand, le point cusp qui se déplaçait donc sur l'axe  $x = 0$  disparaît de cet axe. On espère donc que ce point cusp se scinde en deux, pour trouver une queue d'aronde, ce qui serait a priori cohérent avec sa forme :

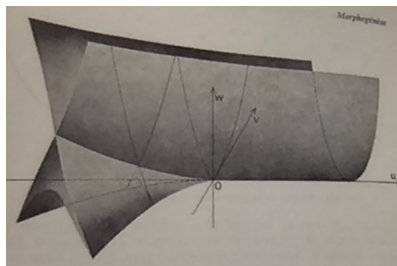


figure de queue d'aronde issue du livre de Thom

On voit ici le point cusp disparaître à mesure que l'on approche du point  $O$ , le point où il disparaît étant donc un point catastrophique de type queue d'aronde. On espère donc que c'est ce même phénomène qui se produit ici, ce qui est possible vu que le nombre de paramètres permet sa présence.

# 10 Annexe

## 10.1 Théorie de Morse

Dans cette partie on va s'intéresser à la théorie de Morse qui consiste à classifier les singularités de fonctions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Toutes les fonctions que l'on considère sont  $C^\infty$ . On dit que  $f$  a une singularité en  $x$  si  $df(x) = 0$ .

### 10.1: Définition

$f$  a une singularité non dégénéré si le déterminant de  $Hess(f, x)$  est non nul.

Puisque la hessienne de  $f$  en un point donné peut être vue comme une forme bilinéaire symétrique le théorème de classification suivant nous sera utile.

### 10.2: Théorème

Soit  $H \in S_n(\mathbb{R})$  inversible. Il existe une matrice inversible  $P$  et un unique  $p \in \{0, \dots, n\}$  tels que:

$$H = P^T \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} P$$

$p$  peut aussi être obtenu par  $p = \max\{\dim(F) \mid F \text{ s.e.v } \mathbb{R}^n, \forall X \in F \setminus \{0\}, (HX, X) > 0\}$ .

$p$  peut aussi être obtenu par  $p = \max\{\dim(F) \mid F \text{ s.e.v } \mathbb{R}^n, \forall X \in F \setminus \{0\}, (HX, X) > 0\}$ .

**Preuve.** Pour l'existence on applique le théorème spectrale à  $H$  et on écrit  $H$  sous la forme  $H = O^T D O$  avec  $O$  orthogonale et  $D$  diagonale. On peut supposer  $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_p, -a_{p+1}, \dots, -a_n)$  avec  $(a_i)_i$  positifs, on pose  $S = (\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$  on a donc pour  $P = S D$  la forme voulue.

Pour l'unicité de  $p$  prenons le vecteur  $X = P^{-1} E_i$  avec  $(E_i)_i$  les vecteurs de la base canonique et on a donc  $(HX, X) = 1$  si  $i \leq p$  et  $(HX, X) = -1$  sinon, d'où l'unicité.  $\square$

### 10.3: Lemme

Soit  $H$  une matrice symétrique inversible réelle. Alors il existe un voisinage  $V \subset S_n(\mathbb{R})$  et  $\phi : V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  lisse tels que,

$$\forall A \in V, A = \phi(A)^T H \phi(A)$$

**Preuve.** Considérons  $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n(\mathbb{R})$ ,  $f(M) = M^T H M$ . On a  $f$  qui est différentiable ( et même lisse ) puisque chaque coefficient est polynomiale en les coordonnées de  $M$ . On a  $df(I_n)(M) = M^T H + (M^T H)^T$  Avec  $\text{Ker}(df(I_n)) = \{M^T H \mid M^T H \in A_n(\mathbb{R})\} = H^{-1} A_n(\mathbb{R})$  et  $\text{Im}(df(I_n)) = S_n(\mathbb{R})$ . Notons  $S = H^{-1} S_n(\mathbb{R})$  et  $g = f|_S$ , comme  $dg(I_n)$  est inversible, d'après le théorème d'inversion locale il existe  $U$  voisinage de  $H$  dans  $S_n(\mathbb{R})$  et  $\phi : U \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  lisse tels que  $\phi(H) = I_n$  et pour tout  $A \in U$ ,

$$A = \phi(A)^T H \phi(A)$$

Comme  $GL_n(\mathbb{R})$  est ouvert en prenant  $U' = U \cap f^{-1}(GL_n(\mathbb{R}))$  on obtient le lemme.  $\square$

### 10.4: Lemme de Morse

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant 0 et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  lisse. On suppose que  $f(0) = 0$ ,  $df(0) = 0$ , et  $Hess(f, x)$ ; alors il existe un difféomorphisme lisse  $\phi$  entre deux ouverts  $U_1$  et  $U_2$  contenant 0 tel que,

$$f(\phi^{-1}(y)) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_n^2$$

**Preuve.** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  lisse, avec la formule de Taylor reste intégrale on a,

$$f(x) = \int_0^1 (d^2 f(tx, tx)x, x)(1-t)dt$$

Posons  $A(x) = \int_0^1 d^2 f(tx, tx)(1-t)dt$  d'où  $f(x) = (A(x)x, x)$ . On a  $A(0) = \frac{1}{2}d^2 f(0)$  qui est inversible, on applique donc le lemme à  $A(0)$ .

Il existe un voisinage  $V \subset S_n(\mathbb{R})$  et  $\phi : V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  lisse tels que,

$$\forall A \in V, A = \phi(A)^T A(0) \phi(A)$$

On a donc pour tout  $x \in V$ ,  $f(x) = \psi(x)^T A(0) \psi(x)$  avec  $\psi(x) = \phi(A(x))x$ . On a donc  $\psi$  qui est lisse et  $\psi(0) = \phi(A(0)) = I_n$  est inversible et c'est donc un difféomorphisme local en 0. D'après le théorème précédent on sait qu'on peut écrire

$$A(0) = P^T \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{bmatrix} P$$

Donc avec  $y(x) = P\phi(A(x))x$  est un difféomorphisme local en 0 car  $P$  est inversible,

$$f(x) = (A(x), x) = (A(0)\phi(A(x))x, \phi(A(x))x) = \left( \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{bmatrix} y, y \right) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_n^2$$

□

On peut toujours se ramener au cas précédent i.e si  $f$  a un singularité non dégénérée au point  $a$  on pose  $g(x) = f(x+a) - f(a)$  et on applique le théorème à  $g$ .

## 10.2 Chapitre 4 Classification des catastrophes

### 10.5: Lemme

$Q_{n-\lambda}$  est une sous variété de  $I^2$  de codimension  $\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)$ .

**Preuve.** Chaque  $Q_p$  est une sous variété parce que ses éléments sont dans la même orbite par le groupe d'applications linéaire inversibles.

Soit  $q \in Q_p$ . Par le lemme de morse on peut supposer que  $q = x_1^2 + \dots - x_p^2$ .

On a la matrice associé a  $q$  qui vaut  $\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $H$  une matrice carrée de taille  $p$  fois  $p$  et n'ayant que des plus ou moins 1 sur la diagonale. Soit  $q'$  dans  $I^2$  associé à la matrice  $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ . Il existe un voisinage  $N$  de  $q$  dans  $I^2$  tel que si  $q' \in N$ , alors  $|A| \neq 0$ .

$$\text{rang } q' = \text{rang} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -BA^{-1} & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} I & A^{-1}C \\ 0 & D - BA^{-1}C \end{pmatrix}$$

Donc rang  $q' = p \Leftrightarrow D = BA^{-1}C$  or la matrice est symétrique et donc  $C = B^T$  i.e D est déterminé par les coordonnées de A et B et  $\frac{n(n+1)}{2} - (p\lambda + \frac{p(p+1)}{2}) = \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$ . La codimension de  $Q_p = Q_{n-\lambda}$  est  $\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)$ .

On a  $I^7 = I^2 \times m^3/m^8 = (Q_n \times m^3/m^8) \cup \{(Q_p \times m^3/m^8)\}_{p < n}$  □

## 10.3 Dépliage

### 10.6: Caractérisation de l'universalité des dépliage

Si  $f$  est  $k$ -déterminée, alors un dépliage de  $f$  est universel si et seulement si il est  $k$ -transversal.

**Preuve.**

On a déjà montré l'implication.

Réciproquement, si  $(r, \alpha)$  est  $k$ -transversal.

On veut trouver un morphisme de  $(s, \beta)$  vers  $(r, \alpha)$  pour tout dépliage  $(s, \beta)$ .

On pose toujours  $c = \text{codim } f$ . Alors, on peut encore choisir  $u_1, \dots, u_c$  base de  $m/\Delta f$ .

On pose alors l'application :

$$h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{s+c} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, (y, z)) \mapsto \beta(x, y) + \sum_{j=1}^c v_j \cdot u_j(x)$$

Ainsi,  $(s+c, h)$  est un dépliage  $k$ -transversal de  $f$  par construction.

On va ensuite faire deux autres dépliage :

Choisissons deux entiers  $d$  et  $d'$  tels que :  $s+c = d = r+d'$ , puis on pose :  $(s+c+d, h')$  et  $(r+d', \alpha')$  deux dépliage de  $f$ , avec les paramètres en  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{R}^{d'}$  étant "muets" sur  $h'$  et  $\alpha'$ , qui sont en fait les germes  $h$  et  $\alpha$ , mais où l'espace de départ est étendu. Par construction, ces deux dépliage sont  $k$ -transversaux, puisque leur restriction à  $\mathbb{R}^{n+s+c} \times 0$  ou  $\mathbb{R}^{n+r} \times 0$  sont  $k$ -transversales. Puisqu'ils sont  $k$ -transversaux, le lemme d'isomorphisme des dépliage  $k$ -transversaux **5.10** indiquent qu'ils sont isomorphes par  $(\phi, \bar{\phi}, \epsilon)$ . On peut donc construire le morphisme suivant :

$(s, \beta) \xrightarrow{(id \times i_1, i_1, 0)} (s+c, h) \xrightarrow{(id \times i_2, i_2, 0)} (s+c+d, h') \xrightarrow{(\phi, \bar{\phi}, \epsilon)} (r+d', \alpha') \xrightarrow{(id \times \pi_r, \pi_r, 0)} (r, \alpha)$ , avec  $i_1, i_2$  et  $\pi_r$  les inclusions ou projections intuitives.

On a donc construit un morphisme comme on voulait. □

## 10.4 Machine de Zeeman

Calculs de la position du point Cusp : On prend :  $r_1 > 1, r_2 > 1 + l_{0,2}$  et  $\alpha = \pi$ , avec  $l_{0,1} = 1$  :

$$1 + r_1^2 + 2 * r_1 * \cos(\theta) = 1 + r_1^2 + 2 * r_1 * (1 - \frac{1}{2} \cdot \theta^2 + O(\theta^4))$$

Donc :

$$\sqrt{1 + r_1^2 + 2 * r_1 * \cos(\theta)} = (r_1 + 1) \cdot \sqrt{1 + \frac{\theta^2 + O(\theta^4)}{(r_1 + 1)^2}} \\ = (r_1 + 1) (1 + \frac{1}{2} \theta^2 + O(\theta^4))$$

D'où, en faisant un calcul similaire pour la partie dépendant de  $r_2$ , on a :

$$V_{r_1, \pi} = \frac{k_1}{2} (r_1 + 1 - l_{0,1} + \frac{\theta^2 + O(\theta^4)}{(r_1 + 1)^2})^2 + \frac{k_2}{2} (r_2 - 1 - l_{0,2} + \frac{\theta^2 + O(\theta^4)}{(r_2 - 1)^2})^2 \\ = c_{r_1} + (\frac{k_1}{2} \frac{r_1 + 1 - l_{0,1}}{(r_1 + 1)^2} + \frac{k_2}{2} \frac{r_2 - 1 - l_{0,2}}{(r_2 - 1)^2}) \cdot \theta^2 + O(\theta^4)$$

Avec  $c$  une constante dépendant de  $r_1$  et des autres paramètres fixés.

On peut donc regarder le signe du coefficient devant le terme en  $\theta^2$  pour déterminer si c'est un maximum ou un minimum local.

En utilisant le fait que  $l_{0,1} = 1$  on simplifie l'équation et tout ceci revient à déterminer le signe de :

$$\frac{k_2(r_2 - 1 - l_{0,2})}{2(r_2 - 1)^2} \cdot r_1^2 + (\frac{k_2(r_2 - 1 - l_{0,2})}{(r_2 - 1)^2} + \frac{k_1}{2}) \cdot r_1 + \frac{k_2(r_2 - 1 - l_{0,2})}{2(r_2 - 1)^2}$$

Puisque  $k_1 > 0$ , cette équation a deux solutions, une négative et une positive, les coefficients étant

tous positifs. Le coefficient en  $\theta$  étant supérieur à celui en  $2$  fois celui en  $\theta^2$ , on a un changement de signe pour un certain  $r_1 > 1$ , ce qui montre notre propos.

## 10.5 Catastrophe de type fold

Pour une catastrophe de type fold on a  $M_f$  comme dans la figure 1. Ici le paramètre que l'on fait varier c'est  $b$ . On a deux points d'équilibre, un stable et un instable lorsque  $b$  est plus grand que  $b_0$  et sinon on a pas de point d'équilibre.

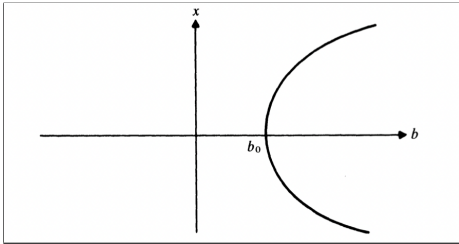


Figure 1:  $M_f$

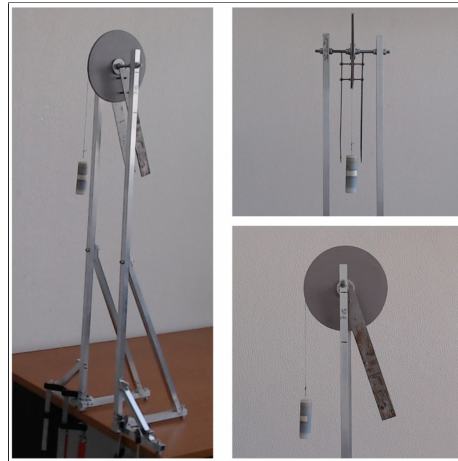


Figure 2: Machine avec catastrophe de type fold

On va faire l'étude qualitative de la machine à catastrophes représentée en figure 2. Ici on a attaché une masse au bout d'un fil à un disque avec une masse attachée de manière fixe. Cette machine va nous fournir une catastrophe de type fold (pli).

On considère que la masse est le paramètre que l'on fait varier et on regarde les points d'équilibre en fonction de l'angle. Lorsque la masse est trop petite on retrouve les deux points d'équilibre du pendule : un stable l'autre instable. Cependant lorsque la masse devient trop importante on bascule dans un régime où il n'y a plus de points d'équilibre puisque la masse chute.

## 10.6 Stabilité

### Notion de stabilité locale

Soit  $X_\alpha : M_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$

On dit que  $X_\alpha$  est localement stable en  $(x_0, y_0) \in M_\alpha$  si il existe certain voisinage  $N$  de  $(x_0, y_0)$  dans  $\mathbb{R}^{n+r}$ , il existe un voisinage  $V$  de  $\alpha$  dans  $F_\star$  ( $F_\star$  est un sous-ensemble dense de  $F$  tel que pour tout  $f \in sF_\star$ ,  $M_f$  est une variété de dimension  $r$ , et où les seuls catastrophes sont le catastrophes élémentaires que l'on peut classifier. On admet qu'un tel ensemble existe) tel que :  $\forall \beta \in V, \exists (x_1, y_1) \in N \cup M_\beta$  tel que :  $X_\alpha$  en  $(x_0, y_0)$  est localement équivalente à  $X_\beta$  en  $(x_1, y_1)$  (au sens où si on les voit comme des dépliages, leurs germes sont équivalentes - on peut passer de l'une à l'autre par des difféomorphismes  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  et après avoir composé par un tel difféomorphisme, les dépliages obtenus (donc de la même germe) sont isomorphes.

Ceci montre que si l'on a une fonction  $X_\alpha$  localement stable avec une certaine catastrophe, si on perturbe un peu la fonction (on en prend une autre dans un voisinage non loin), alors on retrouve la même catastrophe non loin.

### 10.7: Théorème de stabilité pour les fonctions de codimension $\geq 5$

Si  $r \geq 5$  et  $\alpha \in F_*$ , alors  $X_\alpha$  est localement stable.

## 11 Bibliographie

- Christopher ZEEMAN : The classification of catastrophes of codimension  $\leq 5$  : Zeeman, C. (1976). The classification of elementary catastrophes of codimension  $\leq 5$ . In: Hilton, P. (eds) Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences. Lecture Notes in Mathematics, vol 525. Springer, Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/BFb0077853>
- Martin GOLUBITSKY : An introduction to catastrophe theory and its applications, SIAM Review, avril 1978
- Manuel FIOUHAIS : Mechanical apparatus for the fold catastrophe demonstration, M Fiolhais et al 2021 Eur. J. Phys. 42 045001
- Martin GOLUBITSKY et Victor GUILLEMIN : Stable mappings and their singularities, Springer-Verlag, ISBN 978-0-387-90073-5, publié: 29 mars 1974
- René THOM : Stabilité structurelle et morphogénèse, Mathematical Physics Monograph Series
- Vladimir ARNOLD : Catastrophe Theory, Springer-Verlag, ISBN 3-540-54811-4
- Tim POSTON et Ian STEWART : Catastrophe Theory and its applications, Pitman, ISBN 0 273 08429 1
- Dubois, Jean-Guy; Dufour, Jean-Paul. La théorie des catastrophes. I. La machine à catastrophes. Annales de l'institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique, Tome 20 (1974) no. 2, pp. 113-134.