

MÉMOIRE DE 1ÈRE ANNÉE

Valeurs propres, courbure et chaleur

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Florian AULARD et Timothée ROCQUET

Sujet encadré par Cyril Letrouit

Juin 2022

Sommaire

1	Rudiments de géométrie Riemannienne	2
1.1	Variété et Laplacien	2
1.2	Connexion de Levi-Civita et courbure	5
1.3	Géodésiques et coordonnées exponentielles	6
2	Construction abstraite du noyau de la chaleur	8
2.1	Généralités sur les opérateurs auto-adjoints	8
2.2	Semi-groupe de la chaleur	9
2.3	Théorèmes de régularité	11
2.4	Noyau de la chaleur	14
3	Diagonalisation du Laplacien	16
3.1	Théorème de Rellich-Kondrachov	16
3.2	Diagonalisation du Laplacien	17
4	Construction calculatoire du noyau de la chaleur	19
4.1	Définition et unicité	19
4.2	Développement de Minakshisundaram-Pleijel	20
4.3	Existence et construction du noyau de la chaleur	23
4.4	Conséquences	28

Résumé

Ce mémoire a pour objet de faire le lien entre la courbure d'une variété Riemannienne et le spectre de son opérateur de Laplace-Beltrami. La répartition des valeurs propres du Laplacien a d'abord été étudiée pour expliquer les limites de validité du théorème d'équipartition de l'énergie, ce qui a amené Weyl à démontrer la loi éponyme (1911) : Si $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \rightarrow +\infty$ sont les valeurs propres du Laplacien d'une variété compacte de dimension n ,

$$\sum_{i \geq 1} e^{-t\lambda_i} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\text{Vol}(M)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}.$$

A partir des années 1950, des mathématiciens se sont interrogés sur les liens entre le spectre d'une variété et sa géométrie, l'étude du développement de la formule de Weyl a alors été approfondie par McKean et Singer (1964) dans la forme qui nous intéresse :

$$\sum_{i \geq 1} e^{-t\lambda_i} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} (\text{Vol}(M) + \frac{t}{6} \int_M K_x dx + O(t^2)).$$

avec K_x la courbure scalaire au point x . Ce mémoire a pour ambition de démontrer cette formule dans le cas d'une variété compacte sans bord. Il est principalement inspiré du livre [8] de Rosenberg.

Nous remercions chaleureusement Cyril Letrouit pour toute l'aide qu'il a apporté dans l'étude de ce problème ainsi que pour la relecture minutieuse de ce document.

1 Rudiments de géométrie Riemannienne

Cette partie a vocation à fournir les bases de géométrie Riemannienne nécessaires à la compréhension de l'article de McKean et Singer. Des notions de bases en géométrie différentielle seront supposées connues, on pourra trouver les notions de base sur les variétés différentielles dans [6, chap. 2-3] et sur les formes différentielles et l'intégration sur des variétés dans [6, chap. 5-6]. En général, les champs de vecteurs et les dérivées de Lie associées seront confondus. Pour davantage de détails sur la géométrie Riemannienne, on pourra consulter [3] et [4, chap. 3-4].

1.1 Variété et Laplacien

Convention (d'Einstein). Une variable libre qui apparaît à la fois en indice et en exposant dans un terme sera sommée. L'ensemble des valeurs parcouru par l'indice de sommation dépendra alors du contexte (en général sur une variété de dimension n , ce sera $\{1, \dots, n\}$). Ainsi,

$$a_i b^i$$

désignera en réalité

$$\sum_{i=1}^n a_i b^i.$$

Définition 1.1. Une **variété Riemannienne** (M, g) est la donnée d'une variété lisse M et d'une application lisse $g : M \rightarrow T^*M \otimes T^*M$ telle que pour tout $x \in M$, $g(x) = g_x \in T_x^*M \otimes T_x^*M$ soit un produit scalaire. Étant fixées des coordonnées locales $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ sur une carte, on pose $g_{ij}(x) = g_x(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})$ de telle sorte que $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$.

Remarque 1.2. Si on considère des coordonnées locales $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ sur une carte U et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sur une carte V , alors si on note $g_{ij}(x) = g_x(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})$ et $g'_{ij}(x) = g_x(\partial_{y_i}, \partial_{y_j})$, on a

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} g_{kl}.$$

Ainsi si on pose $\Lambda = \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^i} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, $G = (g_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, et $G' = (g'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, on a

$$G' = \Lambda G \Lambda^t.$$

Démonstration. On a $\partial_{y_i} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \partial_{x_k}$, donc

$$\begin{aligned} g'_{ij}(x) &= g_x(\partial_{y_i}, \partial_{y_j}) \\ &= g_x\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^i} \partial_{x_k}, \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \partial_{x_l}\right) \\ &= \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} g_{kl}. \end{aligned}$$

□

Par la suite, nous supposons que (M, g) est une variété Riemannienne connexe orientée.

Notation. Si des coordonnées locales $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont fixées, on notera g^x la matrice des $g_{i,j} = g_{i,j}^x$ relative aux coordonnées x .

Propriété 1.3. Étant données des coordonnées locales $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ sur une carte U de M ,

$$\alpha(x) = \sqrt{\det g^x} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

est une n -forme différentielle sur U indépendante des coordonnées locales choisies.

Démonstration. Soient $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ des coordonnées locales ayant même orientation sur une même carte U . Alors

$$\begin{aligned} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^i} dy^i \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^i} dy^i \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^{\sigma(i)}} \right) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \end{aligned}$$

puisque $dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$ est une n -forme alternée. Donc

$$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = (\det \Lambda) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n.$$

Or $\sqrt{\det g^y} = \sqrt{\det(\Lambda g^x \Lambda^t)} = (\det \Lambda) \sqrt{\det g^x}$ car $\det \Lambda > 0$ comme $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ ont même orientation. Ainsi $\sqrt{\det g^x} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sqrt{\det g^y} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$. \square

Définition 1.4. En utilisant une partition de l'unité, on peut alors définir la **forme volume** associée à la métrique Riemannienne comme l'unique n -forme différentielle sur M qui en coordonnées locales coïncide avec

$$dvol = \sqrt{\det g^x} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

où $(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$ est une base orientée positivement de $T_x M$.

Définition 1.5. On définit l'espace

$$L^2(M) = \left\{ f : M \rightarrow \mathbb{R}, \int_M f^2 dvol < +\infty \right\}.$$

C'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $f, g \mapsto \langle f, g \rangle_{L^2} = \int_M fg dvol$. On l'étend aux champs de vecteurs par $\langle X, Y \rangle = \int_M g(X, Y) dvol$.

Définition 1.6. Pour tout $x \in M$, la métrique g induit naturellement un isomorphisme $\alpha_{g,x} : T_x M \xrightarrow{\sim} T_x^* M$ par représentation de Riesz. On en déduit $\alpha_g : TM \xrightarrow{\sim} T^*M = \bigwedge^1 T^*M$. On peut alors déduire de g_x un produit scalaire sur $T_x^* M$ aussi noté g_x . Si des coordonnées locales (x_i) sont fixées, on pose $g^{ij}(x) = g_x(dx^i, dx^j)$.

Propriété 1.7. Soit (x_i) des coordonnées locales, si on pose $G^* = (g^{ij})$ et $G = (g_{ij})$, on a $GG^* = Id$, i.e. $g^{ik} g_{kj} = \delta_i^j$.

Démonstration. Soit $x \in M$. Soient $y, z \in T_x M$, posons $y = y^i \partial_{x_i}$, $z = z^i \partial_{x_i}$, $\alpha_{g,x}(y) = y_i dx^i$ et $\alpha_{g,x}(z) = z_i dx^i$. Alors $\alpha_{g,x}(y)(z) = g_x(y, z) = g_{ij} y^i z^j = y_j z^j$. D'où $y_i = g_{ij} y^j$. Alors comme

$$g_{ij} y^i z^j = g_x(y, z) = g_x(\alpha_{g,x}(y), \alpha_{g,x}(z)) = g^{ij} y_i z_j,$$

on obtient $g_{ij} y^i z^j = g^{ij} g_{ki} y^k g_{lj} z^l$. D'où $g_{ij} = g_{ik} g^{kl} g_{lj}$, ie $G = GG^*G$. Comme G inversible, $GG^* = Id$. \square

Notation. Étant donné un fibré vectoriel lisse X de base M , on note $\Gamma(X)$ l'ensemble des sections lisses de X .

Définition 1.8. On peut alors définir le **gradient** $\nabla : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \Gamma(TM)$ par $\nabla = \alpha_g^{-1} \circ d$ où d désigne la différentielle extérieure et où les opérateurs α_g et d sont étendus aux espaces de sections correspondants.

Propriété 1.9. En coordonnées locales,

$$\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_{x_j}. \quad (1)$$

Démonstration. Soit $x \in M$. Par définition, $\nabla f(x) = \alpha_{g,x}^{-1}(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i)$, or si $y = y^i \partial_{x_i} \in T_x M$, $\alpha_g(y) = g_{ij} y^j dx^i$. D'où $\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_{x_j}$. \square

Définition 1.10. L'opérateur *div* est l'unique opérateur tel que pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$

$$\langle X, \nabla f \rangle_{L^2} = -\langle \text{div}(X), f \rangle_{L^2}.$$

Définition 1.11. Étant données des coordonnées locales $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ sur une carte U de M , et $X \in \Gamma(TM)$ on pose $X = X^i \partial_{x_i}$. Alors

$$\text{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{\det g^x}} \partial_{x_i} (X^i \sqrt{\det g^x}). \quad (2)$$

Démonstration. Voir [8, 1.2.3 p.18]. \square

Définition 1.12. On peut alors définir l'opérateur de Laplace-Beltrami par $\Delta = -\text{div} \circ \nabla : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$.

Propriété 1.13. En coordonnées locales,

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_{x_i} (g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \sqrt{\det g}). \quad (3)$$

Démonstration. Cela s'obtient en composant (1) et (2). \square

Propriété 1.14. Pour tout $u, v \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $X \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned} \nabla(uv) &= u\nabla v + v\nabla u \\ \text{div}(uX) &= u \text{div}(X) + g(\nabla u, X) \\ \Delta(uv) &= u\Delta v - 2g(\nabla u, \nabla v) + v\Delta u \end{aligned}$$

Démonstration. Le gradient ∇u de u est l'unique champ de vecteurs tel que pour tout $Y \in \Gamma(TM)$, $g(\nabla u, Y) = du(Y)$. Pour tout $Y \in \Gamma(TM)$,

$$g(\nabla(uv), Y) = d(uv)(Y) = u dv(Y) + v du(Y) = ug(\nabla v, Y) + vg(\nabla u, Y) = g(u\nabla v + v\nabla u, Y)$$

donc $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$.

La divergence $\text{div}(X)$ de X est l'unique application \mathcal{C}^∞ telle que pour tout $w \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\langle X, \nabla w \rangle = -\langle \text{div}(X), w \rangle$. Pour tout $w \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} \langle \text{div}(uX), w \rangle &= -\langle uX, \nabla w \rangle = -\langle X, u\nabla w \rangle = -\langle X, \nabla(uv) - w\nabla u \rangle = -\langle X, \nabla(uv) \rangle + \langle X, w\nabla u \rangle \\ &= \langle \text{div}(X), uv \rangle + \langle wX, \nabla u \rangle = \langle u \text{div}(X), w \rangle + \langle g(wX, \nabla u), 1 \rangle = \langle u \text{div}(X), w \rangle + \langle g(X, \nabla u), w \rangle \\ &= \langle u \text{div}(X) + g(X, \nabla u), w \rangle \end{aligned}$$

donc $\text{div}(uX) = u \text{div}(X) + g(\nabla u, X)$.

Enfin,

$$\begin{aligned} \Delta(uv) &= -\text{div}(\nabla(uv)) = -\text{div}(u\nabla v + v\nabla u) = -\text{div}(u\nabla v) - \text{div}(v\nabla u) \\ &= -u \text{div}(\nabla v) - g(\nabla u, \nabla v) - v \text{div}(\nabla u) - g(\nabla u, \nabla v) = u\Delta v - 2g(\nabla u, \nabla v) + v\Delta u \end{aligned}$$

donc $\Delta(uv) = u\Delta v - 2g(\nabla u, \nabla v) + v\Delta u$. \square

1.2 Connexion de Levi-Civita et courbure

Définition 1.15. On appelle **connexion de Levi-Civita** l'unique opérateur $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ tel que pour $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$,

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X).$$

Propriété 1.16. La connexion de Levi-Civita vérifie les propriétés suivantes :

- i) ∇ est bilinéaire
- ii) $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$
- iii) $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \nabla_X(fY) = df(X)Y + f\nabla_X Y$.

Démonstration. La bilinéarité i) est immédiate.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$2g(\nabla_{fX} Y, Z) = fXg(Y, Z) + Yg(fX, Z) - Zg(fX, Y) + g([fX, Y], Z) + g([Z, fX], Y) - g([Y, Z], fX) \\ = fXg(Y, Z) + (fYg(X, Z) + Y(f)g(X, Z)) - (fZg(X, Y) + Z(f)g(X, Y)) \\ + (fg([X, Y], Z) - Y(f)g(X, Z)) + (Z(f)g(X, Y) - fg([Z, X], Y)) - fg([Y, Z], X) \\ = 2fg(\nabla_X Y, Z) + Y(f)g(X, Z) - Z(f)g(X, Y) - Y(f)g(X, Z) + Z(f)g(X, Y) \\ = 2g(f\nabla_X Y, Z).$$

D'où ii).

De même,

$$2g(\nabla_X(fY), Z) = Xg(fY, Z) + fYg(X, Z) - Zg(X, fY) + g([X, fY], Z) + g([Z, X], fY) - g([fY, Z], X) \\ = (X(f)g(Y, Z) + fXg(Y, Z)) + fYg(X, Z) - (Z(f)g(X, Y) + fZg(X, Y)) \\ + (fg([X, Y], Z) + X(f)g(Y, Z)) + fg([Z, X], Y) - (fg([Y, Z], X) - Z(f)g(Y, X)) \\ = 2g(f\nabla_X Y, Z) + X(f)g(Y, Z) - Z(f)g(X, Y) + X(f)g(Y, Z) + Z(f)g(X, Y) \\ = 2g(f\nabla_X Y + X(f)Y, Z) = 2g(f\nabla_X Y + df(X)Y, Z).$$

D'où iii). □

Remarque 1.17. En fait, $\nabla_X Y(x)$ ne dépend que de $X(x)$. On peut donc en déduire une application $\nabla : TM \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$.

Démonstration. En effet, par linéarité, il suffit de vérifier que si $X(p) = 0$, alors $\nabla_X Y(p) = 0$. Or si on choisit des coordonnées locales (x_i) au voisinage de p et que l'on note $X = X^i \partial_{x_i}$ avec $X^i(p) = 0$, on a $\nabla_X Y(p) = \nabla_{X^i \partial_{x_i}} Y(p) = X^i(p) \nabla_{\partial_{x_i}} Y(p) = 0$. On notera qu'on a utilisé le fait que $\nabla_X Y(p)$ ne dépend que localement des champs X et Y ce qui est visible via son expression. □

Définition 1.18. On appelle **symboles de Christoffel** les

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right).$$

Propriété 1.19. La connexion de Levi-Civita vérifie les propriétés suivantes :

- i) $\nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x^j} = \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k}$

ii)

$$\forall X, Y \in \Gamma(M), \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (4)$$

iii)

$$\forall X, Y, Z \in \Gamma(M), \quad X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \quad (5)$$

Démonstration. Les trois s'obtiennent par des calculs directs. \square

Définition 1.20. On appelle tenseur de **courbure de Riemann** le tenseur

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{[Y, X]}Z.$$

Des coordonnées (x_i) étant fixées, on note $R_{i,j,k}^l$ les coordonnées du tenseur de Riemann.

Définition 1.21. On appelle tenseur de **courbure de Ricci**, le tenseur

$$Ric = R_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

où

$$R_{ij} = R_{ijk}^k.$$

Définition 1.22. On appelle **courbure scalaire**, le champ scalaire :

$$R = R_i^i = g^{im} R_{im}.$$

1.3 Géodésiques et coordonnées exponentielles

On supposera désormais M compacte.

Définition 1.23. Un chemin sur M désignera une application $[0, 1] \rightarrow M$ de classe \mathcal{C}^1 . Soit γ un chemin sur M , on appelle longueur du chemin γ la grandeur

$$L(\gamma) = \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})^{\frac{1}{2}} dt.$$

Définition 1.24. On peut alors définir une distance sur M par

$$\forall x, y \in M, \quad d(x, y) = \inf_{\gamma \text{ tq } \gamma(0)=x \text{ et } \gamma(1)=y} L(\gamma).$$

Définition 1.25. Un chemin γ est dit **critique** si et seulement si pour toute famille de chemins $(\gamma_\varepsilon)_{\varepsilon \in]-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}[}$ telle que pour tout $\varepsilon \in]-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}[$, $\gamma_\varepsilon(0) = \gamma(0)$, $\gamma_\varepsilon(1) = \gamma(1)$ et $\gamma_0 = \gamma$, on ait $\frac{d}{d\varepsilon} L(\gamma_\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = 0$.

Théorème 1.26. Un chemin γ est critique si et seulement si $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$.

Démonstration. Voir [8, p. 80-81]. \square

Remarque 1.27. Si on note $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ en coordonnées, on obtient les équations d'Euler-Lagrange pour $1 \leq i \leq n$:

$$\frac{d^2 \gamma^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{d\gamma^k}{dt} = 0.$$

Démonstration. Soit γ un chemin critique. Alors le Théorème 1.26 assure que γ est parcouru à une vitesse constante. En effet par la formule (5),

$$\dot{\gamma}(g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})) = g(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) + g(\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) = 0.$$

Donc si γ n'est pas une géodésique constante, $\dot{\gamma}$ ne s'annule pas. Soit $x \in \text{im}(\gamma)$. Comme $\dot{\gamma}$ ne s'annule pas, on dispose d'un ouvert $x \in U \subset M$ tel que l'on puisse étendre $\dot{\gamma}$ en un champ sur U . Alors si on note $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma^j}{dt} \partial_{x^j}$, on a

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} &= \nabla_{\frac{d\gamma^j}{dt} \partial_{x^j}} \dot{\gamma} \\ &= \frac{d\gamma^j}{dt} \nabla_{\partial_{x^j}} \left(\frac{d\gamma^k}{dt} \partial_{x^k} \right) \\ &= \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{d\gamma^k}{dt} \nabla_{\partial_{x^j}} \partial_{x^k} + d\left(\frac{d\gamma^k}{dt}\right)(\dot{\gamma}) \partial_{x^k} \\ &= \Gamma_{jk}^i \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{d\gamma^k}{dt} \partial_{x^i} + \frac{d^2\gamma^k}{dt^2} \partial_{x^k}. \end{aligned}$$

On en déduit la caractérisation des géodésiques par les équations d'Euler-Lagrange. \square

Propriété 1.28. Soit $x \in M$. Comme M est compacte, pour tout $v \in T_x M$, on dispose de γ_v chemin défini sur \mathbb{R} tel que $\gamma_v(0) = x$, $\dot{\gamma}_v(0) = v$ et $\nabla_{\dot{\gamma}_v} \dot{\gamma}_v = 0$.

Définition 1.29. Soit $x \in M$, on définit l'application exponentielle par $\exp_x : v \in T_x M \rightarrow \gamma_v(1) \in M$.

Théorème 1.30. Soit $x \in M$. Alors $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ est un difféomorphisme au voisinage de 0.

Démonstration. Soit $v \in T_x M$ on a

$$d(\exp_x)_0(v) = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \exp_x(uv) = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \gamma_{uv}(1) = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \gamma_v(u) = v$$

car $t \mapsto \gamma_v(ut)$ et $t \mapsto \gamma_{uv}(t)$ satisfont la même équation et les mêmes conditions initiales. Donc $d(\exp_x)_0 = Id$ donc par théorème d'inversion locale, \exp_x est localement un difféomorphisme. \square

Définition 1.31. On appelle **coordonnées exponentielles** l'image par \exp_x de coordonnées orthogonales sur $T_x M$.

Propriété 1.32. Soient (x_1, \dots, x_n) des coordonnées exponentielles, alors

$$g_{i,j} = \delta_{i,j} - \frac{1}{3} R_{ikjl} x^k x^l + O(\|x^3\|).$$

Démonstration. Voir [7, Chapitre IX, Théorème 5.5 p.260]. \square

Définition 1.33. On appelle coordonnées polaires exponentielles les coordonnées définies sur un voisinage de $x \in M$ privé de x , obtenues en choisissant des coordonnées polaires $(x_i) = (r, \theta_j)$ sur $T_x M \setminus \{0\}$.

Propriété 1.34 (Lemme de Gauss). Soient (r, θ_i) de telles coordonnées. Pour $1 \leq i \leq n-1$, $g(\partial_r, \partial_{\theta_i}) = 0$.

Démonstration. Soit $v \in T_x M$. Regardons ce que devient $g(\partial_r, \partial_{\theta_i})$ le long de cette géodésique. On a par (5)

$$\partial_r g(\partial_r, \partial_{\theta_i}) = g(\nabla_{\partial_r} \partial_r, \partial_{\theta_i}) + g(\partial_r, \nabla_{\partial_r} \partial_{\theta_i}) = g(\partial_r, \nabla_{\partial_r} \partial_{\theta_i})$$

car $\partial_r = \dot{\gamma}_t$. On a alors grâce à (4)

$$\partial_r g(\partial_r, \partial_{\theta_i}) = g(\partial_r, \nabla_{\partial_{\theta_i}} \partial_r) + [\partial_r, \partial_{\theta_i}].$$

Or comme $[\partial_r, \partial_{\theta_i}] = (\exp_x)_*([\partial_r, \partial_{\theta_i}]) = 0$, on a, à nouveau par (5)

$$\begin{aligned} \partial_r g(\partial_r, \partial_{\theta_i}) &= g(\partial_r, \nabla_{\partial_{\theta_i}} \partial_r) \\ &= \frac{1}{2} \partial_{\theta_i} g(\partial_r, \partial_r) = 0. \end{aligned}$$

Donc $g(\partial_r, \partial_{\theta_i})$ est constant sur la géodésique. Or dans \mathbb{R}^n , ∂_{θ_i} est de longueur proportionnel à r . Ainsi au voisinage de x , $\partial_{\theta_i} = (\exp_x)_* \partial_{\theta_i}$ l'est également. D'où $g(\partial_r, \partial_{\theta_i}) = 0$. \square

Théorème 1.35 (Laplacien en coordonnées polaires). *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, soit $x \in M$ et considérons les coordonnées normales exponentielles (r, θ_i) centrées en x . On suppose que f dépend exclusivement de r . Alors*

$$\Delta f = -\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \left(\frac{n-1}{r} + \frac{\partial_r \det(d\exp_x)}{\det(d\exp_x)} \right) \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Démonstration. On fait le calcul à l'aide de (1.13) et du lemme de Gauss (Propriété 1.34). Voir [10, Prop. 4.8 p95-96]. \square

2 Construction abstraite du noyau de la chaleur

Cette partie est inspirée de [4].

2.1 Généralités sur les opérateurs auto-adjoints

Définition 2.1. Une **résolution spectrale** est une famille d'opérateurs $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ telle que :

- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, E_λ est un projecteur
- $\lambda < \lambda' \implies \text{Im}(E_\lambda) \subset \text{Im}(E_{\lambda'})$
- $\lambda \mapsto E_\lambda$ est continue à gauche (au sens de la norme d'opérateur) et tend vers 0 en $-\infty$ et Id en $+\infty$.

Étant donnée une résolution spectrale $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ et une fonction mesurable $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on peut définir

$$J_\varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) dE_\lambda$$

comme un opérateur linéaire de D dans H où

$$D = \text{dom}(J_\varphi) = \{x \in H \mid \int_{\mathbb{R}} |\varphi(\lambda)|^2 d\|E_\lambda x\|^2 < \infty\}$$

et pour tout $x, y \in H$,

$$(J_\varphi x, y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) d\mu(\lambda)$$

où μ est l'unique mesure sur \mathbb{R} telle que $\mu(-\infty, a] = (E_a x | y)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Définition 2.2. Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur linéaire $A : D \rightarrow H$ défini sur un sous-espace $D = \text{dom}(A)$ de H est dit **auto-adjoint** si $A^* = A$ où $\text{dom}(A^*) = \{y \in H \mid x \mapsto (Ax \mid y) \text{ est continue sur } D\}$ et A^* est l'adjoint de A . Ceci implique que $\text{dom}(A) = \text{dom}(A^*)$.

Définition 2.3. L'ensemble résolvant d'un opérateur linéaire $A : D \rightarrow H$ est

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda Id \text{ est inversible d'inverse continu}\}.$$

On appelle **spectre** de cette opérateur, l'ensemble

$$\text{spec}(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Théorème 2.4 (Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints). *Pour tout opérateur auto-adjoint A dans un espace de Hilbert H , il existe une unique résolution spectrale $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ telle que*

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda = \int_{\text{spec}(A)} \lambda dE_\lambda.$$

Démonstration. Voir [9, Théorème 12.23]. □

On définit alors, pour tout φ mesurable, l'application linéaire $\varphi(A) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) dE_\lambda$ qui ne dépend que de la valeur de φ sur $\text{spec}(A)$.

2.2 Semi-groupe de la chaleur

Définition 2.5. Pour M une variété Riemannienne, soit $D(M)$ l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact sur M , muni de la topologie vectorielle suivante : $V \subset D(M)$ est un voisinage de 0 si et seulement si

$$\forall U \subset M \text{ ouvert de carte}, \forall K \subset U \text{ compact}, \exists m \in \mathbb{N}^*, \left\{ \varphi \in D(K) \mid \max_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{m} \right\} \subset V.$$

On appelle alors **espace des distributions** son dual topologique $D'(M)$, l'ensemble des formes linéaires continues sur $D(M)$ muni de la topologie faible-*. On construit de même les champs de vecteurs distributionnels $\vec{D}'(M)$.

Propriété 2.6. *On a les injections continues suivantes :*

$$D(M) \hookrightarrow L^2(M) \hookrightarrow D'(M) \text{ et } \vec{D}(M) \hookrightarrow \vec{L}^2(M) \hookrightarrow \vec{D}'(M).$$

On étend la définition du gradient aux distributions en posant, si $u \in D'(M)$ et $\psi \in \vec{D}(M)$:

$$(\nabla u, \psi) = -(u, \text{div}(\psi)).$$

De manière similaire, on définit le Laplacien distributionnel, si $u \in D'(M)$ et $\psi \in D(M)$, par :

$$(\Delta u, \psi) = (u, \Delta \psi).$$

On définit les espaces de Sobolev suivants :

$$W^1(M) = \{u \in L^2(M) \mid \nabla u \in \vec{L}^2(M)\} \subset L^2(M)$$

$$W_0^1(M) = \text{adhérence de } D(M) \text{ dans } W^1(M)$$

$$W_0^2(M) = \{u \in W_0^1(M) \mid \Delta u \in L^2(M)\}.$$

$W^1(M)$ un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{H^1} = \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}.$$

$W_0^1(M)$ est un espace de Hilbert comme sous-espace fermé de $W^1(M)$.

Lemme 2.7. $R = (\Delta + Id)^{-1}$ est défini et est un opérateur borné auto-adjoint de $L^2(M)$.

Démonstration. Soit $f \in L^2(M)$. Montrons qu'il existe un unique $u \in W_0^2(M)$ tel que

$$\Delta u + u = f. \quad (6)$$

En fait, on peut chercher u dans $W_0^1(M)$, car une telle solution appartient à $W_0^2(M)$. Soit $\varphi \in D(M)$. En appliquant l'équation (6) à φ et en utilisant les définitions du Laplacien et du gradient distributionnels, on obtient

$$\langle u, \varphi \rangle_{L^2} + \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{L^2} = \langle f, \varphi \rangle_{L^2}.$$

Comme l'injection $H^1(M) \hookrightarrow L^2(M)$ est continue et $H_0^1(M)$ est complet, le théorème de représentation de Riesz assure l'existence de u . De plus, l'égalité précédente assure que

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2}.$$

D'où $\|R\| \leq 1$ et donc R est borné. Comme R borné, pour montrer qu'il est auto-adjoint, il suffit de montrer qu'il est symétrique. Or soient $f, g \in L^2(M)$, l'égalité précédente appliquée en $\psi = Rg$ assure que

$$\langle Rf, Rg \rangle_{L^2} + \langle \nabla Rf, \nabla Rg \rangle_{L^2} = \langle f, Rg \rangle_{L^2}$$

ce qui assure la symétrie. □

Théorème 2.8. L'opérateur $\Delta : W_0^2(M) \rightarrow L^2(M)$ est auto-adjoint positif. Son spectre est donc inclus dans \mathbb{R}_+ .

Démonstration. Commençons par montrer que Δ est symétrique et positif. Cela résulte de la formule de Green, si $u, v \in W_0^2(M)$ et $\psi \in D(M)$, alors

$$\langle \psi, \Delta u \rangle_{L^2} = \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle_{L^2}$$

par définition de la divergence distributionnelle. D'où, par densité de $D(M)$ dans $W_0^2(M)$, $-\Delta$ est symétrique positif. Il reste à montrer que $\text{dom}(\Delta) = \text{dom}(\Delta^*) = W_0^2(M)$. Or $\Delta = R^{-1} - Id$ avec $R = (\Delta + Id)^{-1}$. Il suffit donc de montrer que R^{-1} est auto-adjoint sur $W_0^2(M)$. Comme Δ symétrique, R^{-1} est symétrique. Il reste donc à montrer que

$$\text{dom}((R^{-1})^*) \subset \text{dom}(R^{-1}).$$

Par définition, on a

$$\text{dom}((R^{-1})^*) = \{y \in L^2(M), \exists f \in L^2(M), \forall x \in \text{dom}(R^{-1}), \langle R^{-1}x, y \rangle_{L^2} = \langle x, f \rangle_{L^2}\}.$$

Soit $y \in \text{dom}((R^{-1})^*)$, on dispose de $f \in L^2(M)$ tel que $\forall x \in \text{dom}(R^{-1}), \langle R^{-1}x, y \rangle_{L^2} = \langle x, f \rangle_{L^2}$. Alors comme R^{-1} est symétrique pour tout $x \in W_0^2(M)$,

$$\langle R^{-1}x, Rf \rangle_{L^2} = \langle x, f \rangle_{L^2} = \langle R^{-1}x, y \rangle_{L^2}$$

ce qui assure que $y = Rf$ et donc $y \in \text{dom}(R^{-1})$. □

Avec $\varphi(t) = e^{-t}$, on peut donc considérer l'opérateur $P_t = \varphi(\Delta) = e^{-t\Delta} : L^2(M) \rightarrow L^2(M)$ où $D \subset L^2(M)$.

Propriété 2.9. La famille $\{P_t\}_{t \geq 0}$ est le **semi-groupe de la chaleur**. Pour tout $t \geq 0$, P_t est un opérateur linéaire continu auto-adjoint de $L^2(M)$ dans lui-même qui vérifie :

i) $\forall t \geq 0, \|P_t\| \leq 1$

ii) $P_t P_s = P_{t+s}$

iii) Pour tout $f \in L^2(M)$ $t \mapsto P_t f$ est continue

iv) Pour tout $f \in L^2(M)$, $u(t) = P_t f$ est l'unique fonction vérifiant $u(0) = f$ et $\frac{du}{dt} = -\Delta u$.

Démonstration. i) Soit $t \geq 0$, on a $\|P_t\| = \sup_{\lambda \in \text{Spec}(-\Delta)} e^{t\lambda} \leq 1$.

ii) Cela résulte du [9, Théorème 13.24] : si φ et ψ mesurable et φ bornée, alors

$$\varphi(\Delta)\psi(\Delta) = \varphi\psi(\Delta)$$

et du fait que $e^{-t\lambda}e^{-s\lambda} = e^{-(t+s)\lambda}$.

iii) Soit $f \in L^2(M)$, le résultat résulte du théorème de convergence dominée et du fait que $(e^{-s\lambda})_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ est uniformément borné pour $s \in [0, +\infty]$.

iv) Soit $f \in L^2(M)$, on a $P_0 f = f$. De plus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_t f &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P_{t+s} f - P_t f}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{e^{-s\lambda} - 1}{s} e^{-t\lambda} dE_\lambda f. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité

$$|e^\theta - 1| \leq |\theta e^\theta|$$

on obtient pour $s \in]-\varepsilon; +\varepsilon[$,

$$\left| \frac{e^{-s\lambda} - 1}{s} e^{-t\lambda} \right| \leq \lambda e^{-\lambda(t-\varepsilon)}.$$

En prenant ε assez petit, $\left| \frac{e^{-s\lambda} - 1}{s} e^{-t\lambda} \right|$ est uniformément majoré pour $s \in]-\varepsilon; +\varepsilon[$. Par convergence dominée,

$$\frac{d}{dt} P_t f = - \int_0^\infty \lambda e^{-t\lambda} dE_\lambda f.$$

En utilisant le [9, Théorème 13.24], on obtient

$$\frac{d}{dt} P_t f = -\Delta P_t f.$$

□

2.3 Théorèmes de régularité

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, on définit les **espaces de Sobolev**,

$$W_{loc}^k = \{u \in L_{loc}^2 \mid \text{pour tout multi-indice } \alpha \text{ tq } |\alpha| \leq k, \partial^\alpha u \in L_{loc}^2\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{W^k}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_2^2.$$

On notera par la suite \hat{f} la transformée de Fourier dans \mathbb{R}^n de $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et $*$ le produit de convolution.

Lemme 2.10. *Il existe $C, C' \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $f \in W_{loc}^k$,*

$$C \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^k d\xi \leq \|f\|_{W^k}^2 \leq C' \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^k d\xi. \quad (7)$$

Démonstration. En effet par l'égalité de Parseval,

$$\begin{aligned}\|f\|_{W^k}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|(\partial^\alpha f)^\wedge\|_2^2 \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2 \right) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Or $\sum_{|\alpha| \leq k} |X^\alpha|^2$ et $(1 + |X^2|)^k$ sont polynomiales de même degré, on peut donc trouver des constantes C et C' telles que

$$C(1 + |X^2|)^k \leq \sum_{|\alpha| \leq k} |X^\alpha|^2 \leq C'(1 + |X^2|)^k,$$

ce qui permet de conclure. □

Lemme 2.11. Soit $u \in W^k(\Omega)$ avec $k > n/2$ à support compact. Alors $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ et

$$\sup|u| \leq C\|u\|_{W^k}$$

où C ne dépend que de n, k et Ω .

Démonstration. Soit u comme dans l'énoncé. Alors par Cauchy-Schwartz :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)| d\xi \right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^k d\xi \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-k} d\xi.$$

L'hypothèse $k > \frac{n}{2}$ assure que $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-k} d\xi$ converge et donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)| d\xi \leq C\|u\|_{W^k}.$$

Ceci nous assure que l'on peut obtenir u en prenant la transformée de Fourier inverse de \hat{u} , i.e.

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

qui est continue par convergence dominée et $\sup|u| \leq C\|u\|_{W^k}$. □

Théorème 2.12 (de Sobolev dans \mathbb{R}^n). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Pour tout $u \in W_{loc}^k(\Omega)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, si $k > m + n/2$ alors $u \in \mathcal{C}^m(\Omega)$. De plus, si $\Omega'' \subset \Omega' \subset \Omega$ d'adhérence compacte les uns dans les autres, alors

$$\|u\|_{C^m(\Omega'')} \leq C\|u\|_{W^k(\Omega')}.$$

Démonstration. Soit $u \in W_{loc}^k(\Omega)$ avec Ω ouvert de \mathbb{R}^n et $k > n/2 + m$. Soit $\Omega' \subset K \subset \Omega'' \subset \Omega$ avec K compact et Ω', Ω'' ouverts d'adhérence compacte dans Ω . Soit ψ une fonction $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que $\psi = 1$ sur Ω' et $\text{supp}(\psi) \subset K$. Alors $\psi u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega'')$ et $\psi u \in W^k(\Omega'')$. Soit $|\alpha| \leq m$ un multi-indice, alors $\partial^\alpha(\psi u) \in W^{k-m}(\Omega'')$ avec $k-m \geq n/2$. Le lemme précédent assure que $\partial^\alpha(\psi u) \in \mathcal{C}(\Omega'')$ et donc $\psi u = u \in C^m(\Omega')$ et ce pour tout Ω' , ce qui assure que $u \in \mathcal{C}^m(\Omega)$. □

On définit l'espace de Sobolev $W^{-1} = \{u \in D'(M) \mid \|u\|_{W^{-1}} < +\infty\}$ où

$$\|u\|_{W^{-1}} = \sup_{\varphi \in D(M) \setminus \{0\}} \frac{(u, \varphi)}{\|\varphi\|_{W^1}}.$$

Lemme 2.13. *On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $L = \partial_i(a^{i,j}(x)\partial_j)$ un opérateur différentiel tel que la matrice des $(a^{i,j})$ soit symétrique définie positive sur Ω . Pour tout entier $m \geq -1$, si $u \in L^2_{loc}(\Omega)$ et $Lu \in W^m_{loc}(\Omega)$, alors $u \in W^{m+2}_{loc}(\Omega)$. De plus, si $\Omega'' \subset \Omega' \subset \Omega$ d'adhérence compacte les uns dans les autres, alors*

$$\|u\|_{W^{m+2}(\Omega'')} \leq C(\|u\|_{L^2(\Omega')} + \|Lu\|_{W^m(\Omega')})$$

où C ne dépend pas de u .

Démonstration. Voir [4, Théorème 6.9]. □

On définit l'espace de Sobolev $W^{2k}_{loc}(M) = \{u \in L^2_{loc}(M) \mid u, \Delta u, \Delta^2 u, \dots, \Delta^k u \in L^2_{loc}(M)\}$ muni de la norme

$$\|f\|_{W^{2k}} = \sum_{i=0}^k \|\Delta^i f\|_{L^2}.$$

Théorème 2.14 (de Sobolev). *Si M est une variété Riemannienne de dimension n , pour tout $u \in W^{2k}_{loc}(M)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, si $k > m/2 + n/4$ alors $u \in C^m(M)$. De plus, si $\Omega \subset M$ d'adhérence compacte, $K \subset \Omega$ compact et $k > n/4$,*

$$\sup_K |u| \leq C\|u\|_{W^{2k}(\Omega)}.$$

Démonstration. Soit U une carte de M et des coordonnées locales (x^1, \dots, x^n) . Posons $U' = x(U)$ et $\rho = \sqrt{\det(g)}$ et considérons l'opérateur défini sur $D(\Omega)$ par $L' = -\rho^{-1}\partial_i(\rho g^{ij}\partial_j)$. On peut étendre L à $D'(\Omega)$ en étendant les dérivées partielles de manière antisymétrique et en étendant la multiplication par une fonction lisse de façon symétrique. On peut alors transporter L' en un opérateur sur $D'(U)$ noté L . On dispose également de Δ défini sur $D'(U)$. Par l'expression de la Propriété 1.13, L et Δ coïncident sur $D(U)$, et on cherche à montrer qu'ils coïncident sur $W^2_{loc}(U)$ car cela permettra alors de transporter le théorème de Sobolev valable sur Ω à U . On note λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n et μ la mesure sur M . On a alors si $u \in D'(U)$ et $\varphi \in D(U)$,

$$\begin{aligned} (Lu, \varphi) &= (-\rho^{-1}\partial_i(\rho g^{i,j}\partial_j u), \varphi) = -(\partial_i(\rho g^{i,j}\partial_j u), \rho^{-1}\varphi) \\ &= (\rho g^{i,j}\partial_j u, \partial_i(\rho^{-1}\varphi)) = (\partial_j u, \rho^{i,j}\partial_i(\rho^{-1}\varphi)) \\ &= -(u, \partial_j(\rho^{i,j}\partial_i(\rho^{-1}\varphi))) = (u, \rho L\rho^{-1}\varphi). \end{aligned}$$

Supposons que $u \in W^2_{loc}(U)$. On a alors si $\varphi \in D(U)$

$$\begin{aligned} \int_U \Delta(u)\varphi d\lambda &= \int_U \Delta(u)\varphi\rho^{-1}d\mu = \int_U u\Delta(\varphi\rho^{-1})d\mu \\ &= \int_U u\rho L(\varphi\rho^{-1})d\lambda = \int_U L(u)\varphi d\lambda. \end{aligned}$$

D'où L et Δ coïncident sur W^2_{loc} . Ainsi si $u \in W^{2k}_{loc}(M)$, en appliquant le lemme précédent à L , on obtient comme $u, L'u, (L')^2u, \dots, (L')^k u \in L^2(\Omega)$ que $u \in W^{2k}(U)$. Donc $u \in \mathcal{C}^m(U)$ par le théorème de Sobolev appliqué à U ouvert de \mathbb{R}^n . L'inégalité découle de l'inégalité du Lemme 2.13 et de celle du Théorème 2.12 □

En particulier, si $\Delta^k u \in L^2_{loc}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors $u \in \mathcal{C}^\infty$.

On travaille maintenant dans \mathbb{R}^{n+1} que l'on dote de coordonnées t, x_1, \dots, x_n . On définit les espaces de Sobolev anisotropes dans \mathbb{R}^{n+1} :

$$V^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout multi-indice } \alpha \text{ tel que } [\alpha] \leq k\}$$

où $[\alpha] = 2\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Théorème 2.15 (de Sobolev anisotrope). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout $u \in V_{loc}^k(\Omega)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, si $k > m + n/2$ alors $u \in C^m(\Omega)$.*

Démonstration. Cela résulte simplement du fait que $V^k(\Omega) \hookrightarrow W^{2k}(\Omega)$ et du théorème de Sobolev isotrope. \square

Lemme 2.16. *Soit $P = \rho(x)\partial_t - \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j)$ un opérateur différentiel sur Ω ouvert de \mathbb{R}^{n+1} avec $\rho > 0$, $(a_{i,j})$ symétrique défini positive et ces deux fonctions ne dépendant pas de t . Alors si $u \in L_{loc}^2(\Omega)$ et $Pu \in V_{loc}^m(\Omega)$, on a $u \in V_{loc}^{m+1}(\Omega)$.*

Démonstration. Voir [4, Théorème 6.21, p.177]. \square

Théorème 2.17 (de régularité parabolique dans \mathbb{R}^n). *Pour toute distribution u sur Ω ouvert de \mathbb{R}^{n+1} , si $\partial_t u - \Delta u \in \mathcal{C}^\infty$ alors $u \in \mathcal{C}^\infty$.*

Démonstration. Posons $Pu = \partial_t u - \Delta u$. Si $Pu \in \mathcal{C}^\infty$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Pu \in V_{loc}^k(\Omega)$. Le lemme précédent donne alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u \in V_{loc}^k(\Omega)$. Le théorème de Sobolev anisotrope assure que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. \square

Théorème 2.18. *Pour toute distribution u sur $\mathbb{R}_+^* \times M$, si $\partial_t u + \Delta u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times M)$ alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times M)$.*

Démonstration. On reproduit la démonstration du Théorème 2.14 en s'appuyant sur le lemme précédent. \square

On en déduit le résultat suivant :

Théorème 2.19. *Pour tout $f \in L^2(M)$, $u(t, x) = P_t f(x)$ est \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times M$.*

2.4 Noyau de la chaleur

En utilisant le théorème de représentation de Riesz, on obtient :

Théorème 2.20. *Pour tout $x \in M$ et $t > 0$, il existe une unique fonction $p_{t,x} \in L^2(M)$ telle que pour tout $f \in L^2(M)$, $P_t f(x) = \int_M p_{t,x}(y) f(y) dy$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\varphi : f \mapsto P_t f(x)$ est borné pour tout $x \in M$ et $t > 0$. Or soit $K \subset M$ compact contenant $x \in M$, on a

$$\begin{aligned} \|P_t f\|_{W^{2k}} &= \sum_{i=0}^k \|\Delta^i P_t f\|_{L^2} \\ &= \sum_{i=0}^k \left(\int_0^\infty (\lambda^i e^{-t\lambda})^2 d\|E_\lambda f\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{i=0}^k \left(\frac{i}{t} \right)^i e^{-i} \|f\|_{L^2} \end{aligned}$$

en utilisant que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $|\lambda^i e^{-t\lambda}| \leq \left(\frac{i}{t}\right)^i e^{-i}$ que l'on obtient par une étude de fonction. D'où

$$\|P_t f\|_{W^{2k}} \leq C(1+t^{-k})\|f\|_{L^2}.$$

L'inégalité donnée par le Théorème 2.14 permet de conclure que

$$\sup_K |P_t f| \leq C(1+t^{-k})\|f\|_{L^2}$$

et donc φ est borné. □

Définition 2.21. Pour tout $x, y \in M$ et $t > 0$, on pose $p_t(x, y) = \langle p_{t/2, x}, p_{t/2, y} \rangle$ le **noyau de la chaleur** sur M .

Lemme 2.22. Soit $f \in L^2(M)$, $s, t > 0$ et $x \in M$, alors

$$P_{t+s}f(x) = \int_M \langle p_{s, z}, p_{t, x} \rangle_{L^2} f(z) dz.$$

Démonstration. En utilisant que $P_{t+s} = P_t P_s$ et la symétrie de P_s , on obtient

$$\begin{aligned} P_{t+s}f(x) &= P_t P_s f(x) = \langle p_{t, x}, P_s f \rangle_{L^2} \\ &= \langle P_s p_{t, x}, f \rangle_{L^2} = \int_M P_s p_{t, x}(z) f(z) dz \\ &= \int_M \langle p_{s, z}, p_{t, x} \rangle_{L^2} f(z) dz. \end{aligned}$$

□

Lemme 2.23. Soient $x, y \in M$ et $t > 0$, alors $\langle p_{s, x}, p_{t-s, y} \rangle_{L^2}$ ne dépend pas de $0 \leq s \leq t$.

Démonstration. Soit $0 \leq r \leq s \leq t$, alors

$$\begin{aligned} \langle p_{s, x}, p_{t-s, y} \rangle_{L^2} &= P_s p_{t-s, y}(x) \\ &= P_r P_{s-r} p_{t-s, y}(x) \\ &= \int_M P_{r, x}(z) \langle p_{s-r, z}, p_{t-s, y} \rangle_{L^2} dz \\ &= P_{t-r} p_{r, x}(y) \\ &= \langle p_{r, x}, p_{t-r, y} \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

□

Théorème 2.24. Le noyau de la chaleur a les propriétés suivantes :

- i) $\forall x, y \in M, \forall t > 0, p_t(x, y) = p_t(y, x)$
- ii) $\forall f \in L^2(M), \forall x \in M, \forall t > 0, P_t f(x) = \int_M p_t(x, y) f(y) dy$
- iii) $\forall x, y \in M, \forall s, t > 0, p_{t+s}(x, y) = \int_M p_t(x, z) p_s(z, y) dz$
- iv) $\forall y \in M, u(t, x) = p_t(x, y)$ est \mathcal{C}^∞ et satisfait l'équation de la chaleur $\partial_t u = -\Delta u$.
- v) $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(M), \int_M p_t(x, y) f(y) dy \rightarrow f(x)$ quand $t \rightarrow 0$ où la convergence est uniforme sur tout compact pour toutes les dérivées.
- vi) $p_t(x, y)$ est \mathcal{C}^∞ en t, x, y simultanément, i.e. est une fonction \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times M \times M$.

Démonstration. i) La symétrie découle directement de la Définition 2.21.

ii) En utilisant la Définition 2.21 et le Lemme 2.22, on a

$$P_t f(x) = \int_M \langle p_{t/2,z}, p_{t/2,x} \rangle_{L^2} f(z) dz = \int_M p_t(x,z) f(z) dz.$$

iii) En utilisant le Lemme 2.23 et la Définition 2.21, on a $p_t(x,y) = (p_{s,x}, p_{t-s,y})$ si $0 \leq s \leq t$. De plus la Propriété ii) assure que $p_t(x, \cdot) = p_{t,x}$ presque partout. Donc

$$\int_M p_t(x,z) p_s(z,y) dz = \langle p_{t,x}, p_{s,y} \rangle_{L^2} = p_{t+s}(x,y).$$

iv) Soient $0 < s < t$ et $x, y \in M$, alors

$$u(t,x) = p_t(x,y) = \langle p_{t-s,x}, p_{s,y} \rangle_{L^2} = P_{t-s} p_{s,y}(x).$$

D'après le Théorème 2.19, u est \mathcal{C}^∞ et d'après la Propriété 2.9-iv), u est solution de l'équation de la chaleur.

v) Soit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$. Comme

$$\|\Delta^k (P_t f - f)\|_{L^2}^2 = \int_0^\infty \lambda^{2k} (1 - e^{-t\lambda})^2 d\|E_\lambda f\|^2$$

par convergence dominée, $P_t f \xrightarrow{W^{2k}} f$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ quand $t \rightarrow 0$. Donc $P_t f \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} f$ quand $t \rightarrow 0$ par le Théorème 2.14.

vi) Voir [4, Théorème 7.20 p.208].

□

3 Diagonalisation du Laplacien

3.1 Théorème de Rellich-Kondrachov

Définition 3.1. Soient X, Y deux espaces de Banach. Une application $T : X \rightarrow Y$ est dite **compacte** si $T(B_X(0, 1))$ est d'adhérence compacte dans Y .

Théorème 3.2 (Rellich-Kondrachov dans \mathbb{R}^n). Soit Ω un ouvert relativement compact de \mathbb{R}^n . L'inclusion $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ est continue compacte d'image dense.

Démonstration. La densité et la continuité sont évidentes. Il reste à montrer la compacité. Soit $(f_n) \subset B_{H_0^1}(0, 1)$, et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact tel que $\varphi = 1$ sur Ω . Alors

$$\begin{aligned} |\nabla \hat{f}_n(\xi)|^2 &= |\nabla(\varphi \cdot f_n)^\wedge(\xi)|^2 \\ &= |\nabla(\hat{\varphi} * \hat{f}_n)(\xi)|^2 \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \hat{\varphi}(\xi - \varepsilon) \hat{f}_n(\varepsilon) d\varepsilon \right|^2 \\ &\leq C(\xi) \|\hat{f}_n\|_{L^2}^2 \leq C(\xi) \|\hat{f}_n\|_{H^1}^2 \leq C(\xi) \end{aligned}$$

par Cauchy-Schwarz avec

$$C(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla \hat{\phi}(\xi - \varepsilon)\|^2 d\varepsilon.$$

Ainsi comme C est continue, si $r > 0$, $(\nabla \hat{f}_n)$ est uniformément majoré sur $B_{\mathbb{R}^n}(0, r)$. Par Arzèla-Ascoli, quitte à extraire, on dispose de \hat{f} tel que une suite extraite de (\hat{f}_n) converge uniformément vers \hat{f} sur $B_{\mathbb{R}^n}(0, r)$ pour tout $r > 0$. On renomme cette suite (f_n) . Alors soit $\varepsilon > 0$ et $r > 0$

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}_n(\varepsilon) - \hat{f}_m(\varepsilon)|^2 d\varepsilon \\ &= \int_{|\varepsilon| \geq r} |\hat{f}_n(\varepsilon) - \hat{f}_m(\varepsilon)|^2 d\varepsilon + \int_{|\varepsilon| \leq r} |\hat{f}_n(\varepsilon) - \hat{f}_m(\varepsilon)|^2 d\varepsilon \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{|\varepsilon| \geq r} |\hat{f}_n(\varepsilon) - \hat{f}_m(\varepsilon)|^2 d\varepsilon &\leq \frac{1}{1+r^2} \int_{|\varepsilon| \geq r} |\hat{f}_n(\varepsilon) - \hat{f}_m(\varepsilon)|^2 (1+|\varepsilon|^2) d\varepsilon \\ &\leq \frac{1}{1+r^2} \|f_n - f_m\|_{H^1}^2 \\ &\leq \frac{4}{1+r^2} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

On peut donc choisir $r > 0$ et n tel que $\frac{4}{1+r^2} < \varepsilon$ et pour tout $p > n$, $\|\hat{f}_p - \hat{f}_n\|_{\infty, B_{\mathbb{R}^n}(0, r)} < \frac{\varepsilon}{1+r^2}$. Cela nous donne alors

$$\|f_p - f_m\|_{L^2}^2 \leq 3\varepsilon$$

pour tout $n, m > p$. Ainsi (f_n) de Cauchy dans L^2 complet, donc convergente. \square

Théorème 3.3 (Rellich-Kondrachov dans M). *L'inclusion $H^1(M) \hookrightarrow H^0(M)$ est continue compacte d'image dense.*

Démonstration. Soit $f_n \subset H^1(M)$ borné. Soit (U_i, φ_i) un atlas fini de M avec U_i borné et (p_i) une partition de l'unité subordonné aux $\varphi(U_i)$. Par compacité, on peut supposer que dans chaque carte les g^{ij} sont borné. Fixons i et considérons

$$g_n = (p_i f_n) \circ \varphi_i.$$

La suite (g_n) est alors bornée dans $H_0^1(U_i)$ grâce à (1). Par le théorème de Rellich-Kondrachov dans \mathbb{R}^n , une sous-suite de (g_n) converge dans $L^2(U_i)$. En extrayant successivement, on obtient $h_i \in L^2(U_i)$ et ψ une extraction telles que

$$(p_i f_{\psi(n)}) \circ \varphi_i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2(U_i)} h_i.$$

Alors

$$f_{\psi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2(M)} \sum_i h_i \circ \varphi_i^{-1}.$$

\square

3.2 Diagonalisation du Laplacien

Lemme 3.4. *Soit H un espace de Hilbert, T un endomorphisme continu symétrique compact de H . Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u_n) \subset H$ tel que $\|u_n\| = 1$, $\|T(u_n) - \lambda u_n\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $\|T\| = |\lambda|$.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de H telle que $\|u_n\| = 1$ et $|\langle T(u_n), u_n \rangle| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|T\|$. Quitte à extraire, on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\langle T(u_n), u_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$. Alors

$$0 \leq \|T(u_n) - \lambda u_n\|^2 \leq 2\lambda^2 - 2\lambda \langle u_n, T(u_n) \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

□

Théorème 3.5 (Hilbert). *Soit H un espace de Hilbert, T un endomorphisme continu symétrique compact de H . Alors T est diagonalisable en base orthonormale : il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots \in \mathbb{R}$ et $e_0, e_1, \dots \in H$ tels que $Te_k = \lambda_k e_k$ pour tout k , $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H et $\lambda_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.*

Démonstration. Supposons construits $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ et e_0, e_1, \dots, e_k . Posons

$$H_k = \{x \in H \mid \langle x, e_1 \rangle = \langle x, e_2 \rangle = \dots = \langle x, e_k \rangle = 0\}.$$

Alors $T|_{H_k}$ est un endomorphisme compact symétrique de H_k car H_k est stable par T . Donc d'après le lemme, on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u_n) \subset H_k$ tels que $\|u_n\| = 1, \|T(u_n) - \lambda u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\|T|_{H_k}\| = |\lambda|$. Par compacité, on peut extraire une suite de $T(u_n)$ qui converge vers v . Alors

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda^{-1}v = u.$$

Or on a alors $T(u) = v = \lambda u$. Il reste donc à montrer que $\lambda_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. On a déjà que (λ_n) est décroissante. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n > \varepsilon$. Alors si on pose $v_n = \varepsilon \lambda_n^{-1} u_n$, on a $\|v_n\| \leq 1$ et pourtant $T(v_n) = \varepsilon u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\|T(v_n)\| = \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et les $T(v_n)$ sont deux à deux orthogonaux, ce qui contredit la compacité de T . □

Théorème 3.6 (Diagonalisation du Laplacien). *Soit M un variété Riemannienne compacte. Alors Δ est diagonalisable en base orthonormale : il existe $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \in \mathbb{R}$ et $e_0, e_1, \dots \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tels que $\Delta e_k = \lambda_k e_k$ pour tout k , $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(M)$ et $\lambda_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$. On appelle alors **spectre** de M la famille $\lambda_0, \lambda_1, \dots$*

Démonstration. D'après le théorème de Rellich-Kondrachov : $H^1(M) \hookrightarrow H^0(M) = L^2(M)$ est continue compacte d'image dense. Alors pour tout $h \in L^2(M), v \in H^1(M) \mapsto \langle v, h \rangle_{L^2}$ est continue donc on dispose par Riesz de $Th \in H^1(M)$ tel que $\langle v, h \rangle_{L^2} = \langle v, Th \rangle_{H^1}$.

L'application $T : L^2(M) \rightarrow H^1(M)$ est continue donc $T : H^1(M) \rightarrow H^1(M)$ est compacte comme composée d'une application continue et d'une application compacte. On vérifie qu'il est symétrique. Donc T est diagonalisable. En posant $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une base de diagonalisation associée aux valeurs propres $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$, on a pour tout $u \in H^1(M), \mu_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ et

$$\mu_k \langle e_k, u \rangle_{H^1} = \langle \mu_k e_k, u \rangle_{H^1} = \langle T(e_k), u \rangle_{H^1} = \langle e_k, u \rangle_{L^2}.$$

Ce qui se réécrit si $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$, comme

$$\langle \mu_k (e_k + \Delta e_k), u \rangle_{L^2} = \langle e_k, u \rangle_{L^2}.$$

Ainsi

$$\Delta e_k = \left(\frac{1}{\mu_k} - 1 \right) e_k.$$

Ceci assure que les (e_k) forment une base de diagonalisation associée aux valeurs propres $\lambda_k = \frac{1}{\mu_k} - 1 \rightarrow +\infty$. Le théorème de Sobolev (II- Théorème 2.14) assure qu'ils appartiennent bien à $\mathcal{C}^\infty(M)$. □

4 Construction calculatoire du noyau de la chaleur

Toute cette section ne concerne que les variétés compactes. Elle présente une construction explicite du noyau de la chaleur. La méthode est inspirée de [8], [1], [2], [5].

4.1 Définition et unicité

Définition 4.1. Soit M une variété Riemannienne compacte. Un **noyau de la chaleur** sur M est une application $p : M \times M \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

1. $p(x, y, t)$ est C^1 en t , C^2 en y et $\partial_t p + \Delta_y p = 0$
2. pour tout $x \in M$, $p(x, \cdot, t) \rightarrow \delta_x$ quand $t \rightarrow 0^+$ au sens distributionnel ; autrement dit, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_M p(x, y, t) f(y) dy = f(x).$$

On commence par montrer l'unicité du noyau de la chaleur. Cela découle du théorème suivant.

Théorème 4.2. Soient M une variété Riemannienne compacte, $p(x, y, t)$ un noyau de la chaleur sur M , $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ le spectre de M , $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ la base orthonormée associée. Alors pour tout $t > 0$ et $x, y \in M$,

$$p(x, y, t) = \sum_{k \geq 0} e^{-t\lambda_k} \varphi_k(x) \varphi_k(y)$$

où la somme converge absolument en tout (x, y, t) . En particulier, p est unique et $\sum_{k \geq 0} e^{-t\lambda_k} = \int_M p(x, x, t) dx$.

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in M$, on pose $p(x, \cdot, t) = \sum_k f_k(x, t) \varphi_k$ où l'égalité a lieu dans $L^2(M)$. On a donc

$$f_k(x, t) = \langle p(x, \cdot, t), \varphi_k \rangle = \int_M p(x, y, t) \varphi_k(y) dy.$$

On sait que p est C^1 en t , C^2 en x et M est compact donc on peut dériver sous l'intégrale et obtenir

$$\begin{aligned} \partial_t f_k(x, t) &= \partial_t \int_M p(x, y, t) \varphi_k(y) dy = \int_M \partial_t p(x, y, t) \varphi_k(y) dy = \int_M -\Delta_y p(x, y, t) \varphi_k(y) dy \\ &= \int_M -p(x, y, t) \Delta_y \varphi_k(y) dy = \int_M -p(x, y, t) \lambda_k \varphi_k(y) dy = -\lambda_k \int_M p(x, y, t) \varphi_k(y) dy = -\lambda_k f_k(x, t) \end{aligned}$$

donc $f_k(x, t) = e^{-\lambda_k t} g_k(x)$. De plus, pour tout $u \in \mathcal{C}^\infty(M) \subset L^2(M)$,

$$u(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \langle u, p(x, \cdot, t) \rangle = \lim_{t \rightarrow 0^+} \langle u, \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda_k t} g_k(x) \varphi_k \rangle = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda_k t} g_k(x) \langle u, \varphi_k \rangle = \sum_{k \geq 0} g_k(x) \langle u, \varphi_k \rangle$$

où la somme converge absolument.

Montrons que pour tout $l \geq 0$, $g_l = \varphi_l$. Fixons $l \geq 0$. Puisque $\mathcal{C}^\infty(M)$ est dense dans $L^2(M)$, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(M)$ telle que $u_n \rightarrow \varphi_l$ pour la norme L^2 donc $\sum_{k \geq 0} g_k(x) \langle u_n, \varphi_k \rangle$ converge vers $g_l(x)$. Ainsi, (u_n) converge ponctuellement vers g_l et converge en norme L^2 vers φ_l . Quitte à extraire une sous-suite, (u_n) converge presque partout donc $g_l = \varphi_l$ presque partout.

On a donc $p(x, \cdot, t) = \sum_k e^{-t\lambda_k} \varphi_k(x) \varphi_k$ où la convergence est dans L^2 donc presque partout quitte à extraire une sous-suite de sommes partielles. De plus,

$$\langle p(x, \cdot, t/2), p(x', \cdot, t/2) \rangle = \sum_k e^{-(t/2)\lambda_k} \varphi_k(x) e^{-(t/2)\lambda_k} \varphi_k(x') = \sum_k e^{-t\lambda_k} \varphi_k(x) \varphi_k(x')$$

donc la somme converge simplement vers une fonction continue qui ne peut être que $p(x, \cdot, t)$ donc $p(x, y, t) = \sum_{k \geq 0} e^{-t\lambda_k} \varphi_k(x) \varphi_k(y)$. En intégrant par rapport à $x = y$, on obtient $\sum_{k \geq 0} e^{-t\lambda_k} = \int_M p(x, x, t) dx$ par convergence dominée. \square

4.2 Développement de Minakshisundaram-Pleijel

Dans \mathbb{R}^n , le noyau de la chaleur est donné par $p(x, y, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}$. L'idée de la construction de p sur M est de partir d'une fonction semblable sur M et d'ajouter des termes de correction.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in M$, $\exp_x : B(0, \varepsilon) \rightarrow M$ soit injectif, donc un difféomorphisme sur son image. Soit $U_\varepsilon = \{(x, y) \in M \times M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$. On définit sur U la fonction

$$G(x, y, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{d(x, y)^2}{4t}}$$

et on va chercher comme solution une fonction de la forme

$$S_N(x, y, t) = G(x, y, t) \left(\sum_{k=0}^N t^k u_k(x, y) \right).$$

Lemme 4.3. Avec $L = \Delta + \partial_t$, en fixant $x \in M$,

$$L_y S_N = G \left[\frac{r}{2t} \frac{\partial_r \theta(x, y)}{\theta(x, y)} \sum_{k=0}^N t^k u_k(x, y) + \sum_{k=0}^N t^k \Delta_y u_k(x, y) + \sum_{k=1}^N k t^{k-1} u_k(x, y) + \frac{r}{t} \sum_{k=0}^N t^k \partial_r u_k(x, y) \right]$$

où $r = d(x, y)$, ∂_r est le champ radial centré en x et $\theta(x, y) = \sqrt{\det(g(y))}$ où g est la matrice du produit scalaire sur M pour la carte \exp_x .

Démonstration. Pour tout $x, y \in M$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, en utilisant la Propriété 1.14 et le Théorème 1.35, on a :

$$\begin{aligned} \partial_t G(x, y, t) &= G(x, y, t) \left(-\frac{n}{2t} + \frac{r^2}{4t^2} \right) \\ \partial_t S_N(x, y, t) &= G(x, y, t) \left(-\frac{n}{2t} + \frac{r^2}{4t^2} \right) \left(\sum_{k=0}^N t^k u_k(x, y) \right) + G(x, y, t) \left(\sum_{k=1}^N k t^{k-1} u_k(x, y) \right) \\ &= G(x, y, t) \left(\left(-\frac{n}{2t} + \frac{r^2}{4t^2} \right) \sum_{k=0}^N t^k u_k(x, y) + \sum_{k=1}^N k t^{k-1} u_k(x, y) \right) \\ \Delta_y S_N(x, y, t) &= \Delta_y G(x, y, t) \left(\sum_{k=0}^N t^k u_k(x, y) \right) + G(x, y, t) \left(\sum_{k=0}^N t^k \Delta_y u_k(x, y) \right) - 2 \langle \nabla_y G(x, y, t), \sum_{k=0}^N t^k \nabla_y u_k(x, y) \rangle \\ G(x, y, t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4t}}, \quad \partial_r G(x, y, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left(-\frac{2r}{4t} \right) e^{-\frac{r^2}{4t}} = -\frac{r}{2t} G(x, y, t), \\ \partial_{rr} G(x, y, t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left(-\frac{2}{4t} + \left(-\frac{2r}{4t} \right)^2 \right) e^{-\frac{r^2}{4t}} = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{r^2}{4t^2} \right) G(x, y, t) \\ \Delta_y G(x, y, t) &= -\partial_{rr} G(x, y, t) - \left(\frac{n-1}{r} + \frac{\partial_r \theta(x, y)}{\theta(x, y)} \right) \partial_r G(x, y, t) \\ &= -G(x, y, t) \left(-\frac{1}{2t} + \frac{r^2}{4t^2} \right) - \left(\frac{n-1}{r} + \frac{\partial_r \theta(x, y)}{\theta(x, y)} \right) \left(-\frac{r}{2t} \right) G(x, y, t) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{n}{2t} - \frac{r^2}{4t^2} + \frac{r}{2t} \frac{\partial_r \theta(x,y)}{\theta(x,y)} \right) G(x,y,t).$$

Et comme G est une fonction radiale, d'après le lemme de Gauss (Propriété 1.34),

$$\langle \nabla_y G(x,y,t), \sum_{k=0}^N t^k \nabla_y u_k(x,y) \rangle = (\partial_r G(x,y,t)) \left(\sum_{k=0}^N t^k \partial_r u_k(x,y) \right) = -\frac{r}{2t} G(x,y,t) \left(\sum_{k=0}^N t^k \partial_r u_k(x,y) \right).$$

En combinant toutes ces identités, on obtient bien

$$\begin{aligned} L_y S_N &= \Delta_y S_N + \partial_t S_N \\ &= \left(\frac{n}{2t} - \frac{r^2}{4t^2} + \frac{\partial_r \theta(x,y)}{\theta(x,y)} \right) G(x,y,t) \left(\sum_{k=0}^N t^k u_k(x,y) \right) + G(x,y,t) \left(\sum_{k=0}^N t^k \Delta_y u_k(x,y) \right) \\ &\quad + 2 \frac{r}{2t} G(x,y,t) \left(\sum_{k=0}^N t^k \partial_r u_k(x,y) \right) + G(x,y,t) \left(\left(-\frac{n}{2t} + \frac{r^2}{4t^2} \right) \sum_{k=0}^N t^k u_k(x,y) + \sum_{k=0}^N k t^{k-1} u_k(x,y) \right) \\ &= G(x,y,t) \left(\frac{r}{2t} \frac{\partial_r \theta(x,y)}{\theta(x,y)} \sum_{k=0}^N t^k u_k(x,y) + \sum_{k=0}^N t^k \Delta_y u_k(x,y) + \frac{r}{t} \sum_{k=0}^N t^k \partial_r u_k(x,y) + \sum_{k=0}^N k t^{k-1} u_k(x,y) \right). \end{aligned}$$

□

Lemme 4.4. On a $L_y S_N(x,y,t) = G(x,y,t) t^N \Delta_y u_N$ avec

$$u_0(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\theta(x,y)}} \quad u_k(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{\theta(x,y)}} \int_0^1 s^{k-1} \sqrt{\theta(x, \exp_x(s \exp_x^{-1}(y)))} \Delta_y u_{k-1}(x, \exp_x(s \exp_x^{-1}(y))) ds.$$

Les fonctions u_k ainsi définies sont \mathcal{C}^∞ sur $M \times M$.

Démonstration. Le résultat du lemme précédent se réécrit

$$\begin{aligned} L_y S_N &= G(x,y,t) \left(\sum_{k=-1}^{N-1} C_k(x,y) t^k + \Delta_y u_N(x,y) t^N \right) \\ C_{-1}(x,y) &= \frac{r}{2} \frac{\partial_r \theta(x,y)}{\theta(x,y)} u_0(x,y) + r \partial_r u_0(x,y) \\ C_k(x,y) &= \left(\frac{r}{2} \frac{\partial_r \theta(x,y)}{\theta(x,y)} + (k+1) \right) u_{k+1}(x,y) + \Delta_y u_k(x,y) + r \partial_r u_{k+1}(x,y) \quad \text{pour } 0 \leq k \leq N-1. \end{aligned}$$

On doit donc choisir les u_k de sorte que les plus petites puissances de t disparaissent, ie. $C_k = 0$ pour $-1 \leq k \leq N-1$, ce qui revient à résoudre les équations différentielles ci-dessus.

Pour C_{-1} , on obtient une équation différentielle du premier ordre

$$\partial_r u_0(x,y) = -\frac{1}{2} \frac{\partial_r \theta(x,y)}{\theta(x,y)} u_0(x,y)$$

dont la solution est

$$u_0(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\theta(x,y)}}$$

où l'on a fait un choix de constante égale à 1 (qui sera utile pour la suite).

Pour C_k , on obtient une équation différentielle du premier ordre avec second membre

$$\left(\frac{r}{2} \frac{\partial_r \theta(x, y)}{\theta(x, y)} + k \right) u_k(x, y) + \Delta_y u_{k-1}(x, y) + r \partial_r u_k(x, y) = 0$$

où l'on a décalé les indices de 1. L'équation homogène associée est

$$r \partial_r u_k(x, y) = - \left(\frac{r}{2} \frac{\partial_r \theta(x, y)}{\theta(x, y)} + k \right) u_k(x, y)$$

dont une solution est $u_k^{hom}(x, y) = \frac{1}{r^k \sqrt{\theta(x, y)}}$. On procède ensuite par variation de la constante : on écrit $u_k(x, y) = A(x, y) u_k^{hom}(x, y)$ donc

$$\left(\frac{r}{2} \frac{\partial_r \theta}{\theta} + k \right) u_k + r \partial_r u_k = \left(\frac{r}{2} \frac{\partial_r \theta}{\theta} + k \right) A u_k^{hom} + r A \partial_r u_k^{hom} + r u_k^{hom} \partial_r A = r u_k^{hom} \partial_r A = \frac{\partial_r A}{r^{k-1} \sqrt{\theta}} = -\Delta_y u_{k-1}$$

donc en intégrant

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \int_0^r -s^{k-1} \sqrt{\theta(x, \exp_x(\frac{s}{r} \exp_x^{-1}(y)))} \Delta_y u_{k-1}(x, \exp_x(\frac{s}{r} \exp_x^{-1}(y))) ds \\ &= -r^k \int_0^1 s^{k-1} \sqrt{\theta(x, \exp_x(s \exp_x^{-1}(y)))} \Delta_y u_{k-1}(x, \exp_x(s \exp_x^{-1}(y))) ds \\ u_k(x, y) &= A(x, y) u_k^{hom}(x, y) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\theta(x, y)}} \int_0^1 s^{k-1} \sqrt{\theta(x, \exp_x(s \exp_x^{-1}(y)))} \Delta_y u_{k-1}(x, \exp_x(s \exp_x^{-1}(y))) ds \end{aligned}$$

où on prend une constante d'intégration nulle de sorte que $u(x, x)$ soit bien défini. Le caractère \mathcal{C}^∞ des u_k se montre alors par récurrence en remarquant qu'on intègre une fonction \mathcal{C}^∞ sur un intervalle compact. \square

Théorème 4.5. Pour tout $x \in M$, $u_0(x, x) = 1$ et $u_1(x, x) = \frac{1}{6} K(x)$ où K est la courbure scalaire.

Démonstration. Par définition de θ , $\theta(x, x) = 1$ pour tout $x \in M$ donc $u_0(x, x) = 1$.

Pour $k = 1$, en utilisant la définition de u_1 et le fait que $\exp_x(0) = x$ donc $\exp_x(s \exp_x^{-1}(x)) = x$,

$$u_1(x, x) = -\frac{1}{\sqrt{\theta(x, x)}} \int_0^1 \sqrt{\theta(x, x)} \Delta_y u_0(x, x) ds = -\Delta_y u_0(x, x)$$

où $u_0 = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$, $\theta = \sqrt{\det(g)}$. D'après la Propriété 1.32, si y^1, \dots, y^n désignent les coordonnées normales basées en $x \in M$,

$$g_{ij}(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} \delta_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{k, l=1}^n R_{ikjl}(x) y^k y^l + O(\|y\|^3)$$

Autrement dit

$$g(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} I + A(y) \quad \text{avec} \quad A(y) = -\frac{1}{3} \left(\sum_{k, l=1}^n R_{ikjl}(x) y^k y^l \right)_{ij} + O(\|y\|^3)$$

donc en particulier $A(y) = O(\|y\|^2)$ (on identifie ici implicitement $y \in M$ et sa représentation en coordonnées locales $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$). On a alors

$$\text{Tr}(A(y)) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{3} \sum_{k, l=1}^n R_{ikil}(x) y^k y^l \right) + O(\|y\|^3) = -\frac{1}{3} \sum_{k, l=1}^n \text{Ric}_{kl}(x) y^k y^l + O(\|y\|^3)$$

$$\begin{aligned} \det(g(y)) &= \det(I + A(y)) = 1 + \text{Tr}(A(y)) + O(\|A(y)\|^2) = 1 - \frac{1}{3} \sum_{k,l=1}^n \text{Ric}_{kl}(x) y^k y^l + O(\|y\|^3) \\ \theta(x,y) &= \sqrt{\det(g(y))} = 1 - \frac{1}{6} \sum_{k,l=1}^n \text{Ric}_{kl}(x) y^k y^l + O(\|y\|^3) \\ u_0(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{\theta(x,y)}} = 1 + \frac{1}{12} \sum_{k,l=1}^n \text{Ric}_{kl}(x) y^k y^l + O(\|y\|^3) \\ \Delta_{y,\mathbb{R}^n} u_0(x,y) &= \frac{1}{12} \sum_{k,l=1}^n 2\delta_{kl} \text{Ric}_{kl}(x) + O(\|y\|) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \text{Ric}_{kk}(x) + O(\|y\|) = \frac{1}{6} K(x) + O(\|y\|) \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de l'unicité du développement limité. On utilise ici le Laplacien Euclidien classique. Avec $y = x$ on a donc $\Delta_{y,\mathbb{R}^n} u_0(x,x) = \frac{1}{6} K(x)$. Mais le Laplacien classique et le Laplacien sur M coïncident en x pour les coordonnées normales (au signe près) donc $u_1(x,x) = -\Delta_y u_0(x,x) = \Delta_{y,\mathbb{R}^n} u_0(x,x) = \frac{1}{6} K(x)$. \square

4.3 Existence et construction du noyau de la chaleur

Soit $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ une fonction \mathcal{C}^∞ qui vaut 1 sur $[0, \varepsilon/4]$ et 0 sur $[\varepsilon/2, +\infty[$. On pose $H_N : M \times M \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$H_N(x,y,t) = \begin{cases} S_N(x,y,t) \eta(d(x,y)) & \text{si } d(x,y) < \varepsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

autrement dit $H_N(x,y,t) = S_N(x,y,t) \tilde{\eta}(x,y)$ où $\tilde{\eta}(x,y) = \eta(d(x,y))$.

Lemme 4.6. *La fonction H_N vérifie les propriétés suivantes :*

- elle est \mathcal{C}^∞ sur $M \times M \times \mathbb{R}_+^*$
- pour tout $x \in M$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $T > 0$, $\int_M \partial_y^\alpha H_N(x,y,t) dx$ est borné sur $(y,t) \in M \times]0, T]$
- $L_y H_N(x,y,t) = O(t^{N-n/2})$ quand $t \rightarrow 0$ uniformément en x,y . Autrement dit, $t^{-N+n/2} L_y H_N(x,y,t)$ est borné sur $M \times M \times]0, T]$ quel que soit $T > 0$. Plus généralement, dans toute carte, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ et $\gamma \in \mathbb{N}$, $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^\gamma L_y H_N = O(t^{N-(n/2+|\alpha|+|\beta|+2\gamma)})$
- pour tout $x \in M$, $H_N(x, \cdot, t) \rightarrow \delta_x$ quand $t \rightarrow 0$ au sens distributionnel et plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial_x^\alpha H_N(x, \cdot, t) \rightarrow \partial^\alpha \delta_x$
- pour tout $y \in M$, $H_N(\cdot, y, t) \rightarrow \delta_y$ quand $t \rightarrow 0$ au sens distributionnel et plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial_y^\alpha H_N(\cdot, y, t) \rightarrow \partial^\alpha \delta_y$.

Démonstration. H_N est \mathcal{C}^∞ sur $M \times M \times \mathbb{R}_+^*$ car S_N et $\tilde{\eta}$ le sont.

Pour le deuxième point, pour tout $(y,t) \in M \times]0, T]$,

$$\begin{aligned} \left| \int_M H_N(x,y,t) dx \right| &\leq \left| \int_{M \setminus B_M(y,\varepsilon/4)} H_N(x,y,t) dx \right| + \left| \int_{B_M(y,\varepsilon/4)} H_N(x,y,t) dx \right| \\ \left| \int_{M \setminus B_M(y,\varepsilon/4)} H_N(x,y,t) dx \right| &= \left| \int_{M \setminus B_M(y,\varepsilon/4)} \tilde{\eta}(x,y) \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{d(x,y)^2}{4t}} \left(\sum_{k=0}^N t^k u_k(x,y) \right) dx \right| \\ &\leq \int_{M \setminus B_M(y,\varepsilon/4)} |\tilde{\eta}(x,y)| \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{d(x,y)^2}{4t}} \left(\sum_{k=0}^N t^k |u_k(x,y)| \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \underbrace{\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{(\varepsilon/4)^2}{4t}}}_{\text{borné pour } t \in]0, T]} \int_M \underbrace{|\tilde{\eta}(x, y)| \left(\sum_{k=0}^N t^k |u_k(x, y)| \right)}_{\text{borné pour } (x, y, t) \in M \times M \times]0, T]} dx = O(1) \\
\left| \int_{B_M(y, \varepsilon/4)} H_N(x, y, t) dx \right| &= \left| \int_{B_M(y, \varepsilon/4)} S_N(x, y, t) dx \right| \\
&= \left| \int_{B(0, \varepsilon/4)} S_N(\exp_y(x), y, t) \sqrt{\det(g(x))} dx \right| \\
&= \left| \int_{B(0, \varepsilon/4)} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \left(\sum_{k=0}^N t^k u_k(\exp_y(x), y) \right) \sqrt{\det(g(x))} dx \right| \\
&\leq \int_{B(0, \varepsilon/4)} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \underbrace{\left| \sum_{k=0}^N t^k u_k(\exp_y(x), y) \right| \sqrt{\det(g(x))}}_{\text{borné sur } \{(x, y, t) \in M \times M \times]0, T] \mid d(x, y) \leq \varepsilon/4\}} dx \\
&\leq O(1) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} dx = O(1)
\end{aligned}$$

donc la deuxième propriété est vraie pour $\alpha = 0$. Pour α quelconque, on a toujours $\int_{M \setminus B_M(y, \varepsilon/4)} H_N(x, y, t) dx$ borné car de la forme $t^{-k} e^{-\frac{\varepsilon}{t}} f(x, y, t)$ avec f bornée. De plus,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_M(y, \varepsilon/4)} \partial_y^\alpha H_N(x, y, t) dx \right| &= \left| \partial_y^\alpha \int_{B_M(y, \varepsilon/4)} H_N(x, y, t) dx \right| \\
&= \left| \partial_y^\alpha \int_{B(0, \varepsilon/4)} S_N(\exp_y(x), y, t) \sqrt{\det(g(x))} dx \right| \\
&= \left| \partial_y^\alpha \int_{B(0, \varepsilon/4)} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \left(\sum_{k=0}^N t^k u_k(\exp_y(x), y) \right) \sqrt{\det(g(x))} dx \right| \\
&= \left| \int_{B(0, \varepsilon/4)} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \partial_y^\alpha \left(\sum_{k=0}^N t^k u_k(\exp_y(x), y) \right) \sqrt{\det(g(x))} dx \right| \\
&\leq \int_{B(0, \varepsilon/4)} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \left| \partial_y^\alpha \left(\sum_{k=0}^N t^k u_k(\exp_y(x), y) \right) \right| \sqrt{\det(g(x))} dx = O(1)
\end{aligned}$$

comme précédemment donc la deuxième propriété est démontrée.

Montrons que $t^{-N+n/2} L_y H_N(x, y, t)$ est borné au voisinage de $t = 0$. Par compacité de M , il suffit de montrer qu'elle est localement bornée, c'est-à-dire que pour tout $(x_0, y_0) \in M \times M$, elle est bornée sur un voisinage de $(x_0, y_0, 0)$. Pour cela on distingue les cas.

Si $d(x_0, y_0) \geq \varepsilon$, puisque H_N est identiquement nulle sur $((M \times M) \setminus U_{\varepsilon/2}) \times \mathbb{R}_+^*$, $t^{-N+n/2} L_y H_N(x, y, t)$ est identiquement nulle sur un voisinage de $(x_0, y_0, 0)$ donc se prolonge continûment par 0.

Si $d(x_0, y_0) \leq \varepsilon/8$, puisque H_N est égale à S_N sur un voisinage V de $(x_0, y_0, 0)$, pour tout (x, y, t) dans ce voisinage,

$$L_y H_N(x, y, t) = L_y S_N(x, y, t) = G(x, y, t) t^N \Delta_y u_N(x, y) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{d(x, y)^2}{4t}} \Delta_y u_N(x, y) t^{N-n/2}$$

donc $t^{-N+n/2} L_y H_N(x, y, t) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{d(x, y)^2}{4t}} \Delta_y u_N(x, y)$ qui est une fonction bornée sur un voisinage de $(x_0, y_0, 0)$.

Si $\varepsilon/8 \leq d(x_0, y_0) \leq \varepsilon$, on a

$$L_y H_N(x, y, t) = L_y S_N(x, y, t) \tilde{\eta}(x, y) + S_N(x, y, t) \Delta_y \tilde{\eta}(x, y) - 2 \langle \nabla_y S_N(x, y, t), \nabla_y \tilde{\eta}(x, y) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{\eta}(x, y)G(x, y, t)t^N \Delta_y u_N + \Delta_y \tilde{\eta}(x, y)G(x, y, t) \left(\sum_{k=0}^N t^k u_k(x, y) \right) + 2\eta'(d(x, y)) \frac{d(x, y)}{2t} G(x, y, t) \\
&= e^{-\frac{d(x, y)^2}{4t}} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left(\tilde{\eta}(x, y)t^N \Delta_y u_N + \Delta_y \tilde{\eta}(x, y) \left(\sum_{k=0}^N t^k u_k(x, y) \right) + 2\eta'(d(x, y)) \frac{d(x, y)}{2t} \right)
\end{aligned}$$

$$t^{-N+n/2} L_y H_N(x, y, t) = e^{-\frac{d(x, y)^2}{4t}} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} t^N} \left(\tilde{\eta}(x, y)t^N \Delta_y u_N + \Delta_y \tilde{\eta}(x, y) \left(\sum_{k=0}^N t^k u_k(x, y) \right) + 2\eta'(d(x, y)) \frac{d(x, y)}{2t} \right)$$

et sur un voisinage de $(x_0, y_0, 0)$, $d(x, y)$ reste supérieur à une constante $c > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e^{-\frac{c}{t}} = o(t^k)$ donc il y a convergence uniforme vers 0 quand $t \rightarrow 0$ sur un voisinage de $(x_0, y_0, 0)$ donc $t^{-N+n/2} L_y H_N$ est bornée.

On remarque qu'en dérivant par rapport à x ou y , on ajoute un facteur $\frac{1}{t}$ et en dérivant par rapport à t , on rajoute un facteur $\frac{1}{t^2}$ donc le comportement pour $d(x_0, y_0) \geq \varepsilon/8$ est le même et pour $d(x_0, y_0) \leq \varepsilon/8$, l'opérateur $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^\gamma$ rajoute un facteur $t^{|\alpha|+|\beta|+2\gamma}$ donc $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^\gamma L_y H_N = O(t^{N-(n/2+|\alpha|+|\beta|+2\gamma)})$.

Enfin, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $x \in M$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
\int_M H_N(x, y, t) f(y) dy &= \int_{B_M(x, \varepsilon/4)} H_N(x, y, t) f(y) dy + \int_{M \setminus B_M(x, \varepsilon/4)} H_N(x, y, t) f(y) dy \\
\int_{M \setminus B_M(x, \varepsilon/4)} H_N(x, y, t) f(y) dy &= \int_{B_M(x, \varepsilon/2) \setminus B_M(x, \varepsilon/4)} H_N(x, y, t) f(y) dy \quad \text{car } H_N(x, y, t) = 0 \text{ si } y \notin B_M(x, \varepsilon/2) \\
&= \int_{B_M(x, \varepsilon/2) \setminus B_M(x, \varepsilon/4)} e^{-\frac{d(x, y)^2}{4t}} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left(\sum_{k=0}^N t^k u_k(x, y) \right) \tilde{\eta}(x, y) f(y) dy \\
&\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \text{car } \forall k \in \mathbb{Z}, \quad t^k e^{-\frac{d(x, y)^2}{4t}} \leq t^k e^{-\frac{\varepsilon/4}{4t}} = o(1) \\
\int_{B_M(x, \varepsilon/4)} H_N(x, y, t) f(y) dy &= \int_{B_M(x, \varepsilon/4)} S_N(x, y, t) f(y) dy \\
&= \int_{B(0, \varepsilon/4)} S_N(x, \exp_x(y), t) f(\exp_x(y)) \sqrt{\det(g(y))} dy \\
&= \int_{B(0, \varepsilon/4)} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}} \left(\sum_{k=0}^N t^k u_k(x, \exp_x(y)) \right) f(\exp_x(y)) \sqrt{\det(g(y))} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}} \left(\sum_{k=0}^N t^k u_k(x, \exp_x(y)) \right) f(\exp_x(y)) \mathbb{1}_{B(0, \varepsilon/4)}(y) \sqrt{\det(g(y))} dy \\
&= \sum_{k=0}^N t^k \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}} u_k(x, \exp_x(y)) f(\exp_x(y)) \mathbb{1}_{B(0, \varepsilon/4)}(y) \sqrt{\det(g(y))} dy \\
&\xrightarrow{t \rightarrow 0} u_0(x, \exp_x(0)) f(\exp_x(0)) \mathbb{1}_{B(0, \varepsilon/4)}(0) \sqrt{\det(g(0))} = u_0(x, x) f(x) = f(x)
\end{aligned}$$

car pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et continue en 0,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}} \varphi(y) dy = \varphi(0).$$

Plus généralement, par compacité, on peut dériver sous l'intégrale et obtenir

$$\int_{M \setminus B_M(x, \varepsilon/4)} \partial_x^\alpha H_N(x, y, t) f(y) dy \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad (\text{en raison du facteur } e^{-\frac{c}{t}})$$

$$\begin{aligned}
\int_{B_M(x,\varepsilon/4)} \partial_x^\alpha H_N(x,y,t) f(y) dy &= \partial_x^\alpha \int_{B_M(x,\varepsilon/4)} H_N(x,y,t) f(y) dy \\
&= \partial_x^\alpha \sum_{k=0}^N t^k \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}} u_k(x, \exp_x(y)) f(\exp_x(y)) \mathbb{1}_{B(0,\varepsilon/4)}(y) \sqrt{\det(g(y))} dy \\
&= \sum_{k=0}^N t^k \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}} \partial_x^\alpha (u_k(x, \exp_x(y)) f(\exp_x(y))) \mathbb{1}_{B(0,\varepsilon/4)}(y) \sqrt{\det(g(y))} dy \\
&\xrightarrow{t \rightarrow 0} \partial^\alpha u_0(x, \exp_x(0)) f(\exp_x(0)) \mathbb{1}_{B(0,\varepsilon/4)}(0) \sqrt{\det(g(0))} = \partial^\alpha f(x)
\end{aligned}$$

donc la quatrième propriété est démontrée.

Le même calcul mené en échangeant les rôles de x et y montre la cinquième propriété. \square

Remarque 4.7. Si P est un espace topologique métrique quelconque et $\varphi : \mathbb{R}^n \times P \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\varphi(\cdot, p)$ est intégrable pour tout $p \in P$ et φ est continue sur $V \times P$ où V est un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n , alors pour tout $p \in P$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}} \varphi(y, p) dy = \varphi(0, p)$$

et la limite est localement uniforme en $p \in P$. Par conséquent, pour tout $f : M \times P \rightarrow \mathbb{R}$ continue,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_M H_N(x, y, t) f(y, p) dy = f(x, p)$$

et la limite est localement uniforme en $(x, p) \in M \times P$, donc uniforme si P est compact. Il en est de même en dérivant H_N ou en échangeant x et y .

Pour $F, G : M \times M \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ continues, on pose

$$(F * G)(x, y, t) = \int_0^t \int_M F(x, z, s) G(z, y, t-s) dz ds$$

quand cette intégrale est bien définie. L'opération $*$ est bilinéaire, associative mais pas commutative. On définit $F^{*k} = F * \dots * F$ k fois.

Nous dirons désormais d'une fonction $F : M \times M \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ qu'elle est C^l si elle est C^l sur $M \times M \times \mathbb{R}_+^*$ et que ses dérivées se prolongent continûment à $M \times M \times \mathbb{R}_+$.

Lemme 4.8. Pour tout $N > n/2$, la fonction $Q_N = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k (L_y H_N)^{*k}$ est bien définie sur $M \times M \times \mathbb{R}_+$, la somme convergeant uniformément sur $M \times M \times [0, T]$ pour tout $T > 0$. De plus, pour tout $T > 0$, $Q_N(x, y, t) = O(t^{N-n/2})$ quand $t \rightarrow 0$ uniformément en x, y . Autrement dit, $t^{-N+n/2} Q_N(x, y, t)$ est borné sur $M \times M \times [0, T]$. Enfin, pour tout $N > n/2 + 2l$, Q_N est C^l .

Démonstration. On fixe $T > 0$. D'après le Lemme 4.6, il existe une constante A telle que pour tout $(x, y, t) \in M \times M \times [0, T]$, $|L_y H_N(x, y, t)| \leq A t^{N-n/2}$. On pose $V = \text{vol}(M) = \int_M 1$. Montrons alors par récurrence sur k que pour tout $k \geq 1$, $x, y \in M, t \in [0, T]$,

$$|(L_y H_N)^{*k}(x, y, t)| \leq \frac{A^k T^{(N-n/2)(k-1)} V^{k-1} t^{N-n/2+k-1}}{(N-n/2+1) \dots (N-n/2+k-1)}$$

C'est vrai pour $k = 1$ et si c'est vrai pour k ,

$$|(L_y H_N)^{*(k+1)}(x, y, t)| = |(L_y H_N)^{*k} * (L_y H_N)(x, y, t)| = \left| \int_0^t \int_M (L_y H_N)^{*k}(x, z, s) L_y H_N(z, y, t-s) dz ds \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \int_M |(L_y H_N)^{*k}(x, z, s) L_y H_N(z, y, t-s)| dz ds \\
&\leq \int_0^t \int_M \frac{A^k T^{(N-n/2)(k-1)} V^{k-1} s^{N-n/2+k-1}}{(N-n/2+1)\dots(N-n/2+k-1)} A(t-s)^{N-n/2} dz ds \\
&= \frac{A^{k+1} T^{(N-n/2)(k-1)} V^{k-1}}{(N-n/2+1)\dots(N-n/2+k-1)} \int_0^t \int_M s^{N-n/2+k-1} (t-s)^{N-n/2} dz ds \\
&\leq \frac{A^{k+1} T^{(N-n/2)(k-1)} V^{k-1}}{(N-n/2+1)\dots(N-n/2+k-1)} \int_0^t \int_M s^{N-n/2+k-1} T^{N-n/2} dz ds \\
&= \frac{A^{k+1} T^{(N-n/2)(k-1)} V^{k-1}}{(N-n/2+1)\dots(N-n/2+k-1)} V T^{N-n/2} \frac{t^{N-n/2+k}}{N-n/2+k} \\
&= \frac{A^{k+1} T^{(N-n/2)k} V^k t^{N-n/2+k}}{(N-n/2+1)\dots(N-n/2+k)}
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Puisque le numérateur croît comme a^k et le dénominateur croît comme $k!$, la somme converge donc $Q_N = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k (L_y H_N)^{*k}$ converge normalement sur $M \times M \times [0, T]$. De plus, la somme des $t^{-N+n/2} (L_y H_N)^{*k}(x, y, t)$ converge également normalement donc est bornée donc $Q_N(x, y, t) = O(t^{N-n/2})$.

Pour le caractère C^l , on peut dériver sous l'intégrale $(L_y H_N)^{*k}$ ce qui revient à remplacer dans la convolution certains $L_y H_N$ par leur dérivée (la présence de t comme borne de l'intégrale ne pose pas problème par la formule de Leibniz : $\partial_t \int_0^t f(x, t) dx = f(t, t) + \int_0^t \partial_t f(x, t) dx$). En vertu du Lemme 4.6, on obtient des majorations similaires à celles obtenues précédemment donc Q_N est C^l . \square

Lemme 4.9. *Pour tout $l \geq 0$, $N > n/2$ et $F : M \times M \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui est C^l , $F * H_N$ est C^l et vérifie $L_y(F * H_N) = F * (L_y H_N) + F$.*

Démonstration. Par définition,

$$F * H_N(x, y, t) = \int_0^t \int_M F(x, z, s) H_N(z, y, t-s) dz ds.$$

Pour tout $x, y \in M$ et $t, s \in \mathbb{R}$ où $0 \leq s < t$, on pose $\varphi(x, y, t, s) = \int_M F(x, z, s) H_N(z, y, t-s) dz$ de sorte que $F * H_N(x, y, t) = \int_0^t \varphi(x, y, t, s) ds$. Alors φ peut être étendue continûment à $s = 0$ en posant $\varphi(x, y, t, 0) = F(x, y, t)$. En effet,

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y, t, s) &= \int_M F(x, z, s) H_N(z, y, t-s) dz \\
&= \int_M (F(x, z, s) - F(x, z, t)) H_N(z, y, t-s) dz + \int_M F(x, z, t) H_N(z, y, t-s) dz.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 4.6 et la remarque qui suit, $\int_M F(x, z, t) H_N(z, y, t-s) dz \rightarrow F(x, y, t)$ quand $s \rightarrow t$ uniformément en x, y, t et

$$\begin{aligned}
\left| \int_M (F(x, z, s) - F(x, z, t)) H_N(z, y, t-s) dz \right| &\leq \left(\sup_{z \in M} |F(x, z, s) - F(x, z, t)| \right) \int_M |H_N(z, y, t-s)| dz \\
\sup_{z \in M} |F(x, z, s) - F(x, z, t)| &\leq \sup_{(z, x_0) \in M \times M} |F(x_0, z, s) - F(x_0, z, t)| \xrightarrow{s \rightarrow t} 0 \\
\int_M |H_N(z, y, t-s)| dz &= O(1)
\end{aligned}$$

car $F(\cdot, \cdot, s)$ converge localement uniformément donc uniformément par compacité de $M \times M$, et $\int_M |H_N(z, y, t-s)| dz$ est borné d'après le Lemme 4.6 donc le prolongement rend bien la fonction φ continue donc $F * H_N$ est

bien définie et continue. De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, toujours d'après le Lemme 4.6, $\int_M F(x, z, t) \partial_y^\alpha H_N(z, y, t - s) dz \rightarrow \partial_y^\alpha F(x, y, t)$ quand $s \rightarrow t$ uniformément en x, y, t et $\int_M |\partial_y^\alpha H_N(z, y, t - s)| dz$ est borné donc $\int_M (F(x, z, s) - F(x, z, t)) \partial_y^\alpha H_N(z, y, t - s) dz \rightarrow 0$ donc φ est C^l et ses dérivées $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^\gamma \varphi(x, y, t, s)$ se prolongent continûment en $s = t$ par $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^\gamma \varphi(x, y, t, t) = \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^\gamma F(x, y, t)$. Par conséquent, $F * H_N$ est C^l .

De plus,

$$\begin{aligned}
L_y(F * H_N)(x, y, t) &= (\Delta_y + \partial_t) \int_0^t \varphi(x, y, t, s) ds \\
&= \int_0^t \Delta_y \varphi(x, y, t, s) ds + \varphi(x, y, t, t) + \int_0^t \partial_t \varphi(x, y, t, s) ds \\
&= F(x, y, t) + \int_0^t L_y \varphi(x, y, t, s) ds \\
&= F(x, y, t) + \int_0^t L_y \int_M F(x, z, s) H_N(z, y, t - s) dz ds \\
&= F(x, y, t) + \int_0^t \int_M F(x, z, s) L_y H_N(z, y, t - s) dz ds \\
&= F(x, y, t) + (F * H_N)(x, y, t)
\end{aligned}$$

donc $L_y(F * H_N) = F * (L_y H_N) + F$. □

Théorème 4.10. *Pour tout $N > n/2 + l$, la fonction $p = H_N + Q_N * H_N$ est un noyau de la chaleur qui est C^l .*

Démonstration. Le caractère C^l de p provient de celui de H_N et $Q_N * H_N$.

De plus, d'après le lemme précédent,

$$\begin{aligned}
Q_N * L_y H_N &= \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k (L_y H_N)^{*k} \right) * L_y H_N = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k (L_y H_N)^{*k+1} = -Q_N - L_y H_N \\
L_y p &= L_y H_N + L_y (Q_N * H_N) = L_y H_N + Q_N * L_y H_N + Q_N = L_y H_N - Q_N - L_y H_N + Q_N = 0.
\end{aligned}$$

Enfin, soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. D'après le Lemme 4.8, il existe $C > 0$ tel que $|Q_N(x, y, t)| \leq Ct^{N-n/2}$ pour tout $(x, y, t) \in M \times M \times [0, 1]$ donc

$$\begin{aligned}
\int_M p(x, y, t) f(y) dy &= \int_M H_N(x, y, t) f(y) dy + \int_M Q_N * H_N(x, y, t) f(y) dy \\
\int_M H_N(x, y, t) f(y) dy &\xrightarrow{t \rightarrow 0} f(x) \quad \text{d'après le Lemme 4.6} \\
\left| \int_M Q_N * H_N(x, y, t) f(y) dy \right| &\leq \int_M \int_0^t \int_M |Q_N(x, z, s)| |H_N(z, y, t - s)| |f(y)| dz ds dy \\
&\leq \int_M \int_0^t \int_M Cs^{N-n/2} |H_N(z, y, t - s)| |f(y)| dz ds dy \\
&\leq Ct^{N-n/2} (\sup_M |f|) \int_M \int_0^t \int_M |H_N(z, y, t - s)| dz ds dy \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0
\end{aligned}$$

car d'après le Lemme 4.6, $\int_M |H_N(z, y, t - s)| dz$ est borné par une constante indépendante de y, s, t . □

4.4 Conséquences

Voici quelques conséquences immédiates de la construction précédente.

Corollaire 4.11. *Pour toute variété Riemannienne compacte M , il existe un unique noyau de la chaleur, qui est de plus \mathcal{C}^∞ .*

Démonstration. Par unicité du noyau de la chaleur (Théorème 4.2), le noyau p construit précédemment ne dépend pas de N et il est C^l pour tout $N > n/2 + l$ donc il est \mathcal{C}^∞ . \square

Corollaire 4.12. *Pour tout $x \in M$, pour tout $N \geq 0$,*

$$p(x, x, t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} (u_0(x, x) + \dots + u_{N-1}(x, x)t^{N-1} + O(t^N))$$

uniformément en x .

Démonstration. D'après le Lemme 4.8, il existe $C > 0$ tel que $|Q_N(x, y, t)| \leq Ct^{N-n/2}$ pour tout $(x, y, t) \in M \times M \times [0, 1]$ donc

$$\begin{aligned} p(x, x, t) &= H_N(x, x, t) + Q_N * H_N(x, x, t) \\ H_N(x, x, t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left(\sum_{k=0}^N u_k(x, x)t^k \right) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} u_k(x, x)t^k + O(t^N) \right) \\ |Q_N * H_N(x, x, t)| &\leq \int_0^t \int_M |Q_N(x, z, s)H_N(z, x, t-s)| dz ds \leq \int_0^t \int_M Cs^{N-n/2} |H_N(z, y, t-s)| dz ds \\ &\leq Ct^{N-n/2} \int_0^t \int_M |H_N(z, y, t-s)| dz ds = O(t^{N-n/2}) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} O(t^N) \end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

Corollaire 4.13. *Si M est une variété Riemannienne compacte et $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ sont les valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami associé,*

$$\sum_{k \geq 0} e^{-t\lambda_k} \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} (\text{Vol}(M) + \frac{t}{6} \int_M K_x dx + O(t^2)).$$

Démonstration. D'après le corollaire précédent et le Théorème 4.5, $p(x, x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} (1 + \frac{1}{6}K(x) + O(t^2))$ donc en intégrant selon x , d'après le Théorème 4.2,

$$\sum_{k \geq 0} e^{-t\lambda_k} = \int_M p(x, x, t) dx \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} (\text{Vol}(M) + \frac{t}{6} \int_M K(x) dx + O(t^2)).$$

\square

Références

- [1] Marcel Berger, Paul Gauduchon, and Demond Mazet. *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*. Springer-Verlag, 1971.
- [2] Isaac Chavel. *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. Orlando, San Diego CA, New York NY Academic Press, 1984.
- [3] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Springer, 2004.
- [4] Alexander Grigor'Yan. *Heat Kernel and Analysis on Manifold*. AMS/IP, 2009.
- [5] Olivier Lablée. *Spectral Theory in Riemannian Geometry*. European Mathematical Society, 2015.
- [6] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP Sciences, 2015.
- [7] Serge Lang. *Differential and Riemannian manifolds*. Springer-Verlag New York, 1995.
- [8] Steven Rosenberg. *The Laplacian on a Riemannian Manifold : an introduction to analysis on manifolds*. Cambridge University Press, 1997.
- [9] Walter Rudin. *Functionnal Analysis*. McGraw-Hill Science, 1991.
- [10] Hajime Urakawa. *Spectral Geometry of the Laplacian*. World Scientific, 2017.