

# Le problème de Schoenflies

Naïl Bouberbachene et Guillaume de Carpentier

## 1 Introduction

En 1906, Arthur Schoenflies montre qu'un plongement de la sphère  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{S}^2$  sépare  $\mathbb{S}^2$  en deux composantes connexes dont l'adhérence de chacune est homéomorphe au disque  $\mathbb{D}^2$ . C'est en cherchant une extension aux dimensions supérieures que James Waddell Alexander II finit par construire en 1923 un contre-exemple en dimension 3 : la sphère cornue d'Alexander. Le plongement  $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$  utilisé n'étant pas suffisamment lisse, l'image de  $\mathbb{S}^2$  scinde  $\mathbb{S}^3$  en deux composantes connexes dont l'une n'est même pas simplement connexe. On peut cependant espérer une généralisation en ajoutant une hypothèse sur le plongement.

Il faudra attendre 1960 pour que Morton Brown [1] et Barry Mazur [2] fournissent chacun une preuve différente d'une généralisation du théorème de Schoenflies nécessitant une hypothèse restrictive. Commençons par définir une variété topologique à bord.

**Définition 1.1.** Un espace topologique  $M$  séparé et à base dénombrable d'ouverts est une variété topologique à bord de dimension  $n$  si pour tout  $x \in M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $M$ , un ouvert  $V$  du demi espace  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$  et un homéomorphisme  $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$ . On dit alors que  $(U, \varphi)$  est une carte et on définit les mêmes notions d'atlas et de changements de carte que pour une variété topologique. De plus, on notera  $\partial M$  le bord de  $M$  défini comme l'ensemble des points  $x \in M$  tels qu'il existe une carte  $\varphi$  vérifiant  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ . On notera également  $\text{Int}(M) = M \setminus \partial M$  l'intérieur de  $M$ .

Nous énonçons maintenant la version du théorème de Schoenflies démontrée par Mazur et Brown :

**Théorème 1.2.** Soit  $\phi : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$  un plongement et  $A$  l'adhérence d'une composante connexe de  $\mathbb{S}^n \setminus \phi(\mathbb{S}^{n-1})$ . Si  $A$  est une variété topologique à bord, alors  $A$  est homéomorphe au disque  $\mathbb{D}^n$ .

Nous nous proposons de présenter la preuve de Morton Brown. Celle-ci, ainsi que celle de Mazur, font intervenir deux résultats importants et généraux que nous démontrons dans les sections 2 et 3. Le premier est un théorème de Jordan qui assure que sous nos hypothèses, l'espace  $\mathbb{S}^n \setminus \phi(\mathbb{S}^{n-1})$  possède deux composantes connexes. Le deuxième est l'existence d'un collier le long du bord d'une variété topologique à bord. C'est ce résultat qui permet d'exploiter l'hypothèse restrictive dans le théorème 1.2. Dans la section 4, nous nous intéressons aux sous-ensembles cellulaires des variétés topologiques, qui ont la particularité de pouvoir être contractés sans changer la classe d'homéomorphisme de l'espace de départ. Puis dans la section 5, nous donnons une condition suffisante pour qu'un sous-ensemble soit cellulaire. Enfin, nous démontrons le théorème 1.2 dans la section 6. Pour cela, on contracte une partie cellulaire de la variété topologique à bord  $A$ , de manière à obtenir un disque qui est homéomorphe à  $A$  par cellularité.

## 2 Le théorème de Jordan

Nous utiliserons à plusieurs reprises un théorème de Jordan :

**Théorème 2.1.** Si  $\phi$  est un plongement  $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ , alors  $\mathbb{S}^n \setminus \phi(\mathbb{S}^{n-1})$  possède deux composantes connexes non vides.

Pour le démontrer, on peut montrer que son groupe d'homologie singulière  $H_0(\mathbb{S}^n \setminus \phi(\mathbb{S}^{n-1}), \mathbb{Z})$  de degré 0 est celui d'un espace à deux composantes connexes en passant par des méthodes homologiques. Nous l'admettrons ici et nous renvoyons au livre *Algebraic Topology* [3] d'Allen Hatcher pour une démonstration détaillée.

### 3 Existence d'un collier

L'hypothèse du théorème 1.2, que  $A$  est une variété topologique à bord, sera utilisée à travers l'existence d'un collier que nous établissons ici.

**Théorème 3.1.** Soit  $M$  une variété topologique compacte à bord de dimension  $n$ . Alors il existe un plongement  $f : \partial M \times [0, 1] \hookrightarrow M$  tel que  $f(x, 0) = x$  pour tout  $x \in \partial M$ .

*Démonstration.* Posons  $N := (\partial M \times ]-\infty, 0]) \cup M / \sim$  et, pour tout  $s < 0$ ,  $N_s := (\partial M \times [s, 0]) \cup M / \sim$ , où  $(x, 0) \sim x$  pour tout  $x \in \partial M$ . Nous allons construire un homéomorphisme  $\eta : M \xrightarrow{\sim} N_{-1}$  tel que  $\eta(x) = (x, -1)$  pour tout  $x \in \partial M$ . Il suffira alors de poser  $f(x, t) = \eta^{-1}(x, t - 1)$  pour conclure.

Par définition d'une variété topologique à bord, tout point de  $\partial M$  est inclus dans un voisinage  $U$  de  $M$  homéomorphe à un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ . Quitte à se restreindre à l'image réciproque d'un cube de la forme  $]0, 1[^{n-1} \times [0, 1]$ , on peut supposer que  $V$  est de cette forme et même que  $V = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$  (car  $]0, 1[^{n-1} \times [0, 1] \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ ). De plus, par compacité de  $\partial M$  on peut en extraire un recouvrement fini de  $\partial M$  par des ouverts de  $M$  d'une telle forme. On obtient ainsi des ouverts  $V_1, \dots, V_k$  de  $M$  munis d'homéomorphismes  $f_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ . On pose  $U_i = \partial M \cap V_i$  leur intersection avec le bord  $\partial M$ . Par construction on a donc  $\partial M = \bigcup_{i=1}^k U_i$ . De plus on pose  $\phi_i : \begin{cases} U_i \times [0, 1] & \rightarrow M \subseteq N \\ (x, t) & \mapsto f_i^{-1}(f_i(x) + (0, t)) \end{cases}$ .

Les  $\phi_i$  sont des plongements et pour tout  $x \in U_i$ , on a  $\phi_i(x, 0) = x$ . Pour chaque  $1 \leq i \leq k$ , on prolonge  $\phi_i$  par l'inclusion naturelle  $U_i \times ]-\infty, 0] \hookrightarrow N$  en un plongement  $\psi_i : U_i \times ]-\infty, 1] \rightarrow N$ . Prenons également  $(\rho_i)_{1 \leq i \leq k}$  une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement  $(U_i)_{1 \leq i \leq k}$  de  $\partial M$ . Ainsi on dispose d'applications continues  $\rho_i : \partial M \rightarrow [0, 1]$  telles que  $\rho_i$  est à support dans  $U_i$  pour chaque  $1 \leq i \leq k$  et vérifiant  $\sum_{i=1}^k \rho_i(x) = 1$  pour tout  $x \in \partial M$ . Enfin pour  $a \in \mathbb{R}_+$ , on définit l'application  $\zeta_a : ]-\infty, 1] \rightarrow ]-\infty, 1]$  par :

$$\zeta_a(t) = \begin{cases} t - a & \text{si } t \leq 0 \\ (1 + 2a)t - a & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ t & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

C'est un homéomorphisme de  $] - \infty, 1]$  vers  $] - \infty, 1]$  car c'est une bijection croissante affine par morceaux. On a notamment  $\zeta_a(0) = -a$ .

On en déduit des homéomorphismes  $\hat{\eta}_i : U_i \times ]-\infty, 1] \rightarrow U_i \times ]-\infty, 1]$  en posant  $\hat{\eta}_i(x, t) = (x, \zeta_{\rho_i(x)}(t))$  (car  $\zeta$  dépend aussi continuellement de  $a$ ). On étend enfin  $\psi_i \circ \hat{\eta}_i \circ \psi_i^{-1}$  en un homéomorphisme  $\eta_i : N \rightarrow N$  par l'identité, et on pose  $\eta = \eta_1 \circ \dots \circ \eta_k : N \rightarrow N$  la composition. On remarque que pour tout  $(x, t) \in \partial M \times ]-\infty, 0] \subseteq N$ , on a  $\eta_i(x, t) = (x, t - \rho_i(x))$  et donc  $\eta(x, t) = (x, t - \sum_{i=1}^k \rho_i(x)) = (x, t - 1)$ . Ceci montre que  $\eta(x, 0) = (x, -1)$  pour  $x \in \partial M$  comme souhaité, mais également que  $\eta(\partial M \times ]-\infty, 0]) = \partial M \times ]-\infty, -1[$ . Or  $\eta$  est un homéomorphisme de  $N$  vers  $N$ , donc cela implique  $\eta(M) = N_{-1}$ . Ceci achève la construction de  $\eta$  et donc celle de  $f$ .  $\square$

Ce résultat nous permettra d'étendre le plongement à un plongement de  $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$  dans  $\mathbb{S}^n$  de manière à pouvoir manipuler la composante connexe de  $\mathbb{S}^n \setminus \phi(\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1])$  contenant  $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$  en connaissant la forme d'un voisinage de son bord et non simplement celle de son bord.

## 4 Sous-ensembles cellulaires

Nous définissons ici les sous-ensembles cellulaires d'une variété topologique à bord, ainsi qu'une propriété qu'ils ont qui justifiera leur utilité dans la preuve du théorème.

**Définition 4.1.** Un sous-ensemble  $X$  d'une variété topologique à bord de dimension  $n$  est cellulaire si pour tout ouvert  $U$  contenant  $X$ , il existe des ensembles  $(C_i)_{i \geq 1}$  tels que :

$$X = \bigcap_{i \geq 1} C_i, C_i \subseteq U, C_i \cong \mathbb{D}^n \text{ et } C_{i+1} \subseteq \text{Int}(C_i) \text{ (} i \geq 1 \text{)}$$

De tels ensembles possèdent la propriété 4.4 intéressante que leur contraction est une variété topologique à bord homéomorphe à celle de départ. Commençons par définir la contraction de sous-ensembles.

**Définition 4.2.** Si  $X_1, \dots, X_s$  sont des sous-ensembles disjoints et fermés d'une variété topologique compacte à bord  $M$ , la contraction de  $X_1, \dots, X_s$  désigne le quotient  $M/\sim$ , où  $z \sim z'$  si et seulement si il existe  $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$  tel que  $z, z' \in X_i$ . La projection  $\pi : M \rightarrow M/\sim$  est l'application de contraction de  $X_1, \dots, X_s$ .

Pour montrer la proposition 4.4 ci-dessous, nous aurons besoin de pouvoir déformer le disque en laissant certaines parties inchangées. Notons  $C_{a,b} = \{x \in \mathbb{D}^n \mid a < |x| < b\}$  et  $B(0, r)$  la boule ouverte de centre 0 de rayon  $r$  dans  $\mathbb{D}^n$ .

**Lemme 4.3.** Soit  $r, \delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$  vérifiant  $\varepsilon_1 \leq \delta \leq r \leq \varepsilon_2 \leq 1$ . Il existe un homéomorphisme  $h : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  vérifiant  $h|_{\mathbb{D}^n \setminus C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} = Id$  et  $h(B(0, r)) \subseteq B(0, \delta)$ .

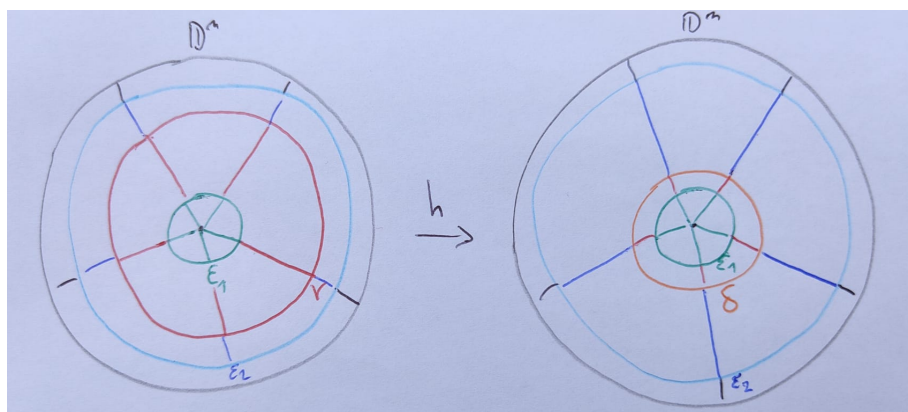


FIGURE 1 –

*Démonstration.* Identifions  $\mathbb{D}^n$  à  $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1] / \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}$  via  $x \mapsto (\frac{x}{|x|}, |x|)$  afin de nous ramener à la construction d'un automorphisme du segment  $[0, 1]$ . Soit  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  l'application affine par morceaux induisant

des bijections affines croissantes  $\begin{matrix} [0, \varepsilon_1] & \mapsto & [0, \varepsilon_1] \\ [\varepsilon_1, r] & \mapsto & [\varepsilon_1, \delta] \\ [r, \varepsilon_2] & \mapsto & [\delta, \varepsilon_2] \\ [\varepsilon_2, 1] & \mapsto & [\varepsilon_2, 1] \end{matrix}$ . Alors l'application  $\text{Id}_{\mathbb{S}^{n-1}} \times \varphi : \mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow$

$\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$  passe au quotient en  $h : \mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1] / \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1] / \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}$  avec  $h(\theta, r) = \begin{cases} (\theta, \varphi(r)) & \text{si } r \neq 0 \\ 0 & \text{si } r = 0 \end{cases}$ . C'est un homéomorphisme car  $\text{Id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$  et  $\varphi$  sont des homéomorphismes. De plus elle satisfait les critères du lemme par construction (Fig. 1).  $\square$

Nous montrons maintenant que la contraction d'un sous-ensemble cellulaire est encore homéomorphe à l'espace de départ.

**Proposition 4.4.** Soit  $M$  une variété topologique compacte à bord de dimension  $n$  et  $X_1, \dots, X_s$  des sous-ensembles de  $\text{Int}(M)$  disjoints et cellulaires. Si  $N = M / \sim$  est la contraction des  $X_i$ , alors  $M$  est homéomorphe à  $N$ .

*Démonstration.* Par récurrence, il suffit de traiter le cas  $s = 1$ . Soit donc  $X \subseteq \text{Int}(M)$  cellulaire. L'objectif est de construire une surjection continue  $f : M \rightarrow M$  telle que  $f|_{M \setminus X}$  est injective et telle qu'il existe  $x_0 \in M$  avec  $f(X) = x_0$ . Une telle application passera au quotient en un homéomorphisme  $M/X \xrightarrow{\sim} M$ . Nous utiliserons le fait que  $M$  est munie d'une distance compatible avec sa topologie. Pour le voir, on peut plonger  $M$  dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$  et utiliser la distance euclidienne de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

Ecrivons  $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$  comme dans la définition d'un ensemble cellulaire et construisons par récurrence des homéomorphismes  $f_i : M \rightarrow M$  dont  $f$  sera la limite. On pose  $f_1 = \text{Id}$  et on suppose  $f_i$  construite pour  $i \geq 1$ . Comme les  $f_i$  sont des homéomorphismes, on a

$$f_i(C_i) \cong \mathbb{D}^n, f_i(C_{i+1}) \cong \mathbb{D}^n \text{ et } f_i(C_{i+1}) \subseteq \text{Int}(f_i(C_i))$$

Commençons par construire un homéomorphisme  $g_{i+1} : f_i(C_i) \rightarrow f_i(C_i)$  qui se restreint en l'identité sur le bord  $\partial f_i(C_i)$  et vérifie  $\text{diam}(g_{i+1}(f_i(C_{i+1}))) \leq \frac{1}{i+1}$ . Soit  $\tilde{g} : f_i(C_i) \cong \mathbb{D}^n$  un homéomorphisme. En particulier  $\tilde{g} \circ f_i(C_{i+1}) \subseteq \text{Int}(\mathbb{D}^n)$  et  $\tilde{g} \circ f_i(C_{i+1})$  reste compacte. On peut donc par précompacité inclure l'image de  $f_i(C_{i+1})$  dans une boule  $B(0, r)$  avec  $r < 1$ . De manière similaire, il existe  $\delta > 0$  assez petit pour que  $\text{diam}(\tilde{g}^{-1}(B(0, \delta))) \leq \frac{1}{i+1}$ . On applique alors le lemme 4.3 pour obtenir un homéomorphisme  $h : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  qui se restreint en l'identité sur le bord et qui envoie  $B(0, r)$  dans  $B(0, \delta)$ . On pose enfin  $g_{i+1} = \tilde{g}^{-1} \circ h \circ \tilde{g}$  (Fig. 2). C'est un homéomorphisme  $f_i(C_i) \xrightarrow{\sim} f_i(C_i)$  que l'on étend par l'identité en un homéomorphisme  $g_{i+1} : M \xrightarrow{\sim} M$  et on pose  $f_{i+1} = g_{i+1} \circ f_i$ .

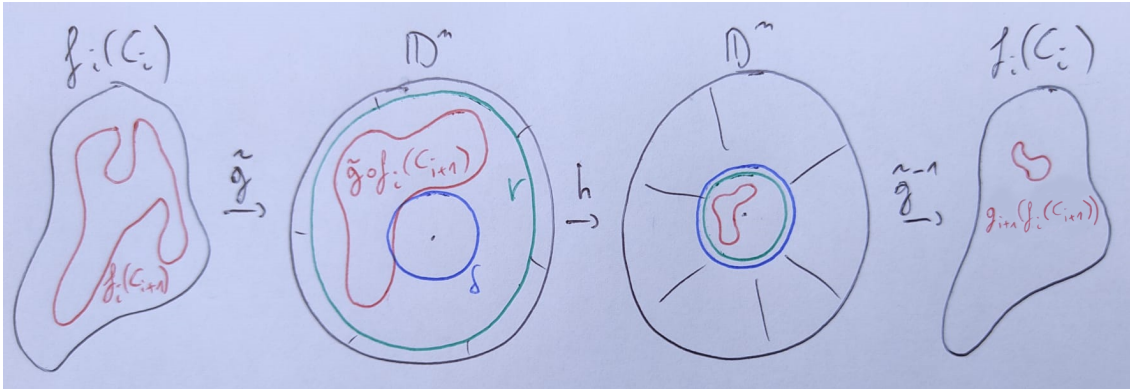


FIGURE 2 –

Montrons maintenant que pour tout  $p \in M$ , la suite  $f_j(p)$  converge dans  $M$ . Si  $p \in X$ , alors  $f_j(p) \in f_j(C_j)$  pour tout  $j$ . Or, par construction  $f_1(C_1) \supset f_2(C_2) \supset f_3(C_3) \supset \dots$  et ce sont des ensembles compacts, donc  $\bigcap_{j=1}^{\infty} f_j(C_j) \neq \emptyset$ . De plus,  $\lim_{j \rightarrow \infty} \text{diam}(f_j(C_j)) = 0$  donc il existe  $x_0 \in M$  tel que  $\bigcap_{j=1}^{\infty} f_j(C_j) = \{x_0\}$ . Il vient alors  $f_j(p) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_0$ . Sinon, si  $p \notin X$ , à partir d'un certain rang  $k$ , le point  $p$  n'est plus dans les ensembles  $C_j$  pour  $j \geq k$ . On a donc  $f_j(p) \notin f_j(C_j)$ . Il suit que  $f_j(p) = f_k(p)$  pour  $j \geq k$ . D'où  $f_j(p) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f_k(p)$ . On peut donc bien définir :

$$f : M \rightarrow M \\ p \mapsto \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(p)$$

Vérifions que  $f$  est continue. Soient  $(x_n) \in M^{\mathbb{N}}$  et  $x \in M$  tels que  $x_n \rightarrow x$ . On distingue les cas  $x \in X$  et  $x \notin X$ . Si  $x \notin X$ , posons  $k = \max\{j \geq 1 \mid x \in C_j\}$  de telle sorte que  $f(x) = f_k(x)$ . A partir d'un certain rang  $N$ , pour tout  $n \geq N$ , on a  $x_n \notin C_{k+1}$  car  $C_{k+1}$  est fermé. Donc à partir de ce rang,  $f(x_n) = f_k(x_n)$ . La continuité de  $f_k$  implique donc celle de  $f$  en  $x$ . Si  $x \in X$ , prenons  $\varepsilon > 0$ . A partir d'un certain rang on a  $\frac{1}{j} \leq \varepsilon$ . Or  $x \in X \subseteq C_{j+1} \subseteq \text{Int}(C_j)$  donc à partir d'un certain rang  $N$ , pour tout  $n \geq N$ , on a  $x_n \in C_j$ . Ainsi  $f(x_n) \in f(C_j)$  qui est de diamètre inférieur à  $\varepsilon$  par construction. D'où  $x_n \in B(x, \varepsilon)$  à partir de ce rang. On a donc montré la continuité de  $f$  en tout  $x \in M$ . De plus  $f(X) = x_0$ . L'application  $f$  passe donc au quotient en une application continue  $\tilde{f}$  :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ M/\sim & & \end{array}$$

Montrons la surjectivité de  $f$ . Soit  $q \in M \setminus \{x_0\}$ . A partir d'un certain rang,  $q \notin f_j(C_j)$  et donc  $f_j^{-1}(q) \notin C_j$ . Ceci implique  $f(f_j^{-1}(q)) = f_j(f_j^{-1}(q)) = q$  donc  $q$  est dans l'image de  $f$ . Enfin,  $f$  est injective en dehors de  $X$  car si  $x, x' \in M \setminus X$ , à partir d'un certain rang  $f(x) = f_j(x)$  et  $f(x') = f_j(x')$ . L'injectivité de  $f_j$  assure alors  $f(x) \neq f(x')$ . L'application  $\tilde{f}$  est donc bijective continue de  $M/\sim$ , qui est compact car  $M$  l'est, vers  $M$  qui est séparée. C'est donc un homéomorphisme  $M/\sim \cong M$ .  $\square$

Cette construction, par contractions successives, est appelée contraction de Bing. Cette technique a initialement été utilisée par Bing [4] pour montrer qu'un recollement selon leur bord de deux exemplaires de la "mauvaise" composante connexe du complémentaire de la sphère cornue d'Alexander est homéomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^3$ .

## 5 Une condition suffisante de cellularité

Nous aurons besoin d'une condition suffisante pour qu'un sous-ensemble soit cellulaire. Pour établir une telle condition, nous devons appliquer le lemme 4.3 autour d'un point non centré. Commençons par montrer que tout point du disque peut être envoyé sur le centre par un homéomorphisme.

**Lemme 5.1.** Si  $x \in \text{Int}(\mathbb{D}^n)$ , il existe un homéomorphisme  $\mu : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  tel que  $\mu(x) = 0$ .

*Démonstration.* On suppose que  $x \neq 0$  et on pose  $\mu(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = x \\ \frac{1}{\lambda_y} \frac{y-x}{\|y-x\|} & \text{si } y \neq x \end{cases}$  où  $\lambda_y$  est l'unique  $\lambda > 0$  vérifiant  $\|x + \lambda(y-x)\| = 1$  (Fig. 3). On montre son existence et son unicité en remarquant que c'est la seule racine positive du polynôme  $\lambda^2\|x-y\|^2 + 2\lambda\langle x, y-x \rangle + \|x\|^2 - 1$ . On montre par la même occasion que  $\lambda$  dépend continuellement des coordonnées de  $y$  et de  $x$ . De plus l'existence de la réciproque continue  $y \mapsto x + \lambda_{x+y}\|y\| * y$  montre qu'il s'agit bien d'un homéomorphisme.  $\square$

Nous énonçons maintenant la condition suffisante.

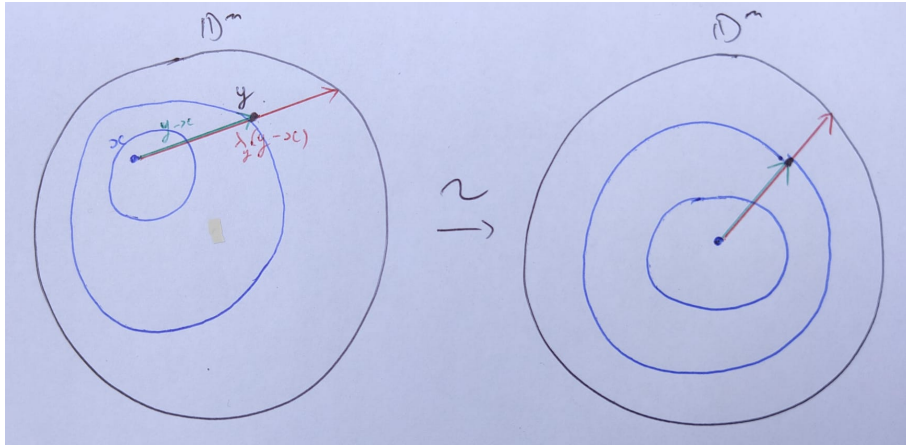


FIGURE 3 –

**Proposition 5.2.** Soient  $X_1, \dots, X_s$  des sous-ensembles fermés et disjoints de  $\text{Int}(\mathbb{D}^n)$  et  $N = \mathbb{D}^n / X_1, \dots, X_s$  la contraction de ces sous-ensembles. Soit  $\pi : \mathbb{D}^n \rightarrow N$  l'application de contraction. On suppose qu'il existe un plongement  $N \hookrightarrow \mathbb{S}^n$  qui envoie  $\pi(\text{Int}(\mathbb{D}^n)) \subseteq N$  sur un ouvert de  $\mathbb{S}^n$ . Alors tous les  $X_i$  sont cellulaires.

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $s$ . Il n'y a rien à montrer dans le cas  $s = 0$ . Supposons donc  $s > 0$  et le résultat vrai pour  $s - 1$  sous-ensembles. Soit  $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  la composition de  $\pi$  avec le plongement et  $x_i = f(X_i)$  pour  $1 \leq i \leq s$  (Fig. 4).

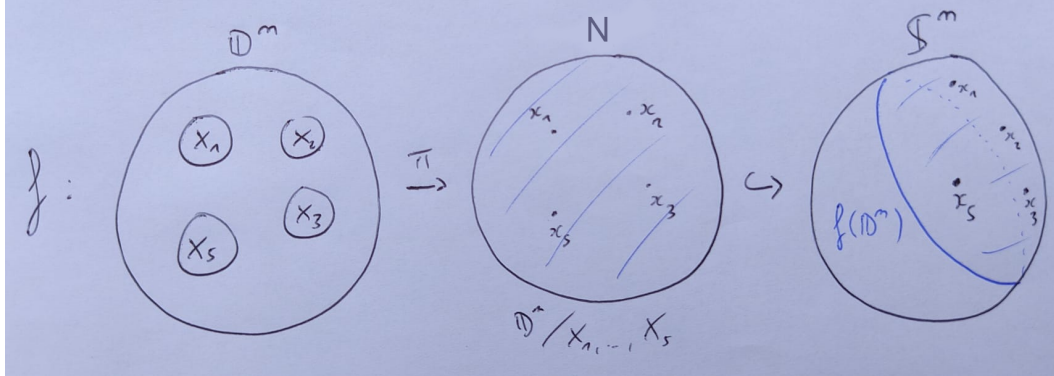


FIGURE 4 –

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{D}^n$  contenant  $X_s$ . Nous allons construire des disques  $C_j$  montrant la cellularité de  $X_s$  dans l'ouvert  $U$ . Pour tout  $\delta > 0$ , on notera  $B_\delta \subseteq \mathbb{S}^n$  la boule ouverte de rayon  $\delta$  autour de  $x_s = f(X_s)$  (pour la distance induite sur  $\mathbb{S}^n$  par la distance euclidienne de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). Prenons  $\varepsilon > 0$  tel que  $B_\varepsilon \subseteq f(U)$  et tel que  $x_i \notin B_\varepsilon$  pour  $1 \leq i \leq s - 1$ . Pour  $j \geq 1$ , construisons  $h_j : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  une application continue et injective vérifiant  $h_j(f(\mathbb{D}^n)) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{j}}$  et  $h_j|_{B_{\frac{\varepsilon}{j+1}}} = \text{Id}$  (Fig. 5).

Remarquons tout d'abord que  $f$  réalise en particulier un plongement de  $\mathbb{S}^{n-1}$  dans  $\mathbb{S}^n$  et sépare donc  $\mathbb{S}^n$  en deux composantes connexes d'après le théorème de Jordan 2.1. Puisqu'un chemin continu dans  $\text{Int}(\mathbb{D}^n)$  est poussé en avant par  $f$  en un chemin continu qui n'intersecte pas  $f(\mathbb{S}^{n-1})$ , on sait que  $f(\mathbb{D}^n)$  est entièrement contenu dans l'une des deux composantes connexes non vides de  $\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1})$ . Ceci nous permet de considérer  $z \in \mathbb{S}^n$  et  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(z, \varepsilon) \subseteq \mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{D}^n)$  (l'autre composante connexe). La projection stéréographique par rapport à  $z$  induit alors (après rotation et composition avec une homothétie) un homéomorphisme  $d : \mathbb{S}^n \setminus B(z, \varepsilon) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^n$ . Quitte à remplacer  $d$  par  $\mu \circ d$  avec  $\mu$  donné par le lemme 5.1 pour  $x = d(x_s)$ , on peut

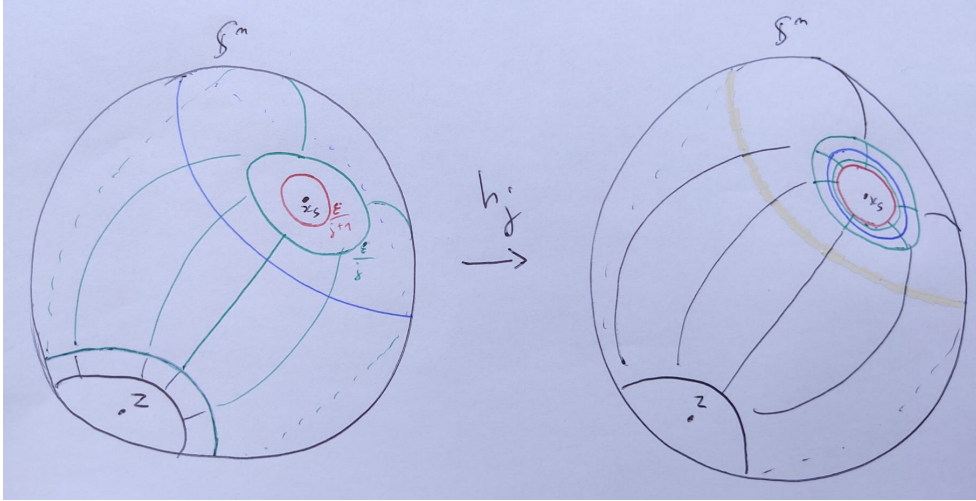


FIGURE 5 –

supposer  $d(x_s) = 0$ . On applique maintenant le lemme 4.3 avec  $\delta$  assez petit pour que  $d^{-1}(B(0, \delta)) \subseteq B_{\frac{\epsilon}{j}}$ , avec  $\epsilon_1$  assez grand pour que  $d(B_{\frac{\epsilon}{j+1}}) \subseteq B(0, \epsilon_1)$ , avec  $r$  assez grand pour que  $d \circ f(\mathbb{D}^n) \subseteq B(0, r)$  et avec  $\epsilon_2 = 0$ . On obtient ainsi l'existence de  $\tilde{h}_j$  tel que  $h_j = d \circ \tilde{h}_j$ , étendu par l'identité au reste de  $\mathbb{S}^n$ , convient.

Les homéomorphismes  $h_j$  que nous venons de construire permettent d'envoyer continument le disque  $f(\mathbb{D}^n)$  dans un disque centré en  $x_s$  arbitrairement petit. Nous allons en déduire des  $C_j$  montrant la cellularité de  $X_s$ . On pose  $g_j : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  définie par :

$$g_j(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in X_s \\ f^{-1} \circ h_j \circ f(z) & \text{si } z \notin X_s \end{cases}$$

L'application est bien définie si  $h_j \circ f(z) \neq x_s$  pour  $z \notin X_s$ . Or puisque  $f(z) \neq x_s$  en dehors de  $X_s$  et  $h_j(x_s) = x_s$ , on peut utiliser l'injectivité de  $h_j$  pour conclure  $h_j \circ f(z) \neq x_s$ . De plus  $h_j$  se restreint en l'identité sur  $B_{\frac{\epsilon}{j+1}}$  donc  $g_j$  se restreint en l'identité sur  $f^{-1}(B_{\frac{\epsilon}{j+1}})$ . En dehors,  $f^{-1}$  est bien définie et continue, donc c'est le cas de  $g_j$  sur tout  $\mathbb{D}^n$ .

Soit  $C_j = g_j(\mathbb{D}^n) \subseteq \mathbb{D}^n$ . L'espace  $C_j$  est en fait la contraction de  $X_1, \dots, X_{s-1}$ . En effet  $g_j$  passe au quotient en  $\tilde{g}_j : \mathbb{D}^n / X_1, \dots, X_s \rightarrow C_j$  qui est injective car  $g_j$  l'est en dehors de  $X_1, \dots, X_s$  par construction. De plus  $\tilde{g}_j$  est surjective et continue car  $g_j$  l'est. L'application  $\tilde{g}_j$  est donc un homéomorphisme entre  $\mathbb{D}^n / X_1, \dots, X_{s-1}$  qui est compact et  $C_j$  qui est séparé. En composant  $\tilde{g}_j^{-1}$  avec le plongement  $N \hookrightarrow \mathbb{S}^n$  donné dans les hypothèses de la proposition, on obtient un plongement de  $C_j$  dans  $\mathbb{S}^n$ . On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence pour montrer que  $X_1, \dots, X_{s-1}$  sont cellulaires. Par la proposition 4.4, on obtient  $C_j \cong \mathbb{D}^n$ . De plus,

$$X_s \subseteq f^{-1}(B_{\frac{\epsilon}{j+1}}) \subseteq C_j \subseteq f^{-1}(B_{\frac{\epsilon}{j}}) \subseteq U$$

Les  $(C_j)_{j \geq 1}$  montrent alors que  $X_s$  est lui aussi cellulaire. □

Remarquons que la proposition 5.2 concerne des sous-ensembles du disque  $\mathbb{D}^n$ . Nous l'appliquerons à des sous-ensembles de la sphère qu'il nous sera aisé de considérer comme des sous-ensembles d'un disque.

## 6 La preuve du théorème

Nous avons maintenant tous les résultats et outils pour démontrer le théorème de Schoenflies généralisé, que nous rappelons ci-dessous.

**Théorème 6.1.** Soit  $\phi : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$  un plongement et  $A$  l'adhérence d'une composante connexe de  $\mathbb{S}^n \setminus \phi(\mathbb{S}^{n-1})$ . Si  $A$  est une variété topologique à bord, alors  $A$  est homéomorphe au disque  $\mathbb{D}^n$ .

*Démonstration.* Étendons, grâce au théorème 3.1, l'application  $\phi$  en un plongement  $\Phi : \mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1] \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ . Soit  $A$  l'adhérence de la composante connexe de  $\mathbb{S}^n \setminus \Phi(\mathbb{S}^{n-1} \times 0)$  contenant  $\Phi(\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1])$  et  $X$  et  $Y$  les composantes connexes de  $\mathbb{S}^n \setminus \Phi(\mathbb{S}^{n-1} \times ]0, 1[)$  avec  $X \subseteq A$ . Posons  $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n / X, Y$  leur application de contraction et

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \longrightarrow & \mathbb{S}^n \\ X & \longmapsto & (0, \dots, 0, 1) \\ Y & \longmapsto & (0, \dots, 0, -1) \\ \Phi(x, r) & \longmapsto & \left( \frac{x_1}{\lambda_{x,r}}, \dots, \frac{x_n}{\lambda_{x,r}}, 2r - 1 \right) \quad (0 < r < 1) \end{array}$$

où l'on considère  $\mathbb{S}^{n-1}$  dans le plan  $x_n = 0$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et où l'on note  $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$  les coordonnées de  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  ainsi que  $\lambda_{x,r}$  l'unique réel positif tel que  $\left\| \left( \frac{x_1}{\lambda_{x,r}}, \dots, \frac{x_{n-1}}{\lambda_{x,r}}, r \right) \right\| = 1$  (Fig. 6). Par construction, l'application  $g$  induit une bijection continue, et donc un homéomorphisme  $\tilde{g}$ , de  $\mathbb{S}^n / X, Y$  qui est compact vers  $\mathbb{S}^n$  qui est séparé.

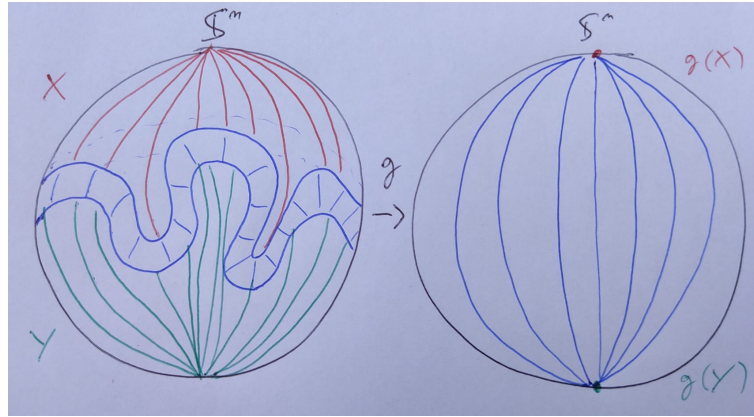


FIGURE 6 –

Soit  $D' \subseteq \mathbb{S}^n \setminus (X \cup Y)$  une boule ouverte et notons  $D = \mathbb{S}^n \setminus D'$ . On a  $D \cong \mathbb{D}^n$  par rotation, projection stéréographique et homothétie. La restriction de  $\tilde{g}$  à  $\pi(D)$  est donc la composition de la contraction de  $X$  et  $Y$  (vus comme sous-ensembles du disque  $D$ ) avec un plongement dans  $\mathbb{S}^n$  vérifiant les conditions de la proposition 5.2 (Fig. 7). On en déduit que  $X$  et  $Y$  sont cellulaires.

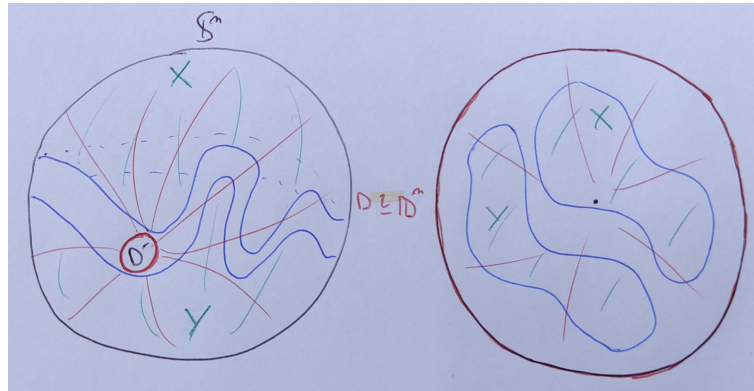


FIGURE 7 –

En particulier  $X$  est cellulaire comme sous-ensemble de  $A$ . En effet si  $U$  est un ouvert de  $A$  contenant  $X$ , comme  $\text{Int}(D)$  est un ouvert de  $\mathbb{S}^n$  contenant  $X$ , l'ensemble  $U \cap \text{Int}(D)$  est un ouvert de  $A$  contenant  $X$ .

C'est également un ouvert de  $D$  donc les  $C_j$  qui lui correspondent dans  $D$  conviennent aussi dans  $A$ . On en déduit, avec la proposition 4.4, que  $A \cong A/X$ .

Enfin, une construction similaire à celle de  $g$  permet de conclure. On pose :

$$\begin{aligned}
 f : \quad A &\rightarrow \mathbb{S}^n \\
 X &\mapsto (0, \dots, 0, 1) \\
 \phi(x, r) &\mapsto \left( \frac{x_1}{\lambda_{x,r}}, \dots, \frac{x_n}{\lambda_{x,r}}, r \right) \quad (0 \leq r \leq 1)
 \end{aligned}$$

Comme précédemment elle induit un homéomorphisme  $A/X \xrightarrow{\sim} \{x \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} \geq 0\}$  (Fig. 8). Or  $\{x \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} \geq 0\} \cong \mathbb{D}^n$  par projection stéréographique par rapport à  $(0, \dots, 0, -1)$ . Il vient donc  $A \cong A/X \cong \mathbb{D}^n$ .

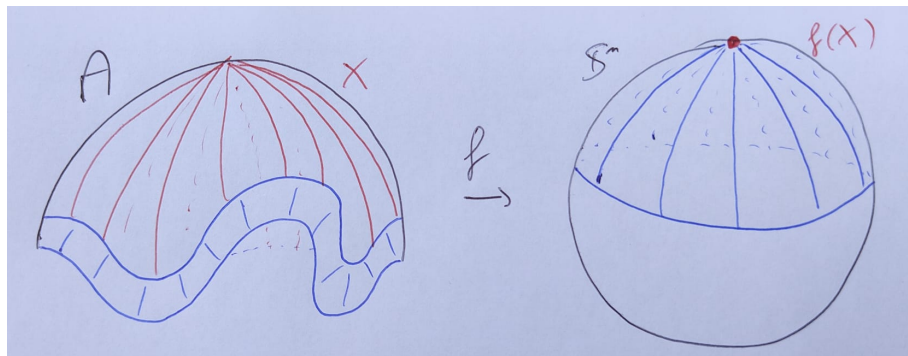


FIGURE 8 –

Le théorème est démontré. □

## Références

- [1] M. Brown, “A proof of the generalized Schoenflies theorem,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 66, pp. 74–76, 1960.
- [2] B. Mazur, “On embeddings of spheres,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 65, pp. 59–65, 1959.
- [3] A. Hatcher, *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [4] R. H. Bing, “A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres,” *Annals of Mathematics. Second Series*, vol. 56, pp. 354–362, 1952.
- [5] A. Putman, “The generalized schoenflies theorem,” 2015. [Online]. Available : <https://www3.nd.edu/~andyp/notes/Schoenflies.pdf>, dernière visite le 09/06/2022