



MÉMOIRE DE PREMIÈRE ANNÉE
DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Plus longue sous-séquence croissante d'une permutation aléatoire

Hugo NOUAILLE, Tom GARCIA-SANCHEZ
Encadré par Théo LENOIR

6 juin 2022

Remerciements


NOUS tenons à remercier notre encadrant Monsieur Théo LENOIR, doctorant à l'École Normale Supérieure de Paris, pour sa patience, son aide précieuse et ses judicieux conseils qui ont grandement contribué à la réalisation de ce mémoire.

Nous remercions également Madame Noelle NOUAÏLLE, qui a pris le temps de corriger nos nombreuses erreurs de syntaxe et d'orthographe.

Table des matières

Introduction	4
1 Définition du problème et résultat principal	5
2 Approche discrète	6
2.1 Le théorème d'Erdős-Szekeres	6
2.2 Premiers encadrements de $(l_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$	6
2.3 Théorème d'Hammersley	7
3 Algorithmes, reformulation du problème	11
3.1 Algorithmes	11
3.2 Mesure de Plancherel	14
3.3 Formule de longueur de crochet	15
3.4 Processus d'extension de Plancherel	18
4 Résolution par minimisation	20
4.1 Cadre d'étude	20
4.2 Forme limite	23
5 Annexe	33
Références	38

Introduction

ORSQUE l'on s'intéresse aux permutations, il existe de nombreux concepts et comportements intéressants à étudier, par exemple, les sous-séquences croissantes. Dans le but de mieux comprendre la taille maximale de ces dernières, pour une permutation typique, il est naturel de se poser la question probabiliste suivante, sur laquelle se penchera l'ensemble de ce texte :

Pour une permutation d'ordre n tirée uniformément, quelle est la taille maximale de ses sous-séquences croissantes ?

Après une brève introduction au problème, nous aborderons des résultats combinatoires élémentaires permettant de comprendre le bon ordre de grandeur de la plus longue sous-séquence croissante. Nous les analyserons ensuite plus précisément, via des techniques de super-additivité et de concentration.

Nous poursuivrons en évoquant plusieurs algorithmes connus sur les permutations, qui permettront de les relier avec un outil central en combinatoire : les tableaux de Young. Finalement, nous prouverons un théorème type limite d'échelles sur la forme d'un tableau de Young aléatoire : la forme limite sera alors l'unique minimant d'un problème variationnel. Cette convergence permettra d'obtenir de nombreuses informations sur le comportement typique d'une permutation, notamment la taille maximale d'une sous séquence croissante de celle-ci.

1 Définition du problème et résultat principal

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons S_n l'ensemble des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Définition 1.0.1 (Sous-séquences). Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \in S_n$, $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et un sous-ensemble de p indices représentés par une application $i : \llbracket 1; p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; n \rrbracket$ strictement croissante. La permutation $\sigma \circ i$ est alors appelée sous-séquence de longueur p de σ , le caractère croissant ou décroissant de cette dernière est naturellement celui associé à l'application qui la représente.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in S_n$ nous noterons respectivement $L(\sigma)$ et $D(\sigma)$ la longueur maximale des sous-séquences croissantes et décroissantes de σ . Définissons $l_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} L(\sigma) = \mathbb{E}[L(\sigma_n)]$ l'espérance de $L(\sigma_n)$ pour σ_n une permutation tirée uniformément dans S_n .

Exemple. Pour $\sigma \in S_5$ définie par $[\sigma(i)]_{1 \leq i \leq 5} = (3; 1; 2; 5; 4)$ on a $L(\sigma) = 3$ (aucune sous-séquence de longueur 4, prendre $i_1 = 2$, $i_2 = 3$ et $i_3 = 4$ pour une longueur de 3) et $D(\sigma) = 2$ similairement.

À partir de maintenant, σ_n désignera systématiquement une variable aléatoire quelconque uniforme à valeur dans S_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ (l'hypothèse d'indépendance ne nous sert pas dans la suite). La question qui nous intéresse, souvent appelée "problème d'Ulam-Hammersley", est la suivante :

Que peut-on dire de $L(\sigma_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, en particulier comment se comporte $(l_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ asymptotiquement ?

Le résultat bien connu qui nous intéresse principalement est le suivant :

Théorème 1.0.2. On a $l_n \sim 2\sqrt{n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, et plus précisément $\frac{L(\sigma_n)}{\sqrt{n}}$ converge en probabilité vers 2.

2 Approche discrète

2.1 Le théorème d'Erdős-Szekeres

Dans cette partie, on s'intéresse à un résultat simple mais utile permettant une première approche du problème. L'idée est de remarquer qu'une permutation possédant uniquement de petites sous-séquences croissantes se doit d'en avoir une longue décroissante.

Théorème 2.1.1 (d'Erdős-Szekeres). *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \in S_n$, $r \in \mathbb{N}^*$, $s \in \mathbb{N}^*$ tels que $n > rs$, alors on a :*

$$L(\sigma) > r \vee D(\sigma) > s$$

Démonstration. Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on introduit $L_k(\sigma)$ la longueur maximale des sous-séquences croissantes de σ terminant par l'indice k . On introduit $D_k(\sigma)$ de la même façon pour les sous-séquences décroissantes. On pose :

$$\phi : \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; n \rrbracket^2, k \mapsto (L_k[\sigma]; D_k[\sigma])$$

Nous allons montrer que ϕ est injective. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $i < j$. On a $\sigma(i) \neq \sigma(j)$. Si $\sigma(i) < \sigma(j)$ on a $L_i(\sigma) < L_j(\sigma)$, en effet on peut alors prolonger la sous-séquence croissante maximale terminant par i en ajoutant l'indice j . De la même façon si $\sigma(i) > \sigma(j)$ on a $D_i(\sigma) < D_j(\sigma)$ d'où l'injectivité de ϕ .

On a $L_k(\sigma) \leq L(\sigma)$ et $D_k(\sigma) \leq D(\sigma)$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Par injectivité $n = \text{Card}[\phi(\llbracket 1; n \rrbracket)] > rs$ d'où $\phi(\llbracket 1; n \rrbracket) \not\subset \llbracket 1; r \rrbracket \times \llbracket 1; s \rrbracket$ par cardinalité. On ne peut donc pas avoir $L(\sigma) \leq r$ et $D(\sigma) \leq s$ pour respecter cette non-inclusion, d'où le résultat. ■

2.2 Premiers encadrements de $(l_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Nous allons directement utiliser le théorème précédent pour donner une borne inférieure à $(l_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en accord avec le théorème 1.0.2.

Lemme 2.2.1 (Borne inférieure de $(l_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$). *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $l_n \geq \sqrt{n}$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\sigma \in S_n$ on a $L(\sigma)D(\sigma) \geq n$ par contraposée du théorème 2.1.1 prise avec $r = L(\sigma)$ et $s = D(\sigma)$. $\sigma \mapsto n + 1 - \sigma$ est une bijection de S_n qui permet d'identifier les sous-séquences croissantes de σ à celles décroissantes de $n + 1 - \sigma$. On peut donc réécrire $l_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} D(\sigma)$, d'où en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique :

$$l_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \frac{L(\sigma) + D(\sigma)}{2} \geq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sqrt{L(\sigma)D(\sigma)} \geq \sqrt{n}$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la borne supérieure. Pour cela introduisons le lemme suivant :

Lemme 2.2.2 (Inégalité de grande déviation). *Pour tout $\alpha > e$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$\mathbb{P}(L(\sigma_n) > \alpha\sqrt{n}) \leq e^{-c_\alpha\sqrt{n}}$$

Où $c_\alpha := 2\alpha \ln\left(\frac{\alpha}{e}\right) > 0$.

Démonstration. Notons $X_k^{(n)}$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ la variable aléatoire comptant le nombre de sous-séquences croissantes de taille k de σ_n . On remarque que si l'on choisit une des $\binom{n}{k}$ sous-séquences de taille k de σ_n , le nombre de façons d'ordonner les images est de $k!$ et que ces dernières sont équiprobables par uniformité de σ_n . Ainsi la probabilité que la sous-séquence choisie soit croissante est de $\frac{1}{k!}$, d'où en sommant sur toutes les possibilités :

$$\mathbb{E}\left[X_k^{(n)}\right] = \frac{1}{k!} \binom{n}{k}$$

Posons $k := \lceil \alpha\sqrt{n} \rceil$. On a $\frac{n!}{(n-k)!} \leq n^k$ et $e^k \geq \frac{k^k}{k!}$ (donc $k! \geq (\frac{k}{e})^k$), combinées on obtient :

$$\mathbb{P}(L(\sigma_n) > \alpha\sqrt{n}) \leq \mathbb{P}(X_k^{(n)} \geq 1) \leq \mathbb{E}\left[X_k^{(n)}\right]$$

Puis

$$\mathbb{E}\left[X_k^{(n)}\right] \leq \frac{n^k}{(k/e)^{2k}} \leq \left(\frac{ne^2}{\alpha^2 n}\right)^k \leq \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{-2\alpha\sqrt{n}}$$

C'est le résultat par définition de c_α . ■

Lemme 2.2.3 (Borne supérieure de $(l_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$). *On a :*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{l_n}{\sqrt{n}} \leq e$$

Démonstration. Soit $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\alpha := (1 + \delta)e$, en remarquant que $L(\sigma_n) \leq n$ et en utilisant le lemme 2.2.2 précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} l_n &= \mathbb{E}[L(\sigma_n)] \\ &\leq \mathbb{P}(L(\sigma_n) \leq \alpha\sqrt{n}) \alpha\sqrt{n} + \mathbb{P}(L(\sigma_n) > \alpha\sqrt{n}) n \\ &\leq \alpha\sqrt{n} + ne^{-c_\alpha\sqrt{n}} \sim (1 + \delta)e\sqrt{n} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

On a donc pour tout $\delta > 0$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{l_n}{\sqrt{n}} \leq (1 + \delta)e$, d'où le résultat. ■

2.3 Théorème d'Hammersley

Le but de cette partie est de démontrer le théorème d'Hammersley qui assure que $(\frac{l_n}{\sqrt{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite et que $\frac{L(\sigma_n)}{\sqrt{n}}$ converge en probabilité vers cette limite.

Théorème 2.3.1 (Inégalité d'Efron-Stein). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X = (X_j)_{1 \leq j \leq n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un espace $(\Omega; \mathcal{E})$ et $g : (X^n; \mathcal{E}^n) \rightarrow (\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application mesurable telle que $g(X)$ soit de carré intégrable. On considère la mesure de probabilité produit sur la famille X . Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note $\mathbb{E}_i[g(X)] := \mathbb{E}[g(X) | (X_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i}]$ l'espérance conditionnelle prise par rapport à la i -ième variable. Alors on a :

$$\text{Var}[g(X)] \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(g(X) - \mathbb{E}_i[g(X)])^2]$$

Démonstration. Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, notons $Z_i := (X_j)_{1 \leq j \leq i}$, et pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ définissons $V_i := \mathbb{E}[g(X) | Z_i] - \mathbb{E}[g(X) | Z_{i-1}]$. Ainsi on a $\sum_{k=1}^n V_k = g(X) - \mathbb{E}[g(X)]$ et donc :

$$\text{Var}[g(X)] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n V_i \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[V_i^2] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}[V_i V_j]$$

Pour $1 \leq i < j \leq n$, en remarquant les inclusions $Z_i \subset Z_{j-1}$ et $Z_i \subset Z_j$ au sens des tribus engendrées, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_j | Z_i] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(X) | Z_j] | Z_i] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(X) | Z_{j-1}] | Z_i] \\ &= \mathbb{E}[g(X) | Z_i] - \mathbb{E}[g(X) | Z_i] = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $\mathbb{E}[V_i V_j] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[V_i V_j | Z_i]] = \mathbb{E}[V_i \mathbb{E}[V_j | Z_i]] = 0$. De plus, on remarque que pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $V_i = \mathbb{E}[g(X) - \mathbb{E}_i[g(X)] | Z_i]$, en effet X_i est indépendante de Z_{i-1} et $\mathbb{E}_i[g(X)]$ (qui est Z_{i-1} mesurable) par hypothèse, d'où :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}_i[g(X)] | Z_{i-1}, X_i] = \mathbb{E}[\mathbb{E}_i[g(X)] | Z_{i-1}] = \mathbb{E}[g(X) | Z_{i-1}]$$

On a alors $\mathbb{V}_i^2 \leq \mathbb{E}[(g(X) - \mathbb{E}_i[g(X)])^2 | Z_i]$ par inégalité de Jensen. Finalement on obtient bien le résultat en passant à l'espérance. ■

Théorème 2.3.2 (Majoration de la variance). Il existe $C_V > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait :

$$\text{Var}[L(\sigma_n)] \leq C_V \sqrt{n}$$

Démonstration. Montrons tout d'abord $\text{Var}[L(\sigma_n)] \leq 2\mathbb{E}[Z]$. Considérons $X = (X_j)_{1 \leq j \leq n}$ des variables indépendantes uniformes à valeurs dans $[0; 1]$. Presque sûrement, ces variables sont distinctes deux à deux. Il existe donc une unique identification croissante g_X de ces valeurs vers $\llbracket 1; n \rrbracket$. $\sigma_X : i \mapsto g_X(X_i)$ définit donc presque sûrement une permutation de S_n . Par construction, la loi de X est invariante par permutation, donc σ_X a la même loi que σ_n . Ainsi, en appliquant l'inégalité d'Efron-Stein avec $g(X) := L \circ \sigma_X$ définie presque sûrement sur $[0; 1]^n$, on obtient :

$$\text{Var}[L(\sigma_X)] \leq \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (L(\sigma_X) - \mathbb{E}_i[L(\sigma_X)])^2 \right]$$

On remarque que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $L(\sigma_X) = L(\sigma_{(X_j)_{1 \leq j \leq n, i \neq j}}) + \mathbb{1}_{E_i}$, où E_i désigne l'événement : j est un indice participant à toute sous-séquence croissante maximale de σ_X . En substituant, on obtient donc $(L(\sigma_X) - \mathbb{E}_i[L(\sigma_X)])^2 = (\mathbb{1}_{E_i} - \mathbb{E}_i[\mathbb{1}_{E_i}])^2 \leq \mathbb{1}_{E_i} + \mathbb{E}_i[\mathbb{1}_{E_i}]$. En somme, on a bien $\text{Var}[L(\sigma_n)] \leq 2\mathbb{E}[L(\sigma_n)]$ en remarquant que $\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{E_i} \leq L(\sigma_X)$ et $\mathbb{E}[\mathbb{E}_i[\mathbb{1}_{E_i}]] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{E_i}]$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Enfin, en utilisant le lemme 2.2.2 pour $\alpha = 3 > e$, on a :

$$\mathbb{E}[L(\sigma_n)] \leq 3\sqrt{n} + n\mathbb{P}(L(\sigma_n) > 3\sqrt{n}) \sim 3\sqrt{n} \quad \text{pour } n \rightarrow +\infty$$

D'où l'existence d'une constante $C_V > 6$ qui convient. ■

Lemme 2.3.3 (de super-additivité de Fekete). *Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la propriété de super-additivité suivante :*

$$\forall (i; j) \in \mathbb{N}^{*2} \quad a_{i+j} \geq a_i + a_j$$

Alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = L := \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{a_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Démonstration. On pose $a_0 = 0$, en conservant ainsi la propriété de super-additivité. Le cas $L = +\infty$ est analogue à celui que nous allons traiter, on suppose donc $L < +\infty$. Soit $\epsilon > 0$, par définition du supremum, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_q \geq q(L - \epsilon)$. Par division euclidienne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $r_n \in \llbracket 0; q \rrbracket$ tel que $b_n := (n - r_n)/q \in \mathbb{N}$. Notons $a_q^* := \min_{1 \leq i \leq q} a_i$, alors par super-additivité, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = a_{b_n q + r_n} \geq b_n a_q + a_{r_n} \geq (n - q)(L - \epsilon) + a_q^*$$

Par conséquent :

$$L \geq \frac{a_n}{n} \geq \left(1 - \frac{q}{n}\right) (L - \epsilon) + \frac{a_q^*}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L - \epsilon, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \geq L - \epsilon$$

Et le résultat en passant à la limite pour $\epsilon \rightarrow 0$. ■

Théorème 2.3.4 (d'Hammerley). *La limite $\Lambda := \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n / \sqrt{n}$ existe, de plus $L(\sigma_n) / \sqrt{n}$ converge en probabilité vers Λ .*

Démonstration. Montrons tout d'abord l'existence de la limite. Remarquons que l'on peut faire correspondre bijection et ensemble de points du plan : si $A \subset \mathbb{R}^2$ est un ensemble fini de $n \in \mathbb{N}^*$ points tel que les projections p_x et p_y soient des bijections de A dans leur image, on note $\sigma(A) \in S_n$ la bijection définie par $\sigma(A) = i_y \circ p_y \circ (i_x \circ p_x)^{-1}$ où i_x et i_y sont respectivement les uniques bijections croissantes de $p_x(A)$ et $p_y(A)$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Considérons Π une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ correspondant au processus de Poisson de \mathbb{R}^2 d'intensité 1. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ on peut définir presque sûrement :

$$Y_t := L[\sigma(\Pi \cap [0; t]^2)]$$

Car presque sûrement $\Pi \cap [0; t]^2$ est constitué d'un nombre fini de points d'abscisses et ordonnées différentes. Par symétrie on vérifie facilement que pour tout $t > 0$ la loi de $\sigma(\Pi \cap [0; t]^2)$ sachant $\text{Card}(\Pi \cap [0; t]^2) = n$ est uniforme dans S_n . Soient $t > 0$ et $t' > 0$:

$$Y_{t+t'} \geq Y_t + L[\sigma(\Pi \cap [t; t+t']^2)]$$

En effet il suffit juste de remarquer que la concaténation des deux sous-séquences croissantes maximales correspondantes aux bijections intervenant dans le membre de droite est une sous-séquence croissante de celle de gauche. L'ensemble aléatoire $\Pi \cap [t; t+t']^2$ est de même loi que $\Pi \cap [0; t']^2$ car le processus de Poisson est invariant par translation, ainsi en passant à l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}[Y_{t+t'}] \geq \mathbb{E}[Y_t] + \mathbb{E}[Y_{t'}]$$

En utilisant le lemme 2.3.3 on obtient donc qu'il existe $\Lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que la suite $(\mathbb{E}[Y_n]/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ait pour limite Λ . En remarquant que $(Y_t)_{t>0}$ est positive et super-additive donc croissante, pour $t > 1$ on a :

$$\frac{\lfloor t \rfloor \mathbb{E}[Y_{\lfloor t \rfloor}]}{t \lfloor t \rfloor} \leq \frac{\mathbb{E}[Y_t]}{t} \leq \frac{\lceil t \rceil \mathbb{E}[Y_{\lceil t \rceil}]}{t \lceil t \rceil}$$

Et donc en passant à la limite lorsque $t \rightarrow +\infty$ on obtient que $(\mathbb{E}[Y_t]/t)_{t>0}$ tend vers Λ . On définit maintenant la variable aléatoire τ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\tau_n := \inf\{t > 0 \mid \text{Card}(\Pi \cap [0; \sqrt{t}]^2) \geq n\}$$

Ainsi, par définition du processus de poisson, on a presque sûrement $\text{Card}(\Pi \cap [0; \sqrt{\tau_n}]^2) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On vérifie également facilement que $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une variable correspondant à un processus de Poisson de \mathbb{R}_+ d'intensité 1 car la mesure de Lebesgue de $[0; \sqrt{t}]^2$ est celle de $[0; t]$. On sait alors que τ_n est de même loi que la somme de n variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1, par loi forte des grands nombres, on a presque sûrement $\tau_n/n \rightarrow 1$ et donc $\sqrt{\tau_n} \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. Ainsi presque sûrement (donc en particulier en un évènement élémentaire ω) :

$$\frac{l_n}{\sqrt{n}} = \frac{\mathbb{E}[Y_{\sqrt{\tau_n}}]}{\sqrt{n}} = \frac{\mathbb{E}[Y_{\sqrt{\tau_n}}]}{\sqrt{\tau_n}} \sqrt{\frac{\tau_n}{n}} \rightarrow \Lambda$$

Pour $n \rightarrow +\infty$, λ est fini car par la borne supérieure donnée par lemme 2.2.3, on a bien démontré l'existence de la limite.

Montrons maintenant la convergence en probabilité. Soit $\epsilon > 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_n := \mathbb{P}\left(\left|\frac{L(\sigma_n)}{\sqrt{n}} - \Lambda\right| \geq \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{L(\sigma_n)}{\sqrt{n}} - \frac{l_n}{\sqrt{n}}\right| + \left|\frac{l_n}{\sqrt{n}} - \Lambda\right| \geq \epsilon\right)$$

Par convergence, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geq n_0$ on ait $|l_n/\sqrt{n} - \Lambda| \leq \epsilon/2$, et donc en utilisant le théorème 2.3.2 pour $n \geq n_0$:

$$p_n \leq \mathbb{P}(|L(\sigma_n) - l_n| \geq \sqrt{n}\epsilon/2) \leq \frac{4\text{Var}[L(\sigma_n)]}{\epsilon^2 n} \leq \frac{2C}{\epsilon^2 \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'où la convergence en probabilité. ■

3 Algorithmes, reformulation du problème

3.1 Algorithmes

Dans cette partie, on s'intéresse à des algorithmes permettant de calculer de façon intéressante la fonction L , qui nous servira à affiner notre connaissance de cet indicateur.

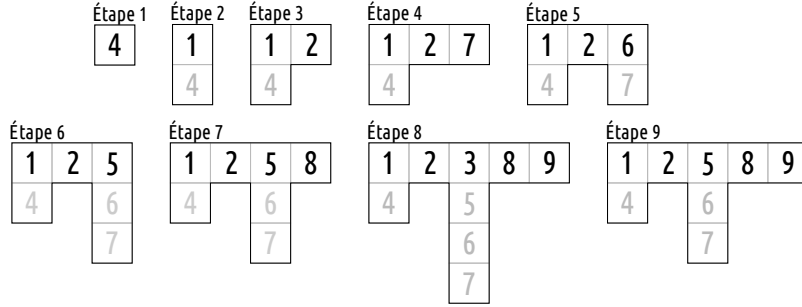


FIGURE 1 – Illustration de l'exécution de l'algorithme 1 sur une permutation

Algorithme 1 : Méthode du tri de patience

Entrées : $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \in S_n$

$(\mathcal{P}_k)_{1 \leq k \leq n} \leftarrow (\emptyset)_{1 \leq k \leq n}$

pour i allant de 1 à n **faire**

$m \leftarrow \min\{k \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid \sigma(i) \leq \min(\{n\} \cup \mathcal{P}_k)\}$

$\mathcal{P}_m \leftarrow \mathcal{P}_m \cup \{\sigma(i)\}$

fin

Sorties : $l(\sigma) := \text{Card}\{k \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid \mathcal{P}_k \neq \emptyset\}$, $(\mathcal{P}_k)_{1 \leq k \leq n}$

La figure 1 illustre l'exécution du tri de patience effectué sur la permutation σ de S_9 définie par $(\sigma[i])_{1 \leq i \leq 9} = (4; 1; 2; 7; 6; 5; 8; 9; 3)$. À chaque étape k , on insère $\sigma(k)$ dans la pile la plus à gauche qui est vide ou dont la tête est plus grande.

Propriété 3.1.1 (Correction de l'algorithme 1). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in S_n$, le calcul de $l(\sigma)$ par l'algorithme 1 termine et l'on a $l(\sigma) = L(\sigma)$.*

Démonstration. La terminaison de l'algorithme est triviale. Considérons une sous-séquence croissante maximale de σ . On remarque alors que par construction de l'algorithme, des images de σ prises en deux points distincts de la sous-séquence ne peuvent appartenir au même \mathcal{P}_k pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ en fin d'algorithme. Il y a donc au moins $L(\sigma)$ "piles" non vides, $l(\sigma) \geq L(\sigma)$. Réciproquement, par construction, à tout instant de l'algorithme, on a pour tout $(i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket$ vérifiant $i \leq j$ et $y_j \in \mathcal{P}_j$, il existe $y_i \in \mathcal{P}_i$ avec $\sigma^{-1}(y_i) < \sigma^{-1}(y_j)$ (il suffit de considérer l'étape j à laquelle y_j est ajouté en pile j mais pas en i). Ainsi, les piles non vides sont les $l(\sigma)$ premières et on peut construire une sous-séquence croissante de taille $l(\sigma)$ en choisissant judicieusement une image par pile non vide en partant de la $l(\sigma)$ -ième. On a donc $l(\sigma) \leq L(\sigma)$, d'où le résultat. ■

La méthode du tri de patience telle quelle, ne donne pas de nouvelle approche claire au problème. Néanmoins, nous allons voir qu'en la modifiant légèrement, elle permettra de mettre en évidence une bijection entre les permutations de taille fixée et un ensemble assez simple pour lequel la longueur maximale de sous-séquences croissantes correspondante est clairement identifiable.

Définition 3.1.2. Pour $A \subset \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on notera $A[n]$ l'ensemble A privé de ses $n - 1$ plus petits éléments, défini par récurrence par $A[1] := A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A[n + 1] := A[n] \setminus \{\min(\{+\infty\} \cup A[n])\}$.

Algorithme 2 : De Robinson–Schensted

Entrées : $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \in S_n$
 $(\mathcal{P}_k)_{1 \leq k \leq n} \leftarrow (\emptyset)_{1 \leq k \leq n}$
 $(\mathcal{Q}_k)_{1 \leq k \leq n} \leftarrow (\emptyset)_{1 \leq k \leq n}$
fonction **Inserer**(y, h) :
 $m \leftarrow \min\{k \in [1; n] \mid y \leq \min(\{n\} \cup \mathcal{P}_k[h])\}$
 $\mathcal{P}_m \leftarrow \mathcal{P}_m \cup \{y\}$
 si $\mathcal{P}_m[h + 1] \neq \emptyset$ **alors**
 $z \leftarrow \min(\mathcal{P}_m[h + 1])$
 $\mathcal{P}_m \leftarrow \mathcal{P}_m \setminus \{z\}$
 Inserer($z, h + 1$)
 fin
fin
pour i allant de 1 à n **faire**
 Inserer($\sigma(i), 1$)
 pour k allant de 1 à n **faire**
 si $\text{Card}(\mathcal{P}_k) = \text{Card}(\mathcal{Q}_k) + 1$ **alors**
 $\mathcal{Q}_k \leftarrow \mathcal{Q}_k \cup \{i\}$
 fin
 fin
fin
Sorties : $(\mathcal{P}_k)_{1 \leq k \leq n}, (\mathcal{Q}_k)_{1 \leq k \leq n}$

La figure 2 explicite le déroulement de l'algorithme 2 sur la permutation σ de S_9 définie par $(\sigma[i])_{1 \leq i \leq 9} = (4; 1; 2; 7; 6; 5; 8; 9; 3)$. Les colonnes avec des chiffres en noir représentent les $(\mathcal{P}_k)_{1 \leq k \leq n}$ dans l'ordre de gauche à droite. De la même façon, les $(\mathcal{Q}_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont représentés par les chiffres en blanc. Les cases grisées indiquent quelle nouvelle case sera créée à l'étape suivante. Les flèches grises indiquent que la case va subir une insertion lors des récursions de l'étape suivante.

À chaque étape k , on insère $\sigma(k)$ dans la pile la plus à gauche étant vide ou dont la tête est plus grande. Si cette pile n'est pas vide on "pousse" sa tête hors du tableau en prenant sa place et on répète l'opération pour cette nouvelle image en considérant cette fois le tableau privé de sa première ligne de façon récursive, etc... Cette nouvelle méthode généralise le tri de patience en utilisant son procédé plusieurs fois de façon récursive.

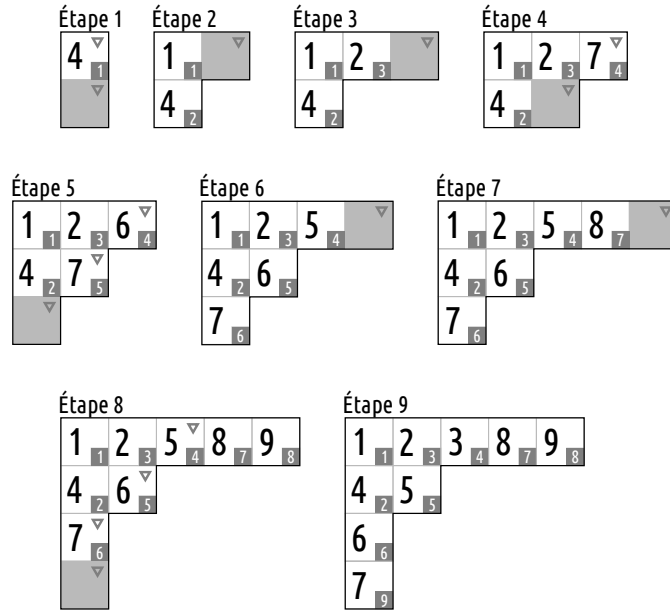


FIGURE 2 – Illustration de l'exécution de l'algorithme 2 sur une permutation

Définition 3.1.3 (Partitions de n). Pour $n \in \mathbb{N}$, on note Π_n l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{N}^n$ tels que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \forall j \in \llbracket i; n \rrbracket \lambda_i \leq \lambda_j$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = n$. Ce sont les partitions de n non ordonnées.

Définition 3.1.4 (Tableau de Young). Soit $n \in \mathbb{N}$. $Y = (Y_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{P}(\llbracket 1; n \rrbracket)^n$ est appelé tableau de Young si sa forme $\lambda(F) := (\text{Card}[Y_k])_{1 \leq k \leq n}$ est un élément de Π_n et si de plus pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ on a $\min(Y_i | k]) < \min(Y_{i+1} | k])$ pour tout les $k \in \mathbb{N}$ pour lesquels ces minimums sont définis. Notons \mathcal{Y}_n l'ensemble de ces objets. On peut visuellement présenter ces objets comme des tableaux à n cases contenant des entiers entre 1 et n répartis en colonnes de tailles décroissantes, avec la propriété de stricte croissance suivant les lignes et les colonnes du tableau.

Nous allons maintenant voir le résultat principal issu de l'algorithme 2 qui va nous être très utile.

Théorème 3.1.5. À $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, l'application définie par l'algorithme 2 réalise une bijection ϕ entre S_n et $T_n := \{(\lambda; P; Q) \in \Pi_n \times \mathcal{Y}_n^2 \mid \lambda = \lambda(P) = \lambda(Q)\}$. Avec cette correspondance on a $L(\sigma) = \max\{k \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\}$ et $D(\sigma) = \lambda_1$ si $\sigma \in S_n$ et $\phi(\sigma) = (\lambda; P; Q)$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'on a $\phi(\sigma) \in T_n$ pour $\sigma \in S_n$ en montrant par récurrence que $(\mathcal{P}_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un tableau ayant la propriété de stricte croissance suivant les lignes (les colonnes sont croissantes par définition) à tout instant. L'initialisation est triviale. Considérons que l'on insère $z \in \llbracket 1; n \rrbracket$

en hauteur $h \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Montrons l'hérédité. Si $h = 1$, elle est immédiate grâce à la condition d'insertion de l'algorithme. Supposons donc $h > 1$, l'opération résulte donc de l'insertion en hauteur $h-1$ d'un certain $y \in \llbracket 1; z \rrbracket$. On a $y \in \mathcal{P}_m$ pour un $m \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Notons $m' := \min\{k \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid z \leq \min(\{n\} \cup \mathcal{P}_k[h])\}$ l'indice de la colonne d'insertion de z . Si $m' < m$ on a $z > y > \min(\mathcal{P}_{m'}[h-1])$ par condition d'insertion de y . Sinon, c'est que l'on a $m' = m$ puisque $z < \min(\mathcal{P}_m[h])$ car z était à la place de y à l'étape précédente et donc $y = \min(\mathcal{P}_{m'}[h-1])$. Dans tout les cas, on en déduit qu'après l'insertion, on a $z = \min(\mathcal{P}_{m'}[h])$, l'opération s'effectue bien à la hauteur h , l'ordre est alors préservé, donc P est un tableau de Young. Le tableau Q est également de Young puisque il stocke les insertions finales de chaque récursion.

En reprenant ce que l'on vient de voir, on remarque que les insertions en hauteur strictement supérieure à 1 n'influent pas sur la première ligne de P . Cette dernière est donc la même que si on l'avait calculé par méthode du tri de patience et donc par propriété 3.1.1, on a bien $L(\sigma) = \max\{k \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\}$.

La relation $D(\sigma) = \lambda_1$ n'est pas évidente mais réalisable en démontrant par récurrence un résultat plus fort. Nous ne ferons pas la preuve ici, voir [2] pour une démonstration complète.

À partir de P et Q , on détermine de façon unique σ en "remontant" l'algorithme : on connaît la position m de la dernière insertion et sa hauteur h par Q et sa valeur z par P . Comme P a la propriété de stricte croissance tout au long de l'algorithme, il n'y a qu'une position possible pour substituer z en hauteur $h-1$ à la place d'un y , ainsi en reprenant le raisonnement pour y on remonte successivement jusqu'en hauteur 1. On obtient alors la position d'insertion de $\sigma(n)$ et donc sa valeur par P . Par récurrence immédiate on inverse bien ϕ . ■

Propriété 3.1.6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mu \in \Pi_n$ on définit :

$$d_\mu := \text{Card}\{Y \in \mathcal{Y}_n \mid \lambda(Y) = \mu\}$$

Alors on a :

$$\sum_{\mu \in \Pi_n} d_\mu^2 = n!$$

Démonstration. Corollaire immédiat de la bijection entre l'ensemble fini donné par le théorème 3.1.5, le membre de droite étant le cardinal de S_n et celui de gauche correspond à T_n vu comme union disjointe selon la forme des tableaux de Young. ■

3.2 Mesure de Plancherel

Nous venons de voir que l'algorithme de Robinson-Schensted permet de transformer notre variable aléatoire uniforme σ_n en un triplet $(\lambda^n, P^n, Q^n) := \phi(\sigma_n)$. Avec ces nouveaux objets, $L(\sigma_n)$ apparaît clairement comme le nombre de coordonnées non nulles de λ^n . Il est donc naturel de s'intéresser à la distribution de cette variable, explicitée dans la propriété suivante.

Propriété 3.2.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la variable λ^n suit la loi de mesure \mathbb{P} caractérisée par :

$$\forall \mu \in \Pi_n \quad \mathbb{P}(\lambda_n = \mu) = \frac{d_\mu^2}{n!}$$

C'est ce que l'on appelle la mesure de Plancherel du groupe S_n .

Démonstration. Par définition de d_μ et car la bijection ϕ induit que $(\lambda_n; P_n; Q_n)$ est uniforme dans T_n . ■

3.3 Formule de longueur de crochet

Dans cette partie, nous allons tenter de comprendre la distribution de Plancherel. Pour cela, on étudie une manière de calculer d_μ pour $\mu \in \Pi_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 3.3.1 (Crochet). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \Pi_n$ un diagramme de Young. Notons $C_\lambda := \{(k; h) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \mid Y_k[h] \neq \emptyset\}$ l'ensemble des cellules du diagramme. Pour $(k_0; h_0) \in C_\lambda$, on définit son crochet $H_\lambda(k_0; h_0)$ par :

$$H_\lambda(k_0; h_0) = \{(k; h) \in C_\lambda \mid k = k_0 \wedge (h \geq h_0) \vee (k \geq k_0 \wedge h = h_0)\}$$

C'est l'ensemble des cellules à sa droite sur la même ligne ou en dessous dans la même colonne. On notera également $h_\lambda(k_0; h_0)$ son cardinal. Si cette dernière vaut 1 on dit que la cellule est un coin. Finalement, on définit la quantité suivante :

$$e_\lambda := \frac{n!}{\prod_{(k; h) \in C_\lambda} h_\lambda(k; h)}$$

Maintenant que les objets sont définis, attelons-nous à montrer la formule de longueur de crochet : $e_\lambda = d_\lambda$ pour tout $\lambda \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Pi_n =: \Pi^*$.

Propriété 3.3.2 (Caractérisation récurrente de $(d_\lambda)_{\lambda \in \Pi^*}$). Pour $\lambda \in \Pi^*$, on note $B(\lambda)$ l'ensemble des $\mu \in \Pi^*$ tels que $C_\mu \subset C_\lambda$ et $C_\lambda \setminus C_\mu$ est constitué d'une unique cellule. Avec ces notations, on a la formule suivante pour $\lambda \notin \Pi_1$:

$$d_\lambda = \sum_{\mu \in B(\lambda)} d_\mu$$

Cette relation avec $d_{\{1\}} = 1$ caractérise alors totalement $(d_\lambda)_{\lambda \in \Pi^*}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, considérons l'application ψ qui à $Y \in \mathcal{Y}_n$ associe $(Y_k \setminus \{n\})_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{Y}_{n-1}$. Pour $\mu \in \pi_n$, l'application ψ est clairement une bijection de $\{Y \in \mathcal{Y}_n \mid \lambda(Y) = \mu\}$ dans son image $\{Y' \in \mathcal{Y}_{n-1} \mid \lambda(Y') \in B(\mu)\}$. En écrivant cette dernière comme une union disjointe selon la forme des tableaux, on obtient le résultat. Une récurrence immédiate montre que la formule caractérise bien la famille avec $d_{\{1\}} = 1$. ■

Pour montrer la formule de longueur de crochet, nous allons donc vérifier que $(e_\lambda)_{\lambda \in \Pi^*}$ vérifie la même relation de récurrence que $(d_\lambda)_{\lambda \in \Pi^*}$, sachant qu'on

remarque directement $e_{(\{1\})} = 1$. Pour cela, considérons la marche aléatoire introduite dans la définition suivante.

Définition 3.3.3 (Marche sur les crochets). *Soit un diagramme $\lambda \in \Pi^*$. On définit une marche aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur les crochets des cellules de λ comme il suit :*

- $X_0 := (K_0; H_0)$ est tiré uniformément dans C_λ .
 - Soit $n \in \mathbb{N}$, si $X_n = (K_n; H_n)$ n'est pas un coin, X_{n+1} est tiré uniformément dans $H_\lambda(K_n; H_n)$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$, si X_n est un coin, on stationne en posant $X_{n+1} = X_n$.
- Avec une telle construction, la marche atteint toujours un coin puis stationne (la longueur de crochet décroît strictement). On notera F_λ la variable aléatoire représentant ce coin et τ_λ celle indiquant le premier indice pour lequel on l'obtient.

Nous allons voir que la relation de récurrence découle du fait que la masse de la distribution des états de F_λ est de 1 pour tout $\lambda \in \Pi^*$. C'est ici que réside l'intérêt de la construction.

Propriété 3.3.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout coin (k_0, h_0) d'un diagramme de Young $\lambda \in \Pi_n$, on a :*

$$\mathbb{P}[F_\lambda = (k_0; h_0)] = \frac{e_\mu}{e_\lambda}$$

Où $\mu := (\lambda_k - \mathbb{1}_{k=k_0})_{1 \leq k \leq n} \in \Pi_{n-1}$.

Démonstration. On a $h_\lambda(k_0; h_0) = 1$, de plus si $(k; h) \in C_\mu$ on a $h_\mu(k; h) = h_\lambda(k; h) - \mathbb{1}_{k \neq k_0 \vee h \neq h_0}$ donc en substituant dans les expressions de e_λ et e_μ puis en simplifiant, on obtient :

$$\frac{e_\mu}{e_\lambda} = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{k_0-1} \frac{h_\lambda(k; h_0)}{h_\lambda(k; h_0) - 1} \prod_{h=1}^{h_0-1} \frac{h_\lambda(k_0; h)}{h_\lambda(k_0; h) - 1}$$

En utilisant l'égalité $\frac{X}{X-1} = 1 + \frac{1}{X-1}$ et en développant, on obtient :

$$\frac{e_\mu}{e_\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{\substack{A \in \mathcal{P}(\llbracket 1; k_0 \rrbracket) \\ B \in \mathcal{P}(\llbracket 1; h_0 \rrbracket)}} Q(A; B)$$

Où pour tout $A \in \mathcal{P}(\llbracket 1; k_0 \rrbracket)$ et $B \in \mathcal{P}(\llbracket 1; h_0 \rrbracket)$, on a défini :

$$Q(A; B) := \prod_{k \in A} \frac{1}{h_\lambda(k; h_0) - 1} \prod_{h \in B} \frac{1}{h_\lambda(k_0; h) - 1}$$

Nous allons donner un sens probabiliste à ces dernières quantités qui nous permettra de conclure. Pour $A \in \mathcal{P}(\llbracket 1; k_0 \rrbracket)$ et $B \in \mathcal{P}(\llbracket 1; h_0 \rrbracket)$, on note $P(A; B)$ la probabilité que la marche vérifie l'événement $E(A; B) : \{K_j\}_{0 \leq j \leq \tau_\lambda} = A \cup \{k_0\}$ et $\{H_j\}_{0 \leq j \leq \tau_\lambda} = B \cup \{h_0\}$. Avec cette notation, comme l'événement $\{F_\lambda =$

$(k_0; h_0)$ est l'union disjointe des $E(A; B)$ pour $A \in \mathcal{P}(\llbracket 1; k_0 \rrbracket)$ et $B \in \mathcal{P}(\llbracket 1; h_0 \rrbracket)$, on en déduit que :

$$\mathbb{P}[F_\lambda = (k_0; h_0)] = \sum_{\substack{A \in \mathcal{P}(\llbracket 1; k_0 \rrbracket) \\ B \in \mathcal{P}(\llbracket 1; h_0 \rrbracket)}} P(A; B)$$

Nous allons donc montrer $P(A; B) = \frac{1}{n}Q(A; B)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\llbracket 1; k_0 \rrbracket)$ et $B \in \mathcal{P}(\llbracket 1; h_0 \rrbracket)$ par récurrence sur $\text{Card}A + \text{Card}B$ pour conclure. Si $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, on a facilement l'égalité : le parcours est alors imposé par B ou A respectivement, le facteur $\frac{1}{n}$ correspond à la probabilité de choix de la case initiale et chaque terme du produit correspond à la probabilité d'une étape de la marche. Supposons maintenant $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$, on note alors $k^* := \min A$ et $h^* := \min B$. Si l'on considère la première étape de la marche, on choisit une cellule uniformément dans $H_\lambda(k^*; h^*) \setminus \{(k^*; h^*)\}$, ainsi en séparant le cas où cette dernière est dans la même ligne ou dans la même colonne que $(k^*; h^*)$, on obtient :

$$P(A; B) = \frac{1}{h_\lambda(k^*; h^*) - 1} [P(A \setminus \{k^*\}; B) + P(A; B \setminus \{h^*\})]$$

Où l'on a raisonné conditionnellement au choix de la première case pour la probabilité de gauche, puis multiplié par n pour obtenir l'égalité voulue.

Par hypothèse de récurrence, on a $P(A \setminus \{k^*\}; B) = \frac{1}{n}Q(A \setminus \{k^*\}; B)$ et $P(A; B \setminus \{h^*\}) = \frac{1}{n}Q(A; B \setminus \{h^*\})$ ainsi en injectant les définitions de ces quantités dans l'égalité précédente puis en factorisant les termes en commun, on obtient :

$$P(A; B) = \frac{1}{n} \frac{h_\lambda(k^*; h_0) + h_\lambda(k_0; h^*) - 2}{h_\lambda(k^*; h^*) - 1} Q(A; B)$$

D'où le résultat en remarquant l'égalité

$$h_\lambda(k^*; h_0) + h_\lambda(k_0; h^*) - 2 = h_\lambda(k^*; h^*) - 1$$

(voir figure 3). ■

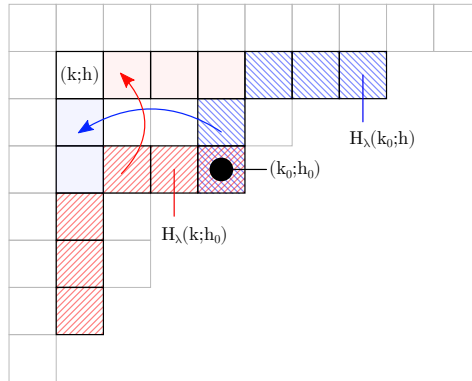


FIGURE 3 – Illustration de la dernière relation sur les longueurs de crochets utilisée dans la démonstration de la propriété 3.3.4

Utilisons cette priorité pour obtenir la formule que l'on voulait démontrer. Nous verrons son usage dans les prochaines sections.

Théorème 3.3.5 (Formule de longueur de crochet). *Pour tout $\lambda \in \Pi^*$, on a :*

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{(k;h) \in C_\lambda} h_\lambda(k;h)}$$

Démonstration. L'application de l'ensemble M des coins de λ dans $B(\lambda)$ qui à $(k_0; h_0)$ associe $(\lambda_k - \mathbb{1}_{k=k_0})_{1 \leq k \leq n}$ est bijective, on a donc par la propriété 3.3.4 :

$$\sum_{\mu \in B(\lambda)} \frac{e_\mu}{e_\lambda} = \sum_{(k;h) \in M} \mathbb{P}[F_\lambda = (k;h)] = 1$$

D'où, en multipliant par e_λ la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \Pi^*}$ vérifie la même caractérisation récurrente que $(d_\lambda)_{\lambda \in \Pi^*}$. Ainsi, pour tout $\lambda \in \Pi^*$, $d_\lambda = e_\lambda$. ■

3.4 Processus d'extension de Plancherel

Théorème 3.4.1 (Majoration de Λ). *On a $\Lambda \leq 2$.*

Démonstration. On va introduire une façon particulière de construire la suite de variables aléatoires $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, appelée processus d'extension de Plancherel. Pour cela, on se donne K_n une variable aléatoire uniforme de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pose σ_1 la variable aléatoire constante de S_1 et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on construit σ_{n+1} à partir de σ_n en posant $\sigma_{n+1}(n+1) = K_n$ et :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sigma_{n+1}(k) = \sigma_n(k) + \mathbb{1}_{\sigma_n(k) \geq K_n}$$

Il est facile de vérifier par récurrence que l'on produit ainsi une suite de variables uniformes non indépendantes. Considérons à partir de maintenant que $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est issue de ce processus. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si $\mu \in \Pi_{n+1}$ et $\mu' \in B(\mu)$, on a :

$$\mathbb{P}[\lambda^{n+1} = \mu \wedge \lambda^n = \mu'] = \frac{d_\mu d_\lambda}{(n+1)!}$$

En effet l'ordre des n premières images de σ_n et σ_{n+1} étant isomorphe, la forme de λ^n est la forme du tableau Q^{n+1} avant l'insertion de K_n en hauteur 1 lors de l'exécution de l'algorithme 2. Comme Q^{n+1} stocke l'ordre d'apparition des cases, la condition $\lambda^n = \mu'$ correspond donc au fait qu'en retirant la case de valeur $n+1$ à Q^{n+1} , on obtienne un tableau de Young de forme μ' . D'où le résultat par théorème 3.1.5, car il est facile de voir que $d_\mu d_\lambda$ correspond au nombre de paires $(P; Q) \in \mathcal{Y}_{n+1}^2$ avec P de forme μ et $(Q_k \setminus \{n+1\})_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{Y}_n$ de forme μ' . Remarquons maintenant que $L(\sigma_{n+1}) - L(\sigma_n)$ correspond à l'indicatrice de l'événement $\lambda^{n+1} = \text{gr}(\lambda^n)$, où $\text{gr}(\lambda^n)$ est le diagramme obtenu en ajoutant une case en fin de première ligne de λ^n . On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} l_{n+1} - l_n &= \mathbb{P}[\lambda^{n+1} = \text{gr}(\lambda^n)] = \sum_{\mu \in \Pi_n} \frac{d_\mu^2}{n!} \mathbb{P}[\lambda^{n+1} = \text{gr}(\mu) \mid \lambda^n = \mu] \\ &= \sum_{\mu \in \Pi_n} \frac{d_\mu^2}{n!} \frac{d_{\text{gr}(\mu)}}{(n+1)d_\mu} \end{aligned}$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, et en remarquant que gr est une injection de Π_n dans Π_{n+1} , on obtient :

$$\begin{aligned} l_{n+1} - l_n &\leq \left[\sum_{\mu \in \Pi_n} \frac{d_\mu^2}{n!} \left(\frac{d_{\text{gr}(\mu)}}{(n+1)d_\mu} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left[\sum_{\mu \in \Pi_n} \frac{d_{\text{gr}(\mu)^2}}{(n+1)!} \right]^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left[\sum_{\mu \in \Pi_{n+1}} \frac{d_\mu^2}{(n+1)!} \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Par une simple récurrence on obtient alors que $l_n \leq 2\sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où $\Lambda \leq 2$. ■

4 Résolution par minimisation

Dans cette partie, nous allons voir que les diagrammes de Young tirés selon la mesure de Plancherel admettent, en un certain sens, une forme limite que l'on obtiendra par minimisation. A partir de ce résultat, à priori plus fort, nous terminerons de montrer le théorème principal.

4.1 Cadre d'étude

Définition 4.1.1 (Diagramme continu de Young). *On définit \mathcal{F} l'espace des diagrammes continus de Young comme l'ensemble des fonctions $\phi_\lambda : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ définies par $\phi_\lambda(x) = 0$ pour $x \geq \sqrt{n}$ et :*

$$\forall x \in [0; \sqrt{n}[\quad \phi_\lambda(x) = \frac{\lambda_{1+\lfloor x\sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n}}$$

Où $\lambda \in \Pi_n$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Ces fonctions sont décroissantes, à support compact et vérifient par construction :

$$\int_0^{+\infty} \phi_\lambda(x) dx = 1$$

Définition 4.1.2 (Longueur de crochet continue). *Pour un diagramme $f \in \mathcal{F}$ on note :*

$$f^* : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, y \rightarrow \inf\{x \in \mathbb{R}_+ \mid f(x) \leq y\}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in [0; f(x)]$, on définit la longueur de crochet de f au point $(x; y)$ par :

$$h_f(x; y) := f(x) - y + f^*(y) - x$$

Propriété 4.1.3 (Intégrale de crochet). *Pour un diagramme $f \in \mathcal{F}$, l'intégrale :*

$$\int_0^{f^*(0)} \int_0^{f(x)} \ln[h_f(x; y)] dy dx$$

est absolument convergente, on note alors $\mathcal{H}(f)$ sa valeur.

Démonstration. On remarque facilement que f^* est décroissante. Soit $x \in [0; f^*(0)]$ et $y \in [0; f(x)[$, on a $f^*(y) - x \geq 0$, ainsi :

$$f(x) - y \leq h_f(x; y) \leq h_f(0; 0).$$

En utilisant ces inégalités, on obtient alors :

$$\begin{aligned} |\ln[h_f(x; y)]| &= \ln[h_f(x; y)] \mathbf{1}_{h_f(x; y) > 1} - \ln[h_f(x; y)] \mathbf{1}_{h_f(x; y) \leq 1} \\ &\leq \ln[h_f(0; 0)] - \ln[f(x) - y] \mathbf{1}_{f(x) - y \leq 1}. \end{aligned}$$

En intégrant de chaque coté, on en déduit que pour tout $x \in [0; f^*(0)]$ on a :

$$\int_0^{f(x)} |\ln[h_f(x; y)]| dy \leq f(x) \ln[h_f(0; 0)] - \int_0^1 \ln t dt = f(x) \ln[h_f(0; 0)] + 1$$

D'où finalement la convergence absolue. ■

Théorème 4.1.4 (Formule de longueur de crochet asymptotique). *Il existe une constante $C_h > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $\lambda \in \Pi_n$ on ait $|\Delta_\lambda| \leq C_h \sqrt{n} \ln n$, où l'on a défini :*

$$\Delta_\lambda := \ln \left[\frac{d_\lambda^2}{n!} \right] + n[1 + 2\mathcal{H}(\phi_\lambda)]$$

Démonstration. Pour $(k; h) \in C_\lambda$ on définit l'erreur que l'on commet pour l'approximation de l'intégrale sur $[(h-1)/\sqrt{n}; h/\sqrt{n}] \times [(k-1)/\sqrt{n}; k/\sqrt{n}]$ en remplaçant l'intégrande par sa valeur au centre du domaine par :

$$E_\lambda(k; h) := \int_{(h-1)/\sqrt{n}}^{h/\sqrt{n}} \int_{(k-1)/\sqrt{n}}^{k/\sqrt{n}} \ln[h_{\phi_\lambda}(x; y)] dx dy - \frac{1}{n} \ln \left[\frac{h_\lambda(k; h)}{\sqrt{n}} \right]$$

En explicitant simplement les définitions de ϕ_λ , h_{ϕ_λ} et h_λ , on a pour tout $(x'; y') \in]-1/2; 1/2]^2$:

$$\sqrt{n} h_{\phi_\lambda} \left(\frac{k-1/2-x'}{\sqrt{n}}; \frac{h-1/2-y'}{\sqrt{n}} \right) = h_\lambda(k; h) + x' + y'$$

Car $h_\lambda(k; h) = 1 + \lambda_k - k + \text{Card}\{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid \lambda_i \geq h\} - h$. Comme l'illustre la

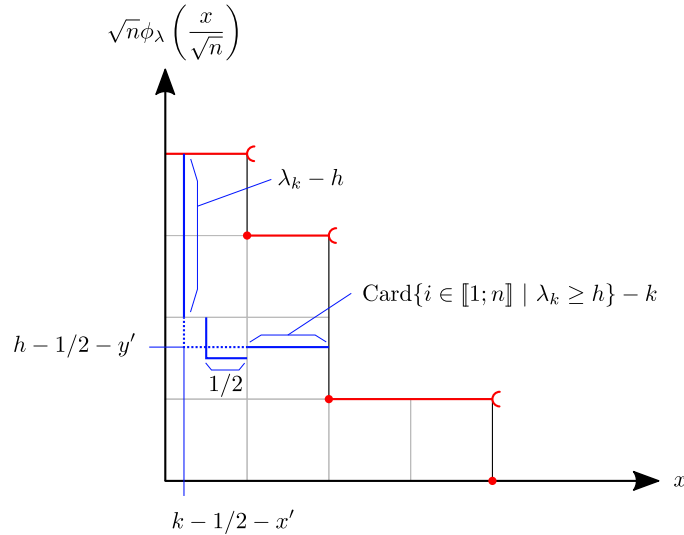


FIGURE 4 – Illustration du lien entre $\lambda \in \Pi^*$ et sa fonction associée $\phi_\lambda \in \mathcal{F}$

figure 4, on a :

$$\sqrt{n}f\left(\frac{k-1/2-x'}{\sqrt{n}}\right) = \lambda_k$$

$$\text{Et } \sqrt{n}f^*\left(\frac{h-1/2-y'}{\sqrt{n}}\right) = \text{Card}\{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid \lambda_i \geq h\}$$

Ainsi, en effectuant le changement de variable $x' = k - 1/2 - x\sqrt{n}$ et $y' = h - 1/2 - y\sqrt{n}$, puis en simplifiant on obtient :

$$E_\lambda(k; h) = \frac{1}{n} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \ln\left(1 + \frac{x' + y'}{h_\lambda(k; h)}\right) dx' dy'$$

Tout d'abord, on calcule facilement l'intégrale dans le cas $h_\lambda(k; h) = 1$:

$$|E_\lambda(k; h)| = \frac{1}{2n} \left(\frac{3}{2} - 2 \ln 2 \right) \leq \frac{1}{n}$$

Par continuité de $t \mapsto \ln(1+t)/t$ sur le compact $[-1/2; 1/2]$, on a l'existence de $C \geq 2$ tel que $|\ln(1+t)| \leq C|t|$ pour tout $t \in [-1/2; 1/2]$. Ainsi en utilisant cette inégalité dans l'intégrale pour $h_\lambda(k; h) \geq 2$ et en isolant le cas $h_\lambda(k; h) = 1$ déjà traité, on obtient dans n'importe quelles conditions :

$$|E_\lambda(k; h)| \leq \frac{C}{nh_\lambda(k; h)}$$

Soit un entier $m \in \llbracket 1; n \rrbracket$, notons H_m l'ensemble des cellules $(k; h) \in C_\lambda$ vérifiant $h_\lambda(k; h) = m$. La fonction h_λ étant strictement décroissante (par rapport à ses deux arguments), deux éléments de H_m ne peuvent être dans une même ligne ou une même colonne. Pour $(k; h) \in H_m$, on a au moins h cellules dans sa colonne, ainsi, en sommant, on doit avoir :

$$\frac{\text{Card}(H_m)^2}{2} \leq \sum_{k=1}^{\text{Card}(H_m)} k \leq \sum_{(k; h) \in H_m} h \leq n$$

D'où $\text{Card}(H_m) \leq \sqrt{2n}$. On en déduit :

$$\sum_{(k; h) \in C_\lambda} \frac{1}{h_\lambda(k; h)} \leq \sqrt{2n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \leq \sqrt{2n} \ln n$$

Notons :

$$A_n := \ln \left[\frac{\sqrt{2\pi n}}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right]$$

Par formule de Stirling, il existe $B > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $|A_n| \leq B$. Par théorème 3.3.5 et en faisant apparaître artificiellement A_n , on développe :

$$\begin{aligned} \ln \left[\frac{d_\lambda^2}{n!} \right] &= -2 \ln \left[\frac{n!}{e_\lambda} \right] + n \ln n + \ln \sqrt{2\pi n} - n - A_n \\ &= \ln \sqrt{2\pi n} - n - A_n - 2 \sum_{(k; h) \in C_\lambda} \ln \left[\frac{h_\lambda(k; h)}{\sqrt{n}} \right] \end{aligned}$$

Finalement, en injectant l'égalité précédente dans la formule de Δ_λ et en décomposant l'intégrale afin de faire apparaître les erreurs d'approximations que l'on a introduites, on obtient :

$$\begin{aligned} |\Delta_\lambda| &= \left| \ln \sqrt{2\pi n} - A_n + 2n \sum_{(k;h) \in C_\lambda} E_\lambda(k;h) \right| \\ &\leq |\ln \sqrt{2\pi n}| + |A_n| + 2C \sum_{(k;h) \in C_\lambda} \frac{1}{h_\lambda(k;h)} \\ &\leq C_h \sqrt{n} \ln n \end{aligned}$$

Où, l'on choisit facilement $C_h > 0$ judicieusement pour convenir. \blacksquare

Le but de ce qui suit va être de minimiser \mathcal{H} sur l'ensemble \mathcal{F} afin d'obtenir des informations sur la probabilité des différentes formes possibles des diagrammes continus de Young par le biais du théorème 4.1.4. Pour cela on va commencer par étendre et modifier la description de \mathcal{F} pour faciliter le calcul de \mathcal{H} , ce qui nous permettra ensuite d'exhiber un minimant unique, forme limite en un certain sens.

4.2 Forme limite

Définition 4.2.1. Notons \mathcal{G} l'espace vectoriel des fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- g est Lipschitzienne, dérivable presque partout et à support compact
 - pour tout $u \in \mathbb{R}$, $g(u) - g(0) = \int_0^u g'(t) dt$ (absolue continuité)
- On note \mathcal{G}_1 le sous ensemble des fonctions $g \in \mathcal{G}$ qui vérifient de plus :
- $g \geq 0$
 - $\text{sgn}(u)g'(u) \in [-2; 0]$ pour $u \in \mathbb{R}$ quand g' est bien défini
 - $\int_{\mathbb{R}} g(u) du = 1$

Remarque. Le caractère Lipschitzien implique l'absolue continuité et la dérivabilité presque partout, mais ce résultat n'est pas évident à démontrer, c'est pourquoi on ajoute l'hypothèse.

Propriété 4.2.2. L'application $L : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $g \in \mathcal{G}^2$ par :

$$L(g) := - \int_{\mathbb{R}} g'(u) [u \ln |u| - u] du$$

est bien définie et est linéaire.

Démonstration. La linéarité de L est claire par celle de l'opérateur de dérivation et de l'intégrale. Quant à la bonne définition, puisque g est à support compact et g' est bornée par caractère Lipschitzien de g , il en est de même pour $u \mapsto g'(u)[u \ln |u| - u] : L(g)$ existe. \blacksquare

Propriété 4.2.3. L'application $B : \mathcal{G}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $(g; h) \in \mathcal{G}^2$ par :

$$B(g; h) := -\frac{1}{4} \iint_{\mathbb{R}^2} \ln |s - t| g'(s) h'(t) ds dt$$

est bien définie et c'est un produit scalaire sur \mathcal{G} . On notera $Q : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f \mapsto B(f; f)$ et $\|\cdot\|_Q : f \mapsto \sqrt{Q(f)}$ la norme induite.

Démonstration. La correcte définition de B est claire pour des raisons de support compact et car g' et h' sont bornées. En effet, pour tout $M > 0$, on a par simple changement de variables :

$$\iint_{[-M; M]^2} |\ln |s - t|| ds dt \leq \int_{-M}^M \int_{-2M}^{2M} |\ln |s|| ds dt < +\infty$$

Il reste à prouver que B est un produit scalaire. La bilinéarité et la symétrie sont immédiates. Il nous reste à prouver la positivité et la séparation. Pour cela nous montrons l'égalité suivante :

$$\forall g \in \mathcal{G} \quad Q(g) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} |x| |\hat{h}(x)|^2 dx,$$

Où $\hat{h} : u \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-ixu} dx$ désigne la transformée de Fourier de $h \in L^2(\mathbb{R})$. Pour ce faire, introduisons \tilde{h} la transformée de Hilbert de $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ presque partout dérivable, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ en lequel h' existe via :

$$\tilde{h}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(y)}{x - y} dy$$

où l'on considère la valeur principale de Cauchy comme valeur de l'intégrale. Cette dernière est bien définie. On a :

$$\tilde{h}(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{x-\epsilon} \frac{h(y)}{x - y} dy + \int_{x+\epsilon}^{\infty} \frac{h(y)}{x - y} dy \right)$$

Puis par changement de variable et un regroupement de terme :

$$\tilde{h}(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{h(x - t) - h(x + t)}{t} dt$$

Ce qui est convergent car on obtient alors que l'intégrande est continue en 0 dès lors que h est dérivable en x .

On a ainsi

$$\tilde{h}(x) = \int_0^{\infty} \frac{h(x - t) - h(x + t)}{\pi t} dt$$

Nous avons le lien suivant (voir lemme 5.0.2 en annexe) entre transformée de Fourier et de Hilbert : pour tout $h \in L^2(\mathbb{R})$ presque partout dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ où h' est définie :

$$\hat{\tilde{h}}(x) = -i \operatorname{sgn}(x) \hat{h}(x)$$

Rappelons également que l'on a $\hat{h}'(x) = ix\hat{h}(x)$ pour h intégrable. Passons maintenant au calcul. Via une intégration par partie et comme h est à support compact, on a facilement :

$$\tilde{h}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} h'(u) \ln|x-u| du$$

Via cette identité et par définition de Q , on en déduit $Q(h) = -\frac{\pi}{4} \langle h'; \tilde{h} \rangle$ où $\langle \cdot; \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire standard de $L^2(\mathbb{R})$. La transformation de Fourier étant une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire, il vient alors :

$$Q(h) = -\frac{\pi}{4} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}'(x) \overline{\hat{h}(x)} dx = \frac{\pi}{4} \int_{\mathbb{R}} |x| |\hat{h}(x)|^2 dx \quad (1)$$

La positivité et la séparation en découle puisque les fonctions de \mathcal{G} sont continues et ont donc une transformée de Fourier continue. ■

Propriété 4.2.4 (Changement de coordonnées). *L'ensemble \mathcal{F} s'injecte naturellement dans \mathcal{G}_1 par l'application bien définie $R : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_1$ qui à $f \in \mathcal{F}$ associe $g : u \mapsto h(u) - u$ où $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction correspondant au graphe G' obtenu par rotation de $\pi/4$ dans \mathbb{R}^2 de :*

$$G := \{0\} \times [f(0) : +\infty[\cup \bigcup_{x_0 \in]0; +\infty[} \{x_0\} \times \left[\lim_{x \rightarrow x_0^{+*}} f(x); \lim_{x \rightarrow x_0^{-*}} f(x) \right]$$

où "*" indique que la limite est épointée. Avec cette injection, on a :

$$\mathcal{H}(f) = J(R[f])$$

pour tout $f \in \mathcal{F}$ avec $J(h) := Q(h) + L(h) + \frac{\ln^2}{2}$ pour tout $h \in \mathcal{G}$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{F}$, on a $f = \phi_\lambda$ pour un certain $\lambda \in \Pi_n$, G est donc constitué de deux demi-droites ($\{0\} \times [f(0); +\infty[$ et $[f^*(0); +\infty[\times \{0\}$) et d'un nombre fini de segments, chacune de ces parties nous donne après rotation le graphe d'une fonction affine définie sur un segment ou une demi-droite de \mathbb{R} de pente ± 1 . De plus, il est facile de vérifier que ces ensembles de définitions se recollent bien pour donner une fonction h dérivable presque partout, Lipschitzienne et absolument continue. En soustrayant $u \mapsto |u|$ on conserve ces propriétés, de plus, on obtient $g \geq 0$ à support compact, $\text{sgn}(u)g'(u) \in [-2; 0]$ en tout point $u \in \mathbb{R}$ où g' existe. On remarque également que $\int_{\mathbb{R}} g$ correspond à l'aire entre le graphe de $u \mapsto |u|$ et celui de h . Par construction de la rotation et comme $\int_{\mathbb{R}_+} f = 1$, l'intégrale de g vaut bien 1. L'application R est bien définie et $\text{Im}R \subset \mathcal{G}_1$.

Montrons maintenant qu'avec cette injection $\mathcal{H}(f) = J(R[f])$. Par construction de h , on a pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$:

$$[y = f(x) \vee x = f^*(y)] \iff \frac{x+y}{\sqrt{2}} = h\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)$$

On pose les changements de variables suivants pour l'intégrale $\mathcal{H}(f)$:

$$(t; s) = \left(\frac{x - f(x)}{\sqrt{2}}, \frac{f^*(y) - y}{\sqrt{2}} \right)$$

Par la remarque précédente sur la définition de h , on obtient facilement :

$$(x; y) = \left(\frac{h(t) + t}{\sqrt{2}}; \frac{h(s) - s}{\sqrt{2}} \right)$$

On peut effectuer ces deux changements de variables l'un après l'autre et on a les différentielles suivantes :

$$dx = \frac{h'(t) + 1}{\sqrt{2}} dt \quad ; \quad dy = \frac{h'(s) - 1}{\sqrt{2}} ds$$

Avec les nouvelles variables on a :

$$\sqrt{2}(s - t) = f(x) - y + f^*(y) - x \geq 0$$

Et on a facilement le nouveau domaine d'intégration :

$$D := \{(t; s) \in [-\sqrt{2}f(0); \sqrt{2}f^*(0)]^2 \mid t \leq s\}$$

D'où, sans oublier le changement de signe du changement de domaine, y étant décroissant en t :

$$\mathcal{H}(f) = \frac{1}{2} \iint_D \ln[\sqrt{2}(s - t)][1 + h'(t)][1 - h'(s)] ds dt$$

On remarque que le domaine d'intégration peut être étendu à $D_\infty := \{(t; s) \in \mathbb{R}^2 \mid t \leq s\}$ puisque l'intégrande est nulle sur $D_\infty \setminus D$. Pour presque tout $(t; s) \in D_\infty$ on a $1 + h'(t) = g'(t) - 2\mathbb{1}_{t>0}$ et $1 - h'(s) = g'(s) + 2\mathbb{1}_{s<0}$ d'où finalement en développant avec ces égalités puis en simplifiant :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f) - Q(g) &= - \int_{\mathbb{R}} g'(t) \int_0^t \ln[\sqrt{2}(s - t)] ds dt \\ &= L(g) - \frac{\ln 2}{2} \int_{\mathbb{R}} u g'(u) du = L(g) + \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

■

Théorème 4.2.5 (Minimant de \mathcal{J}). On définit $\Omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\Omega(u) = 0$ pour $|u| > \sqrt{2}$ et :

$$\forall u \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \quad \Omega(u) = \frac{2}{\pi} \left[u \arcsin \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{2 - u^2} \right] - |u|$$

Alors $\Omega \in \mathcal{G}_1$, $J(\Omega) = -1/2$ de plus pour tout $g \in \mathcal{G}_1$ on a :

$$J(g) \geq J(\Omega) + Q(g - \Omega)$$

En particulier c'est l'unique minimant dans \mathcal{G}_1 de J .

Démonstration. Commençons par remarquer quelques propriétés utiles sur Ω . La fonction Ω' est nulle hors de $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, par calcul on a facilement que Ω n'est pas dérivable en 0 et que pour $u \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \setminus \{0\}$ on a :

$$\Omega'(u) = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{sgn}(u).$$

On a clairement $\text{sgn}(u)\Omega'(u) \in [-2; 0]$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ en lequel Ω' existe. L'absolue continuité est claire, le caractère Lipschitzien en découle, $\Omega \geq 0$. Il reste à voir que l'intégrale $I := \int_{\mathbb{R}} \Omega$ vaut 1. La fonction $\text{Id } \Omega$ étant à support compact, on l'obtient facilement en écrivant :

$$0 = \int_{\mathbb{R}} (\text{Id } \Omega)' = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (\Omega(u) + u\Omega'(u))du = 2I - \frac{2}{\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-u^2} du = 2(I-1)$$

On a donc bien $\Omega \in \mathcal{G}_1$. Considérons maintenant l'application suivante :

$$p : u \longmapsto - \int_{\mathbb{R}} \Omega'(s) \ln |s-u| ds - 2(u \ln |u| - u) - u \ln 2$$

En dérivant p en utilisant le support compact de Ω pour appliquer le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$p'(u) = -\pi \widetilde{\Omega}'(u) - 2 \ln |u| - \ln 2$$

En utilisant la formule de $\widetilde{\Omega}'$ (voir proposition ?? en annexe), on a donc $p'(u) = 0$ pour $u \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ et :

$$p'(u) = 2 \ln \left(\frac{|u|}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{u^2}{2} - 1} \right), \text{ pour } u \in \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

On a p constante sur $] -\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ et valant $p(0)$. Dans le calcul de $p(0)$, l'intégrande est impaire et le domaine d'intégration est paire, les autres termes étant nuls on a $p(0) = 0$. Finalement on a $p \text{sgn} \leq 0$ en étudiant le signe de g' . Comme pour $g \in \mathcal{G}_1$ on a $g' \text{sgn} \leq 0$, on en déduit que pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ (faire une disjonction selon si $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ ou non) :

$$[g'(t) - \Omega'(t)]p(t) \geq 0$$

Et donc en intégrant :

$$\int_{\mathbb{R}} g'p \geq \int_{\mathbb{R}} \Omega p$$

Par l'expression de p et en développant cela se réécrit :

$$4B(g; \Omega) + 2L(g) - \ln 2 \int_{\mathbb{R}} u g'(u) du \geq 4B(\Omega; \Omega) + 2L(\Omega) - \ln 2 \int_{\mathbb{R}} u \Omega'(u) du$$

On a par définition de \mathcal{G}_1 et en intégrant par partie $\int_{\mathbb{R}} \text{Id} \cdot g' = -\int_{\mathbb{R}} g = -1$, de même pour Ω et donc par linéarité de B et L on obtient $2B(g-\Omega, \Omega) \geq L(\Omega-g)$. Enfin en écrivant $J(g) = Q(\Omega) + Q(g-\Omega) + 2B(\Omega; g-\Omega) + L(g) + \frac{1}{2} \ln 2$, on déduit finalement :

$$J(g) \geq Q(\Omega) + Q(g-\Omega) + L(\Omega) + \frac{1}{2} \ln 2 = J(\Omega) + Q(g-\Omega)$$

Pour conclure notre preuve, nous calculons explicitement $J(\Omega)$. On a déjà facilement :

$$\begin{aligned} L(\Omega) &= -1 - 2 \int_0^{\sqrt{2}} \Omega'(u) u \ln u du \\ &= -1 + 2 \int_0^{\sqrt{2}} u \ln u du - \frac{4}{\pi} \int_0^{\sqrt{2}} u \ln u \arcsin \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) du \end{aligned}$$

Le lemme 5.0.3 en annexe permet l'évaluation de la dernière intégrale, non triviale, en nous indiquant :

$$\int_0^1 x \ln x \arcsin x dx = \frac{\pi}{8} (\ln 2 - 1)$$

Finalement en se ramenant à notre cas :

$$L(\Omega) = -1 + (\ln 2 - 1) + 1 - \frac{3}{2} \ln 2 = -1 - \frac{1}{2} \ln 2$$

On sait déjà que p est nulle sur $\text{supp}(\Omega')$, par conséquent :

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \Omega'(u) p(u) du = 4Q(\Omega) + 2L(\Omega) + \ln 2$$

Ainsi $Q(\Omega) = \frac{1}{2}$, puis $J(\Omega) = -\frac{1}{2}$. ■

Propriété 4.2.6 (Majoration du nombre de partitions). Notons $p(n) := \text{Card}(\Pi_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $C_p > 0$ tel pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$p(n) \leq e^{C_p \sqrt{n} \ln n}$$

Démonstration. Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ notons Σ_n le sous ensemble des diagrammes de Young $\lambda \in \Pi_n$ dits stricts, qui vérifient $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \llbracket$ tels que $\lambda_i \neq 0$. Définissons $q(n) := \text{Card}(\Sigma_n)$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1; n \llbracket$ on définit également Σ_n^k le sous ensemble des diagrammes de Young $\lambda \in \Sigma_n$ qui vérifient de plus $\text{Card}\{i \in \llbracket 1; n \llbracket \mid \lambda_i = 0\} = k$. On note $q(n; k)$ son cardinal. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1; n \llbracket$, pour $\lambda \in \Sigma_n^k$ on a par définition que :

$$n = \sum_{i=1}^k \lambda_i \geq \sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$$

On en déduit la nullité de $q(n; k) = 0$ si $k \geq \sqrt{2n}$. En observant l'inégalité $q(n; k) \leq n^k$, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$q(n) = \sum_{1 \leq k \leq \sqrt{2n}} q(n; k) \leq n^{\sqrt{2n}+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, considérons l'application $\gamma : \Pi_n \rightarrow (\bigcup_{k=1}^n \Sigma_n)^2$ qui à λ associe les diagrammes de Young stricts $\gamma_1(\lambda)$ et $\gamma_2(\lambda)$ correspondants naturellement aux ensembles $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et $\{\text{Card}\{k \in \llbracket 1; n \llbracket \mid \lambda_k \geq i\}\}_{1 \leq i \leq n}$ respectivement. On vérifie facilement que cette application est injective.

D'où finalement :

$$p(n) \leq \left(\sum_{k=1}^n q(k) \right)^2 \leq n^{2(\sqrt{2n}+2)} = e^{2 \ln(n)(\sqrt{2n}+2)} \leq e^{C_p \sqrt{n} \ln n}$$

En choisissant judicieusement $C_p > 0$. ■

Théorème 4.2.7. *La variable aléatoire $\psi_n := R[\phi_{\lambda^n}]$ converge en probabilité vers Ω pour la norme $\|\cdot\|_Q$. Plus formellement :*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(\|\psi_n - \Omega\|_Q > \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\lambda \in \Pi_n$ notons $w_\lambda := R[\phi_\lambda]$ et $\mathcal{M}_n := \{\mu \in \Pi_n \mid \|w_\mu - \Omega\|_Q > \epsilon/\sqrt{2}\}$. Par théorème 4.2.5 on a que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_n$:

$$J(w_\lambda) \geq J(\Omega) + Q(w_\lambda - \Omega) \geq (-1 + \epsilon^2)/2$$

Ainsi $\mathcal{H}(\phi_\lambda) \geq -1 + \epsilon^2$ et donc par théorème 4.1.4 on obtient que :

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_n \quad \mathcal{P}(\lambda^n = \mu) \leq \exp[-\epsilon^2 + C_h \sqrt{n} \ln n]$$

En utilisant la proposition 4.2.6 on a $\text{Card } \mathcal{M}_n \leq p(n) \leq e^{C_p \sqrt{n} \ln n}$, ainsi :

$$\mathcal{P}(\lambda^n \in \mathcal{M}_n) = \sum_{\mu \in \mathcal{M}_n} \mathbb{P}(\lambda^n = \mu) \leq \exp[-\epsilon^2 n + (C_p + C_h) \sqrt{n} \ln n] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'où finalement pour tout $\epsilon > 0$ on a bien :

$$\mathbb{P}(\|\psi_n - \Omega\|_Q) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

■

Lemme 4.2.8 (Contrôle des normes). *Pour tout $A > 0$ et $L > 0$ il existe $C_q(A; L) > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{G}$ L -Lipshitzien et vérifiant $\text{supp}(f) \subset [-A; A]$ on ait :*

$$\|f\|_\infty \leq C_q \|f\|_Q^{1/2}$$

Démonstration. Afin de démontrer le résultat nous allons, introduire une fonction (appelée demi-dérivée) vérifiant une propriété sympathique sur sa transformée de Fourier. Soit f une fonction comme décrite dans l'énoncé. Introduisons sa demi-dérivée g définie en tout point de dérivabilité de f comme il suit :

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x \frac{f(x) - f(y)}{(x-y)^{3/2}} dy.$$

Remarquons que la bonne définition s'obtient par un développement limité à l'ordre 1 de f en x . Par hypothèse sur le support de f , on a la nullité de g sur $] -\infty; -A]$, et pour tout $x \in]A; +\infty[$:

$$g(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-A}^A \frac{f(y)}{(x-y)^{3/2}} dy$$

On observe ainsi facilement qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x > A$:

$$|g(x)| \leq Cx^{-3/2}$$

Ainsi $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. On a donc la bonne définition de la transformée de Fourier et cette dernière s'exprime pour $s \in \mathbb{R}^*$ comme :

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{1}{t^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} [f(x) - f(x-t)] e^{-isx} dx dt,$$

Puis via le changement de variable $u = |s|t$:

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{t^{3/2}} \hat{f}(s)(1 - e^{-ist}) dt = \frac{|s|^{1/2} \hat{f}(s)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-i \operatorname{sgn}(s)u}}{u^{3/2}} du$$

Calculons cette dernière intégrale. Oublions le terme signe, quitte à conjuguer le résultat à posteriori. En faisant une intégration par parties, on a :

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-iu}}{u^{3/2}} du = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-iu}}{\sqrt{u}} = 2 \int_0^\infty \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$$

Cette dernière intégrale est calculée dans le lemme 5.0.4 et vaut $e^{i\pi/4}\sqrt{\pi}$. On déduit de ce résultat la forme agréable pour la transformée de Fourier :

$$\hat{g}(s) = |s|^{1/2} e^{-\pi i \operatorname{sgn}(s)/4} \hat{f}(s)$$

En reprenant l'équation 1, on obtient alors l'égalité $\|g\|_2^2 = \|\hat{g}\|_2^2 = 4Q(f)/\pi$. Il nous reste plus qu'à contrôler $\|g\|$ par $\|f\|_\infty$. Pour cela, on introduit la demi-primitive de g qui est la fonction k bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x \frac{g(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

On va montrer que k (qui est intégrable) a même transformée de Fourier que f pour avoir l'égalité $f = k$ presque partout. On a pour $s \neq 0$ en utilisant la nullité de $g(t)$ pour $t \leq -A$:

$$\hat{k}(s) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-A}^\infty e^{-isx} \int_{-A}^\infty \frac{g(t)}{\sqrt{x-t}} dt dx$$

Par Fubini, changement de variable $v = x - t$, puis $u = |s|t$:

$$\hat{k}(s) = \frac{|s|^{-1/2}}{\pi\sqrt{2}} \int_{-A}^\infty g(t) e^{-ist} dt \int_0^\infty \frac{e^{-i \operatorname{sgn}(s)u}}{\sqrt{u}} du$$

On reconnaît l'intégrale précédemment calculée, d'où finalement le résultat :

$$\hat{k}(s) = |s|^{-1/2} e^{\pi i \operatorname{sgn}(s)/4} \hat{g}(s) = \hat{f}(s).$$

On peut maintenant entamer les majorations et minoration des normes. Puisque f est continue, $\|f\|_\infty$ est atteint en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. On en déduit alors par caractère Lipschitzien de f que :

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f| \geq \int_{\mathbb{R}} \max(0; \|f\|_\infty - L|x - x_0|) dx = \frac{\|f\|_\infty^2}{L}$$

De plus, comme $f = k$ presque partout, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\|f\|_1 &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-A}^A \int_{-A}^x \frac{|g(t)|}{\sqrt{x-t}} dt dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-A}^{3\sqrt{2}} |g(t)| \int_t^A \frac{1}{\sqrt{x-t}} dx dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-A}^A |g(t)| \sqrt{A-t} dt \\
&\leq \frac{2\sqrt{2A}}{\sqrt{\pi}} \|g\|_1
\end{aligned}$$

D'où en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|f\|_1 \leq \frac{2\sqrt{2A}}{\sqrt{\pi}} \langle g; \mathbf{1}_{[-A;A]} \rangle \leq \frac{2\sqrt{2A}}{\sqrt{\pi}} \|g\|_2 \|\mathbf{1}_{[-A;A]}\|_2 = \frac{8A}{\pi} Q(f)^{1/2}$$

D'où finalement le résultat :

$$\|f\|_\infty \leq \sqrt{\frac{8AL}{\pi}} \|f\|_Q^{1/2}$$

■

Théorème 4.2.9 (Forme limite). *La variable aléatoire ψ_n converge vers Ω uniformément en probabilité.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On remarque que par définition de R et théorème 3.1.5, on a :

$$\text{supp}[\psi_n] \subset [-3/\sqrt{2}; 3/\sqrt{2}] \iff L(\sigma_n) \leq 3\sqrt{n} \wedge D(\sigma_n) \leq 3\sqrt{n}$$

Donc en utilisant le lemme 2.2.2 on obtient :

$$\begin{aligned}
P_n := \mathbb{P}(\text{supp}[\psi_n] \not\subset [-3/\sqrt{2}; 3/\sqrt{2}]) &\leq \mathbb{P}[L(\sigma_n) > 3\sqrt{n}] + \mathbb{P}[D(\sigma_n) > 3\sqrt{n}] \\
&= 2\mathbb{P}[L(\sigma_n) > 3\sqrt{n}] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0
\end{aligned}$$

Finalement on en déduit le résultat par théorème 4.2.7 et lemme 4.2.8 en écrivant :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\|\psi_n - \Omega\|_\infty > \epsilon] &\leq \mathbb{P}(\|\psi_n - \Omega\|_\infty > \epsilon \wedge \text{supp}[\psi_n] \not\subset [-3/\sqrt{2}; 3/\sqrt{2}]) + P_n \\
&\leq \mathbb{P}(\|\psi_n - \Omega\|_Q > C_q(3/\sqrt{2}; 4)^{-2}\epsilon^2) + P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0
\end{aligned}$$

■

Nous pouvons maintenant finir de démontrer le théorème principal.

Théorème 4.2.10 (Minoration de Λ). *On a $\Lambda \geq 2$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que :

$$P_n := \mathbb{P}[\lambda_1^n \geq (2 - \epsilon)\sqrt{n}] \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

Alors il existe $\delta > 0$ et une extractrice ϕ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}[\lambda_1^{\phi(n)} \leq (2 - \epsilon)\sqrt{n}] \geq \delta$$

Par définition, cela induit directement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(\text{supp}[\psi_{\phi(n)}] \subset [-\sqrt{2} + \epsilon/\sqrt{2}; +\infty]) \geq \delta$$

et donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}[\|\psi_{\phi(n)} - \Omega\|_\infty \geq m] \geq \delta$$

avec $m := \Omega(-\sqrt{2} + \epsilon/\sqrt{2})$. Ce qui contredit directement la convergence uniforme en probabilité du théorème 4.2.9.

Soit $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a facilement :

$$\frac{l_n}{\sqrt{n}} \geq (2 - \epsilon)P_n$$

Par passage à la limite, on obtient donc $\Lambda \geq 2 - \epsilon$, d'où finalement le résultat en faisant tendre ϵ vers 0. ■

Théorème 4.2.11 (Résultat principal). *La suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie asymptotiquement $l_n \sim 2\sqrt{n}$, de plus $L(\sigma_n)/\sqrt{n}$ converge en probabilité vers 2.*

Démonstration. Découle du théorème 2.3.4 et des deux inégalités sur Λ des propositions 3.4.1 et 4.2.10 qui donnent $\Lambda = 2$. ■

5 Annexe

Lemme 5.0.1. La transformée de Hilbert de l'application Ω' est l'application g définie pour $|u| < \sqrt{2}$ par :

$$g(u) = -\frac{1}{\pi} [\ln |u| + \ln 2]$$

Et pour $|u| > \sqrt{2}$:

$$g(u) = -\frac{1}{\pi} \left[\ln |u| + \ln 2 + 2 \ln \left(\frac{|u|}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{u^2}{2} - 1} \right) \right]$$

Démonstration. Voir [1] pour une démonstration utilisant l'analyse complexe. ■

Lemme 5.0.2. On a le lien entre transformée de Fourier et Hilbert : pour tout $h \in L^1(\mathbb{R})$ presque partout dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ où $h'(x)$ est définie :

$$\hat{\tilde{h}}(x) = -i \operatorname{sgn}(x) \hat{h}(x).$$

Démonstration. Posons dans un premier temps $k : z \mapsto \frac{1}{\pi z}$ qui est une fonction presque partout lisse. Remarquons ensuite que pour h une fonction comme décrite par l'énoncé on a

$$\tilde{h} = h * k,$$

où $*$ désigne le produit de convolution.

Alors par passage en Fourier, on obtient

$$\hat{\tilde{h}} = \hat{h} \hat{k}.$$

Nous ne justifions pas ce passage, mais il est à noter qu'il y a effectivement un problème. Nous renvoyons au livre [3].

Le résultat tombera dès lors que l'on montre l'égalité $\hat{k} = -i \operatorname{sgn}$.

On a pour x non nul

$$\hat{k}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixu}}{\pi u} du = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(xu)}{\pi u} du - \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(xu)}{u} du.$$

Les intégrales en question sont bien convergentes. Pour la première et la seconde, il est simple de montrer qu'elles sont convergente sur \mathbb{R} privé d'un voisinage de 0 en faisant une intégration par parties. Ensuite en 0, il faut voir pour la première, l'intégrale comme la valeur principale de Cauchy et faire un développement limité en 0 du cosinus pour montrer la convergence. Pour la seconde, on a juste à remarquer que l'intégrande est continue en 0 et vaut 1.

Notons que la première intégrale est nulle car on intègre une fonction impaire.

On est donc ramené au calcul de

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(xu)}{u} du = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(xu)}{u} du = 2 \operatorname{sgn}(x) \int_0^{\infty} \frac{\sin(v)}{v} dv.$$

Pour ce faire, définissons pour $a > 0$:

$$f(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(u)}{u} e^{-au} du.$$

On peut dériver sous le signe intégrale (via des dominations sur tous compacts de \mathbb{R}_+^*), et l'on a

$$f'(a) = - \int_0^{\infty} \sin(u) e^{-au} du = \Im \left(\int_0^{\infty} \exp(iu - au) \right),$$

soit

$$f'(a) = \frac{1}{1+a^2}.$$

On en déduit

$$\lim_{\infty} f - f(a) = \frac{\pi}{2} - \arctan(a)$$

où la limite en l'infini s'obtient par théorème de convergence dominée et l'on montre

$$\lim_{\infty} f = 0.$$

On détermine aussi la limite en 0, pour ce faire, on remarque qu'une primitive de $u \mapsto \sin(u) \exp(-au)$ est

$$F_a(u) = - \frac{a \sin(u) + \cos(u)}{1+a^2} e^{-au}.$$

De plus,

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(u)}{u} e^{-au} du = \left[\frac{F_a(u)}{u} \right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{F_a(u)}{u^2} du$$

Une nouvelle convergence dominée nous offre que cette expression tend vers

$$\cos(1) - \int_1^{\infty} \frac{\cos(u)}{u^2} du$$

quand a tend vers 0.

Par une intégration par parties, on obtient que cette dernière expression vaut

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$$

D'autre part, une domination facile permet de montrer que

$$f_1(a) = \int_0^1 \frac{\sin(u)}{u} e^{-au} du$$

est continue en 0 et y vaut

$$\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u} du.$$

En résumé,

$$f(a) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

On en déduit alors

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

ce qui nous permet de conclure. ■

Lemme 5.0.3. *L'intégrale*

$$I = \int_0^1 x \ln x \arcsin x dx$$

est convergente et vaut

$$\frac{\pi}{8}(\ln(2) - 1).$$

Démonstration. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier la convergence de chacune des intégrales introduites quand cela est litigieux. On réalise le changement de variable $x = \sin u$:

$$I = \int_0^1 x \ln x \arcsin x dx = \int_0^{\pi/2} u \sin(u) \cos(u) \ln(\sin(u)) du.$$

On transforme via une intégration par parties en dérivant $u \mapsto u \sin(u)$ et en intégrant le reste :

$$I = \left[u \sin(u) (\sin(u) \ln(\sin(u)) - \sin(u)) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\sin(u) + u \cos(u)) (\sin(u) \ln(\sin(u)) - \sin(u)) du$$

L'expression du crochet, le développement du produit et un réarrangement des termes offrent

$$2I = -\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sin^2(u) \ln(\sin(u)) du + \int_0^{\pi/2} u \cos(u) \sin(u) du + \int_0^{\pi/2} \sin^2(u) du.$$

La seconde et troisième intégrale se calcule facilement, on donne leur valeur :

$$\int_0^{\pi/2} u \cos(u) \sin(u) du = \frac{\pi}{8},$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(u) du = \frac{\pi}{4}.$$

Pour la première, on a

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(u) \ln(\sin(u)) du = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u)) du}_{=:J} - \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^2(u) \ln(\sin(u)) du}_{=:K}.$$

Calculons J en utilisant le changement de variable $v = \pi/2 - u$.

$$\begin{aligned} 2J &= J + J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u)) du + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(v)) dv \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u) \cos(u)) du = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2u)) du - \frac{\pi}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

Et en exploitant la symétrie en $\pi/2$ du sinus

$$2J = J - \frac{\pi}{2} \ln(2) \text{ i.e } J = -\frac{\pi}{4} \ln(2).$$

Il ne nous reste plus que K à calculer avant l'application numérique. On fait une intégration par parties, comme précédemment le crochet sera nul et l'on trouve

$$K = \int_0^{\pi/2} \sin^2(u) \ln(\sin(u)) du - \int_0^{\pi/2} \sin^2(u) du$$

i.e

$$K = J - K - \frac{\pi}{4}.$$

Soit

$$K = \frac{J}{2} - \frac{\pi}{8}.$$

En somme

$$2I = -\frac{\pi}{2} - J + K + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = -\frac{J}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

D'où

$$I = \frac{\pi}{8}(\ln(2) - 1).$$

■

Lemme 5.0.4. *L'intégrale*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$$

est convergente et vaut

$$e^{i\pi/4} \sqrt{\pi}.$$

Démonstration. La convergence de I se déduit d'une intégration par parties, en dérivant le terme racine et intégrant l'exponentielle. Ensuite, considérons ln le logarithme principal, $\sqrt{\cdot}$ la racine carrée principale sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, ainsi que la fonction holomorphe

$$h : z \mapsto \exp\left(iz - \frac{1}{2} \ln(z)\right).$$

Pour déterminer I , on peut utiliser le théorème de Cauchy sur h et de bons lacets. Prenons $0 < r < R$ et les lacets $\gamma_{r,R} = [r, R] \cup S(R) \cup [iR, ir] \cup S(r)$ parcourus dans le sens trigonométrique. Avec $S(a)$ étant le quart de cercle de rayon a du premier quadrant. On a donc

$$\int_{\gamma_{r,R}} h = 0. \tag{2}$$

Appelons J_R l'intégrale sur le quart de cercle de rayon R . On a

$$|J_R| = \left| \int_0^{\pi/4} \frac{\exp(iRe^{i\theta})}{\sqrt{Re^{i\theta}}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \sqrt{R} \int_0^{\pi/4} \exp(-R \sin(\theta)) d\theta,$$

et puisque par inégalité de convexité sur $[0, \pi/4]$ on a $\sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi}\theta$, il vient alors

$$|J_R| \leq \sqrt{R} \int_0^{\pi/4} \exp\left(-R\frac{2}{\pi}\theta\right) d\theta = -\sqrt{R} \frac{\exp(-R/2) - 1}{2R/\pi}$$

Ainsi quand R tend vers l'infini, J_R devient nulle.

Quand à J_r c'est plus simple, on a

$$|J_r| \leq \sqrt{r} \int_0^{\pi/4} \exp(-r \sin(\theta)) d\theta \leq \sqrt{r} \frac{\pi}{4}$$

et donc J_r tend vers 0 quand r tend vers 0.

Enfin, on a

$$\int_{[ir, iR]} h = \int_r^R \frac{e^{-t}}{\sqrt{it}} i dt = e^{i\pi/4} \int_r^R \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \xrightarrow{r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} e^{i\pi/4} \Gamma(1/2)$$

et

$$\int_{[r, R]} h \xrightarrow{r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} I$$

On déduit alors en passant à la limite l'égalité 2 :

$$I = e^{i\pi/4} \sqrt{\pi}.$$

■

Références

- [1] ROMIK D., "The Surprising Mathematics of Longest Increasing Subsequences" (Institute of Mathematical Statistics Textbooks) Cambridge University Press <http://math.ucdavis.edu/~romik/download-book.php?>
- [2] SCHENSTED C., "Longest Increasing and Decreasing Subsequences", Canadian Journal of Mathematics 13, pages 179 à 191. <https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/B5098D9BC8B226C575402B971852C05E/S0008414X00013146a.pdf/longest-increasing-and-decreasing-subsequences.pdf>.
- [3] KING F. W., "Hilbert Transforms", Vols. 1–2. Cambridge University Press, 2009. <https://pdfroom.com/books/hilbert-transforms/3wW5m4KY2Yo>