

Théorie de Auslander Reiten

Louis VASSAUX; Rémi GUENET

Mai 2022

On va étudier les catégories de modules sur une algèbre au moyen des suites presque scindées aussi appelées suites d'Auslander-Reiten. On suivra d'assez près les notes [Hüg]. On trouvera en appendice (voir A) des compléments d'algèbre homologique. Dans la première partie on introduit les algèbres Artiniennes qui fournissent un cadre naturel à la théorie d'Auslander-Reiten. On commence par étudier leurs modules simples et projectifs indécomposables puis au moyen d'une dualité on obtient également les injectifs indécomposables. On s'intéresse ensuite aux algèbres Artiniennes qui possèdent en plus la propriété d'être héréditaires. On discutera en particulier les algèbres des chemins d'un carquois (voir 1.3) qui sont des algèbres Artiniennes héréditaires. On définira une notion de représentation d'un carquois qui fait seulement intervenir des espaces vectoriels puis on reliera ces représentations aux modules sur l'algèbre des chemins du carquois.

Dans la section 2 on commence par définir l'outil principal pour étudier les indécomposables d'une catégorie de modules, les suites d'Auslander-Reiten aussi appelées suites presque scindées (voir 2.1). Ces suites ont de fortes propriétés d'unicité (voir 2.1.2) Durant le reste de la section on introduit une opération de transposition ainsi qu'un dual local afin de pouvoir énoncer le théorème 2.3.2 qui donne des conditions suffisantes pour l'existence de suites d'Auslander-Reiten.

La section 3 s'intéresse à ce que deviennent ces constructions lorsque l'on se place sur une algèbre Artinienne. Tout d'abord le dual local s'identifie à la dualité définie en 1.2. Ainsi le dual local est fonctoriel. Or la transposée était déjà fonctorielle entre catégories stables. On peut donc introduire la translation de Auslander-Reiten (voir 3.1). Il s'agit d'une équivalence de catégories entre catégories stables. On obtient alors le théorème 3.1.2 qui renforce le théorème 2.3.2. On a ainsi montré que la plupart des applications minimales presque scindées peuvent se mettre dans une suite d'Auslander-Reiten. La proposition 3.2.1 donne exactement les applications minimales presque scindées pour lesquelles c'est impossible. On introduit ensuite les applications irréductibles afin de pouvoir définir le carquois d'Auslander-Reiten (voir 3.2). Pour finir on donne les premières propriétés de ce carquois (voir 3.2.4) et on énonce un résultat très pratique pour calculer avec des suites d'Auslander-Reiten (voir 3.2.5). On termine cette section en donnant le carquois d'Auslander-Reiten de l'algèbre kA_3 (voir 3.2.1).

Pour finir dans la section 4 on donne quelques résultats quant à la détermination des composantes connexes du carquois d'Auslander-Reiten sur des algèbres héréditaires. On commence par introduire quelques résultats préliminaires dans la section 4.1. Dans la section 4.2 on commence par énoncer une proposition (voir 4.2.1) qui permet de mettre en évidence trois types de composantes : les composantes préprojectives, préinjectives et régulières. A l'aide du théorème 4.2.2 on décrit complètement la structure des composantes régulières dans le cas d'une algèbre sauvage (voir 4.1 pour la définition). Enfin la proposition 4.2.7 donne la structure des composantes préprojectives non préinjectives et préinjectives non préprojectives lorsque le corps est algébriquement clos. On clôturera cette section en étudiant l'exemple de l'algèbre de Kronecker.

Notations

Sauf mention explicite du contraire, les modules considérés sont des modules à gauche. De plus s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau considéré on se permettra de dire simplement module.

Soit R un anneau et M un module. On dira que M est de longueur finie si il possède une suite de Jordan-Hölder finie. Dans ces conditions on notera $|M|$ la longueur de M , c'est à dire la longueur

d'une suite de Jordan-Hölder de M .

On dira que M est de présentation finie si il existe une suite exacte

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad (1)$$

avec F_1 et F_0 des modules libres de type fini.

On notera $R\text{Mod}$ la catégorie des modules et des applications linéaires et on notera $R\text{mod}$ la sous-catégorie pleine de $R\text{Mod}$ dont les objets sont les modules de présentation finie.

1 Algèbres

1.1 Algèbres Artiniennes

Soit R un anneau et M un R -module à gauche. On dit qu'il est Noethérien si toute suite croissante de sous-modules de M stationne, qu'il est Artinien si toute suite décroissante de sous-modules de M stationne. On dit que R est Noethérien (resp. Artinien) à gauche si il est Noethérien (resp. Artinien) en tant que module à gauche sur lui même. On dit que R est Noethérien (resp. Artinien) si il l'est de chaque côté.

Dans les deux premières sections on reste assez fidèle aux notes [Hüg]. Pour la section sur les algèbres de carquois on renvoie à [Bri] et [Ben91]. Enfin pour anneaux héréditaires, on reprend la présentation de [Ben91].

Proposition 1.1.1. *En reprenant les notations de ci-dessus, s'équivalent :*

- (i) M est de longueur finie.
- (ii) M est Artinien et Noethérien.

Proposition 1.1.2. *Si R est Artinien à gauche alors il est de longueur finie à gauche et en particulier il est Noethérien à gauche.*

Proposition 1.1.3. *Soit M un R -module à gauche de type fini. Si R est Noethérien (resp. Artinien) alors M est Noethérien (resp. Artinien).*

Proposition 1.1.4. *Soit R un anneau Artinien à gauche et M un R -module à gauche alors s'équivalent :*

- (i) M est indécomposable.
- (ii) $\text{End}_R M$ est local.

Théorème 1.1.5 (Krull-Schmidt). *Si M est de type fini sur un anneau Artinien à gauche R alors M possède une décomposition indécomposable $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$. Elle est unique à isomorphismes et permutation des facteurs près.*

Définition. Une algèbre Artinienne est une algèbre sur un anneau artinien et commutatif C qui est de type fini en tant que C -module.

Proposition 1.1.6. *Soit Λ une C -algèbre Artinienne. Alors :*

- (i) Λ est un anneau Artinien.
- (ii) $J = J(\Lambda)$ est nilpotent et Λ/J est semi-simple. Il existe des idempotents orthogonaux $e_i, 1 \leq i \leq n$ dans Λ de somme 1 qui vérifient que $\Lambda = \bigoplus_i \Lambda e_i$ et $\Lambda/J = \bigoplus_i \Lambda e_i / J e_i$ sont des décompositions en indécomposables. On a de même des décompositions en indécomposables $\Lambda = \bigoplus_i e_i \Lambda$ et $\Lambda/J = \bigoplus_i e_i \Lambda / e_i J$ en tant que Λ -modules à droite.
- (iii) Avec les notations de (ii), la projection canonique $\Lambda e_i \rightarrow \Lambda e_i / J e_i$ est une couverture projective. de plus Λ est semi-parfait. On a $\text{End}_\Lambda \Lambda e_i = (e_i \Lambda e_i)^{op}$ est local et $\text{End}_\Lambda \Lambda e_i / J e_i = (e_i \Lambda e_i / e_i J e_i)^{op}$.
- (iv) Il existe une C -algèbre Artinienne Γ telle que Γ est une somme directe de modules projectifs deux à deux non isomorphes (une telle algèbre est dite basique) et une équivalence de catégories $\Lambda \text{Mod} \rightarrow \Gamma \text{Mod}$.

1.2 La dualité

Soit C un anneau commutatif artinien et Λ une C -algèbre Artinienne basique. On notera $J = J(\Lambda)$. On considère I un cogénérateur minimal de $C \text{ Mod}$ (voir A.2).

Proposition 1.2.1. (i) Si M est un C -module de type fini alors $\text{Hom}_C(M, I)$ est également de type fini et a même longueur.

(ii) $c : M \rightarrow \text{Hom}_C(\text{Hom}_C(M, I), I)$ définie par $c(m)(f) = f(m)$ est un isomorphisme naturel de Λ -modules.

Definition. On note D le foncteur $\Lambda \text{ mod} \rightarrow \text{mod } \Lambda, M \mapsto \text{Hom}_C(M, I)$.

Remarque 1. D'après la proposition 1.2.1, D est une équivalence. On note encore $D : \text{mod } \Lambda \rightarrow \Lambda \text{ mod}, M \mapsto \text{Hom}_C(M, I)$ qui est son inverse. Il est alors clair que les $D(e_i \Lambda)$ sont des représentants des classes d'isomorphismes d'injectifs indécomposables dans $\Lambda \text{ Mod}$.

Proposition 1.2.2. (i) $D(\Lambda e_i / J e_i) \cong e_i \Lambda / e_i J$.

(ii) $D(e_i \Lambda)$ est une enveloppe injective de $\Lambda e_i / J e_i$.

(iii) $D(\Lambda)$ est une enveloppe injective de Λ / J .

Démonstration. (i) : Pour $f \in D(\Lambda e_i / J e_i)$ et $r \in J, x \in \Lambda$ on a $(fr)(\overline{x e_i}) = f(\overline{r x e_i}) = f(0) = 0$. Ainsi $D(\Lambda e_i / J e_i)$ est un Λ / J module à droite donc il est semi-simple. De plus $\text{End}_\Lambda D(\Lambda e_i / J e_i) \cong (\text{End}_\Lambda \Lambda e_i / J e_i)^{op}$ car D est une équivalence contravariante. Donc $\text{End}_\Lambda D(\Lambda e_i / J e_i)$ est local puis $D(\Lambda e_i / J e_i)$ est indécomposable donc simple.

Il existe $\alpha : \Lambda e_i / J e_i \rightarrow I$ qui est C -linéaire et telle que $\alpha(\overline{e_i}) \neq 0$. Alors on considère la fonction $f : e_i \Lambda \rightarrow D(\Lambda e_i / J e_i)$ définie par $f(r) = \alpha r$. Alors on sait que $(\alpha e_i)(\overline{e_i}) = \alpha(e_i \overline{e_i}) = \alpha(\overline{e_i}) \neq 0$ donc $\alpha e_i \neq 0$ puis $f \neq 0$. Ainsi f est un épimorphisme par simplicité de $D(\Lambda e_i / J e_i)$. On pose alors K le noyau de f . On sait que K est un sous-module maximal de $e_i \Lambda$ car $e_i \Lambda / K$ est simple. Donc on a $K = e_i J$ d'où le résultat.

(ii) : On sait que la fonction f précédemment définie est une couverture projective. On en déduit que $D(f)$ est une enveloppe injective.

(iii) : Tout est clair □

1.3 Algèbres de carquois

On fixe k un corps.

Definition. Un carquois Q est un graphe orienté fini. On note Q_0 ses sommets, Q_1 ses arrêtes et $s, b : Q_1 \rightarrow Q_0$ les fonctions associant à une flèche sa source ou son but respectivement.

Une représentation de Q est la donnée d'un k -espace vectoriel V_i pour tout $i \in Q_0$ et d'une application linéaire $f_\alpha : V_{s(\alpha)} \rightarrow V_{b(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in Q_1$.

Si $V = ((V_i), (f_\alpha))$ est une représentation de Q alors son vecteur dimension est $\underline{\dim} V = (\dim_k V_i)$.

Enfin un morphisme de représentations entre $((V_i), (f_\alpha))$ et $((V'_i), (f'_\alpha))$ est la donnée d'applications linéaires $u_i : V_i \rightarrow V'_i$ pour $i \in Q_0$ vérifiant $u_{b(\alpha)} f_\alpha = f'_\alpha u_{s(\alpha)}$.

On voit donc que les représentations de Q forment une catégorie que l'on notera $\mathcal{R}(Q)$.

Exemple 1.3.1. On nomme A_3 le carquois $\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet$. On considère les deux représentations

$k \xrightarrow{\text{Id}} k \xrightarrow{\text{Id}} k$ et $k \rightarrow 0 \rightarrow 0$. On a alors un morphisme entre ces deux représentations qui est donné par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} k & \xrightarrow{\text{Id}} & k & \xrightarrow{\text{Id}} & k \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow & & \downarrow \\ k & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2)$$

Le carquois S_r possède $r + 1$ sommets notés j, i_1, \dots, i_r et r flèches $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ de source i_1, \dots, i_r et de but commun j . Par exemple on représente S_4 :

$$\begin{array}{ccc}
 & i_1 & \\
 & \downarrow & \\
 i_2 & \longrightarrow j & \longleftarrow i_3 \\
 & \uparrow & \\
 & i_4 &
 \end{array} \tag{3}$$

Considérons une représentation de S_r donnée par V_1, \dots, V_r, W et des applications linéaires $f_\alpha : V_\alpha \rightarrow W$. Si on choisit u_α un automorphisme de V_α alors les fonctions u_α et Id_W donnent un automorphisme de cette représentation sur la représentation ayant les mêmes espaces vectoriels et dont les applications linéaires sont les $f_\alpha u_\alpha^{-1}$. Ainsi on voit que classifier les représentations de S_r revient à classifier les systèmes de r sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel donné à automorphisme près.

Definition. Etant donné un carquois Q on considère l'algèbre kQ de générateurs e_i pour $i \in Q_0$ et α pour $\alpha \in Q_1$ et avec les relations $e_i^2 = e_i, e_i e_j = 0$ si $i \neq j$ et $e_{b(\alpha)} \alpha = \alpha = \alpha e_{s(\alpha)}$. kQ s'appelle l'algèbre des chemins de Q .

Remarque 2. En tant qu'espace vectoriel kQ a pour base les chemins dans Q . On étend de manière naturelle les fonctions s, b aux chemins. Soit c_1, c_2 deux chemins dans Q . Alors $c_2 c_1$ est la concaténation de ces deux chemins si $s(c_2) = b(c_1)$. Sinon $c_2 c_1 = 0$. On voit alors par exemple que kQ est de dimension finie si et seulement si Q ne possède pas de cycle orienté.

Proposition 1.3.1. Soit Q un carquois. Il y a une équivalence de catégories entre les représentations de Q et $kQ \text{ Mod}$.

Démonstration. Soit $((V_i), (f_\alpha))$ une représentation de Q . Alors on pose $V = \bigoplus_i V_i$. Pour $i \in Q_0$ on a la fonction $g_i : V \rightarrow V_i \hookrightarrow V$ et pour $\alpha \in Q_1$ on a la fonction $g_\alpha : V \rightarrow V_{s(\alpha)} \rightarrow V_{b(\alpha)} \rightarrow V$. ces fonctions définissent une structure de kQ -module sur V .

Soit V un kQ -module. Alors on pose $V_i = e_i V$ pour $i \in Q_0$ et pour $\alpha \in Q_1$ on pose $f_\alpha : V_{s(\alpha)} \rightarrow V_{b(\alpha)}$ par $f(e_i v) = \alpha e_i v = e_j \alpha e_i v$. On peut aisément vérifier qu'on a ainsi défini deux équivalences de catégories inverses l'une de l'autre. \square

Remarque 3. Pour tout $i \in Q_0$ le module associé à la représentation donnée par $V_i = k$ et $V_j = 0$ si $j \neq i$ est simple. On le note S_i . Sa couverture projective est $P_i = kQ e_i$, c'est un projectif indécomposable. On note I_i son enveloppe injective qui est indécomposable.

Proposition 1.3.2. Soit Q un carquois sans cycle. Soit M un module simple (resp. projectif indécomposable, injectif indécomposable). Alors M est isomorphe à l'un des S_i (resp. P_i, I_i).

Exemple 1.3.2. On reprend les notations de l'exemple 1.3.1. On pose $\Lambda = kA_3$. Alors on donne ci-dessous des représentations associées aux S_i, P_i, I_i :

$$\begin{array}{lll}
 S_1 : k \rightarrow 0 \rightarrow 0 & P_1 : k \xrightarrow{\text{Id}} k \xrightarrow{\text{Id}} k & I_1 = S_1 \\
 S_2 : 0 \rightarrow k \rightarrow 0 & P_2 : 0 \rightarrow k \xrightarrow{\text{Id}} k & I_2 : k \xrightarrow{\text{Id}} k \rightarrow 0 \\
 S_3 : 0 \rightarrow 0 \rightarrow k & P_3 = S_3 & I_3 = P_1
 \end{array} \tag{4}$$

Montrons que ce sont les seuls indécomposables. Soit donc M un indécomposable différent des S_i, P_i, I_i par l'absurde. On pose $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3$ la représentation associée. Alors si f n'est pas injective alors $\text{Ker } f \rightarrow 0 \rightarrow 0$ est facteur direct non nul d'où on obtient $V_2 = V_3 = 0$. Par suite il

est clair que $V_1 = k$ et $M \cong S_1$. Ainsi f est injective. On identifie donc V_1 à un sous-espace de V_2 et f à l'inclusion. On montre de même que g est surjective. Supposons que g n'est pas injective. On note $W = \text{Ker } g$. Alors $V_1 \cap W \rightarrow W \rightarrow 0$ est facteur direct non nul dans M donc $V_3 = 0$. De même on montre que si f n'est pas surjective alors $V_1 = 0$. Ainsi quitte à choisir des bases appropriées, M est isomorphe à une représentation de l'une des quatre formes suivantes :

$$\begin{aligned} k^n \xrightarrow{\text{Id}} k^n \xrightarrow{\text{Id}} k^n & \quad ; \quad 0 \rightarrow k^n \xrightarrow{\text{Id}} k^n \\ k^n \xrightarrow{\text{Id}} k^n \rightarrow 0 & \quad ; \quad 0 \rightarrow k^n \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Dans chacun des cas précédents on a clairement $n = 1$ car M est indécomposable et on reconnaît dont P_1, P_2, I_2, S_2 .

1.4 Anneaux héréditaires

Definition. Soit R un anneau. On dit que R est héréditaire à gauche si pour tout module projectif à gauche P et tout sous-module $M \subset P$ alors M est projectif. On dit qu'il est héréditaire s'il l'est à droite et à gauche.

Definition. Soit Q un carquois et k un corps. Alors on note $kQ_{\geq n}$ le sous-espace vectoriel de kQ engendré par les chemins de longueur au moins n .

On note de plus $kQ_{(n)} = kQ_{\geq n}/kQ_{\geq n+1}$. En tant qu'espace vectoriel il s'agit du sous-espace de kQ engendré par les chemins de longueur exactement n .

Proposition 1.4.1. Soit Q un carquois sans cycles et k un corps. Alors l'algèbre kQ des chemins de Q est héréditaire.

Démonstration. Soit P un sous-module d'un kQ -module libre $F = \Lambda^{(J)}$. On a $J(kQ) = kQ_{\geq 1}$. Ainsi $P/kQ_{\geq 1}kQP$ est un $kQ/J(kQ)$ -module donc il est semi-simple. On pose :

$$P/kQ_{\geq 1}P \cong \bigoplus_{x,\alpha} S_{x,\alpha} \quad (6)$$

avec $S_{x,\alpha} \cong S_x$. On en déduit une surjection

$$\phi : \bigoplus_{x,\alpha} P_{x,\alpha} \rightarrow P/kQ_{\geq 1}P \quad (7)$$

où $P_{x,\alpha} \cong P_x$. Alors par propriété universelle des projectifs on obtient une flèche

$$\psi : \bigoplus_{x,\alpha} P_{x,\alpha} \rightarrow P \quad (8)$$

On note $X = \text{Coker } \psi$. Alors on tensorise la suite exacte

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{x,\alpha} P_{x,\alpha} \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow X \longrightarrow 0 \quad (9)$$

avec $kQ/J(kQ)$ au dessus de kQ . On obtient alors une suite exacte :

$$\bigoplus_{x,\alpha} S_{x,\alpha} \longrightarrow P/kQ_{\geq 1}P \longrightarrow X/kQ_{\geq 1}X \longrightarrow 0 \quad (10)$$

Ainsi $X/J(kQ)X = 0$ donc $X = 0$ par le lemme de Nakayama (voir A.2.2). Ainsi ψ est surjective.

On pose $P_{x,\alpha} = \Lambda e_{x,\alpha}$. Supposons alors que $\lambda\psi(e_{x,\alpha}) = \psi(\lambda e_{x,\alpha}) = 0$. Or par définition de ψ , on sait que $e_x\psi(e_{x,\alpha}) \neq 0$. Alors dans F , on a

$$e_x\psi(e_{x,\alpha}) = (\lambda_j)_{j \in J} \quad (11)$$

où l'un au moins des λ_j est une combinaison linéaire de chemins se terminant en x . Alors on a $\lambda\lambda_j = 0$ d'où on déduit aisément que $\lambda e_x = 0$. Ainsi $\lambda e_{x,\alpha} = 0$ donc ψ est injective. Ainsi ψ est un isomorphisme donc P est projectif. \square

2 Suites de Auslander-Reiten

Toutes les sections de cette partie restent très fidèles aux notes [Hüg]

2.1 Applications presque scindées

On fixe R un anneau et \mathcal{M} l'une des catégories $R\text{Mod}$ ou $R\text{mod}$.

Definition. Soit B, C dans \mathcal{M} et $g : B \rightarrow C$ linéaire. On dit que g est presque scindée à gauche dans \mathcal{M} si :

- (a) Le morphisme g n'est pas un monomorphisme scindé.
- (b) Si X est dans \mathcal{M} et $h : X \rightarrow C$ n'est pas un monomorphisme scindé alors il existe $\phi : X \rightarrow B$ faisant commuter :

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{g} & C \\
 & \swarrow \phi & \nearrow h \\
 & X &
 \end{array}
 \tag{12}$$

On dit de plus que f est minimale presque scindée à droite dans \mathcal{M} si elle est minimale à droite. On définit de manière duale les applications (minimales) presque scindées à gauche dans \mathcal{M} .

Remarque 4. Si $g : B \rightarrow C$ est presque scindée à droite dans \mathcal{M} alors $\text{End}_R C$ est un anneau local et $J(\text{End}_R C) = g \circ \text{Hom}_R(C, B)$. En effet il est clair que $g \circ \text{Hom}_T(B, C)$ est un idéal à droite et qu'il est constitué exactement des applications qui ne sont pas inversibles à droite. C'est donc le seul idéal à droite maximal.

Proposition 2.1.1. Soit $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ une suite exacte courte. S'équivalent :

- (i) f est presque scindée à gauche et g est presque scindée à droite dans \mathcal{M} .
- (ii) $\text{End}_R C$ est local et f est presque scindée à gauche dans \mathcal{M} .
- (iii) $\text{End}_R A$ est local et g est presque scindée à droite dans \mathcal{M} .
- (iv) f est minimale presque scindée à gauche dans \mathcal{M} .
- (v) g est minimale presque scindée à droite dans \mathcal{M} .

Démonstration. La remarque ci-dessus permet de conclure que (i) \implies (ii)

(ii) \implies (iv) : Considérons un diagramme commutatif avec des lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow t & \swarrow \psi & \downarrow \phi & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0
 \end{array}
 \tag{13}$$

On a $gtf = gf = 0$ d'où l'existence de ϕ faisant commuter le diagramme. Supposons par l'absurde que ϕ n'est pas un isomorphisme. Alors $\text{Id}_C - \phi$ l'est par localité de $\text{End}_R C$. De plus $(\text{Id}_B - t)f = 0$ donc par passage au quotient soit ψ vérifiant $\text{Id}_B - t = \psi g$. On a alors $g\psi g = g(\text{Id}_B - t) = (\text{Id}_C - \phi)g$ puis $g\psi = \text{Id}_C - \phi$ donc $g\psi(\text{Id}_C - \phi)^{-1} = \text{Id}_C$ donc g est scindée donc f également. C'est absurde. Ainsi ϕ est un isomorphisme donc par le lemme des cinq, t est un isomorphisme.

(iv) \implies (i) : Soit $h : X \rightarrow C$ une flèche qui n'est pas scindée à droite. On considère le diagramme commutatif suivant avec des lignes exactes obtenu par functorialité de Ext_R^1 (voir A.3) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \phi \uparrow \downarrow \psi & & h \uparrow \downarrow s & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & X & \longrightarrow & 0
 \end{array}
 \tag{14}$$

Alors on suppose par l'absurde que f' n'est pas scindée à gauche. On peut en déduire une flèche $\psi : B \rightarrow B'$ avec $\psi f = f'$ car f est presque scindée à gauche. On a alors $\phi\psi f = \phi f' = f$. Donc par minimalité de f , on déduit que $\phi\psi$ est un isomorphisme. En particulier ϕ est surjective. On a alors :

$$g'\psi(\phi\psi)^{-1}f = g'\psi f = g'f' = 0$$

Donc il existe $s : C \rightarrow X$ vérifiant $sg = g'\psi(\phi\psi)^{-1}$. On calcule alors :

$$hsg\phi = hg'\psi(\phi\psi)^{-1}\phi = g\phi\psi(\phi\psi)^{-1}\phi = g\phi$$

d'où on déduit que $hs = Id_C$ car $g\phi$ est surjective, donc h est scindée à droite, absurde. Ainsi g' est scindée donc il existe une flèche $X \rightarrow B$ qui fait commuter le triangle :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & C \\ & \swarrow \text{---} & \nearrow h \\ & X & \end{array} \quad (15)$$

On prouve dualement que $(i) \implies (iii) \implies (v) \implies (i)$ d'où le résultat. \square

Definition. Une suite exacte vérifiant les conditions équivalentes de la proposition ci-dessus est appelée suite presque scindée ou suite de Auslander-Reiten dans \mathcal{M} .

Proposition 2.1.2. Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow C' \rightarrow 0$ deux suites de Auslander-Reiten dans \mathcal{M} . S'équivalent :

(i) $A \cong A'$

(ii) $C \cong C'$

(iii) Il existe des isomorphismes a, b, c faisant commuter :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (16)$$

Démonstration. Soit $a : A \cong A'$. On considère alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow a & & \uparrow \downarrow b' & & \uparrow \downarrow c' & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (17)$$

Comme $f'a$ n'est pas scindée à gauche et que f est presque scindée à gauche il existe une flèche $b : B \rightarrow B'$ vérifiant $bf = f'a$. On construit de même une flèche b' vérifiant $b'f' = fa^{-1}$. On obtient alors $b'b f = b'f'a = fa^{-1}a = f$ donc $b'b$ est un isomorphisme. De même bb' est un isomorphisme donc on en déduit que b est un isomorphisme.

On a ensuite $g'bf = g'f'a = 0$ donc il existe $c : C \rightarrow C'$ vérifiant $cg = g'b$. On a de même une flèche $c' : C' \rightarrow C$ vérifiant $c'g' = gb^{-1}$. On a alors $c'cg = c'g'b = g$ donc $c'c = Id_C$. De même $cc' = Id_{C'}$ donc c est un isomorphisme. On procède de même si $C \cong C'$. \square

2.2 La transposée de Auslander-Reiten

On fixe R un anneau semi-parfait (voir A.1) pour le reste de la section 2. On pose de plus $R \text{ mod}_{\mathcal{P}}$ la sous-catégorie pleine de $R \text{ mod}$ constituée des modules sans facteurs directs projectifs non nuls.

Soit $M \in R \text{ mod}$. Alors comme R est semi-parfait et M est de présentation finie, on peut considérer une suite exacte $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0$ où p_0 est une couverture projective de M et

p_1 est une couverture projective de $\text{Ker } p_0$. Une telle suite s'appelle une présentation projective minimale. On applique alors le foncteur $*$ = $\text{Hom}_R(-, R)$ pour obtenir une suite exacte :

$$P_0^* \xrightarrow{p_1^*} P_1^* \longrightarrow \text{Coker } p_1^* \longrightarrow 0 \quad (18)$$

Definition. En reprenant les notations de ci-dessus on définit la transposée de M par $\text{Tr } M = \text{Coker } p_1^*$.

Proposition 2.2.1. (i) La classe d'isomorphisme de $\text{Tr } M$ ne dépend pas de la présentation projective minimale choisie.

(ii) Si $M \in R \text{ mod } \mathcal{P}$ alors $\text{Tr } M \in R \text{ mod } \mathcal{P}$ et $P_0^* \xrightarrow{p_1^*} P_1^* \rightarrow \text{Tr } M \rightarrow 0$ est une présentation projective minimale.

(iii) Dans $R \text{ mod } \mathcal{P}$ il existe un isomorphisme naturel $\text{Tr}^2 M \rightarrow M$.

Considérons maintenant M et N deux modules de présentations finies et $f : M \rightarrow N$ linéaire. On construit un diagramme commutatif dont les lignes sont des présentations projectives minimales :

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \\ Q_1 & \xrightarrow{q_1} & Q_0 & \xrightarrow{q_0} & M & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (19)$$

On construit f_0 en utilisant la projectivité de P_0 . Par ailleurs $f_0(\text{Ker } p_0) \subset \text{Ker } q_0$ donc on en déduit f_1 par projectivité de P_1 . En passant au dual on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} P_0^* & \xrightarrow{p_1^*} & P_1^* & \xrightarrow{\alpha} & \text{Tr } M & \longrightarrow & 0 \\ f_0^* \uparrow & & f_1^* \uparrow & & \tilde{f} \uparrow & & \\ Q_0^* & \xrightarrow{q_1^*} & Q_1^* & \xrightarrow{\beta} & \text{Tr } N & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (20)$$

En effet $\alpha f_1^* q_1^* = \alpha p_1^* f_0^* = 0$ ce qui donne l'existence de \tilde{f} faisant commuter le diagramme.

Définition 2.2.3 : Si M, N sont deux modules on pose :

$$P(M, N) = \{f \in \text{Hom}_R(M, N) \mid f \text{ se factorise à travers un module projectif}\}$$

C'est un idéal de $\text{Hom}_R(M, N)$ donc on définit $\underline{\text{Hom}}_R(M, N) = \text{Hom}_R(M, N)/P(M, N)$. Finalement on peut vérifier que la composition de fonctions induit une loi de composition sur les $\underline{\text{Hom}}_R(M, N)$ et donc on dispose de $R \underline{\text{mod}}$ la catégorie dont les objets sont les modules et dont les flèches sont les ensembles $\underline{\text{Hom}}_R(M, N)$. On l'appelle la catégorie stable de $R \text{ mod}$.

Proposition 2.2.2. Le morphisme \tilde{f} est bien défini modulo $P(\text{Tr } N, \text{Tr } M)$.

Démonstration. Considérons tout d'abord le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow g_1 \parallel f_1 & \swarrow \phi & \downarrow g_0 \parallel f_0 & & \downarrow f & & \\ Q_1 & \xrightarrow{q_1} & Q_0 & \xrightarrow{q_0} & N & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (21)$$

On a alors $(g_0 - f_0)q_0 = 0$ donc il existe $\phi : P_0 \rightarrow Q_1$ vérifiant $g_0 - f_0 = q_1 \phi$. On passe alors au dual :

$$\begin{array}{ccccccc} P_0^* & \xrightarrow{p_1^*} & P_1^* & \xrightarrow{\alpha} & \text{Tr } M & \longrightarrow & 0 \\ g_0^* \uparrow \parallel f_0^* & \swarrow \phi & g_1^* \uparrow \parallel f_1^* & & \tilde{g} \uparrow \parallel \tilde{f} & & \\ Q_0^* & \xrightarrow{q_1^*} & Q_1^* & \xrightarrow{\beta} & \text{Tr } N & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (22)$$

On a $(g_1^* - f_1^* - p_1^* \phi)q_1^* = p_1^*(g_0^* - f_0^*) - p_1^* \phi q_1^* = 0$ donc il existe $\psi : \text{Tr } N \rightarrow P_1^*$ vérifiant $\psi \beta = g_1^* - f_1^* - p_1^* \phi$. On calcule alors $\alpha \psi \beta = \alpha(g_1^* - f_1^*) = (\tilde{g} - \tilde{f})\beta$ d'où on déduit que $\alpha \psi = \tilde{g} - \tilde{f}$ ce qui conclut. \square

On peut vérifier de plus que si f et g sont équivalentes modulo $P(M, N)$ alors \tilde{f} et \tilde{g} sont équivalentes modulo $P(\text{Tr } N, \text{Tr } M)$. On obtient donc une fonction $\text{Tr} : \underline{\text{Hom}}_R(M, N) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_R(\text{Tr } N, \text{Tr } M)$. On a alors la proposition évidente suivante :

- Proposition 2.2.3.** (i) $\text{Tr} : R\text{mod} \rightarrow \text{mod } R$ est un foncteur contravariant et additif
(ii) Si $M, N \in R\text{mod } \mathcal{P}$ alors $\text{Tr} : \underline{\text{Hom}}_R(M, N) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_R(\text{Tr } N, \text{Tr } M)$ est un isomorphisme
(iii) Si $M \in R\text{mod } \mathcal{P}$ alors $\text{End}_R M$ est local si et seulement si $\text{End}_R \text{Tr } M$ est local.

Lemme 2.2.4. Soit $\mathfrak{C} : 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ une suite exacte courte et soit $A \in R\text{mod } \mathcal{P}$. Alors il existe $\delta = \delta(A, \mathfrak{C})$ un morphisme naturel tel que la suite

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(A, X) \rightarrow \text{Hom}_R(A, Y) \rightarrow \text{Hom}_R(A, Z) \xrightarrow{\delta} \text{Tr } A \otimes_R X \rightarrow \text{Tr } A \otimes_R Y \rightarrow \text{Tr } A \otimes_R Z \rightarrow 0 \quad (23)$$

soit exacte.

Démonstration. On considère $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0$ une présentation projective minimale de M . Comme $P_i, i = 0, 1$ est projectif de type fini on a $\text{Hom}_R(P_i, N) \cong P_i^* \otimes_R N$ pour tout module N . Ainsi $\text{Coker } \text{Hom}_R(p_1, N) \cong \text{Tr } A \otimes_R N$. On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_0, X) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_0, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_0, Z) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_1, X) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_1, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_1, Z) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{Tr } A \otimes_R X & \longrightarrow & \text{Tr } A \otimes_R Y & \longrightarrow & \text{Tr } A \otimes_R Z \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \quad (24)$$

On conclut alors par le lemme du serpent. \square

2.3 Existence de suites presque scindées

Définition. Soit $M \in \text{mod } R$ dont l'anneau d'endomorphismes est local. Soit $S = \text{End}_R M$ et V une enveloppe injective de $S/J(S)$ en tant que S -modules (voir A.1.4). On pose alors $M^+ = \text{Hom}_S(M, V)$. On appelle M^+ le dual local de M .

Lemme 2.3.1. Le groupe abélien M^+ est naturellement muni d'une structure de $(R - (\text{End}_S V)^{op})$ bimodule. On en déduit une flèche $\phi : \text{End}_S V \rightarrow \text{End}_R M^+$ qui est un isomorphisme.

Le théorème suivant a été prouvé pour la première fois dans [Aus].

Théorème 2.3.2. Soit $C \in R\text{mod}$ qui n'est pas projectif tel que $\text{End}_R C$ est local. Alors il existe une suite de Auslander-Reiten $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ dans $R\text{Mod}$ et on a $A = (\text{Tr } C)^+$.

Démonstration. Soit $T = \text{End}_R \text{Tr } C$, U une enveloppe injective de $T/J(T)$, $A = (\text{Tr } C)^+ = \text{Hom}_T(\text{Tr } C, U)$ et $S = \text{End}_R A$. Soit de plus $0 \rightarrow K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$ où p est une couverture projective. Par le lemme 2.2.4 on obtient une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(C, K) \xrightarrow{p^*} \text{Hom}_R(C, P) \rightarrow \text{End}_R C \xrightarrow{\delta} \text{Tr } C \otimes_R K \rightarrow \text{Tr } C \otimes_R P \quad (25)$$

Alors on a clairement $\text{Im } p_* = P(C, C)$. De plus comme $\text{End}_R C/P(C, C) \cong T/P(\text{Tr } C, \text{Tr } C)$ par la proposition 2.2.3 on en déduit une suite exacte de T -modules :

$$0 \longrightarrow T/P(\text{Tr } C, \text{Tr } C) \longrightarrow \text{Tr } C \otimes_R K \longrightarrow \text{Tr } C \otimes_R P \quad (26)$$

On applique alors $\text{Hom}_T(-, U)$ et on utilise pour obtenir une suite exacte de $\text{End}_T U$ modules :

$$\text{Hom}_R(P, A) \longrightarrow \text{Hom}_R(K, A) \xrightarrow{\tilde{\delta}} \text{Hom}_R(T/P(\text{Tr } C, \text{Tr } C), U) = X \longrightarrow 0 \quad (27)$$

En effet, par l'adjonction entre \otimes et Hom on a :

$$\text{Hom}_T(\text{Tr } C \otimes_R N, U) \cong \text{Hom}_R(N, \text{Hom}_T(\text{Tr } C, U)) \cong \text{Hom}_R(N, A) \quad (28)$$

pour tout module N . Alors comme $\text{Tr } C$ n'est pas projectif on en déduit que $T/P(\text{Tr } C, \text{Tr } C) \neq 0$. Ainsi, U étant un cogénérateur injectif de $T \text{Mod}$, on en déduit que X s'identifie à un sous-module non nul de $\text{Hom}_T(T, U) \cong U$. Alors comme U est une enveloppe injective de $T/J(T)$ et que $T/J(T)$ est simple, il existe M un sous-module de X avec $M \cong T/J(T)$. Soit γ un générateur de M et $a \in \text{Hom}_R(K, A)$ avec $\tilde{\delta}(a) = \gamma$. Alors comme $\gamma \neq 0$ il est clair que a ne se factorise pas par i . Finalement soit $s \in J(S)$. Par le lemme 2.3.1 il existe $u \in J(\text{End}_T U)$ avec $\tilde{\delta}(sa) = \tilde{\delta}(u.a) = u.\tilde{\delta}(a) = u.\gamma = u(\gamma)$ via l'identification $\gamma \in T/J(T)$. Comme u n'est pas inversible et U est injectif, u n'est pas injective. Donc son noyau intersecte $T/J(T)$ puis par simplicité de $T/J(T)$, $\text{Ker } u \supset T/J(T)$. Donc $(\gamma) = 0$ puis sa se factorise par i pour tout $s \in J(S)$.

On considère alors le push-out :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow \phi & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (29)$$

Montrons que la ligne du bas est une suite de Auslander-Reiten. Comme a ne se factorise pas par i il est clair que f n'est pas scindée. Soit alors $h : A \rightarrow X$ qui n'est pas un monomorphisme scindé. On considère alors le diagramme construit par push-out :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow \psi & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (30)$$

Si $l \in \text{Hom}_R(X, A)$ alors $lh \in J(S)$ car h n'est pas scindée. Donc lha se factorise par i . Par la propriété universelle des push-out on en déduit que l se factorise par f' . Ainsi la suite

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(C, A) \longrightarrow \text{Hom}_R(B', A) \longrightarrow \text{Hom}_R(X, A) \longrightarrow 0 \quad (31)$$

est exacte. En utilisant l'adjonction entre Hom et \otimes ainsi que le fait que U est un cogénérateur on en déduit que

$$0 \longrightarrow \text{Tr } C \otimes_R X \longrightarrow \text{Tr } C \otimes_R B' \longrightarrow \text{Tr } C \otimes_R C \longrightarrow 0 \quad (32)$$

est exacte. Alors on a une suite exacte

$$\text{Hom}_R(C, P) \xrightarrow{g'^*} \text{End}_R C \xrightarrow{\delta} \text{Tr } C \otimes_R X \longrightarrow \text{Tr } C \otimes_R B' \quad (33)$$

Alors on a $\text{Im } \delta = 0$ car la flèche de droite est injective. Donc $\text{Im } g'^* = \text{Ker } \delta = \text{End}_R C$. Ainsi g' est un épimorphisme scindé donc f' est scindée donc h se factorise par f d'où le résultat. \square

3 Sur des algèbres Artiniennes

Cette partie suit d'assez près la structure des notes [Hüg].

Dans cette partie on fixe C un anneau commutatif artinien et Λ une k -algèbre Artinienne basique (voir 1.1.6(iv)). On écrira $\Lambda = \bigoplus_i \Lambda e_i$ une décomposition indécomposable. Sauf mention explicite du contraire les modules sont des Λ -modules à gauche.

3.1 La translation de Auslander-Reiten

On rappelle qu'on dispose d'une équivalence $D : \Lambda \text{ mod} \rightarrow \text{mod } \Lambda$ définie par $DM = \text{Hom}_C(M, I)$ où I est un cogénérateur injectif de $C \text{ Mod}$.

Lemme 3.1.1. *Soit $M \in \text{mod } \Lambda$. Alors $M^+ \cong DM$.*

On pose $\Lambda \text{ mod}_{\mathcal{I}}$ la sous-catégorie pleine de $\Lambda \text{ mod}$ constituée des modules sans facteurs injectifs. Par ailleurs si $M, N \in \Lambda \text{ mod}$ alors on pose :

$$I(M, N) = \{f \in \text{Hom}_{\Lambda}(M, N) \mid f \text{ se factorise par un module injectif}\} \quad (34)$$

Comme dans le cas de $P(M, N)$ on définit $\overline{\text{Hom}}_{\Lambda}(M, N) = \text{Hom}_{\Lambda}(M, N)/I(M, N)$ et on considère $\overline{\Lambda \text{ mod}}$ la catégorie dont les objets sont ceux de $\Lambda \text{ mod}$ et les flèches sont les ensembles $\overline{\text{Hom}}_{\Lambda}(M, N)$. On vérifie aisément que D induit des équivalences de catégories $\underline{\Lambda \text{ mod}} \rightarrow \overline{\text{mod } \Lambda}$ et $\overline{\text{mod } \Lambda} \rightarrow \underline{\Lambda \text{ mod}}$ inverses l'une de l'autre. On les notera toujours D .

Definition. On considère les foncteurs $\tau = D \text{ Tr} : \underline{\Lambda \text{ mod}} \rightarrow \overline{\Lambda \text{ mod}}$ et $\tau^- = \text{Tr } D : \overline{\Lambda \text{ mod}} \rightarrow \underline{\Lambda \text{ mod}}$. Il est clair que ce sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre. On appelle τ la translation de Auslander-Reiten.

Exemple 3.1.1. On considère A_3 le carquois $\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet$ et $\Lambda = kA_3$. On reprend les notations de l'exemple 1.3.2 On calcule τS_2 . Tout d'abord on a une suite exacte courte $0 \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow S_2 \rightarrow 0$. On applique alors $*$. On obtient donc $0 \rightarrow e_2 \Lambda \rightarrow e_3 \Lambda \rightarrow \text{Tr } S_2 \rightarrow 0$ car $S_2^* = 0$. Après application de D on a $0 \rightarrow \tau S_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_2 \rightarrow 0$ Or la seule surjection $I_3 \rightarrow I_2$ est

$$\begin{array}{ccccc} k & \xrightarrow{\text{Id}} & k & \xrightarrow{\text{Id}} & k \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow \\ k & \xrightarrow{\text{Id}} & k & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (35)$$

quitte à bien choisir les bases. On en déduit alors que $\tau S_2 = S_3$. On voit de même que $\tau S_1 = S_2$ et $\tau I_2 = P_2$.

Le théorème suivant a été prouvé pour la première fois dans [AR75].

Théorème 3.1.2. (i) *Si M est un module de type fini indécomposable non projectif alors il existe une suite presque scindée dans $\Lambda \text{ Mod}$ $0 \rightarrow \tau M \rightarrow B \rightarrow M \rightarrow 0$.*

(ii) *Si M est un module de type fini indécomposable non injectif alors il existe une suite presque scindée dans $\Lambda \text{ Mod}$ $0 \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow \tau^- M \rightarrow 0$.*

Remarque 5. On utilisera seulement dans la suite que ces deux suites sont presque scindées dans $\Lambda \text{ mod}$.

Démonstration. Pour obtenir (i) il suffit de combiner le lemme 3.1.1 et le théorème 2.3.2. Pour prouver (ii) on remarque que d'après (i) il existe une suite de Auslander-Reiten qui se termine en DM et de premier terme τDM . En y appliquant D on trouve une suite de Auslander-Reiten dans $\Lambda \text{ mod}$ qui commence en M et de dernier terme $D\tau DM = DD \text{ Tr } DM \cong \tau^- M$. On admettra que c'est également une suite de Auslander-Reiten dans $\Lambda \text{ Mod}$ (ce n'est pas réutilisé plus tard). \square

3.2 Le carquois de Auslander-Reiten

Proposition 3.2.1. (i) Soit P indécomposable projectif. Alors $g : \text{Rad } P \hookrightarrow P$ est minimale presque scindée à droite dans ΛMod .

(ii) Soit I indécomposable injectif. Alors $f : I \rightarrow I/\text{Soc } I$ est minimale presque scindée à gauche dans ΛMod .

Démonstration. (i) Comme $P/\text{Rad } P$ est simple on en déduit que $\text{Rad } P$ est le seul sous-module maximal de P . Ainsi si $h : X \rightarrow P$ n'est pas un épimorphisme scindé alors h n'est pas un épimorphisme car P est projectif. Donc $\text{Im } h \subset \text{Rad } P$. On voit donc que g est presque scindée à droite. De plus si $t \in \text{Rad } P$ avec $gt = g$ alors $t = \text{Id}$ car g est un monomorphisme.

(ii) se prouve de manière duale. □

Definition. Si M, N sont deux modules et $h : M \rightarrow N$ est linéaire alors h est irréductible si ce n'est ni un monomorphisme scindé ni un épimorphisme scindé et si pour toute factorisation

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & N \\ & \searrow h_1 & \nearrow h_2 \\ & X & \end{array} \quad (36)$$

h_1 est un monomorphisme scindé ou h_2 est un épimorphisme scindé.

Remarque 6. Toute application irréductible est un monomorphisme ou un épimorphisme.

Remarque 7. Soit $M \in \Lambda \text{mod}$ indécomposable. Alors on pose $g : B \rightarrow M$ minimale presque scindée à droite qui existe par le théorème 2.3.2 et la proposition 3.2.1. Soit $B = \bigoplus_i B_i$ une décomposition indécomposable. Alors pour tout i , la fonction $g|_{B_i}$ est irréductible. On obtient un résultat similaire en considérant une application minimale presque scindée à gauche. On verra dans le théorème 3.2.3 qu'on peut obtenir toutes les applications irréductibles de la sorte.

Definition. Soit $M, N \in \Lambda \text{mod}$. Alors le radical de $\text{Hom}_R(M, N)$ est :

$$r(M, N) = \{f \in \text{Hom}_\Lambda(M, N) \mid \text{pour tout module indécomposable } Z \in \Lambda \text{mod}, \\ \text{toute composition de la forme } Z \rightarrow M \xrightarrow{f} N \rightarrow Z \text{ n'est pas un isomorphisme}\}$$

De plus pour $n \geq 1$ on définit par récurrence :

$$r^n(M, N) = \{gh \mid X \in \Lambda \text{mod}, h \in r(M, X), g \in r^{n-1}(X, N)\}$$

Proposition 3.2.2. Si $M, N \in \Lambda \text{mod}$ sont indécomposables alors :

(i) $r(M, N)$ est l'ensemble des non isomorphismes de $\text{Hom}_R(M, N)$.

(ii) $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ est irréductible si et seulement si $f \in r(M, N) - r^2(M, N)$.

Théorème 3.2.3. Soit $M, N \in \Lambda \text{mod}$ indécomposables tels qu'il existe une application irréductible $M \rightarrow N$. Soit $g : B \rightarrow N$ minimale presque scindée à droite et $f : M \rightarrow B'$ minimale presque scindée à gauche. Il existe alors $a, b > 0$ et $X, Y \in \Lambda \text{mod}$ avec :

(1) $B \cong M^a \oplus X$ et M n'est pas isomorphe à un facteur direct de X

(2) $B' \cong N^b \oplus Y$ et N n'est pas isomorphe à un facteur direct de Y

On a de plus les formules suivantes sur a, b :

$$a = \dim_{\text{End}_\Lambda M/J(\text{End}_\Lambda M)} r(M, N)/r^2(M, N) \quad (37)$$

$$b = \dim_{\text{End}_\Lambda N/J(\text{End}_\Lambda N)} r(M, N)/r^2(M, N) \quad (38)$$

En particulier si k est un corps algébriquement clos on a $a = b$.

Démonstration. On pose $X = \bigoplus_{j=1}^k X^j$ une décomposition indécomposable. Soit de plus $g_1, \dots, g_a : M \rightarrow N$ les composantes de $g|_{M^a}$ et g^1, \dots, g^k les composantes de $g|_X$. Alors soit tout d'abord $h \in r(M, N) - r^2(M, N)$. Comme h n'est pas un épimorphisme scindé il existe $\phi : M \rightarrow B$ avec $g\phi = h$. Comme h est irréductible et g n'est pas un épimorphisme scindé, on en déduit que ϕ est un monomorphisme scindé. Soit de plus $\phi_1, \dots, \phi_a : M \rightarrow M$ les composantes de ϕ dans M^a et ϕ^1, \dots, ϕ^k les composantes de ϕ dans X . Alors $g_1\phi_1 + \dots + g_a\phi_a + g^1\phi^1 + \dots + g^k\phi^k = h$. De plus il est clair que les ϕ^j ne sont pas des isomorphismes par définition de X . De plus on a déjà vu que les g^j sont irréductibles et en particulier ce ne sont pas des isomorphismes. Donc $g^j\phi^j \in r^2(M, N)$. Donc en passant au quotient on a $\overline{g_1}\phi_1 + \dots + \overline{g_a}\phi_a = \overline{h}$. Ainsi $\overline{g_1}, \dots, \overline{g_a}$ est une famille génératrice de $r(M, N)/r^2(M, N)$.

Supposons alors qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_a \in \text{End } M$ avec $g_1\alpha_1 + \dots + g_a\alpha_a \in r^2(M, N)$ et que les α_i ne sont pas tous dans $J(\text{End } M)$. Quitte à permuter les indices on suppose $\alpha_a \notin J(\text{End } M)$. Alors α_a est inversible. On peut donc écrire une relation de la forme $g_a = g_1\beta_1 + \dots + g_{a-1}\beta_{a-1} + \gamma$ où $\gamma \in r^2(M, N)$. On pose alors $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ avec $\gamma_1 \in r(Z, N)$ et $\gamma_2 \in r(M, Z)$. Comme γ_1 n'est pas un épimorphisme scindé il existe $\gamma'_1 : Z \rightarrow B$ avec $\gamma_1 = g\gamma'_1$. On définit alors $h : B \rightarrow B$ par :

$$h(\xi_X, \xi_1, \dots, \xi_a) = (\xi_X, \xi_1 + \beta_1(\xi_a), \dots, \xi_{a-1} + \beta_{a-1}(\xi_a), 0) + \gamma'_1\gamma_2(\xi_a) \quad (39)$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} gh(\xi_X, \xi_1, \dots, \xi_a) &= g_X(\xi_X) + g_1(\xi_1) + \dots + g_{a-1}(\xi_{a-1}) \\ &\quad + g_1\beta_1(\xi_a) + \dots + g_{a-1}\beta_{a-1}(\xi_a) + \gamma(\xi_a) \\ &= g_X(\xi_X) + g_1(\xi_1) + \dots + g_a(\xi_a) = g(\xi_X, \xi_1, \dots, \xi_a) \end{aligned} \quad (40)$$

Ainsi on a $gh = g$. De plus la famille d'applications linéaires qui représente h est triangulaire inférieure et $pr_a g(0, \dots, 0, \xi_a) = pr_a \gamma'_1\gamma_2(\xi_a)$ n'est pas un isomorphisme car $\gamma_2 \in r(M, Z)$. C'est absurde car g est minimale à droite donc la famille $\overline{g_1}, \dots, \overline{g_a}$ est libre donc c'est une base ce qui justifie la formule pour a . On justifie de même la formule pour b . De plus comme il existe une flèche irréductible $M \rightarrow N$ on sait que $r(M, N) - r^2(M, N) \neq \emptyset$ donc $r(M, N)/r^2(M, N) \neq 0$ donc $a, b > 0$.

Si k est un corps algébriquement clos alors $\text{End } N/J(\text{End } N)$ est une extension finie de k qui est un anneau à division donc c'est k . Ainsi l'action de $\text{End } N/J(\text{End } N)$ sur $r(M, N)/r^2(M, N)$ s'identifie à l'action de k à gauche. De même l'action de $\text{End } M/J(\text{End } M)$ sur $r(M, N)/r^2(M, N)$ s'identifie à l'action de k à droite. Or k étant commutatif ces deux actions sont les mêmes puis on en déduit $a = b$. \square

Définition. On définit $\Gamma = \Gamma(\Lambda)$ le carquois de Auslander-Reiten de Λ . L'ensemble des sommets Γ_0 est l'ensemble des classes d'isomorphismes $[M]$ de modules indécomposables de type fini. On place une flèche $[M] \xrightarrow{(a,b)} [N]$ si il existe une flèche irréductible $M \rightarrow N$ avec (a, b) comme dans le théorème ci-dessus.

Remarque 8. Le carquois est localement fini, les projectifs simples sont les sources et les injectifs simples sont les puits. Si k est un corps algébriquement clos on peut représenter la valuation en dessinant plusieurs flèches.

Théorème 3.2.4. Soit $[M] \xrightarrow{(a,b)} [N]$ une flèche dans Γ . Alors :

$$(i) \text{ Si } M, N \text{ ne sont pas projectifs il y a également une flèche } [\tau M] \xrightarrow{(a,b)} [\tau N]$$

$$(ii) \text{ Si } N \text{ n'est pas projectif il y a également une flèche } [\tau N] \xrightarrow{(b,a)} [M]$$

Démonstration. (i) : Si $f : A \rightarrow B$ est linéaire on désignera par \underline{f} sa classe dans $\underline{\Lambda\text{mod}}$ et par \overline{f} sa classe dans $\overline{\Lambda\text{mod}}$. Soit $g : B \rightarrow N$ minimale presque scindée à droite. Alors soit par l'absurde

$s : N \rightarrow B$ avec $\underline{gs} = \underline{\text{Id}}_N$. On aurait alors un diagramme

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\text{Id}-gs} & N \\ & \searrow \alpha & \nearrow \beta \\ & & P \end{array} \quad (41)$$

avec P projectif. Comme g n'est pas scindée à droite, gs n'est pas un isomorphisme. Par localité de $\text{End}_\Lambda N$ on en déduit que $\text{Id} - gs$ est un isomorphisme. Ainsi α est un monomorphisme scindé donc N est facteur direct dans P puis N est projectif, absurde. Ainsi \underline{g} n'est pas inversible à droite.

Si $h : X \rightarrow N$ est telle que \underline{h} n'est pas inversible à droite alors h n'est pas inversible à droite. Comme g est presque scindée à droite il existe $\alpha : X \rightarrow B$ avec $h = g\alpha$. On a alors $\underline{h} = \underline{g}\alpha$. On dira que \underline{h} est presque scindée à droite.

Soit $t : B \rightarrow B$ avec $\underline{gt} = \underline{g}$. Alors on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{gt-g} & N \\ & \searrow \alpha & \nearrow \beta \\ & & P \end{array} \quad (42)$$

Alors β n'est pas un épimorphisme scindé car N est indécomposable non projectif. Comme g est presque scindée à droite on en déduit qu'il existe $\beta' : P \rightarrow B$ avec $\beta = g\beta'$. On a alors $g(t - \beta'\alpha) = g$ donc $t - \beta'\alpha$ est un isomorphisme par minimalité de g . Or $\underline{t - \beta'\alpha} = \underline{t}$. Donc \underline{t} est inversible. On dira que \underline{g} est minimale à droite.

Alors soit $g' : B' \rightarrow \tau N$ une application minimale presque scindée à droite. Alors $\overline{g'}$ et $\tau \underline{g}$ sont deux applications minimales presque scindées à droite dans la catégorie $\overline{\Lambda \text{mod}}$. Alors on en déduit que $B' \cong \tau B$ dans $\overline{\Lambda \text{mod}}$. Alors si $B' = (\tau M)^{a'} \oplus X'$ est une décomposition comme dans le théorème 3.3.6 alors on a nécessairement $a' = a > 0$ ce qui montre l'existence d'une application irréductible $\tau M \rightarrow \tau N$. On montre de même que $b = b'$.

(ii) : On a une suite presque scindée $0 \rightarrow \tau N \rightarrow M^a \oplus X \rightarrow N \rightarrow 0$ donc il existe une flèche $[\tau N] \xrightarrow{(a,b')} [M]$. De plus τ définit un isomorphisme $\underline{\text{End}}_\Lambda N \cong \overline{\text{End}}_\Lambda \tau N$. On en déduit un isomorphisme $\text{End}_\Lambda N/J(\text{End}_\Lambda N) \cong \text{End}_\Lambda \tau N/J(\text{End}_\Lambda \tau N)$. Alors on a l'égalité des longueurs suivante :

$$b' |(\text{End}_\Lambda \tau N/J(\text{End}_\Lambda \tau N))| = |(r(M, N)/r^2(M, N))| = b |(\text{End}_\Lambda N/J(\text{End}_\Lambda N))| \quad (43)$$

d'où $b = b'$. □

Remarque 9. L'énoncé du théorème précédent et sa preuve sont inchangés si on rajoute des flèches $[M] \xrightarrow{(0,0)} [N]$ quand il n'existe pas de flèche irréductible $M \rightarrow N$.

Les deux théorèmes précédents seront particulièrement utiles pour calculer avec des suites de Auslander-Reiten par le biais du

Corollaire 3.2.5. (i) *Si il existe une flèche irréductible $M \rightarrow N$ et si N (resp. M) n'est pas projectif (resp. injectif) alors il existe une suite de Auslander-Reiten*

$$0 \longrightarrow \tau N \longrightarrow M \oplus M' \longrightarrow N \longrightarrow 0 \quad (44)$$

(resp.

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \oplus N' \longrightarrow \tau^{-1}M \longrightarrow 0 \quad (45)$$

)

(ii) Si $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ est une suite de Auslander-Reiten et si X (resp. Z) n'est pas projectif (resp. injectif) alors il existe I injectif (resp. P projectif) et une suite de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow \tau Y \oplus I \longrightarrow \tau Z \longrightarrow 0 \quad (46)$$

(resp.

$$0 \longrightarrow \tau^{-1} X \longrightarrow \tau^{-1} Y \oplus P \longrightarrow \tau^{-1} Z \longrightarrow 0 \quad (47)$$

)

Démonstration. (i) : On se place dans le cas où N n'est pas projectif. Alors par le théorème 3.1.2 on a une suite de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow \tau N \longrightarrow B \longrightarrow N \longrightarrow 0 \quad (48)$$

Alors en appliquant le théorème 3.2.3 il vient que M est facteur direct dans B d'où le résultat. Le cas M non injectif se traite dualement.

(ii) : Supposons X non projectif. Alors $\tau Z = X$ n'est pas projectif donc il existe une suite de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow Y' \longrightarrow \tau Z \longrightarrow 0 \quad (49)$$

Soit alors M un module indécomposable non injectif. Alors $\tau^{-1} M$ n'est pas projectif. Ainsi par le théorème 3.2.4 et sa remarque on en déduit que la multiplicité de $\tau^{-1} M$ dans Y est égale à la multiplicité de M dans Y' . Or M a même multiplicité dans τY que $\tau^{-1} M$ dans Y clairement. Ainsi on en déduit l'existence de I injectif avec $Y' = \tau Y \oplus I$. On raisonne de manière duale si Z n'est pas injectif. \square

Exemple 3.2.1. On considère $\Lambda = kA_3$. D'après l'exemple 1.3.2 on connaît tous les indécomposables. On a alors $\text{Rad } P_1 = P_2, \text{Rad } P_2 = P_3, \text{Rad } P_3 = 0$ et $I_1/\text{Soc } I_1 = 0, I_2/\text{Soc } I_2 \cong I_1 \cong S_1, I_3/\text{Soc } I_3 \cong I_2$. De plus en réutilisant l'exemple 3.1.1 on voit qu'on a une suite de Auslander-Reiten $0 \rightarrow S_3 \rightarrow B \rightarrow S_2 \rightarrow 0$. Or l'inclusion $S_3 = P_3 \hookrightarrow P_2$ est minimale donc irréductible car P_2 est indécomposable. Ainsi P_2 est facteur direct dans B par le théorème 3.2.3. Comme $\dim_k S_2 + \dim_k S_3 = \dim_k P_2$ on en déduit $B = S_2$. De même on a les suites de Auslander-Reiten $0 \rightarrow S_2 \rightarrow I_2 \rightarrow S_1 \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow P_2 \rightarrow S_2 \oplus P_1 \rightarrow I_2 \rightarrow 0$. Ainsi le carquois de Auslander-Reiten de Λ est :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P_1 = I_3 & & \\
 & & \nearrow & \searrow & \\
 & P_2 & & & I_2 \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 P_3 = S_3 & & S_2 & & I_1 = S_1
 \end{array} \quad (50)$$

4 Le carquois de Auslander-Reiten d'une algèbre Artinienne héréditaire

Ici on reprend certains résultats présentés dans [Hüg]. Le théorème principal de cette section qui donne la structure des composantes régulières dans le cas sauvage (voir théorème 4.2.2) est repris de [Rin78]. La présentation de la transformation de Coxeter vient de [Peñ] et on utilise également des résultats de [BMW72] et [DR76].

On fixe k un corps et Λ une k -algèbre basique et héréditaire.

4.1 Résultats préliminaires

Pour étudier la structure du carquois d'Auslander-Reiten des algèbres Artiniennes héréditaires on aura besoin des résultats suivants :

Proposition 4.1.1. *On dispose d'un foncteur $\text{Tr} : \Lambda \text{ mod} \rightarrow \text{mod } \Lambda$ qui est isomorphe au foncteur $\text{Ext}_\Lambda^1(-, \Lambda)$. De plus Tr induit une équivalence $\Lambda \text{ mod } \mathcal{P} \rightarrow \text{mod } \Lambda_{\mathcal{P}}$. Ainsi τ devient un foncteur exact à gauche $\Lambda \text{ mod} \rightarrow \Lambda \text{ mod}$ qui se restreint en une équivalence $\Lambda \text{ mod}_{\mathcal{P}} \rightarrow \Lambda \text{ mod}_{\mathcal{T}}$.*

Toute la présentation qui suit est reprise de [Peñ].

Definition. On pose $K_0(\Lambda)$ le groupe abélien engendré les \overline{M} pour $M \in \Lambda \text{ mod}$ où \overline{M} désigne la classe d'isomorphisme de M et avec les relations $\overline{A} - \overline{B} + \overline{C} = 0$ si on a une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad (51)$$

Ce groupe est le groupe de Grothendieck de $\Lambda \text{ mod}$. Pour $M \in \Lambda \text{ mod}$ on notera $[M]$ sa classe dans $K_0(\Lambda)$.

Proposition 4.1.2. *On pose S_1, \dots, S_n des représentants des classe d'isomorphisme des modules simples de $\Lambda \text{ mod}$. On pose de plus P_1, \dots, P_n leurs couvertures projectives et I_1, \dots, I_n leurs enveloppes injectives. Alors ce sont trois bases de $K_0(\Lambda)$.*

Démonstration. Les $[S_1], \dots, [S_n]$ forment une base d'après le théorème de Jordan-Hölder. De plus comme Λ est héréditaire il est clair que les $[P_1], \dots, [P_n]$ forment une famille génératrice de $K_0(\Lambda)$ car on a des résolutions projectives à deux termes. Alors les $[S_i] \otimes 1$ forment une \mathbf{Q} base de $K_0(\Lambda) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ et les $[P_i] \otimes 1$ en sont une \mathbf{Q} famille génératrice donc également une base. Ainsi P_1, \dots, P_n est \mathbf{Z} -libre. Par dualité les I_1, \dots, I_n sont également une base. \square

Definition. Si S_1, \dots, S_n sont des représentants des classes d'isomorphismes des simples de $\Lambda \text{ mod}$ alors pour $M \in \Lambda \text{ mod}$ on posera $\underline{\dim} M$ le vecteur de $[M]$ dans la base des $[S_i]$ (la i -ème composante du vecteur est le nombre de facteurs de composition de M isomorphes à S_i)

Remarque 10. Cette définition de $\underline{\dim}$ est en accord avec la définition qu'on avait déjà donné pour cette notation dans le cas des algèbres de carquois (voir section 1.3)

Definition. On pose c l'automorphisme de $K_0(\Lambda)$ défini par $c([P_i]) = -[I_i]$. On l'appelle la transformation de Coxeter

On admet alors le théorème suivant :

Théorème 4.1.3. *Si M est un module indécomposable non projectif alors*

$$[\tau M] = c([M]) \quad (52)$$

Finalement on aura besoin des définitions suivantes :

Definition. Pour $[X], [Y] \in K_0(\Lambda)$, on définit :

$$\langle [X], [Y] \rangle = \dim_k \text{Hom}_\Lambda(X, Y) - \dim_k \text{Ext}_\Lambda^1(X, Y) \quad (53)$$

Alors $\langle -, - \rangle$ est une forme bilinéaire.

On considère alors $\chi(x) = \langle x, x \rangle$ pour $x \in K_0(\Lambda)$. Il s'agit d'une forme quadratique. On dira alors que Λ est de type de représentation

- fini si χ est définie positive.
- modéré si χ est semi-définie positive mais pas définie.
- sauvage sinon.

Proposition 4.1.4 (voir [BMW72] et le lemme 1.3 de [DR76]). *L'algèbre Λ est de type de représentation modéré si et seulement si il existe $x = \sum_{i=1}^n x_i [S_i]$ avec $c(x) = x$, $x \neq 0$ et $x_i \geq 0$ pour tout i .*

4.2 Composantes connexes

Definition. On appellera composante connexe de Γ toute composante connexe du graphe (non orienté) sous jacent à Γ .

Un module M est dit préprojectif (resp. préinjectif) si il existe $n \geq 0$ avec $\tau^n M = 0$ (resp. $\tau^{-n} M = 0$). Dans tout les autres cas on dit que M est régulier.

Remarque 11. Un module indécomposable M est préprojectif (resp. préinjectif) si et seulement si il existe $n \geq 0$ avec $M = \tau^{-n} P$ avec P projectif (resp. $M = \tau^n I$ avec I injectif).

Proposition 4.2.1. *Soit X, Y deux modules indécomposables. Supposons qu'il existe une flèche irréductible $h : X \rightarrow Y$. Alors X est préprojectif (resp. préinjectif) si et seulement si Y est préprojectif (resp. préinjectif).*

Démonstration. Supposons tout d'abord que Y est préprojectif. On pose $Y = \tau^{-n} P$ avec P projectif. Si $\tau^n X = 0$ alors X est préprojectif. Supposons donc $\tau^n X \neq 0$. On a alors une suite de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow \tau Y \oplus Z \longrightarrow X \longrightarrow 0 \quad (54)$$

par le corollaire 3.2.5.(i) et le théorème 3.2.4.(ii). On en déduit une flèche irréductible $\tau X \rightarrow \tau Y$. Par récurrence on obtient une flèche irréductible $h' : \tau^n X \rightarrow P$. Alors comme P est projectif, h' est un monomorphisme. Comme Λ est héréditaire on en déduit que $\tau^n X$ est projectif d'où X est préprojectif.

Supposons alors X préprojectif. Si Y est projectif il n'y a rien à faire. Sinon il existe une suite de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow X \oplus Z \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \quad (55)$$

Alors par le paragraphe précédent on en déduit que U est préprojectif donc $Y = \tau^{-1} U$ est préprojectif. On traite de manière duale le cas des modules préinjectifs. \square

La proposition précédente permet de justifier la

Definition. Soit \mathbf{C} une composante connexe de Γ . On dit que \mathbf{C} est une composante préprojective (resp. préinjective, régulière) si tout les modules dans \mathbf{C} sont préprojectif (resp. préinjectifs, réguliers).

Théorème 4.2.2 (Ringel, voir la proposition 2.3 de [Rin78]). *Soit \mathbf{C} une composante régulière et*

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^k Y_i \longrightarrow Z \longrightarrow 0 \quad (56)$$

une suite d'Auslander-Reiten dans \mathbf{C} telle que chaque Y_i est indécomposable. Alors $k \leq 3$. Si $k = 2$, quitte à échanger Y_1 et Y_2 on a $|Y_1| < |X|, |Z| < |Y_2|$. Si $k = 3$ alors $|Y_1|, |Y_2|, |Y_3| < |X|, |Z|$. Le cas $k = 3$ ne peut pas se produire si Λ est sauvage.

Démonstration. On pose $Y = \bigoplus_{i=1}^k Y_i$. Comme X, Z sont des modules réguliers, il est clair qu'on a des suites d'Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow \tau^n X \longrightarrow \tau^n Y \longrightarrow \tau^n Z \longrightarrow 0 \quad (57)$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$. On montre alors le résultat en plusieurs étapes :

Étape 1 : Si $Y = Y' \oplus Y''$ et si $|X| \leq |Y'|$ alors $|X| > |Y''|$. Supposons en effet le contraire par l'absurde. Alors les applications induites $X \rightarrow Y'$ et $X \rightarrow Y''$ sont toutes les deux irréductibles. Par les conditions de longueur ce sont nécessairement des monomorphismes. Alors la suite $|\tau^m X|_{m \geq 0}$ ne peut pas être strictement décroissante. On pose donc $m \geq 0$ avec $|\tau^m X| \geq |\tau^{m+1} X|$. De plus on a une suite d'Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow \tau^{m+1} X \longrightarrow \tau^{m+1} Y' \oplus \tau^{m+1} Y'' \longrightarrow \tau^m X \longrightarrow 0 \quad (58)$$

Comme τ préserve les monomorphismes on en déduit que $\tau^{m+1}X \rightarrow \tau^{m+1}Y'$ et $\tau^{m+1}X \rightarrow \tau^{m+1}Y''$ sont deux monomorphismes. Comme de plus ce ne sont pas des isomorphismes on en déduit que $|\tau^{m+1}X| < |\tau^{m+1}Y'|, |\tau^{m+1}Y''|$. Ainsi

$$|\tau^{m+1}Y'| + |\tau^{m+1}Y''| = |\tau^m X| + |\tau^{m+1}X| \leq 2|\tau^{m+1}X| < |\tau^{m+1}Y'| + |\tau^{m+1}Y''| \quad (59)$$

C'est absurde d'où le résultat.

Etape 2 : Si $i \neq j$ alors $|X| < |Y_i| + |Y_j|$. En effet supposons le contraire. Alors $X \rightarrow Y_i \oplus Y_j$ est un épimorphisme. On choisit $k \geq 0$ avec $|\tau^{-k}X| \leq |\tau^{-k-1}X|$. Alors comme τ^{-1} préserve les épimorphismes on en déduit des épimorphismes irréductibles $\tau^{-k-1}X \rightarrow \tau^{-k-1}Y_i \oplus \tau^{-k-1}Y_j$ et $\tau^{-k}X \rightarrow \tau^{-k}Y_i \oplus \tau^{-k}Y_j$. On en déduit les inégalités suivantes :

$$|\tau^{-k-1}X| > |\tau^{-k-1}Y_i| + |\tau^{-k-1}Y_j| \quad (60)$$

$$|\tau^{-k}X| > |\tau^{-k}Y_i| + |\tau^{-k}Y_j| \quad (61)$$

De plus on a une suite d'Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow \tau Y_i \longrightarrow X \oplus C_i \longrightarrow Y_i \longrightarrow 0 \quad (62)$$

On en déduit une suite d'Auslander-Reiten :

$$0 \longrightarrow \tau^{-k}Y_i \longrightarrow \tau^{-k-1}X \oplus \tau^{-k-1}C_i \longrightarrow \tau^{-k-1}Y_i \longrightarrow 0 \quad (63)$$

En procédant de même avec Y_j on obtient les deux inégalités :

$$|\tau^{-k-1}X| \leq |\tau^{-k}Y_i| + |\tau^{-k-1}Y_i| \quad (64)$$

$$|\tau^{-k-1}X| \leq |\tau^{-k}Y_j| + |\tau^{-k-1}Y_j| \quad (65)$$

Alors en utilisant les deux jeux d'inégalités précédents on obtient :

$$2|\tau^{-k-1}X| \leq |\tau^{-k}Y_i| + |\tau^{-k-1}Y_i| + |\tau^{-k}Y_j| + |\tau^{-k-1}Y_j| < |\tau^{-k}X| + |\tau^{-k-1}X| \quad (66)$$

ce qui est absurde.

Etape 3 : $k \leq 3$ et si $k = 3$ alors $|Y_i| < |X|$ pour tout i . En effet si $K \geq 4$ alors par l'étape 2 on a $|X| < |Y_1 \oplus Y_2|, |Y_3 \oplus Y_4|$ ce qui est absurde par l'étape 1. Si $k = 3$ alors supposons par l'absurde $|X| \leq |Y_i|$. On se ramène à supposer $i = 1$. Alors par l'étape 2 on trouve $|X| < |Y_2 \oplus Y_3|$ ce qui est absurde par l'étape 1.

Etape 4 : Si $k=2$ et $|Y_1| \leq |Y_2|$ alors $|Y_1| < |X| < |Y_2|$ et $|Y_1| < |Z| < |Y_2|$. En effet en utilisant l'étape 1 et le fait que $|X| \neq |Y_i|$ car $X \rightarrow Y_i$ est un monomorphisme ou un épimorphisme mais pas un isomorphisme on trouve que $|Y_1| \leq |Y_2| < |X|$ ou $|Y_1| < |X| < |Y_2|$. Par dualité on a de même $|Y_1| \leq |Y_2| < |Z|$ ou $|Y_1| < |Z| < |Y_2|$. On écrit alors que $|Y_1| + |Y_2| = |X| + |Z|$. Alors il est impossible d'avoir $|Y_1| \leq |Y_2| < |X|$ et $|Y_1| \leq |Y_2| < |Z|$ simultanément. De plus on voit également que $|Y_1| < |X| < |Y_2|$ est équivalent à $|Y_1| < |Z| < |Y_2|$. On a ainsi le résultat voulu.

Etape 5 : $k \neq 3$. Supposons par l'absurde que $k = 3$. Alors on a des épimorphismes $X \rightarrow Y_i$ pour tout i . On en déduit un épimorphisme :

$$\bigoplus_{i=1}^3 \tau Z = \bigoplus_{i=1}^3 X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^3 Y_i \rightarrow Z \quad (67)$$

On obtient de même un épimorphisme :

$$\bigoplus_{i=1}^3 \tau^{t+1} Z \rightarrow \tau^t Z \quad (68)$$

Alors par le lemme de König (tout arbre infini à branchements finis possède une branche infinie) on en déduit qu'il existe une suite d'applications :

$$\dots \longrightarrow \tau^{t+1} Z \xrightarrow{f_{t+1}} \tau^t Z \longrightarrow \dots \xrightarrow{f_2} \tau Z \xrightarrow{f_1} Z \quad (69)$$

vérifiant que $g_t = f_1 \dots f_t \neq 0$ pour tout t . On pose alors $I_t = \text{Im } g_t$. Les (I_t) sont une suite décroissante de sous-modules de Z donc il existe $N \geq 0$ tel que pour $t \geq N$ on a $I_t = I_N$. Alors comme g_t est surjective sur I on en déduit que $\tau^{-t}g_t : Z \rightarrow \tau^{-t}I$ est un épimorphisme. Ainsi $\underline{\dim} \tau^{-t}I \leq \underline{\dim} Z$. Comme il existe un nombre fini de tels vecteurs dimension, il existe $s < t$ avec $\underline{\dim} \tau^{-s}I = \underline{\dim} \tau^{-t}I$. Alors comme I est l'image de g_t , I n'a pas de facteur préprojectif. De plus $I \subset Z$ donc I n'a pas de facteur préinjectif. On pose donc :

$$q = \sum_{i=s+1}^t \underline{\dim} \tau^{-i}I \quad (70)$$

On a alors $c(q) = q$ et q est un vecteur positif non nul. Donc Λ est de type de représentation modéré. \square

On se place dans le cas où Λ est sauvage et on explique comment utiliser ce résultat pour construire les composantes régulières de Γ . Soit donc \mathbf{C} une composante régulière. Alors on pose M_0 un module dans \mathbf{C} de longueur minimale. Par la proposition on en déduit qu'on a une suite d'Auslander-Reiten :

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \tau^{-1}M_0 \longrightarrow 0 \quad (71)$$

et $|M_1| > |M_0|$ clairement. Toujours par la proposition on obtient une suite d'Auslander-reiten :

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \tau^{-1}M_0 \oplus M_2 \longrightarrow \tau^{-1}M_1 \longrightarrow 0 \quad (72)$$

avec $|M_2| > |M_1|$. On obtient ainsi une suite de modules $(M_n)_{n \geq 0}$ vérifiant $|M_n| < |M_{n+1}|$ pour tout n et on a des suites d'Auslander-Reiten :

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow \tau^{-1}M_{n-1} \oplus M_{n+1} \longrightarrow \tau^{-1}M_n \longrightarrow 0 \quad (73)$$

Alors la suite de propositions suivante permet de déterminer entièrement la structure de \mathbf{C} :

Proposition 4.2.3. *Soit $M \in \mathbf{C}$. Alors il existe $i \geq 0$ et $r \in \mathbf{Z}$ avec $M = \tau^r M_i$.*

Proposition 4.2.4. *Si $\tau^r M_i = M_j$ alors $i = j$.*

Démonstration. Considérons par l'absurde i minimal tel qu'il existe j et r avec $\tau^r M_j = M_i$ et $i \neq j$. Comme $\tau^{-r} M_i = M_j$ on a en particulier $i \leq j$. Si $i > 0$ alors on a des suites d'Auslander-Reiten :

$$0 \longrightarrow \tau^r M_j \longrightarrow \tau^{r-1} M_{j-1} \oplus \tau^r M_{j+1} \longrightarrow \tau^{r-1} M_j \longrightarrow 0 \quad (74)$$

$$0 \longrightarrow M_i \longrightarrow \tau^{-1} M_{i-1} \oplus M_{i+1} \longrightarrow \tau^{-1} M_i \longrightarrow 0 \quad (75)$$

Comme $\tau^r M_j = M_i$ ce sont les mêmes suites. Ainsi on a $\tau^{-1} M_{i-1} \in \{\tau^{r-1} M_{j-1}, \tau^r M_{j+1}\}$. Or $i-1 < j-1, j+1$ ce qui contredit la minimalité de i . On a donc $i = 0$. Si on suppose $j \neq 0$ alors on a des suites de Auslander-Reiten :

$$0 \longrightarrow \tau^r M_j \longrightarrow \tau^{r-1} M_{j-1} \oplus \tau^r M_{j+1} \longrightarrow \tau^{r-1} M_j \longrightarrow 0 \quad (76)$$

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow \tau M_1 \longrightarrow \tau^{-1} M_0 \longrightarrow 0 \quad (77)$$

Alors ce sont les mêmes suites d'Aulander-Reiten mais le terme du milieu n'a pas le même nombre de facteurs indécomposables dans les deux cas, c'est absurde. \square

Proposition 4.2.5. *Si $\tau^r M = M$ alors $r = 0$.*

Démonstration. En effet sinon on peut supposer $r > 0$ et on a alors que :

$$q = \sum_{i=0}^{r-1} \underline{\dim} \tau^i M \quad (78)$$

est un vecteur positif fixé par c donc Λ est modérée. C'est absurde. \square

On aura alors besoin de la définition suivante pour décrire la structure des composantes régulières

Definition. Soit Q un carquois localement fini sans boucle (arrête d'un sommet vers le même sommet). On définit le carquois $\mathbf{Z}Q$ de la manière suivante. Les sommets de $\mathbf{Z}Q$ sont $\mathbf{Z} \times Q_0$ où Q_0 est l'ensemble des sommets de Q . De plus pour toute flèche $i \rightarrow j$ dans Q_0 on pose des flèches $(n, i) \rightarrow (n, j)$ et $(n, j) \rightarrow (n+1, i)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

On notera de plus $\mathbf{N}Q$ (resp. $-\mathbf{N}Q$) le sous-carquois plein de $\mathbf{Z}Q$ dont les sommets sont les $\mathbf{N} \times Q_0$ (resp. $-\mathbf{N} \times Q_0$).

Corollaire 4.2.6. *On considère le carquois infini*

$$A_\infty : \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \dots \quad (79)$$

Si \mathbf{C} est une composante régulière de Λ , alors \mathbf{C} a la forme de $\mathbf{Z}A_\infty$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \dots & & \dots & & \dots \\
 & & \tau M_2 & & M_2 & & \tau^{-1} M_2 \\
 & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
 \dots & & \tau M_1 & & M_1 & & \tau^{-1} M_1 & \dots \\
 & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \\
 \dots & & \tau M_0 & & M_0 & & \tau^{-1} M_0 & \dots
 \end{array} \quad (80)$$

Definition. On a une action naturelle du groupe $\langle \tau \rangle$ engendré par τ sur $\mathbf{Z}A_\infty$. On dira que $\mathbf{Z}A_\infty / \langle \tau^n \rangle$ est un tube et on dira de plus qu'il est homogène si $n = 1$.

En utilisant les mêmes méthodes on peut montrer un résultat similaire sur les composantes préprojectives et préinjectives

Proposition 4.2.7. *On suppose que k est algébriquement clos. Soit \mathbf{C} une composante préprojective qui n'est pas une composante préinjective. Alors on pose P_1, \dots, P_n les projectifs indécomposables de \mathbf{C} . On construit un carquois Q dont les sommets sont P_1, \dots, P_n . On note d_{ij} la multiplicité de P_i dans $\text{Rad } P_j$. On pose alors d_{ij} flèches de P_i vers P_j . Alors \mathbf{C} a la forme de $\mathbf{N}Q$.*

On a un résultat dual pour les composantes préinjectives.

4.3 L'algèbre de Kronecker

On considère le carquois $Q : \bullet_1 \xrightarrow[\beta]{\alpha} \bullet_2$. On suppose que k un corps algébriquement clos et on pose $\Lambda = kQ$. On calcule alors dans le groupe de Grothendieck :

$$[P_1] = [S_1] + 2[S_2]; [P_2] = [S_2] \quad (81)$$

$$[I_1] = [S_1]; [I_2] = 2[S_1] + [S_2] \quad (82)$$

On pose C la matrice de c dans la base $[S_1], [S_2]$. Alors on calcule :

$$C = - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (83)$$

Alors on pose $v = [S_1] + [S_2]$. On peut vérifier que $c(v) = v$. De plus $c(x) = x + 2(x_1 - x_2)v$ pour tout $x = x_1[S_1] + x_2[S_2]$. On en déduit immédiatement

$$c^m(x) = x + 2m(x_1 - x_2)v \quad (84)$$

Alors on en déduit immédiatement que

- Si P est préprojectif alors $\underline{\dim}P = (m, m + 1)$.
- Si I est préinjectif alors $\underline{\dim}P = (m + 1, m)$.

Ainsi les composantes préprojectives et préinjectives sont disjointes. De plus $\text{Rad } P_1 = P_2 \oplus P_2$. Ainsi il y a une unique composante préprojective. On la note \mathbf{p} . Par la proposition 4.2.7 cette composante a la forme suivante :

$$(85)$$

En raisonnant de même on voit qu'il n'y a qu'une composante préinjective, on la note \mathbf{q} et elle a la forme suivante :

$$(86)$$

Déterminons maintenant les modules réguliers. Tout d'abord si $l < m$ alors $c^m(l, m) = (l, m) + 2m(l - m, l - m)$ est négatif. Ainsi il n'existe pas de module régulier M avec $\underline{\dim}M = (l, m)$. Dualement il n'existe pas de module régulier M avec $\underline{\dim}M = (l, m)$ et $l > m$. Ainsi si M est régulier alors $\underline{\dim}M = (m, m)$.

On peut vérifier que Λ est de type de représentation modéré. On pose alors :

$$V_\lambda : k \xrightarrow[\lambda]{1} k \quad \text{pour } \lambda \in k \quad \text{et} \quad V_\infty : k \xrightarrow[1]{0} k \quad (87)$$

Il est clair que V_λ est indécomposable pour $\lambda \in \mathbf{P}^1(k)$. De plus on a une résolution projective

$$0 \longrightarrow \Lambda e_2 \longrightarrow \Lambda e_1 \longrightarrow V_\lambda \longrightarrow 0 \quad (88)$$

d'où on obtient :

$$\dim_k \text{Hom}_\Lambda(V_\lambda, V_\mu) = \dim_k \text{Ext}_\Lambda^1(V_\lambda, V_\mu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (89)$$

Alors τV_λ est un module indécomposable de vecteur dimension $(1, 1)$ et tel que $\text{Ext}_\Lambda^1(V_\lambda, \tau V_\lambda) \neq 0$. Ainsi d'après ce qui précède, $\tau V_\lambda = V_\lambda$.

On montre maintenant que V_λ définit bien un tube homogène. Tout d'abord soit \mathbf{C} la composante de V_λ . Alors on suppose par l'absurde qu'il existe $M \in \mathbf{C}$ tel qu'on ait une suite d'Auslander-Reiten :

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad (90)$$

Alors en utilisant le théorème 4.2.2 ainsi que le théorème 3.2.3 et le fait que k est algébriquement clos, on voit que Y_1, Y_2, Y_3 sont deux à deux non isomorphes. En utilisant le théorème 4.2.2 on obtient facilement des suites de modules réguliers $(X_1^j)_{1 \leq j \leq n_1}, (X_2^j)_{1 \leq j \leq n_2}, (X_3^j)_{1 \leq j \leq n_3}$ avec $M = X_1^{n_1} = X_2^{n_2} = X_3^{n_3}$ et $X_1^{n_1-1} = Y_1, X_2^{n_2-1} = Y_2, X_3^{n_3-1} = Y_3$ de sorte qu'on a des suites d'Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow \tau X_i^j \longrightarrow X_i^{j-1} \oplus X_i^{j+1} \longrightarrow X_i^j \longrightarrow 0 \quad (91)$$

pour tout $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j < n_i$ en posant $X_i^0 = 0$. On en déduit immédiatement que $|X_i^j| = j|X_i|$. On a alors

$$|Y_i| = \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) |M| \quad (92)$$

puis on en déduit que

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 \quad (93)$$

Quitte à permuter on supposera $n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Alors il y a 3 possibilités :

- $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 6.$
- $n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = 4.$
- $n_1 = 3, n_2 = 3, n_3 = 3.$

On peut vérifier facilement que tous les modules réguliers de longueur 4 ont des flèches irréductibles vers l'un des V_μ . Par ailleurs il est clair qu'il existe $1 \leq i \leq 3$ avec $X_i^1 = V_\lambda$. Il est clair qu'on ne peut pas avoir $n_i = 2$ car V_λ est de longueur minimale parmi les réguliers. De plus par ce qui précède, $n_i \notin \{4, 6\}$ sinon l'un des V_j^1 est de longueur 4. Donc $n_i = 3$ et par minimalité de la longueur de V_λ on voit qu'on est dans le cas $n_1 = n_2 = n_3 = 3$.

Finalement on a $|X_1^1| = |X_2^1| = |X_3^1| = 2$ donc ils sont tous de la forme V_{μ_i} . Alors on considère une représentation de carquois associée à M

$$M : k^3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} k^3 \quad (94)$$

On a des inclusions de chaque V_{μ_i} dans M . On obtient donc des x_i et des y_i tels que $\alpha(x_i) = y_i, \beta(x_i) = \mu_i y_i$ si $\mu_i \neq \infty$ et $\alpha(x_i) = 0, \beta(x_i) = y_i$ si $\mu_i = \infty$. On peut alors vérifier que les x_i forment une base de k^3 . Ainsi si $\mu_i \neq \infty$ pour tout i alors α est un isomorphisme. Quitte à changer les bases au départ et à l'arrivée on peut donc supposer que $\alpha = \text{Id}$. On voit alors que β a trois valeurs propres distinctes donc est diagonalisable ce qui fournit une décomposition de M . Si $\mu_i \neq 0$ pour tout i alors β est un isomorphisme et on conclut de même. Enfin supposons $\mu_1 = 0, \mu_2 = \infty, \mu_3 = \lambda$. Alors $\text{Im } \alpha$ est engendré par y_2, y_3 et $\text{Im } \beta$ est engendré par y_1, y_3 . Or comme M est indécomposable, $\text{Im } \alpha + \text{Im } \beta = k^3$. Donc $y_1 \notin \text{Im } \alpha$. On a donc une décomposition :

$$M = (kx_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} ky_1) \bigoplus (kx_2 \oplus kx_3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} ky_2 \oplus ky_3) \quad (95)$$

C'est absurde d'où le résultat.

Alors en répliquant les raisonnements de la section 4.2 sur les composantes régulières on en déduit que \mathbf{C} est de la forme suivante :

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \updownarrow \\ V_{\lambda,2} \\ \updownarrow \\ V_{\lambda,1} = V_\lambda \end{array} \quad (96)$$

Annexe A Compléments d'algèbre homologique

Les résultats présentés dans cette partie sont essentiellement ceux que l'on peut trouver dans la section 1 de [Hüg].

On fixe un anneau R . On rappelle qu'un foncteur F covariant (resp. contravariant) est exact à gauche si pour toute suite exacte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ (resp. $C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0$) la suite

$$0 \longrightarrow FA \longrightarrow FB \longrightarrow FC \quad (97)$$

est exacte. On a dualement une notion de foncteur exact à droite. Un foncteur exact à gauche et à droite est dit exact.

A.1 Modules projectifs et injectifs

Proposition A.1.1. *Soit M un module. Alors le foncteur covariant $\text{Hom}_R(M, -) : R\text{Mod} \rightarrow \mathbf{Z}\text{Mod}$ et le foncteur contravariant $\text{Hom}_R(-, M) : R\text{Mod} \rightarrow \mathbf{Z}\text{Mod}$ sont tous les deux exacts à gauche.*

Définition. On dira qu'un module P est projectif si $\text{Hom}_R(P, -)$ est exact et on dira que I est injectif si $\text{Hom}_R(-, I)$ est exact.

Théorème A.1.2. Soit P un module. S'équivalent :

- (i) P est projectif.
- (ii) P est isomorphe à un facteur direct d'un module libre.
- (iii) Toute application linéaire surjective $g : M \rightarrow P$ est scindée.

Remarque 12. En particulier les modules libres sont projectifs donc pour tout module M il existe P projectif et $f : P \rightarrow M$ linéaire et surjective. On va voir qu'on a mieux pour les modules injectifs.

Lemme A.1.3. Soit P un module projectif de type fini. Alors $P^* = \text{Hom}_R(P, R)$ est un module à droite sur R projectif de type fini. De plus $P^{**} \cong P$ et pour tout module M on a $\text{Hom}_R(P, M) \cong P^* \otimes_R M$.

Définition. Si A, B sont des modules et $f : A \rightarrow B$ on dit que f est minimale à gauche si tout $t \in \text{End}_R B$ avec $tf = f$ est un isomorphisme. De manière duale on peut définir les applications linéaires minimales à droite.

Théorème A.1.4 (Eckmann-Schopf). Soit M un module. Il existe $E(M)$ un module injectif et $f : M \rightarrow E(M)$ une application linéaire injective minimale à gauche. De plus $E(M)$ est unique à isomorphisme près. On l'appelle l'enveloppe injective de M .

Remarque 13. Dualement si $p : P \rightarrow M$ est linéaire, surjective et minimale à droite avec P projectif on appelle p une couverture projective de M . Cependant en général les couvertures projectives n'existent pas.

Définition. Un anneau R est dit semi parfait si tout module de type fini admet une couverture projective.

A.2 Cogénérateurs, Radical et Socle

Définition. Un module C est un cogénérateur de $R\text{Mod}$ si pour tout module M , il existe un ensemble I et une application $f : M \hookrightarrow C^I$ linéaire et injective.

Proposition A.2.1. Si S_1, \dots, S_n sont des représentants de toutes les classes d'isomorphismes de modules simples alors $C = \bigoplus_{i=1}^n E(S_i)$ est un cogénérateur injectif de $R\text{Mod}$. De plus si C' est un module alors C' est un cogénérateur de $R\text{Mod}$ si et seulement si C' possède un facteur direct isomorphe à C . On dit que C est un cogénérateur minimal.

Définition. Soit M un module. On définit le radical de M par

$$\text{Rad } M = \bigcap \{U \mid U \text{ est un sous-module maximal de } M\} \quad (98)$$

et le socle de M est :

$$\text{Soc } M = \sum_{i=1}^n \{S \mid S \text{ est un sous-module simple de } M\} \quad (99)$$

Le radical de R vu comme module à gauche ou à droite sur lui-même est le même, c'est donc un idéal bilatère qu'on appelle le radical de Jacobson de R . On le note $J(R)$.

Définition. Un anneau est local si il possède un unique idéal à gauche maximal qui est alors $J(R)$. C'est équivalent à posséder un unique idéal à droite maximal.

Proposition A.2.2 (lemme de Nakayama). Soit M un module de type fini avec $J(R)M = M$. Alors $M = 0$.

A.3 Quelques propriétés de Ext_R^1

Definition. On considère A, B deux modules. Soit de plus $\mathfrak{C}_1 : 0 \rightarrow B \rightarrow E_1 \rightarrow A \rightarrow 0$ et $\mathfrak{C}_2 : 0 \rightarrow B \rightarrow E_2 \rightarrow A \rightarrow 0$ deux suites exactes. On pose $\mathfrak{C}_1 \sim \mathfrak{C}_2$ si il existe $f : E_1 \rightarrow E_2$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathfrak{C}_1 : 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow f & & \parallel & & \\ \mathfrak{C}_2 : 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (100)$$

Alors \sim est une relation d'équivalence par le lemme des 5 et on note $\text{Ext}_R^1(A, B)$ l'ensemble des suites exactes courtes de la forme ci-dessus quotienté par \sim .

Remarque 14. Si P est projectif alors $\text{Ext}_R^1(P, B) = \{0\}$ où 0 dénote la classe de l'extension triviale $0 \rightarrow B \rightarrow A \oplus B \rightarrow A \rightarrow 0$. De même si I est injectif alors $\text{Ext}_R^1(A, I) = \{0\}$

Si $\alpha : A' \rightarrow A$ est R -linéaire et \mathfrak{C} est une suite exacte courte, on peut construire une suite exacte courte $\mathfrak{C}\alpha$ en utilisant un pull-back de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathfrak{C}\alpha : 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \\ \mathfrak{C} : 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (101)$$

Cette application passe au quotient donc on obtient une application $\text{Ext}_R^1(\alpha, B) : \text{Ext}_R^1(A, B) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A', B)$. En utilisant un push-out on peut construire de même une application $\text{Ext}_R^1(A, \beta) : \text{Ext}_R^1(A, B) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, B')$ quand $\beta : B \rightarrow B'$ est linéaire.

Proposition A.3.1. *Il existe une structure de groupe abélien sur $\text{Ext}_R^1(A, B)$ telle que $\text{Ext}_R^1(-, -) : R\text{Mod} \times (R\text{Mod})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Z}\text{Mod}$ est un bifoncteur additif. Par ailleurs si $\mathfrak{C} : 0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B'' \rightarrow 0$ est une suite exacte et A un module alors il existe $\delta = \delta(A, \mathfrak{C})$ un morphisme naturel tel que la suite de groupes abéliens*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(A, B') & \longrightarrow & \text{Hom}_R(A, B) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(A, B'') \\ & & \xrightarrow{\delta} & & \text{Ext}_R^1(A, B') & \longrightarrow & \text{Ext}_R^1(A, B) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^1(A, B'') \end{array} \quad (102)$$

soit exacte. On a un résultat similaire pour le foncteur $\text{Ext}_R^1(-, B)$.

Corollaire A.3.2. *Soit A, B deux modules et $0 \rightarrow B \rightarrow I \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0$ une suite exacte où I est injectif. Alors $\text{Ext}_R^1(A, B) \cong \text{Coker Hom}_R(A, \pi)$. De même si $0 \rightarrow K \xrightarrow{\iota} P \rightarrow A \rightarrow 0$ est une suite exacte avec P projectif alors $\text{Ext}_R^1(A, B) \cong \text{Coker Hom}_R(\iota, B)$.*

Références

- [Aus] M. AUSLANDER. “Functors and morphisms determined by objects”. In : *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* 37 (), p. 1-244.
- [AR75] M. AUSLANDER et I. REITEN. “Representation Theory of Artin Algebras III Almost Split Sequences”. In : *Communications in Algebra* 3.3 (1975), p. 239-294. DOI : <https://doi.org/10.1080/00927877508822046>.
- [Ben91] D.J. BENSON. *Representations and cohomology I : Basic representation theory of finite groups and associative algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1991. ISBN : 0521361346.

- [BMW72] S. BERMAN, R. MOODY et M. WONENBURGER. “Cartan Matrices with Null Roots and finite Cartan Matrices”. In : *Indiana University Mathematics Journal* 21 :12 (1972), p. 1091-1099. URL : <https://www.jstor.org/stable/24890422>.
- [Bri] M. BRION. *Representations of quivers*. URL : https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/notes_quivers_rev.pdf.
- [DR76] V. DLAB et C.M. RINGEL. “Indecomposable representations of graphs and algebras”. In : *Memoirs of the American Mathematical Society* 6.173 (1976). DOI : <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1090/memo/0173>.
- [Hüg] L. Angeleri HÜGEL. *An Introduction to Auslander-Reiten Theory*. URL : <https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/ictp2006/lecturenotes/angeleri.pdf>.
- [Peñ] J.A. De La PEÑA. *Integral Quadratic Forms and the Representation Type of an Algebra*. URL : <https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/ictp2006/lecturenotes/delapena-all.pdf>.
- [Rin78] C.M. RINGEL. “Finite Dimensional Hereditary Algebras of Wild Representation Type”. In : *Mathematische Zeitschrift* 161 (1978), p. 235-255. DOI : <https://doi.org/10.1007/BF01214506>.