

# Mémoire de première année : les polytopes de Coxeter en dimension 3

Louise Nataf, Dylan Thevenet \*

Juin 2022

---

\*encadrés par Samuel Bronstein

## Introduction

Notre travail de mémoire a consisté à comprendre l'utilité de la géométrie hyperbolique pour l'étude des groupes de Coxeter, puis résumer et expliquer l'énoncé et la preuve du théorème d'Andreev sur la caractérisation des polyèdres hyperboliques compacts à angles dièdres aigus ou droits. Ce théorème est un résultat important pour l'étude des groupes de Coxeter qui est également utilisé dans la preuve du théorème d'hyperbolisation de Thurston.

# 1 Introduction et motivation : les groupes de Coxeter

Définissons tout d'abord des objets algébriques développés au XX<sup>e</sup> siècle par le géomètre britannique H. S. M. Coxeter.

**Définition 1.1** (Groupe de Coxeter). Soit  $W$  un groupe, on dit que  $W$  est un **groupe de Coxeter** s'il admet une présentation finie de la forme

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_k \mid (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1 \forall i, j \rangle$$

où les  $m_{ii}$  valent tous 1 et les  $m_{ij}$  où  $i \neq j$  sont dans  $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$  ( $m_{ij} = +\infty$  signifie qu'on n'impose pas de relation sur  $a_i a_j$ ).

Si l'on note  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  (ensemble de générateurs), la donnée  $(W, S)$  est appelée **système de Coxeter**.

*Remarque.* Certains auteurs imposent, dans la définition,  $m_{ij} = m_{ji}$ . C'est en fait équivalent à la définition donnée plus haut : puisque les  $a_i$  sont d'ordre 2 donc leurs propres inverses, on a  $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1 \Leftrightarrow (a_j a_i)^{m_{ij}} = 1$ , donc quitte à remplacer  $m_{ij}$  et  $m_{ji}$  par leur PGCD, on peut supposer  $m_{ij} = m_{ji}$ . Si le PGCD vaut 1, on a alors  $a_i = a_j^{-1} = a_j$ , ce qui permet d'avoir un générateur en moins.

Si  $|S| = 1$ ,  $W$  est monogène d'ordre 2 : c'est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , que l'on peut voir comme le groupe engendré par une unique réflexion du plan euclidien.

Pour  $|S| = 2$ ,  $W$  est un groupe diédral  $\langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1, (ab)^n = 1 \rangle$ . Si  $n$  est fini,  $W$  admet une autre présentation :

$$\langle c, \tau \mid c^n = 1, \tau^2 = 1, \tau c \tau^{-1} = c \rangle ,$$

où l'on reconnaît le sous-groupe  $D_{2n}$  de  $\mathfrak{S}_n$  engendré par  $c = (123\dots n)$  et  $\tau = (12)$ . On peut interpréter ce groupe géométriquement comme le sous-groupe de  $O(2)$  engendré par deux réflexions par rapport à des droites formant un angle de  $\frac{\pi}{n}$ , c'est le groupe d'isométries du  $n$ -gone régulier centré à l'origine du plan. Si  $n = +\infty$ , on parle de groupe diédral infini (interprétation géométrique : c'est le groupe d'isométries de  $\mathbb{Z}$  muni de la distance usuelle sur  $\mathbb{R}$ , ici le centre du polygone est donc à l'infini).

Le cas  $|S| = 3$  est déjà beaucoup plus complexe : on cherche à déterminer les  $W = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1, (ab)^k = 1, (bc)^l = 1, (ca)^m = 1 \rangle$  où  $k, l, m$  sont dans  $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$ . Par analogie avec les cas précédents, on cherche  $W$  parmi les groupes engendrés par trois réflexions  $a, b$  et  $c$  du plan euclidien, avec des angles prescrits par les valeurs de  $k, l$  et  $m$  : puisque les rotations  $ab, bc$  et  $ca$  doivent être d'ordres respectifs  $k, l$  et  $m$ , on peut penser à avoir des angles  $\frac{2\pi}{k}, \frac{2\pi}{l}, \frac{2\pi}{m}$  pour ces rotations. Donc les angles entre les trois droites par rapport auxquelles on fait des réflexions doivent être  $\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$ . Mais puisque  $(ab)(bc)(ca) = 1$ , il faut  $\frac{2\pi}{k} + \frac{2\pi}{l} + \frac{2\pi}{m} = 2\pi$ . Autre interprétation, qui sera utile par la suite : en décalant une des droites de l'origine, les trois droites forment un triangle qui est secrètement notre premier polytope de Coxeter. Le fait que la somme des angles d'un triangle soit  $\pi$  donne ainsi une contrainte très forte sur les valeurs de  $k, l$  et  $m$  pour lesquelles on peut interpréter  $W$  comme un sous-groupe de  $O(2)$  de la manière que l'on vient de développer (en fait, si on suppose  $k \leq l \leq m$ , seuls trois cas sont possibles pour  $(k, l, m)$  :  $(2, 3, 6)$  (groupe d'isométries d'un triangle rectangle),  $(2, 4, 4)$  (isocèle) et  $(3, 3, 3)$  (équilatéral)). On va donc également s'intéresser à des espaces dans lesquels on peut toujours définir des triangles, mais la somme des angles de ceux-ci ne sera plus forcément  $\pi$  :  $\mathbb{S}^n$  et  $\mathbb{H}^n$ , pour  $n \geq 2$ .

## 2 L'espace hyperbolique et ses polytopes

On fixe  $n \geq 2$ . Définissons l'espace auquel cette section est consacrée :

**Définition 2.1** (Espace hyperbolique de dimension  $n$ ). Dans le cadre du modèle de l'hyperboloïde, on définit l'**espace hyperbolique** de dimension  $n$  comme l'ensemble

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = -1\}$$

On note  $q : x \mapsto -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  (c'est une forme quadratique

sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ ), et  $b : (x, y) \mapsto -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$  la forme bilinéaire symétrique correspondante.

On remarque que pour  $x$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , la différentielle de  $q$  en  $x$  est  $d_xq : h \mapsto 2b(x, h)$  qui est surjective si  $x \neq 0$ , donc  $q$  est une submersion sur  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Puisque  $\mathbb{H}^n$  est inclus dans l'ouvert  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  et c'est l'ensemble des zéros de la submersion  $x \mapsto q(x) + 1$ ,  $\mathbb{H}^n$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de dimension  $n$ .

De plus, si  $x$  est dans  $\mathbb{H}^n$ , la restriction de  $q$  à

$$T_x\mathbb{H}^n = \ker(d_xq) = \{h \in \mathbb{R}^{n+1} : b(x, h) = 0\}$$

est définie positive. Montrons-le pour  $n = 2$  (les autres cas sont analogues) : si  $h$  vérifie  $b(x, h) = 0$ ,

$$\begin{aligned} q(h, h) &= -h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 \\ &= -\frac{1}{x_0^2}(x_1h_1 + x_2h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2 \quad (\text{car } b(x, h) = 0) \\ &= -\frac{1}{1 + \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle} \langle \tilde{x}, \tilde{h} \rangle^2 + \langle \tilde{h}, \tilde{h} \rangle \quad (\text{car } q(x) = -1) \end{aligned}$$

où l'on a noté  $\tilde{x} := (x_1, x_2)$ , de même pour  $\tilde{h}$ , et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^2$ . Par Cauchy-Schwarz, la dernière ligne est toujours positive, et nulle si et seulement si  $\langle \tilde{h}, \tilde{h} \rangle = 0$  et  $\langle \tilde{x}, \tilde{h} \rangle = 0$ , i.e. si  $h = 0$ .

On obtient alors un produit scalaire  $b_x : (h, k) \in (T_x\mathbb{H}^n)^2 \mapsto b(h, k)$  sur chaque fibre du fibré tangent de  $\mathbb{H}^n$ , avec  $x \mapsto b_x$  lisse (car  $b_x(h, k) = \frac{1}{2}(q_x(h+k) - q_x(h) - q_x(k))$ ) (identité de polarisation), où  $x \mapsto (q_x : h \in T_x\mathbb{H}^n \mapsto q(h))$  est lisse). La donnée de ces produits scalaires sur  $T\mathbb{H}^n$ , avec dépendance lisse en la première coordonnée, est appelée **métrique riemannienne**. On dit que  $\mathbb{H}^n$ , muni de cette métrique, est une **variété riemannienne**.

Cette structure permet de définir des généralisations des lignes droites, les géodésiques. Si  $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{H}^n$  est une courbe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, on peut alors définir sa longueur

$$L(\gamma) = \int_a^b q_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$$

puis si  $x$  et  $y$  sont dans  $\mathbb{H}^n$ , on définit

$$d(x, y) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ chemin } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux entre } x \text{ et } y\}$$

$\mathbb{H}^n$  est un espace géodésique, c'est-à-dire qu'il existe toujours un  $\gamma$  minimisant entre deux points<sup>1</sup>. L'image d'un tel  $\gamma$  est appelée **géodésique**.

*Remarque.*  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{S}^n$  admettent également des structures riemanniennes (considérer le produit scalaire canonique, respectivement sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). On peut donc également y définir les géodésiques et l'on constate effectivement que, pour  $\mathbb{R}^n$ , ce sont les lignes droites.

Avant de définir ce qu'est un polytope hyperbolique, on présente un modèle alternatif de  $\mathbb{H}^n$ , qui a l'avantage d'être visualisable dans  $\mathbb{R}^n$  et non  $\mathbb{R}^{n+1}$ , tout en préservant les angles entre des hyperplans de  $\mathbb{H}^n$  (ce qui nous épargne de définir ici la notion d'angle et angle dièdre dans les espaces hyperboliques).

**Définition 2.2** (Modèle de Poincaré). On considère la projection qui à  $x \in \mathbb{H}^n$  associe l'unique intersection de la droite passant par  $x$  et  $(-1, 0, \dots, 0)$  avec l'hyperplan  $\{x_0 = 0\}$  :

$$p : x \in \mathbb{H}^n \mapsto \frac{1}{1 + x_0}(x_1, \dots, x_n) \in B(0, 1)$$

où  $B(0, 1)$  est la boule unité euclidienne de dimension  $n$ .

La projection  $p$  est une bijection qui permet de transporter la structure riemannienne de  $\mathbb{H}^n$  à  $B(0, 1)$ . La boule unité  $B(0, 1)$ , munie de cette structure, constitue le **modèle de Poincaré** de l'espace hyperbolique.

Dans l'espace euclidien de dimension  $n$ , on peut définir un polytope comme une intersection finie de demi-espaces fermés affines (i.e. dont le bord est un hyperplan affine). Par analogie avec cette définition, on veut définir des demi-espaces de  $\mathbb{H}^n$ .

**Lemme 2.1.** Soit  $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Alors l'orthogonal de  $v$  pour  $q$  intersecte  $\mathbb{H}^n$  si et seulement si  $q(v) > 0$ .

*Preuve.* S'il existe  $x \in \mathbb{H}^n$  tel que  $b(x, v) = 0$ , alors  $v \in T_x \mathbb{H}^n$  où l'on a vu que  $q$  était définie positive :  $q(v) > 0$ .

---

<sup>1</sup>C'est une conséquence du corollaire suivant du théorème de Hopf-Rinow : si  $M$  est une variété riemannienne connexe et complète, alors pour tous points  $p, q \in M$ , il existe un chemin de longueur minimale entre  $p$  et  $q$ . (source : D. Spiegel, "The Hopf-Rinow Theorem", <https://math.uchicago.edu/~may/REU2016/REUPapers/Spiegel.pdf>)

Réciproquement, si  $q(v) > 0$ , montrons qu'il existe  $x \in \mathbb{H}^n$  tel que  $b(x, v) = 0$ , ce qui revient à trouver  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $x = (\sqrt{1 + x_1^2 + \dots + x_n^2}, x_1, \dots, x_n) = (\sqrt{1 + \|\tilde{x}\|^2}, \tilde{x})$  convienne. On traite le cas  $n = 2$ , les autres étant analogues. On remarque que pour  $\tilde{x} = 0$ ,  $b(x, v) = -v_0$ . Si  $v_0 = 0$ , c'est fini, sinon on peut supposer  $v_0 > 0$  (une homothétie de rapport non nul ne change pas le signe de  $q$ ). Puisqu'il existe un  $\tilde{x}$  tel que  $b(x, v) < 0$ , trouver un autre  $\tilde{x}$  tel que  $b(x, v) > 0$  permet de conclure avec le théorème des valeurs intermédiaires sur le segment entre ces deux points de  $\mathbb{R}^n$ , puisque  $\tilde{x} \mapsto b(x, v)$  est continue. Pour  $\tilde{x} = t\tilde{v}$  avec  $t \in \mathbb{R}$  et  $\tilde{v} = (v_1, \dots, v_n)$  qui vérifie  $\|\tilde{v}\| > v_0$  (on a simplement réécrit la condition  $q(v) > 0$ ), on obtient

$$\begin{aligned} b(x, v) &= -\sqrt{1 + \|\tilde{x}\|^2}v_0 + \langle \tilde{x}, \tilde{v} \rangle \\ &= -\sqrt{1 + t^2\|\tilde{v}\|^2}v_0 + t\|\tilde{v}\|^2 \\ &= t\|\tilde{v}\|(\|\tilde{v}\| - v_0) + O\left(\frac{1}{t}\right) \text{ quand } t \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Donc pour  $t$  assez grand,  $\tilde{x} = t\tilde{v}$  vérifie  $b(x, v) > 0$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

On définit alors

$$H_v = \{w \in \mathbb{H}^n : b(w, v) \leq 0\}$$

le demi-espace associé à  $v$ .

**Définition 2.3** (Polytope hyperbolique). Avec les notations précédentes, un **polytope hyperbolique** de dimension  $n$  est une intersection

$$P = \bigcap_{i=1}^N H_{v_i} \subset \mathbb{H}^n$$

d'intérieur non vide (on suppose de plus que la famille d'hyperplans considérée est minimale).

*Remarque.* De même, on peut définir un **polytope sphérique** de dimension  $n$  comme une intersection d'intérieur non vide de demi-espaces de  $\mathbb{S}^n$ , où l'on appelle demi-espace de  $\mathbb{S}^n$  une intersection de  $\mathbb{S}^n$  avec un demi-espace vectoriel (i.e. dont le bord est un hyperplan contenant 0) de  $\mathbb{R}^{n+1}$  (ici, elle sera forcément non vide).

Enfin, puisqu'un demi-espace affine de  $\mathbb{R}^n$  est l'intersection de  $\mathbb{R}^n$  avec un demi-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , on peut faire la même construction dans le cas euclidien.

*Remarque.* Si l'on définit une notion de convexité sur  $\mathbb{H}^n$  ou  $\mathbb{S}^n$  en remplaçant les segments par des portions de géodésiques (on peut le faire car par deux points distincts passe une unique géodésique, à condition de se restreindre à un hémisphère dans le cas de  $\mathbb{S}^n$ ), on remarque que de tels polytopes sont convexes. En fait, un polytope compact de dimension  $n$  est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de  $\mathbb{X}^n$ , où  $\mathbb{X} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$  ou  $\mathbb{S}$  (et pour  $\mathbb{X} = \mathbb{H}$ , un polytope de volume fini est l'intersection de  $\mathbb{H}^n$  avec l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de  $\overline{\mathbb{H}^n}$ , où  $\overline{\mathbb{H}^n}$  est le compactifié de  $\mathbb{H}^n$  obtenu en lui ajoutant l'ensemble  $\partial\mathbb{H}^n$ , quotient de  $\{x : q(x) = 0, x_0 \geq 0\}$  pour l'action de  $\mathbb{R}^*$  par homothéties, et qui correspond au bord de la boule dans le modèle de Poincaré).

Une **face** d'un polytope est une intersection non vide de ce polytope avec un hyperplan délimitant un demi-espace fermé dans lequel le polytope est inclus. Une face de polytope est elle-même un polytope, dont la dimension est celle du sous-espace affine engendré par les points de la face lorsqu'on plonge le polytope dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . On a donc également une notion d'angles au sein d'une face de  $P$ . Les faces de dimension  $n - 1$  de  $P$  sont appelées ses **facettes**, et les angles entre facettes sont appelés **angles dièdres**. On a un vocabulaire supplémentaire, inspiré du cas euclidien, si  $n = 2$  ou  $3$  :

dimension de la face	0	1	2	3
nom de la face pour $n = 2$	sommet	côté	polygone	
nom de la face pour $n = 3$	sommet	arête	face	polyèdre

On considère maintenant un cas particulier de polytopes, les polytopes de Coxeter :

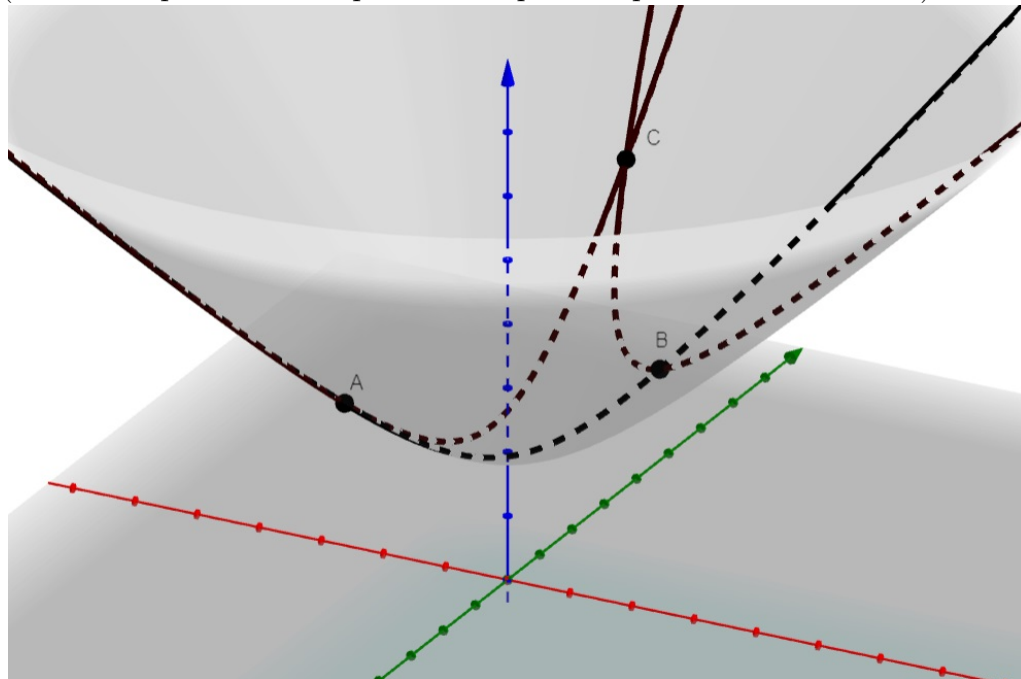
**Définition 2.4** (Polytope de Coxeter). Un polytope  $P$  de  $\mathbb{X}^n$ , où  $\mathbb{X} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$  ou  $\mathbb{S}$ , est appelé **polytope de Coxeter** si les angles dièdres entre ses facettes sont de la forme  $\frac{\pi}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . On a les résultats suivants (récapitulés par A. Felikson<sup>2</sup> à partir de travaux d'E. B. Vinberg<sup>3</sup>) :

<sup>2</sup><https://www.maths.dur.ac.uk/users/anna.felikson/Polytopes/poly/basics.pdf>

<sup>3</sup>E. B. Vinberg, Discrete groups generated by reflections in Lobachevskii spaces, Mat. USSR sb. 1 (1967), 429–444.

E. B. Vinberg, Hyperbolic reflection groups, Russian Math. Surveys 40 (1985), 31–75.

Figure 1: Un polygone hyperbolique à 3 côtés (on parle de **triangle hyperbolique**), de sommets A, B et C, représenté dans le modèle de l'hyperboloïde (les demi-espaces ne sont pas visibles pour ne pas alourdir le dessin)



- Le groupe  $G$  engendré par les réflexions par rapport aux facettes de  $P$  est discret et  $P$  est domaine fondamental de l'action de  $G$  sur  $\mathbb{X}^n$
- Réciproquement, le domaine fondamental de tout groupe discret de réflexions est un polytope de Coxeter.

On a donc une correspondance entre groupes et polytopes de Coxeter.

---

E. B. Vinberg, Discrete reflection groups in Lobachevskii spaces, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, August 16-24, 1983, Warszawa.

E. B. Vinberg (Ed.), Geometry II. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 29. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

### 3 Le cas de la dimension 2 : Formule de Gauss-Bonnet et l'existence de polygones

Maintenant que les polytopes de  $\mathbb{H}^n$  et  $\mathbb{S}^n$  ont été définis pour  $n \geq 2$ , les intersections d'intérieur non vide de trois demi-espaces de  $\mathbb{H}^2$  ou  $\mathbb{S}^2$  fournissent une nouvelle source de triangles pour interpréter géométriquement les groupes de Coxeter. Gauss-Bonnet donne des informations sur leurs angles :

**Théorème 3.1** (Formule de Gauss-Bonnet pour les triangles). *Soit  $T$  un triangle dans  $\mathbb{X}^2$  où  $\mathbb{X} = \mathbb{R}, \mathbb{S}$  ou  $\mathbb{H}$ , c'est-à-dire une intersection d'intérieur non vide de trois demi-espaces de  $\mathbb{X}^2$ . Soit  $\alpha, \beta, \gamma$  les angles à ses sommets (un sommet est un point de  $T$  appartenant aux bords de deux demi-espaces distincts parmi les trois considérés plus haut). Alors*

$$K\mathcal{A}(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

avec

- $K = 0$  si  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ ,  $K = 1$  si  $\mathbb{X} = \mathbb{S}$  et  $K = -1$  si  $\mathbb{X} = \mathbb{H}$  ( $K$  est la **courbure sectionnelle** de  $\mathbb{X}$ , qui se trouve être constante dans ces cas particuliers)
- $\mathcal{A}(T)$  l'aire de  $T$ , une quantité dont on utilisera uniquement qu'elle est bien définie et qu'elle est positive.

Ce théorème, conséquence de la formule de Stokes, donne l'espoir de trouver de nouveaux triangles correspondant à des groupes de Coxeter à trois générateurs dans  $\mathbb{S}^2$  et  $\mathbb{H}^2$ .

Sur la sphère, on a la condition  $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} \geq 1$ , ce qui laisse les possibilités  $(2,2,q)$  pour  $q \geq 2$  (existe bien sur la sphère),  $(2,3,3)$ ,  $(2,3,4)$  et  $(2,4,5)$ . On voit donc qu'il y a *a priori* bien plus de possibilités dans  $\mathbb{H}^2$  (condition  $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} \leq 1$ ) que dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{S}^2$ .

En réalité, tous les triplets  $(k, l, m)$  avec  $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} \leq 1$  correspondent effectivement à des triangles hyperboliques. C'est une conséquence du fait suivant :

**Lemme 3.2.** *Tout triplet d'angles dont la somme est strictement inférieure à  $\pi$  est réalisable (de manière non plate, sinon c'est évident) en un triangle de  $\mathbb{H}^2$ .*

*Preuve.* On se place dans le modèle de Poincaré, dans lequel les géodésiques sont les portions de cercles et droites intersectant orthogonalement son bord, et où l'angle entre deux géodésiques est l'angle dans  $\mathbb{H}^2$  (représentation conforme).

Soit  $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$  tels que  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ , on cherche  $A, B, C$  sur le disque de Poincaré tels que  $ABC$  soit un triangle hyperbolique d'angles aux sommets  $\alpha, \beta, \gamma$ .

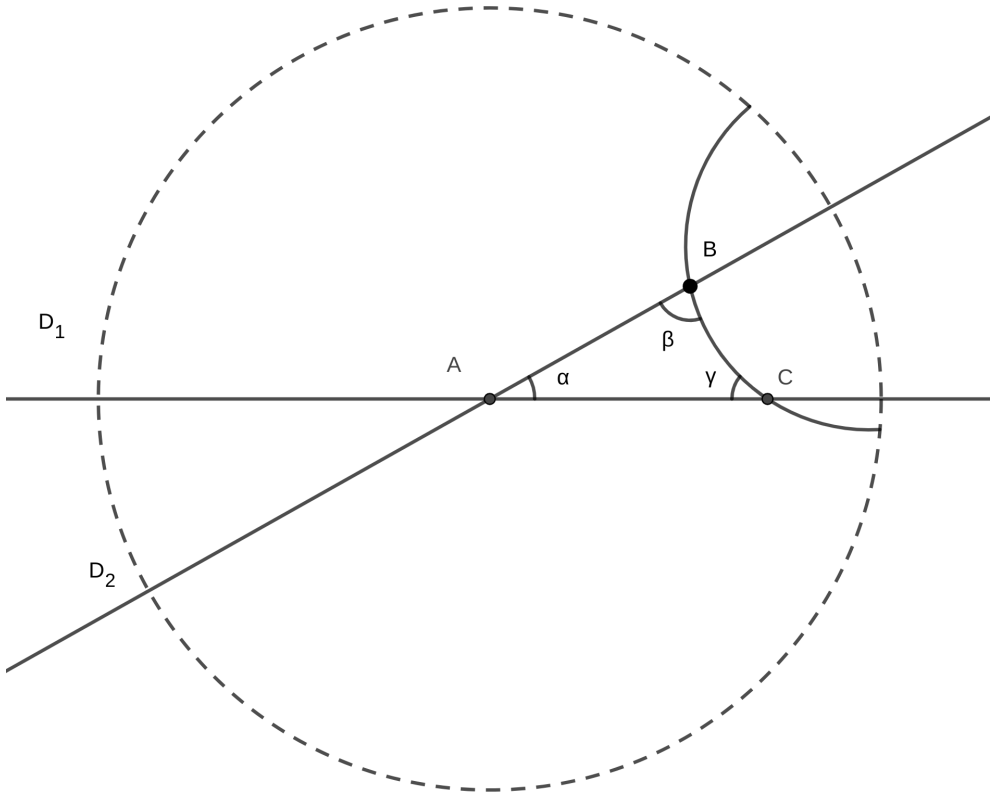
En autorisant les triangles dont des sommets sont au bord du disque, on élimine les cas où au moins deux des angles sont nuls (si trois angles sont nuls, on sait qu'il existe des triangles idéaux (i.e. dont les sommets sont au bord du disque) non plats ; si un angle est non nul, on le place à l'origine et on le relie par des lignes droites à deux points à l'infini, qui sont bien connectés par une géodésique)

Supposons donc  $\alpha, \beta > 0$ . On place  $A$  à l'origine du disque. Il existe deux droites  $D_1, D_2$  passant par  $A$  et ayant un angle  $\alpha$  entre elles (c'est de la géométrie euclidienne). Ces droites se trouvent être des géodésiques, puisque ce sont des diamètres du disque.

Pour  $R > 0$ , soit  $B(R)$  un point de  $D_2$  à distance hyperbolique  $R$  de  $A$ . Il existe une géodésique  $G$  passant par  $B(R)$  formant un angle  $\beta$  avec  $D_2$  (en effet,  $(\mathbb{H}^2, d)$  est 2-homogène : si  $d(x, y) = d(x_0, y_0)$ , il existe une isométrie qui envoie  $x$  sur  $x_0$  et  $y$  sur  $y_0$ . En construisant deux droites passant par l'origine (donc des géodésiques) formant un angle  $\beta$  entre elles, et en prenant  $x_0 = 0 (= A)$ ,  $y_0$  un point d'une des deux droites à distance hyperbolique  $R$  de l'origine,  $x = A$  et  $y = B(R)$ , on obtient l'existence d'une isométrie qui envoie  $0$  sur  $0$  et  $y_0$  sur  $B(R)$ . Une isométrie préserve les géodésiques et les angles, donc l'image des deux droites par l'isométrie est formée de deux géodésiques formant un angle  $\beta$  à leur intersection en  $B(R)$ . Mais l'une de ces géodésiques passe par  $A$  et  $B(R)$  ; par unicité d'une géodésique passant par deux points distincts, c'est la droite  $D_2$ , donc la deuxième géodésique convient pour  $G$ ).

Maintenant qu'on a imposé deux angles, le problème est que les géodésiques  $D_1$  et  $G$  ne s'intersectent pas forcément. Pour savoir quand c'est le cas, on utilise la loi des cosinus hyperbolique duale : les géodésiques  $G$  et  $D_2$  s'intersectent en un point  $C(R)$  du disque avec un angle  $\gamma'$  si et seulement si la quantité  $f(R) = -\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)ch(R)$  vérifie  $f(R) \in ]\cos(\pi - (\alpha + \beta)), 1]$ , auquel cas on a  $\cos(\gamma') = f(R)$ . Mais  $f$  est une bijection de  $]0, +\infty[$  dans  $]\cos(\pi - (\alpha + \beta)), +\infty[$ , et  $\cos(\gamma) > \cos(\pi - (\alpha + \beta))$ , donc on peut trouver un  $R$  adéquat pour réaliser les angles voulus.  $\square$

Figure 2: Illustration de la preuve d'existence d'un triangle hyperbolique dans le cas  $\alpha, \beta > 0$  (le bord du disque de Poincaré est en pointillés)



Ceci conclut la discussion du cas  $|S| = 3$  ; on a trouvé une interprétation géométrique, dans un espace de dimension 2, pour tout groupe de Coxeter engendré par 3 éléments.

Pour continuer à interpréter géométriquement les groupes de Coxeter avec  $|S| \geq 4$ , on peut s'intéresser aux polygones de  $\mathbb{H}^2$  (polytopes hyperboliques de dimension 2). On a la formule suivante :

**Théorème 3.3** (Formule de Gauss-Bonnet pour les polygones convexes). *Soit  $P$  un  $N$ -gone dans  $\mathbb{X}^2$  où  $\mathbb{X} = \mathbb{R}, \mathbb{S}$  ou  $\mathbb{H}$ , c'est-à-dire une intersection d'intérieur non vide de  $N$  demi-espaces indépendants de  $\mathbb{X}^2$ . Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  les angles à ses sommets. Alors*

$$K\mathcal{A}(P) = \alpha_1 + \dots + \alpha_N - (N - 2)\pi$$

avec

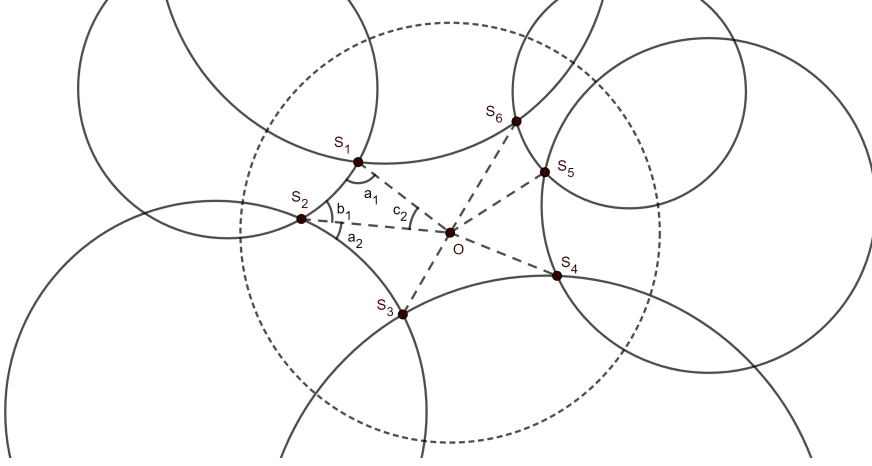
- $K = 0$  si  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ ,  $K = 1$  si  $\mathbb{X} = \mathbb{S}$  et  $K = -1$  si  $\mathbb{X} = \mathbb{H}$
- $\mathcal{A}(P)$  l'aire de  $P$ , qui est bien définie, positive, et la somme des aires des triangles de toute triangulation de  $P$ .

*Preuve dans le cas  $\mathbb{X} = \mathbb{H}$ , les autres sont admis.* On se place à nouveau dans le modèle de Poincaré.

On se ramène au cas où l'origine du disque de Poincaré est à l'intérieur du polygone. Pour ce faire, on utilise la convexité du polygone en choisissant un point  $p$  de son intérieur et en remarquant que  $p$  est relié aux sommets de  $P$  par des géodésiques (en effet, pour tout couple de points de  $\mathbb{H}^2$ , il existe une (unique si les points sont distincts) géodésique passant par ces deux points). Le groupe d'isométries de  $\mathbb{H}^2$  agissant transitivement sur  $\mathbb{H}^2$ , il existe une isométrie  $i$  qui envoie  $p$  sur l'origine du disque. L'isométrie  $i$  préserve les géodésiques et les angles, donc on obtient un polygone  $i(P)$  avec mêmes angles aux sommets que  $P$ .

On peut supposer les angles énumérés dans le sens trigonométrique, on note  $S_i$  le sommet associé à l'angle  $\alpha_i$ . On découpe, à l'aide de géodésiques reliant les sommets  $S_i$  du polygone à l'origine du disque (ces géodésiques sont en fait des lignes droites, et ce sont les images des géodésiques citées précédemment par  $i$ ), le  $N$ -gone en  $N$  triangles hyperboliques  $T_i, i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , tels que  $T_i$  ait pour sommets  $S_i$  (angle  $a_i$ ),  $S_{i+1}$  (angle  $b_i$ ) et l'origine (angle  $c_i$ ). Gauss-Bonnet au triangle  $T_i$  donne  $K\mathcal{A}(T_i) = a_i + b_i + c_i - \pi$ . On somme sur tous les  $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , avec les relations  $b_i + a_{i+1} = \alpha_{i+1}$  et  $c_1 + \dots + c_N = 2\pi$ , ce qui conclut.  $\square$

Figure 3: Illustration de la preuve de Gauss-Bonnet polygonal pour  $N = 6$  (le bord du disque de Poincaré est en pointillés)



De même, ici, il se trouve que la condition nécessaire  $\alpha_1 + \dots + \alpha_N \leq (N - 2)\pi$  est en fait suffisante ! Un grand nombre de groupes de Coxeter, même à 4 générateurs et plus, admettent donc des polytopes hyperboliques en dimension 2.

Néanmoins, on peut montrer que si  $P$  est un polytope de Coxeter de dimension 2 à  $N$  facettes, le groupe des réflexions par rapport aux facettes de  $P$  admet une présentation avec  $N$  générateurs  $a_i$  et où les relations concernent uniquement les  $a_i a_{i+1}$  pour  $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . Ainsi, certains groupes de Coxeter, tels que  $G = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \mid a_i^2 = 1, (a_i a_j)^3 = 1 \forall i, j \rangle$ , n'admettent pas de polyèdre de dimension 2. Pourtant,  $G$  est le groupe engendré par les réflexions par rapport aux faces d'un tétraèdre régulier de  $\mathbb{R}^3$ . Il semble donc nécessaire, pour continuer l'étude des groupes de Coxeter à 4 générateurs ou plus, de déterminer quels polyèdres hyperboliques existent en dimension supérieure, et notamment en dimension 3 (en fait, Allcock a montré<sup>4</sup> qu'il existait une infinité de polytopes de Coxeter de volume fini (resp. compacts) dans  $\mathbb{H}^n$  pour tout  $n \leq 19$  (resp.  $n \leq 6$ )).

Dans la suite de ce mémoire, on s'intéresse aux polytopes hyperboliques de dimension 3 et à leur classification avec le théorème d'Andreiev. Plus précisément, on va se concentrer sur les polytopes à au moins 5 faces, la

<sup>4</sup>D. Allcock, *Infinitely many hyperbolic Coxeter groups through dimension 19*, *Geom. Topol.* 10 (2006), 737–758.

discussion sur les tétraèdres étant faite dans un autre article de Roeder<sup>5</sup>.

## 4 Cadre et énoncé du théorème d'Andreev

Un polyèdre  $P$  de dimension 3 est homéomorphe à la boule euclidienne de dimension 3, et son bord à la sphère  $\mathbb{S}^2$ . Les images des faces, arêtes et sommets de  $P$  permettent de munir l'image du bord de  $P$  par cet homéomorphisme d'une structure de **CW-complexe**  $C$  (les 0-cellules sont les images des sommets, les 1-cellules celles des arêtes, les 2-cellules celles des faces). Si tous les angles dièdres entre faces de  $P$  sont  $\leq \frac{\pi}{2}$ ,  $C$  est **trivalent** (chaque sommet appartient à exactement 3 faces). A cause des propriétés d'incidence vérifiées par  $P$ ,  $C$  est en réalité un polyèdre abstrait :

**Définition 4.1** (Polyèdre abstrait). Soit  $C$  un CW-complexe trivalent sur  $\mathbb{S}^2$ .  $C$  est un **polyèdre abstrait** si il satisfait les conditions suivantes :

- Chaque arête de  $C$  appartient à exactement deux faces
- Une intersection non vide de deux faces de  $C$  est soit une arête, soit un sommet
- Chaque face a au moins 3 arêtes

Réciproquement, on peut se demander si, étant donnés un polyèdre abstrait  $C$ , ainsi qu'un ensemble d'angles dièdres  $\alpha_i$  correspondant aux arêtes  $e_i$ , on peut toujours trouver un polyèdre hyperbolique de dimension 3 dont le bord correspond à  $C$  et aux angles  $\alpha_i$  au sens suivant :

**Définition 4.2** (Réalisation d'un polyèdre abstrait). Soit  $C$  un polyèdre abstrait,  $P$  un polyèdre hyperbolique. On dit que  $P$  **réalise**  $C$  avec des angles dièdres  $\alpha_i$  aux arêtes  $e_i$  si et seulement si il existe un **homéomorphisme cellulaire** (i.e. un homéomorphisme qui envoie les faces de  $C$  sur celles de  $P$ , les arêtes de  $C$  sur les arêtes de  $P$ , et les sommets de  $C$  sur ceux de  $P$ ) entre  $C$  et le bord de  $P$ .

---

<sup>5</sup>R. K. W. Roeder, *Compact hyperbolic tetrahedra with non-obtuse dihedral angles*, Publications Mathématiques 50 (2006), p. 211-227.

Le théorème d'Andreev répond à la question précédente en donnant une caractérisation des polyèdres abstraits  $C$  et des ensembles d'angles  $\alpha_i$  pour lesquels un tel  $P$  existe.

La compréhension de son énoncé nécessite une dernière définition :

**Définition 4.3** (*k-circuit prismatique*). Soit  $C$  un polyèdre abstrait, soit  $C^*$  le **complexe dual** de  $C$  plongé dans  $\mathbb{S}^2$  (comme  $C$ ) de sorte que les sommets de  $C^*$  soient aux centres des faces de  $C$ , les arêtes de  $C^*$  relient les centres des faces se trouvant de part et d'autre d'une arête de  $C$ , et les sommets de  $C$  soient au centre des faces de  $C^*$ . Un **k-circuit prismatique** sur  $C$  est une courbe fermée  $\Gamma$  formée de  $k$  arêtes de  $C^*$  (complexe dual de  $C$ ), telle que

- $\Gamma$  est **simple** :  $C \setminus \Gamma$  a seulement deux composantes connexes
- $\Gamma$  ne peut pas avoir d'intersection non vide avec deux arêtes distinctes reliées à un même sommet.

On peut désormais énoncer le théorème d'Andreev :

**Théorème 4.1** (Théorème d'Andreev). *Soit  $C$  un polyèdre abstrait qui possède au moins 5 faces, soit  $\alpha_i$  une collection d'angles  $\leq \frac{\pi}{2}$  correspondant aux arêtes  $e_i$  de  $C$ . Il existe un polyèdre hyperbolique  $P$  dont les faces réalisent  $C$  avec l'angle  $\alpha_i$  à chaque arête  $e_i$  si et seulement si les conditions suivantes sont toutes vérifiées :*

1. Pour toute arête  $e_i$ ,  $\alpha_i > 0$
2. Si trois arêtes distinctes  $e_i, e_j, e_k$  se rencontrent en un sommet, alors  $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k > \pi$
3. Si  $\Gamma$  est un 3-circuit prismatique rencontrant les arêtes  $e_i, e_j, e_k$ , alors  $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k < \pi$
4. Si  $\Gamma$  est un 4-circuit prismatique rencontrant les arêtes  $e_i, e_j, e_k, e_l$ , alors  $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k + \alpha_l < 2\pi$
5. Si une face à 4 côtés est bordée par des arêtes  $e_0, e_1, e_2, e_3$  telles que pour  $i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , les arêtes  $e_i$  et  $e_{i+1}$  soient reliées en un sommet, dont part une troisième arête  $e_{i,i+1}$ , alors

$$\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_{01} + \alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{30} + < 3\pi, \text{ et}$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_{01} + \alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{30} + < 3\pi$$

De plus,  $P$  est unique à isométrie de  $\mathbb{H}^3$  près.

## 5 Éléments de preuve du théorème d'Andreev

### 5.1 Notations et stratégie

Fixons  $C$  un polyèdre abstrait, soit  $E$  son nombre d'arêtes et  $N$  son nombre de faces.

Le **polytope d'Andreev** associé à  $C$  est le sous-ensemble  $A_C$  de  $]0, \frac{\pi}{2}]^E$  satisfaisant les inégalités du théorème d'Andreev. Ce polytope est convexe, donc connexe.

Si  $P$  est un polyèdre hyperbolique, on appelle **marquage** sur  $P$  une classe d'isotopie d'homéomorphismes cellulaires entre  $C$  et  $\partial P$  (une **isotopie** entre deux homéomorphismes  $f, g : X \rightarrow Y$  est une homotopie  $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  entre  $f$  et  $g$  telle que pour tout  $t \in [0, 1]$ , l'application  $x \in X \mapsto H(t, x) \in Y$  soit un homéomorphisme).

Sur l'ensemble des couples  $(P, \Phi)$  où  $P$  est un polyèdre hyperbolique et  $\Phi$  un marquage sur  $P$ , on définit la relation d'équivalence  $(P, \Phi) \sim (P', \Phi')$  si et seulement si il existe un isomorphisme  $\alpha$  de  $\mathbb{H}^3$  tel que  $\alpha(P) = P'$  et  $\Phi'$  et  $\alpha \circ \Phi$  représentent le même marquage sur  $P'$ . Le quotient par cette relation est noté  $\mathcal{P}_C$ .

*Remarque.* On peut faire une construction analogue en dimension 2 en remplaçant  $C$  par un CW-complexe sur  $\mathbb{S}^1$  : on obtient une relation d'équivalence entre couples (polytope de dimension 2, classe d'isotopie d'homéomorphismes cellulaires), modulo des isomorphismes de  $\mathbb{H}^2$ .

**Lemme 5.1.**  $\mathcal{P}_C$  admet une structure de variété topologique de dimension  $3N - 6$ .

Pour montrer ce lemme, on définit l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{H_v = \{w \in \mathbb{H}^3 : b(w, v) \leq 0\} : v \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}\}$$

des demi-espaces fermés de  $\mathbb{H}^3$ . C'est une variété de dimension 3.

*Preuve (du fait que  $\mathcal{H}$  est une variété de dimension 3).* On regarde

$$\Phi : v \in \mathbb{S}^3 \cap \{q > 0\} \mapsto H_v \in \mathcal{H}$$

$\Phi$  est surjective par définition de  $\mathcal{H}$ .

Montrons que  $\Phi$  est injective. Si  $v, v' \in \mathbb{S}^3$  vérifient  $H_v = H_{v'}$ , on note  $L_v = b(\cdot, v)$  et de même avec  $v'$ . On a

$$\mathbb{H}^3 \cap \ker(L_v) = H_v \cap ((-1) \times H_v^c) = \mathbb{H}^3 \cap \ker(L_{v'})$$

On va montrer que  $\ker(L_v) = \ker(L_{v'})$ . Pour ce faire, on va exhiber une base de  $\ker(L_v)$  dont tous les vecteurs sont dans  $\mathbb{H}^3$ . Quitte à renormaliser pour  $q$ , il suffit de trouver une base dont les vecteurs soient dans le cône de lumière  $C = \{q < 0\}$ . Puisque  $q(v) > 0$ , on sait par une proposition précédente qu'on peut trouver  $x \in \mathbb{H}^3$  tel que  $b(x, v) = 0$  i.e.  $x \in \ker(L_v) \cap \mathbb{H}^3$ . On complète  $(x)$  en une base  $\mathcal{B} = (x, u^{(1)}, u^{(2)})$  de  $\ker(L_v)$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B}_t := (x, u^{(1)} + tx, u^{(2)} + tx)$  est également une base de  $\ker(L_v)$ . Pour  $i \in \{1, 2\}$  et  $j \in \{0, \dots, 4\}$ ,  $(u_j^{(i)} + tx_j)^2 = t^2 x_j^2 + O(t)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , donc pour tout  $i$ ,  $q(u^{(i)} + tx) = t^2 q(x) + O(t)$  quand  $t \rightarrow +\infty$  et pour  $t$  assez grand, tous les vecteurs de  $\mathcal{B}_t$  sont dans  $C$ . En normalisant pour  $q$ , on obtient une base  $\mathcal{B}'_t := (x, \frac{u^{(1)}+tx}{q(u^{(1)}+tx)}, \frac{u^{(2)}+tx}{q(u^{(2)}+tx)})$  de  $\ker(L_v)$  composée de vecteurs de  $\mathbb{H}^3$ , d'où  $\ker(L_v) = \ker(L_{v'})$ .

On en déduit que les formes linéaires  $L_v$  et  $L_{v'}$  sont proportionnelles. Comme elles sont de plus non nulles ( $q(v) > 0$ ), il existe  $\lambda \neq 0$  tel que  $L_{v'} = \lambda L_v$  i.e.  $b(\cdot, v' - \lambda v) = 0$  et donc  $v' = \lambda v$ . La condition  $v, v' \in \mathbb{S}^3$  impose  $\lambda = \pm 1$ .

Enfin, si  $y \in \mathbb{H}^3$  vérifie  $b(y, v) \neq 0$  (on peut trouver un tel  $y$  en disant que les vecteurs de  $\mathbb{H}^3$  que sont  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(\sqrt{2}, 1, 0, 0)$ ,  $(\sqrt{2}, 0, 1, 0)$  et  $(\sqrt{2}, 0, 0, 1)$  engendrent  $\mathbb{R}^4$  et  $L_v \neq 0$ , donc un de ces quatre vecteurs convient, ou bien déformer un vecteur quelconque qui ne soit pas dans  $\ker(L_v)$  - par exemple  $v$  - en un vecteur de  $\mathbb{H}^3$  à l'aide de  $x$ , par la technique exposée plus haut), la condition  $H_v = H_{v'}$  impose  $b(y, v)b(y, v') \geq 0$ , mais  $b(y, v') = \lambda b(y, v)$  donc  $\lambda \geq 0$  puis  $\lambda = 1$  et  $v = v'$ , d'où l'injectivité de  $\Phi$ .

$\Phi$  est donc une bijection entre  $\mathbb{S}^3 \cap \{q > 0\}$  et  $\mathcal{H}$ . Munissant  $\mathcal{H}$  de la topologie finale associée à  $\Phi$ , on rend  $\Phi$  continue. Comme  $\Phi$  est injective, elle est également ouverte (si  $U$  ouvert de  $\mathbb{S}^3 \cap \{q > 0\}$ ,  $\Phi^{-1}(\Phi(U)) = U$  ouvert de  $\mathbb{S}^3 \cap \{q > 0\}$  donc  $\Phi(U)$  ouvert de  $\mathcal{H}$  pour la topologie finale) ;  $\Phi$  est un homéomorphisme entre  $\mathbb{S}^3 \cap \{q > 0\}$  et  $\mathcal{H}$  qui permet de transporter la structure de variété de  $\mathbb{S}^3 \cap \{q > 0\}$  (ouvert d'une variété) à  $\mathcal{H}$ .  $\square$

On définit alors l'ensemble  $\boxed{\mathcal{O}_C}$  des polyèdres hyperboliques réalisant  $C$ , munis de marquages. Ces marquages permettent de numéroter les faces des

éléments de  $\mathcal{O}_C$  de manière canonique et de définir une application  $\mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{H}^N$  qui à un polyèdre associe le  $N$ -uplet des demi-espaces hyperboliques dont il est l'intersection, énumérés dans l'ordre cité précédemment. Cette application ayant pour image un ouvert de  $\mathcal{H}^N$ , elle permet de transporter une structure de variété de dimension  $3N$  à  $\mathcal{O}_C$ .

On en conclut que  $\mathcal{P}_C$  est une variété, ainsi que sa dimension, en exprimant  $\mathcal{P}_C$  comme le quotient de  $\mathcal{O}_C$  par l'action libre de  $Isom(\mathbb{H}^3)$ .

Les faces d'un polyèdre hyperbolique de dimension 3 sont des polyèdres hyperboliques de dimension 2. Vue dans  $\mathbb{H}^2$ , une telle face est appelée un **parallélogramme** si dès que deux de ses côtés ne se rencontrent pas (même à l'infini, c'est-à-dire dans  $\partial\mathbb{H}^2$ ), les courbes tangentes à ces deux côtés ont une perpendiculaire commune.

On note  $\boxed{\mathcal{P}_C^1}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{P}_C$  constitué des polyèdres dont les faces sont des parallélogrammes.  $\mathcal{P}_C^1$  est un ouvert de  $\mathcal{P}_C$ .

On considère enfin  $\boxed{\mathcal{P}_C^0}$ , le sous-ensemble de  $\mathcal{P}_C$  constitué des polyèdres dont les angles dièdres sont  $> 0$  et  $\leq \frac{\pi}{2}$ . On a  $\mathcal{P}_C^0 \subset \mathcal{P}_C^1$ .

Si  $P \in \mathcal{P}_C$ , une numérotation des arêtes de  $C$  permet de numéroter celles de  $P$  et on peut définir  $\alpha(P) = (\alpha_1, \dots, \alpha_E)$  le  $E$ -uplet des angles dièdres de  $P$ , énumérés dans l'ordre que l'on vient de définir. On obtient une application continue  $\alpha : \mathcal{P}_C \rightarrow ]0, \frac{\pi}{2}]^E$ .

La preuve du théorème d'Andreev consiste alors à démontrer le théorème suivant, dont celui d'Andreev découle :

**Théorème 5.2.** *Si  $C$  est un polyèdre abstrait ayant au moins 5 faces, l'application  $\alpha$  définie plus haut induit un homéomorphisme de  $\mathcal{P}_C^0$  dans  $A_C$ .*

## 5.2 $\alpha(\mathcal{P}_C^0) \subset A_C$

On veut montrer que :

**Théorème 5.3.** *Si  $P \in \mathcal{P}_C^0$  alors les angles dièdres  $\alpha(P)$  satisfont les conditions 1) à 5) du théorème d'Andreev.*

Nous allons d'abord montrer deux petits lemmes de géométrie hyperbolique :

**Lemme 5.4.** *On suppose que les plans  $P_{v_1}$ ,  $P_{v_2}$  et  $P_{v_3}$  s'intersectent deux à deux dans  $\mathbb{H}^3$  avec des angles dièdres  $\alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ . Alors ces plans s'intersectent*

en un point de  $\overline{\mathbb{H}^3}$  si et seulement si  $\alpha + \beta + \gamma \geq \pi$ . Les plans s'intersectent dans  $\mathbb{H}^3$  si et seulement si l'inégalité est stricte.

*Preuve.* Par des considérations sur les formes quadratiques, notamment le fait que la signature d'une forme quadratique est invariante par changement de base, on démontre que les plans s'intersectent dans  $\overline{\mathbb{H}^3}$  si et seulement si le produit scalaire défini sur le sous-espace  $V$  engendré par  $\{v_i, i = 1, 2, 3\}$  est soit défini positif, soit positif. Dans le premier cas, le point d'intersection est dans  $\mathbb{H}^3$ , dans le deuxième cas, le point d'intersection est dans  $\partial\mathbb{H}^3$ . Dans les deux cas, le point d'intersection est déterminé par l'espace orthogonal à  $V$ . La matrice qui décrit le produit scalaire sur  $V$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_1, v_3 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & 1 & \langle v_2, v_3 \rangle \\ \langle v_1, v_3 \rangle & \langle v_2, v_3 \rangle & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\alpha) & -\cos(\beta) \\ -\cos(\alpha) & 1 & -\cos(\gamma) \\ -\cos(\beta) & -\cos(\gamma) & 1 \end{pmatrix}$$

où  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont les angles dièdres aux arêtes  $(P_{v_1}, P_{v_2})$ ,  $(P_{v_1}, P_{v_3})$  et  $(P_{v_2}, P_{v_3})$  respectivement.

Etant donné que le premier mineur principal est strictement positif pour  $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , il suffit de montrer que le déterminant de la matrice précédente est positif. Ce déterminant vaut :

$$1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma.$$

Après quelques calculs on trouve que l'expression précédente vaut :

$$-4 \cos \left( \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \right) \cos \left( \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2} \right)$$

On pose  $\delta = \alpha + \beta + \gamma$ . On remarque que si  $\delta < \pi$ , l'expression précédente est strictement négative, si  $\delta = \pi$ , l'expression est égale à 0, et quand  $\delta > \pi$  elle est strictement positive. On obtient donc que le produit scalaire défini sur  $V$  est positif si et seulement si  $\delta \geq \pi$ , et défini positif si et seulement si  $\delta > \pi$ .

On obtient donc le résultat attendu.  $\square$

**Lemme 5.5.** Soit  $P_1, P_2, P_3 \subset \mathbb{H}^3$  des plans qui contiennent des faces d'un polyèdre  $P$  dont tous les angles dièdres sont  $\leq \frac{\pi}{2}$ .

(a) Si ces plans s'intersectent en un point  $p$  de  $\mathbb{H}^3$ , alors  $p$  est un sommet de  $P$ .

(b) Si ces plans s'intersectent en un point de  $\partial\mathbb{H}^3$ , alors  $P$  n'est pas compact et le point d'intersection est dans  $\overline{P}$ .

*Preuve.* On note  $H_i$  le demi-espace dont la frontière est  $P_i$  et qui contient l'intérieur de  $P$ . On pose  $Q = P_1 \cap H_2 \cap H_3$ . Si  $p \notin P$ , on pose  $U$  la composante connexe de  $Q \setminus P$  qui contient  $p$  dans son adhérence. C'est un polygone non convexe dont on note  $p, p_1, \dots, p_k$  les sommets. Les angles aux sommets de  $U$  sont les angles aux sommets de  $P$  portés par  $P_1$ , donc ces angles sont  $\leq \frac{\pi}{2}$ .

On pose  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  les angles en  $p_1, \dots, p_k$  et  $\alpha$  l'angle en  $p$ .

La formule de Gauss-Bonnet que nous avons utilisée précédemment ne marche pas ici car le polygone  $U$  n'est pas convexe et tous ses angles ne sont donc pas forcément  $\leq \frac{\pi}{2}$ ; certains sont même supérieurs à  $\pi$ . Il faut alors revenir à la formule de Gauss-Bonnet valable pour des polygones plus généraux :

$$2\pi = -\text{Aire}(U) + \sum_{\text{angles}} \beta_i$$

Où  $\beta_i$  représente le saut angulaire de la normale sortante entre deux faces consécutives. Ce qui nous donne ici

$$(\pi - \alpha) + \alpha_1 - ((\pi - \alpha_2) + \dots + (\pi - \alpha_{k-1})) + \alpha_k - \text{Aire}(U) = 2\pi$$

Ce qu'on peut réécrire en

$$(\alpha_1 + \alpha_k - \pi) - \alpha - \sum_{j=2}^{k-1} (\pi - \alpha_j) = \text{Aire}(U)$$

Cette dernière expression nous donne une contradiction. En effet, tous les termes de gauche sont négatifs ou nuls alors que le terme de droite est strictement positif.

Si  $p$  est à l'infini (ce qui nous donne  $\alpha = 0$ ) on a toujours une contradiction, et donc le lemme est démontré.

□

*Éléments de preuve du théorème 5.3.* Condition 1) : Si on a deux faces qui s'intersectent et dont l'angle dièdre est nul, alors elles s'intersectent en un point à l'infini. Donc  $P$  n'est pas compact, contradiction !

Condition 2) : Si on note  $x$  un sommet de  $P$ , alors  $x \in \mathbb{H}^3$  d'après le point précédent et donc par le premier lemme, la somme des angles dièdres des faces qui s'intersectent en  $x$  est donc  $> \pi$ .

Condition 3) : On suppose avoir trois faces par lesquelles passe un 3-circuit prismatique et dont les angles dièdres sont  $\leq \pi$

1<sup>er</sup> cas : Si le point d'intersection est dans  $\mathbb{H}^3$ , alors ce point est un sommet de  $P$ . Le circuit n'est donc pas prismatique (on a un sommet qui appartient aux trois faces par lesquelles passe le circuit prismatique, ce qui en contredit la définition).

2<sup>e</sup> cas : Si le point d'intersection est dans  $\partial\mathbb{H}^3$ , alors d'après le deuxième lemme,  $P$  n'est pas compact, ce qui donne une autre contradiction.

La condition 3) est donc vérifiée.

Condition 4) : On raisonne encore une fois par l'absurde. Cela nous donne que les angles dièdres aux arêtes par lesquelles passe le circuit prismatique sont tous égaux à  $\frac{\pi}{2}$  (sinon, l'inégalité est trivialement vérifiée).

On écrit alors la matrice de Gram des produits scalaires entre les vecteurs qui définissent les hyperplans associés aux faces, et en calculant le déterminant on se rend compte qu'il doit y avoir deux faces opposées de ce circuit prismatique qui s'intersectent.

En considérant les deux cas possibles : intersection à l'infini ou non, on arrive à une contradiction dans les deux cas, d'où le résultat.

Condition 5) : Si on suppose que l'une des inégalités est violée, on obtient que les angles dièdres des 4 arêtes qui arrivent sur la face à 4 côtés sont égaux à  $\frac{\pi}{2}$ , de même que les angles dièdres de deux des arêtes opposées de cette même face.

On obtient ainsi que chacun des angles de la face vaut  $\frac{\pi}{2}$ , et on obtient une contradiction avec la formule de Gauss-Bonnet.  $\square$

### 5.3 $\alpha|_{\mathcal{P}_C^1}$ est injectif

*Stratégie de la preuve.*

On suppose avoir deux polytopes  $P, P' \in \mathcal{P}_C^1$  tels que  $\alpha(P) = \alpha(P')$ .

Le but va être de montrer que chaque paire de côtés correspondants par  $\alpha$  vont avoir la même longueur, ce qui donnera que les faces de  $P$  et  $P'$  sont congruentes (pour la relation d'équivalence de polytopes en 2D définie plus haut), et donc étant donné qu'elles ont les mêmes angles dièdres, alors les polyèdres eux-mêmes seront congruents (pour la relation d'équivalence de polytopes en 3D définie plus haut).

Pour cela on va marquer chaque arête de  $C$  par  $+, 0, -$  selon que les longueurs des arêtes de  $P'$  sont respectivement plus grandes, égales, ou plus petites que

celles de  $P$ .

On munit aussi le complexe dual  $C^*$  (voir la définition dans la définition des  $k$ -circuits prismatiques) des mêmes marques, étant donné qu'à chaque arête de  $C$  correspond une unique arête de  $C^*$ . On définit alors  $\mathcal{G}$  le graphe qui est constitué des arêtes de  $C^*$  marquées par un  $+$  ou un  $-$  mais pas un  $0$ , accompagnées des sommets aux extrémités de ces mêmes arêtes. On remarque que c'est un **graphe planaire** (cela signifie que le graphe peut être dessiné dans le plan sans que deux traits ne se coupent) **simple** (cela veut dire qu'il existe au plus une arête entre deux sommets distincts et aucune arête d'un sommet à lui-même)

Le but va donc être de montrer que le graphe  $\mathcal{G}$  est vide.

Pour cela on montre un lemme sur les graphes planaires simples :

**Lemme 5.6.** *On suppose que  $\mathcal{G}$  est un graphe planaire simple dont les arêtes sont marquées par des  $+$  ou des  $-$ . Alors il existe un sommet de ce graphe tel que lorsque l'on regarde les arêtes partants de ce sommet dans le sens des aiguilles d'une montre, il y a au plus deux changements de signe.*

Après de nombreuses considérations géométriques, on arrive à démontrer l'injectivité de  $\alpha$ .

□

## 5.4 $\alpha|_{\mathcal{P}_C^0}$ est propre

*Stratégie de la preuve.*

Deux lemmes sont utiles pour démontrer un théorème dont la propriété de  $\alpha$  est conséquence. Le théorème en question, plus général, pourra servir pour d'autres étapes.

**Lemme 5.7.** *On suppose que  $\mathcal{F}$  est une face d'un polyèdre hyperbolique  $P$  dont tous les angles dièdres sont  $\leq \frac{\pi}{2}$ . Si l'un des angles de  $\mathcal{F}$  vaut  $\frac{\pi}{2}$  au sommet  $v$ , alors l'angle dièdre de l'arête opposée à l'angle de face (i.e. l'arête qui arrive vers  $v$  et qui n'est pas dans  $\mathcal{F}$  ; il n'y en a qu'une car  $P$  est trivalent) vaut  $\frac{\pi}{2}$  et l'angle dièdre dans  $\mathcal{F}$  de l'une des deux arêtes qui vient vers  $v$  vaut  $\frac{\pi}{2}$ .*

**Lemme 5.8.** *Soit 3 points  $v_1, v_2, v_3$  qui forment un triangle dont les angles sont  $\leq \frac{\pi}{2}$ , et non dégénéré (les trois points ne sont pas alignés dans  $\mathbb{H}^3$ ) dans le modèle de Poincaré de  $\mathbb{H}^3$ , alors il existe une unique isométrie qui*

transporte  $v_1$  sur l'axe  $x$  avec une abscisse positive,  $v_2$  sur l'axe  $y$  avec une ordonnée positive,  $v_3$  sur l'axe  $z$  avec une cote positive

Ce qui nous permet de démontrer un résultat très général qui implique que l'application  $\alpha$  est propre !

**Théorème 5.9.** *Soit une suite  $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de polyèdres compacts qui réalisent  $C$  avec  $\alpha(P_i) = \mathbf{a}_i \in A_C$ . Si  $\mathbf{a}_i$  converge vers  $\mathbf{a} \in \overline{A_C}$  qui satisfait les conditions 1), 3), 4) et 5), alors il existe un polyèdre  $P_0$  qui réalise  $C$  avec les angles dièdres  $\mathbf{a}$ .*

Cela permet d'en déduire que l'application  $\alpha : \mathcal{P}_C^0 \rightarrow A_C$  est propre, ainsi que deux corollaires sympathiques :

**Théorème 5.10.** *On suppose que  $C$  satisfait les hypothèses du théorème d'Andreev et on suppose qu'on a une suite  $(\mathbf{a}_i) \in (A_C)^\mathbb{N}$  qui converge vers  $\mathbf{a} \in \partial A_C$ . Si  $\mathbf{a}$  satisfait les conditions 1), 3), 4) et 5) et que la condition 2) est satisfaite pour les arêtes  $v_1, \dots, v_k$  de  $C$  mais pas pour les arêtes  $v_{k+1}, \dots, v_n$  pour lesquelles la somme des angles dièdres vaut exactement  $\pi$  à chaque fois, alors il existe un polyèdre non compact  $P_0$  qui réalise  $C$  avec les angles dièdres  $\mathbf{a}$ .  $P_0$  a ses sommets  $v_1, \dots, v_k$  en des points distincts de  $\mathbb{H}^3$ , et ses sommets  $v_{k+1}, \dots, v_n$  en des points distincts à l'infini.*

**Théorème 5.11.** *On suppose que  $C$  est un polyèdre abstrait qui n'a pas de 3-circuit prismatique, et pour lequel les hypothèses du théorème d'Andreev sont satisfaites. Pour n'importe quelle arête  $e_0$  de  $C$ , si on note  $C_0$  le CW-complexe obtenu en contractant  $e_0$  en un point, alors il existe un polyèdre non-compact  $P_0$  qui réalise  $C_0$  avec l'arête  $e_0$  contractée en un unique point à l'infini, et le reste des sommets de  $C_0$  envoyés sur des points de  $\mathbb{H}^3$ .*

□

## 5.5 $\alpha|_{\mathcal{P}_C^0}$ est un homéomorphisme sur son image

*Preuve.* D'après ce qu'on a montré précédemment, on sait que  $\alpha : \mathcal{P}_C^1 \rightarrow \mathbb{R}^E$  est une application continue et injective, entre deux variétés sans bord de même dimension. Donc d'après le **théorème d'invariance du domaine** de Brouwer (une application continue et injective entre deux variétés de même dimension est un homéomorphisme local),  $\alpha$  est un homéomorphisme local. Comme  $\mathcal{P}_C^0$  est un sous-espace de  $\mathcal{P}_C^1$ , alors  $\alpha : \mathcal{P}_C^0 \rightarrow \mathbb{R}^E$  est un homéomorphisme local. □

## 5.6 Si $A_C \neq \emptyset$ , alors $\mathcal{P}_C^0 \neq \emptyset$

Cette partie est de très loin la plus difficile à montrer, nous ne ferons donc qu'en effleurer la preuve. On sait déjà que :

**Théorème 5.12.** *Si  $\mathcal{P}_C^0 \neq \emptyset$ , alors l'application  $\alpha : \mathcal{P}_C^0 \rightarrow A_C$  est un homéomorphisme.*

Ensuite, le but va être de montrer que si  $A_C \neq \emptyset$ , alors  $\mathcal{P}_C^0 \neq \emptyset$ , et c'est cela qui est très difficile.

La structure de la preuve est d'abord de le montrer pour des **polyèdres simples** (ce sont des polyèdres qui n'ont pas de 3-circuit prismatique), puis pour des polyèdres possédant un unique 3-circuit prismatique, et enfin de traiter le cas général en découpant un polyèdre quelconque en morceaux ne possédant qu'un unique 3-circuit prismatique.

## 6 Conclusion

Ainsi, le théorème d'Andreev, dont ce mémoire a présenté une partie de la preuve, permet de poursuivre l'étude que nous avons commencée sur les groupes de Coxeter en fonction du nombre de générateurs, même si le théorème ne s'applique pas au cas à 4 générateurs (tétraèdres). C'est en vue de cette application aux groupes de Coxeter que le théorème d'Andreev avait été développé et publié en 1970. Néanmoins, il joue également un rôle important dans la preuve du théorème de géométrie suivant, que nous nous contenterons d'énoncer<sup>6</sup> :

**Théorème 6.1** (Théorème d'hyperbolisation de Thurston, 1977). *Soit  $M$  une variété compacte et orientable, de dimension 3. On suppose que toute sphère  $\mathbb{S}^2$  plongée dans  $M$  borde une boule, et qu'il existe une surface orientable, de caractéristique d'Euler strictement négative, proprement plongée et dont le groupe fondamental s'injecte dans celui de  $M$ . L'intérieur de  $M$  admet une structure hyperbolique complète si et seulement si tout sous-groupe abélien  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$  du groupe fondamental de  $M$  est conjugué à un sous-groupe du groupe fondamental d'une composante du bord de  $M$ .*

---

<sup>6</sup>Pour un commentaire de ce résultat, on renvoie à l'article suivant :

MICHEL BOILEAU, Uniformisation en dimension trois, Astérisque, tome 266 (2000), Séminaire Bourbaki, exp. no 855, p. 137-174

## Références

- Roeder, Roland K.W. ; Hubbard, John H. ; Dunbar, William D., *Andreev's Theorem on hyperbolic polyhedra*, Annales de l'Institut Fourier, Tome 57 (2007) no. 3, pp. 825-882
- Une page internet tenue par Anna Felikson, qui récapitule des résultats importants sur les polytopes de Coxeter : <https://www.maths.dur.ac.uk/users/anna.felikson/Polytopes/polytopes.html>
- Un texte d'Étienne Ghys, *Poincaré et son disque*, <https://perso.ens-lyon.fr/ghys/articles/disque-poincare.pdf>

**Toutes les illustrations ont été réalisées par les auteurs du mémoire avec le logiciel Geogebra.**