Mémoire : Périodicité de Bott

Xavier Pigé, Timothé Ringeard, encadrés par Emmanuel Giroux

6 juin 2022

Table des matières

Introduction

La topologie algébrique associe différents invariants algébriques aux espaces, afin de permettre leur étude : les groupes d'homologie, par exemple, constituent un outil puissant en raison des nombreux théorèmes permettant de les calculer. Une autre famille de tels invariants est celle des groupes d'homotopie, qui généralisent le groupe fondamental. Ceux-ci ont toutefois l'inconvénient de ne pas pouvoir être calculés facilement en général. Le théorème de périodicité de Bott constitue un cas particulier bien connu où ces groupes d'homotopies peuvent tous être calculés, et où ils ont en fait la surprenante propriété d'être périodiques.

On note O (resp. U, Sp) la limite inductive du groupe orthogonal O_n (resp. du groupe unitaire U_n, du groupe symplectique compact Sp_n), à savoir le groupe des isométries réelles (resp. complexes, quaternioniques) pour le produit scalaire (resp. hermitien) usuel. On a alors :

Theorème 1 (Périodicité de Bott)**.** *Pour $k \in \mathbb{N}$:*

$$\pi_{k+2}\,\mathrm{U} = \pi_k\,\mathrm{U}$$

$$\pi_{k+4}\,\mathrm{O} = \pi_k\,\mathrm{Sp}$$

$$\pi_{k+4}\,\mathrm{Sp} = \pi_k\,\mathrm{O}$$

En particulier, $\pi_{k+8}\,\mathrm{O} = \pi_k\,\mathrm{O}$ et $\pi_{k+8}\,\mathrm{Sp} = \pi_k\,\mathrm{Sp}$.

De nombreuses preuves différentes de ce théorème existent. Ici, on utilisera une méthode assez algébrique, reposant sur une étude générale des modules sur un anneau (non nécessairement commutatif, puisque parmi les espaces étudiés figurent les espaces quaternioniques) avec un élément de structure supplémentaire, à savoir une involution anticommutative, qui joue le rôle de la conjugaison chez les complexes et les quaternions. Cette étude nous permettra ensuite d'énoncer un théorème d'existence de fibration (de Serre, qui constitue une généralisation des fibrations localement triviales), qui jouera un rôle clé. À cette étude générale succèdera l'analyse de dix cas particuliers, dans lesquels nous calculerons successivement la base, la fibre et le degré de connexité de l'espace total de la fibration de Serre. En utilisant la suite exacte longue d'une fibration, on parviendra enfin à établir le théorème de périodicité de Bott. En fait, on aura même la périodicité des groupes d'homotopie de $\mathrm{O}_n, \mathrm{U}_n$ et Sp_n pour n assez grand devant k l'indice du groupe d'homotopie.

1 Formes ε-symétriques sur un anneau avec involution

Cette section est purement algébrique et peu nécessaire à la compréhension de la preuve

On commence donc par une étude algébrique assez générale d'une classe bien précise de modules sur des anneaux avec une structure particulière. Il se trouve qu'on va bien pouvoir munir $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ d'une telle structure, de dix manières différentes, ce qui donnera les dix fibrations de Serre.

Définition 1. Soit A un anneau unitaire. Un module projectif (à droite) E sur A est un A-module (à droite) tel qu'il existe I, $\iota : E \hookrightarrow \bigoplus_I A$ et $F \subset \bigoplus_I A$ tels que $\bigoplus_I A = \iota(E) \oplus F$, ou de façon équivalente si tout morphisme surjectif sur E admet une section.

Démonstration. On montre l'équivalence des deux définitions.

D'une part, si E est facteur direct d'un A-module libre $\bigoplus_I A$, avec un supplémentaire F, et si $u : X \to E$ est linéaire surjective, on pose $u' : (x, f) \in X \oplus F \mapsto u(x) + f \in \bigoplus_I A$, qui est linéaire surjective. Comme l'image de u' est libre, il existe une section de u', qu'on note s. Projetant s sur X et restreignant à E, on obtient la section de u désirée.

D'autre part, si tout morphisme surjectif sur E admet une section, soit $(e_i)_{i\in I}$ famille génératrice de E. On considère l'application naturelle $\bigoplus_I A \to E$. Celle-ci possède une section, et E s'identifie alors à l'image de cette section. De plus, le noyau de cette application fournit un supplémentaire de E. $\square$

En particulier, si $\mathbb{K}$ est un corps (éventuellement non commutatif), alors tout $\mathbb{K}$-module, ie tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel (à droite) est projectif. On remarque également qu'un module projectif de type fini est facteur direct d'un module libre de rang fini.

Soit A un anneau muni d'une involution $x \in A \mapsto \underline{x} \in A$ satisfaisant $\underline{\underline{x}} = x$, $\underline{x+y} = \underline{x}+\underline{y}$ et $\underline{xy} = \underline{y}\,\underline{x}$.

Cette involution permet une identification entre les A-modules à droite et les A-modules à gauche en posant $a \cdot x = x \cdot \underline{a}$ pour $a \in A, x \in E$, si E est un A-module à gauche. On note $\underline{E}$ le A-module à droite ainsi obtenu. On ne se préoccupe donc plus désormais de savoir de quel côté sont les modules, on peut toujours les prendre à droite. Il faut simplement se souvenir de conjuguer lorsqu'on change de côté.

Ceci permet de définir le dual $E^* = \underline{\mathrm{Hom}(E,A)}$ d'un A-module à droite, qui est aussi un A-module à droite. On peut alors, pour tout A-module E, l'envoyer dans son bidual E^{**} via $e_E : y \in E \mapsto (x \in E^* \mapsto \underline{\langle x,y\rangle}) \in E^{**}$.

Un résultat particulièrement important est le suivant :

Proposition 1. *Soit E un A-module projectif de type fini. Alors e_E est un isomorphisme.*

Démonstration. On vérifie tout d'abord que e_E est bien définie et linéaire (indépendemment du fait que E soit projectif et de type fini).

Pour cela, si $y \in E$, $x,x' \in E^*$, $t \in A$, on a :

$$\langle e_E(y), x+x't\rangle = \underline{\langle x+x't,y\rangle} = \underline{\langle x,y\rangle + \underline{t}\langle x',y\rangle} = \langle x,e_E(y)\rangle + \langle x',e_E(y)\rangle t$$

d'où la bonne définition.

Ensuite, si $y,y' \in E, t \in A, x \in E^*$, on a :

$$\langle e_E(y+y't),x\rangle = \underline{\langle x,y+y't\rangle} = \underline{\langle x,y\rangle + \langle x,y'\rangle t} = \langle e_E(y),x\rangle + \underline{t}\langle e_E(y'),x\rangle = \langle e_E(y)+e_E(y')t,x\rangle$$

d'où la linéarité.

Ensuite, on écrit $A^n = E \oplus F$. On a alors $(A^n)^* = E^* \oplus F^*$ (E^* s'envoie dans $(A^n)^*$ via la projection sur E parallèlement à F et réciproquement), et donc ensuite $(A^n)^{**} = E^{**} \oplus F^{**}$. Il est clair que e_{A^n} se décompose en $e_E \oplus e_F$. De plus, il est clair que e_{A^n} est un isomorphisme (c'est analogue au cas des espaces vectoriels de dimension finie). Donc e_E et e_F aussi. $\square$

On peut maintenant définir la classe d'espaces qui nous servira pour prouver le théorème de périodicité de Bott :

Définition 2 (Espaces ε-hyperboliques)**.** Soit $\varepsilon = \pm 1$. Un module projectif de type fini E sur A muni d'une application $\omega : E \times E \to A$ est dit espace ε-hyperbolique si :

- (linéarité) $\forall x,y,z \in E, t \in A, \omega(x,y+zt) = \omega(x,y) + \omega(x,z)t$
- (symétrie) $\forall x,y \in E, \omega(x,y) = \varepsilon\underline{\omega(y,x)}$.
- (non dégénéré) L'application $E \to \underline{E^*}, z \mapsto \omega(z,\cdot)$ est un isomomrphisme.
- (isotropie) E possède un Lagrangien, c'est à dire un facteur direct L, qui est égal à son orthogonal $L^\omega = \{x \in E \mid \forall y \in L, \omega(x,y) = 0\}$.

On rajoute également le cas suivant, relativement similaire :

Définition 3 (Espace 0-hyperboliques)**.** Un espace 0-hyperbolique est un module projectif de type fini E qui possède un Lagrangien, c'est à dire un facteur direct L tel que E/L soit isomorphe à L^* le dual de L.

On a alors immédiatement $E \simeq L \oplus L^*$, et donc, si L et l'isomorphisme sont fixés, alors E s'identifie à son dual.

Définition 4 (Lagrangiens transverses)**.** Deux Lagrangiens P,Q dans un espace ε-hyperbolique (E,ω) sont dits transverses si $P+Q=E$ et $P\cap Q=0$.

En fait, lorsque $\varepsilon=\pm 1$, on a pour deux Lagrangiens P et Q :

$$P+Q=E \iff (P+Q)^\omega=0 \iff P^\omega \cap Q^\omega=0 \iff P\cap Q=0$$

L'exemple suivant est un cas particulier très important. Un des résultats de la section suivante montrera sa généralité.

Exemple. Si M est un module projectif de type fini et $\varepsilon=\pm 1$, on définit sur $M\oplus M^*$ la forme ε-hyperbolique

$$\omega_\varepsilon(x+y,x'+y')=\langle y,x'\rangle+\varepsilon\langle y',x\rangle$$

qui fait de $(M\oplus M^*,\omega_\varepsilon)$ un espace ε-hyperbolique. De même, $M\oplus M^*$ est aussi un espace 0-hyperbolique. Dans les deux cas, M et M^* sont deux Lagrangiens transverses.

Dans la suite, on utilisera les espace hyperboliques suivants, pour $n\in\mathbb{N}$:
- $E=\mathbb{K}^{2n}$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ et $\varepsilon=0$.
- $E=\mathbb{K}^{2n}$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\varepsilon=-1$, $\underline{x}=x$ et ω une forme symplectique.
- $E=\mathbb{K}^{2n}$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\varepsilon=1$, $\underline{x}=x$ et ω une forme quadratique de signature 0 non dégénérée.
- $E=\mathbb{K}^{2n}$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{H}$, $\varepsilon=-1$, $\underline{x}=\overline{x}$ et ω une forme anti-hermitienne (de signature 0) non dégénérée.
- $E=\mathbb{K}^{2n}$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, $\varepsilon=1$, $\underline{x}=\overline{x}$ et ω une forme hermitienne (de signature 0) non dégénérée.

Le cas $\varepsilon=-1,\mathbb{K}=\mathbb{C}$ muni de la conjugaison s'identifie à $\varepsilon=1$ à une multiplication de ω par i près, c'est pourquoi on ne l'étudie pas.

2 Étude de la structure des modules hyperboliques

Proposition 2 (Universalité de $Q\oplus Q^*$)**.** *Soient P, Q des Lagrangiens transverses dans un espace ε-hyperbolique (E,ω). Si $\varepsilon=\pm 1$, alors l'inclusion $Q\to Q\oplus Q^*$ s'étend en un unique isomorphisme $E\to Q\oplus Q^*$ envoyant P sur Q^* (et envoyant la forme ω sur ω_ε).*
Si $\varepsilon=0$, l'existence est encore vraie, et l'unicité aussi en fixant un isomorphisme φ entre P et Q^* et en imposant que l'isomorphisme entre E et $Q\oplus Q^*$ respecte φ.

Démonstration. On pose $V=Q\oplus Q^*$. Supposons dans un premier temps $\varepsilon=\pm 1$. On commence par observer qu'on a une suite exacte courte scindée $0\to Q\to E\to Q^*\to 0$, où $Q\to E$ est l'inclusion et $E\to Q^*$ est $z\in E\mapsto \omega(z,.)_{|Q}$. En effet, si $z\in E$:

$$\omega(z,.)_{|Q}=0 \Leftrightarrow z\in Q^\omega=Q$$

et le caractère scindé vient du fait que Q^* est un module projectif, puisque E l'est, que $E = P \oplus Q$ et que le dual d'un module projectif est clairement projectif. Or on a $E = P \oplus Q$ donc P s'identifie à E/Q, donc à Q^*. Notons f cet isomorphisme de P vers Q^*. Par construction, $\omega(x,y) = \langle f(x), y\rangle$ pour $x \in P, y \in Q$, et donc, en posant $g(x+y) = (f(x), y)$ pour $x \in P, y \in Q$, on a :

$$\omega_\varepsilon(g(x+y), g(x'+y')) = \langle f(x), y'\rangle + \varepsilon\underline{\langle f(x'), y\rangle} = \omega(x,y') + \varepsilon\underline{\omega(x',y)} = \omega(x,y') + \omega(y,x') = \omega(x+y, x'+y')$$

comme souhaité.

L'unicité vient du fait que, si $x \in P$, il est caractérisé par $\langle x, \cdot\rangle$. Mais, comme $x \in P$, on connaît déjà son comportement sur P (à savoir, identiquement nul), et donc x est caractérisé par la restriction de $\langle x, \cdot\rangle$ à Q, ce qui est bien ce qu'on veut.

Dans le cas $\varepsilon = 0$, si $E = P \oplus Q$, alors, comme $E/Q \simeq Q^*$ l'inclusion de Q dans V s'étend évidemment en une application linéaire induisant un isomorphisme de P sur Q^*, et cette application est alors un isomorphisme.

L'unicité dans ce cas est évidente une fois l'isomorphisme $P \to Q^*$ fixé. □

Proposition 3 (Description des Lagrangiens transverses)**.** *Dans $Q \oplus Q^*$, les Lagrangiens transverses à Q sont les graphes des morphismes $-\varepsilon$-symétriques $Q^* \to Q$, ie les $\{x + ux, x \in Q^*\}$ où u vérifie $\forall x, y \in Q^*, \langle x, uy\rangle = -\varepsilon\underline{\langle y, ux\rangle}$.*

Pour $\varepsilon = 0$, on considère par convention que toute application linéaire est 0-symétrique.

Démonstration. Dans le cas $\varepsilon = 0$, si P Lagrangien transverse à Q, il existe u un automorphisme de $Q \oplus Q^*$ qui induit l'identité sur Q et qui envoie Q^* sur P. En prenant sa restriction à Q^* et en le projetant sur Q parallèlement à Q^*, on obtient l'application souhaitée. Réciproquement, il est immédiat que le graphe de toute application linéaire $Q^* \to Q$ est un Lagrangien transverse à Q.

Dans le cas où $\varepsilon = \pm 1$, un Lagrangien P transverse à Q le serait aussi pour $\varepsilon = 0$, et on peut donc l'écrire comme le graphe d'une application linéaire $u : Q^* \to Q$. Or pour $x, y \in Q^*$:

$$\omega_\varepsilon(x + ux, y + uy) = \langle x, uy\rangle + \varepsilon\underline{\langle y, ux\rangle}$$

Donc $\langle \cdot, uy\rangle = -\varepsilon\underline{\langle y, u\cdot\rangle}$, ie u est $-\varepsilon$-symétrique.

Réciproquement, si $u : Q^* \to Q$ est un morphisme $-\varepsilon$-symétrique, alors pour tous $x, y \in Q^*, y' \in Q$,

$$\omega_\varepsilon(x + ux, y + y') = \langle x, y'\rangle + \varepsilon\underline{\langle y, ux\rangle} = \langle x, y'\rangle - \langle x, uy\rangle = \langle x, y' - uy\rangle$$

qui est nul pour tout $x \in Q^*$ si et seulement si $y' = uy$. Donc $\{x + ux, x \in Q^*\}$ est un Lagrangien.

□

Pour $u : E \to F$ linéaire (où E, F sont des A-modules), on définit l'adjoint de u par $u^* : F^* \mapsto E^*$ en posant $\langle u^* x, y\rangle = \langle x, uy\rangle$ pour $x \in F^*, y \in E$. u^* est bien définie car si $x \in F, y, y' \in E, t \in A$, alors $\langle u^* x, y + y't\rangle = \langle x, u(y + y't)\rangle = \langle x, uy\rangle + \langle x, uy'\rangle t$. Elle est linéaire car si $x, x' \in F, y \in E, t \in A$, alors $\langle u^*(x + x't), y\rangle = \langle x + x't, uy\rangle = \langle x, uy\rangle + \underline{t}\langle x', uy\rangle = \langle u^* x + (u^* x')t, y\rangle$. L'application $u \mapsto u^*$ est enfin clairement $Z(A)$-linéaire (où $Z(A)$ désigne le centre de A).

On a alors en particulier, si E est un module projectif de type fini, $u : E^* \to E$, $u^* : E^* \to E^{**}$ qui s'identifie à $u^* : E^* \to E$ vérifiant :

$$\langle x, u^* y\rangle = \underline{\langle u^* y, x\rangle} = \underline{\langle y, ux\rangle}$$

La condition de $-\varepsilon$-symétrie précédente se réécrit alors $u^* = -\varepsilon u$. L'espace $\mathrm{Sym}_{-\varepsilon}(Q)$ des applications $-\varepsilon$-symétriques $u : Q^* \to Q$ est alors un $Z(A)$-sous-module de $\mathrm{Hom}(Q^*, Q)$. En particulier, si $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et il est donc contractile.

Proposition 4 (Existence de Lagrangiens transverses)**.** *Soit (E,ε) un espace ε-hyperbolique avec $\varepsilon = \pm 1$, et L un Lagrangien de E. Alors L possède un Lagrangien transverse dès que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

— *Il existe des Lagrangiens transverses P et Q dans E.*
— *Il existe un élement $h \in A$ central et tel que $h + \underline{h} = 1$.*

Démonstration. On a déjà vu qu'un Lagrangien transverse à L était nécéssairement le graphe d'une section $s : L^* \simeq V/L \to V$ (l'isomorphisme provenant pour rappel de la suite exacte courte dans la preuve de la Proposition 3). Il existe de telles sections car L^* est projectif. Ces sections sont stables par ajout d'un élément de $\mathrm{Hom}(L^*, L)$. À une telle section s, on associe le tiré-en-arrière de ω selon s, donné par $\nu_s(x,x') = \omega(sx, sx')$ pour $x, x' \in L^*$.

Pour $u \in \mathrm{Hom}(L^*, L)$ et $x, x' \in L^*$, on a alors

$$\nu_{s+u}(x,x') = \omega(sx+ux, sx'+ux') = \nu_s(x,x') + \omega(sx,ux') + \omega(ux,sx') = \nu_s(x,x') + \omega(sx,ux') + \varepsilon\underline{\omega(sx',ux)}$$

car L Lagrangien. Mais d'autre part, s est une section de $z \in V \mapsto \omega(z,\cdot) \in L^*$, et donc $\omega(sx, ux') = \langle x, ux'\rangle$, et donc

$$\nu_{s+u}(x,x') - \nu_s(x,x') = \langle x, ux'\rangle + \varepsilon\underline{\langle x', ux\rangle} = \langle x, ux'\rangle + \varepsilon\langle x, u^*x'\rangle = \langle x, (u+\varepsilon u^*)x'\rangle$$

Supposons pour commencer que A possède un élément h comme dans l'énoncé. On note $v : L^* \to L$ définie par $\nu_s(x,x') = \langle x, vx'\rangle$ pour $x, x' \in L^*$. On a alors $v^* = \varepsilon v$ car ν_s est ε-symétrique, et donc $u = -hv$ (bien définie car h central) satisfait $u + \varepsilon u^* = -v$. Par conséquent, l'image de $s+u$ est un Lagrangien transverse à L. En effet, si $x, x' \in L^*$, on a $\nu_{s+u}(x,x') = \langle x, vx'\rangle + \langle x, -vx'\rangle = 0$, donc ω est nulle sur $(s+u)(L^*) \times (s+u)(L^*)$. Et comme $s+u$ est une section de $z \in V \mapsto \omega(z,\cdot) \in L^*$ et que $E = L \oplus (s+u)(L^*)$ clairement, on en déduit que $(s+u)(L^*)$ est un Lagrangien : aucun point de L n'est dans son orthogonal, et donc son orthogonal est égal à lui-même.

Supposons désormais que E contient deux Lagrangiens transverses P et Q, et identifions E à $Q \oplus Q^*$ muni de ω_ε. On peut désormais écrire $s = f + g$ avec $f \in \mathrm{Hom}(L^*, Q), g \in \mathrm{Hom}(L^*, Q^*)$. On a alors

$$\nu_s(x,x') = \langle fx, gx'\rangle + \varepsilon\underline{\langle fx', gx\rangle} = \langle x, f^*gx'\rangle + \varepsilon\langle x, g^*fx'\rangle = \langle x, (f^*g + \varepsilon g^*f)x'\rangle$$

Ainsi, avec $u = -f^*g \in \mathrm{Hom}(L^*, L)$, on a $\nu_{s+u} = 0$, ce qui conclut comme précédemment. □

3 Réduction symplectique

On fixe dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ et $n, k \in \mathbb{N}$. L'objectif est de construire l'application qui servira à obtenir une fibration de Serre (d'où l'importance d'être dans un cadre topologique).

Si $\varepsilon = \pm 1$, on rappelle que la forme ω_ε est définie sur $E_n := \mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^{n*}$ par

$$\omega_\varepsilon(x+y, x'+y') = \langle y, x'\rangle + \varepsilon\underline{\langle y', x\rangle}.$$

On se place dans E_{n+k}. Soit $F = \{0\}^n \times \mathbb{K}^k \times \{0\}^{(n+k)*}$, donc $F^\omega = \mathbb{K}^{n+k} \times \mathbb{K}^{n*} \times \{0\}^{k*}$ (dans le cas $\varepsilon = 0$, on définit F^ω comme tel). On a en particulier $F \subseteq F^\omega$. Un sous-espace vérifiant cette propriété est dit isotrope. La construction qui suit est valable dans le cas de tout sous-espace isotrope, mais par universalité on peut se ramener à ce cas. Comme la restriction de ω_ε à F^ω est nulle sur F, elle est bien définie sur F^ω/F et fait de $(F^\omega/F, \omega_\varepsilon)$ un module ε-hyperbolique, qui s'identifie naturellement à E_n. Notons $p : F^\omega \to F^\omega/F$ la projection. On s'intéresse aux Lagrangiens de E_{n+k} dont la projection sur F^ω/F est encore un Lagrangien :

Définition 5. On note $\Lambda_{n,k}$ l'espace des Lagrangiens L de E_{n+k} transverses à F^ω, c'est-à-dire tels que $F^\omega + L = E_{n+k}$ et $F \cap L = \{0\}$.

Remarque. Si $\varepsilon = \pm 1$, les deux conditions sont équivalentes puisque $F \cap L = (F^\omega + L^\omega)^\omega = (F^\omega + L)^\omega$.

Proposition 5. *La réduction symplectique*

$$\rho_{n,k} : L \in \Lambda_{n,k} \mapsto p(L \cap F^\omega) \in \Lambda_n$$

est bien définie et est une fibration à fibres contractiles.

Démonstration. On notera $\rho = \rho_{n,k}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Soit $L \in \Lambda_{n,k}$. Alors pour $[x] \in F^\omega/F$, on a

$$\forall y \in \rho(L), \omega([x], y) = 0 \iff \forall y \in L \cap F^\omega, \omega(x, y) = 0$$
$$\iff x \in (L \cap F^\omega)^\omega = L + F \iff [x] \in L$$

donc dans F^ω/F, $\rho(L)^\omega = p(L \cap F^\omega) = \rho(L)$. Donc ρ est bien à valeurs dans Λ_n pour $\varepsilon = \pm 1$. Pour $\varepsilon = 0$, on vérifie que $L \cap F^\omega$ est de dimension n (car $L + F^\omega = E_{n+k}$) et que son intersection avec F est nulle, donc $\rho(L)$ est encore de dimension n.

Montrons que c'est une fibration. Soit $\mathrm{Aut}(E_{n+k}, \omega_\varepsilon, F)$ le groupe des automorphismes de E_{n+k} préservant ω et F (et F^ω si $\varepsilon = 0$). C'est un groupe de Lie en tant que sous-groupe fermé de $\mathrm{Aut}(E_{n+k}, \omega)$. Montrons que ce groupe agit transitivement sur $\Lambda_{n,k}$. L'action est bien définie car si f préserve ω alors elle préserve les Lagrangiens, si f préserve F, $f(L) \cap F = f(L \cap F) = \{0\}$, et si $\varepsilon = 0$ et f préserve F^ω, alors $f(L) + F^\omega = f(L + F^\omega) = E_{n+k}$. Cette action est transitive : Soit $L \in \Lambda_{n,k}$, puis soit $l \subset E_n$ un Lagrangien transverse à $\rho(L)$. Soit $\tilde{l} = p^{-1}(l)$ qui est donc un Lagrangien de E_{n+k} transverse à L, contenant F. On a donc un isomorphisme $g : \mathbb{K}^{n+k} \to \tilde{l}$ envoyant $\{0\}^n \times \mathbb{K}^k$ sur F. Cette identification de $\tilde{l}$ avec $\mathbb{K}^{n+k}$ permet d'identifier $\tilde{l} \oplus L$ avec E_{n+k}, et l'isomorphisme envoie bien F sur lui même par choix de g. Dans le cas $\varepsilon = 0$, on peut bien demander d'envoyer F^ω sur lui-même car $\dim(F^\omega \cap \{0\}^{n+k} \times \mathbb{K}^{n+k*}) = n = \dim(F^\omega \cap L)$. Ainsi $f \in \mathrm{Aut}(E_{n+k}, \omega, F)$ et envoie L sur $\mathbb{K}^{n+k} \times \{0\}^{n+k}$, donc l'action est bien transitive.

Ainsi $\mathrm{Aut}(E_{n+k}, \omega, F)$ agit transitivement sur $\Lambda_{n,k}$ et Λ_n, et ρ est équivariante pour ces actions. On admet que cela implique que ρ est une fibration localement triviale.

Montrons que les fibres sont contractiles. Soient X' un Lagrangien de F^ω/F, et Y' un Lagrangien qui lui est transverse, qui existe. Soit $Y = p^{-1}(Y')$. C'est un Lagrangien de E inclus dans F^ω. De plus, si $L \in \Lambda_{n,k}$ est tel que $\rho(L)$ est transverse à Y', alors L est transverse à Y. Donc $\rho^{-1}(X') \subset \Lambda_{n+k}^Y$ (les Lagrangiens transverses à Y). Soit $X \in \rho^{-1}(X')$ (par exemple $\{0\}^k \times X' \times \mathbb{K}^{k*}$ en utilisant l'inclusion canonique $E_n \hookrightarrow E_{n+k}$). Si $L \in \Lambda_{n+k}^Y$, par la Proposition 3, il existe $u \in \mathrm{Sym}_{-\varepsilon}(Y)$ (en identifiant X à Y^* par la Proposition 2) tel que $L = X + u = \{x + u(x), x \in X\}$. Comme u est à image dans $Y \subset F^\omega$, $x + u(x) \in F^\omega \iff x \in F^\omega$. Donc $\dim(F^\omega \cap (X+u)) = \dim(F^\omega \cap X)$ donc $\dim(F^\omega \oplus (X+u)) = \dim(F^\omega \oplus X) = 2(n+k)$ donc $X + u$ est toujours transverse à F^ω. De plus, $\rho(X+u) = X' \iff \forall x \in X \cap F^\omega, x + u(x) \in (X' + F) \iff u(X \cap F^\omega) \subset F$. Donc

$$\rho^{-1}(X') = \{X + u \mid u \in \mathrm{Sym}_{-\varepsilon}(X), u(X \cap F^\omega) \subset (F + X') \cap Y = F\}$$

est contractile car stable par multiplication par un réel, donc étoilé en $u = 0$. □

Définition 6. On pose $\Lambda'_{n,k} = \Lambda_{n,k} \cap \Lambda'_{n+k}$ les Lagrangiens de E_{n+k} transverses à F^ω et à $\{0\}^{n+k} \times \mathbb{K}^{n+k*}$. On pose aussi $\rho'_{n,k} = \rho_{n,k|\Lambda'_{n,k}}$ la restriction de la réduction symplectique.

$\rho'_{n,k}$ n'est pas une fibration, elle présente des singularités au-dessus des Lagrangiens non transverses à $\mathbb{K}^{n*}$. En fait, en petite dimension, elle n'est même pas surjective. Dans la section suivante, on corrigera ces défauts en passant à la limite inductive $k \to \infty$.

4 Stabilisation

Définition 7. Notons $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(E_n,\omega)$ les automorphismes tels que $f^{-1}(\mathbb{K}^n)$ est transverse à $\mathbb{K}^{n*}$. Γ est un voisinage de l'identité.

Ce premier lemme nous permettra d'envoyer les espaces les uns dans les autres. Le paramètre fonctionnel servira plus spécifiquement à obtenir le relèvement des homotopies.

Lemme 1. *Il existe* $\tau_{n,k} : \Gamma \times \Lambda'_{n,k} \to \Lambda'_{n,k+2n}$ *telle que pour tous* $f \in \Gamma, L \in \Lambda'_{n,k}$,

$$\rho'_{n,k+2n}(\tau_{n,k}(f,L)) = f^{-1}(\rho'_{n,k}(L))$$

Démonstration. Soient $f \in \Gamma, L \in \Lambda'_{n,k}$. Notons $G \subset E_n \times E_n$ le graphe de f et $D \subset E_n \times E_n$ la diagonale. Notons $\overline{E_n}$ l'espace ε-hyperbolique $(E_n, -\omega_\varepsilon)$. La preuve comporte quatre étapes :

— G et $\{0\}^n \times \mathbb{K}^{n*} \times \mathbb{K}^n \times \{0\}^{n*}$ sont des Lagrangiens transverses dans $E_n \oplus \overline{E_n}$. En effet, le deuxième est clairement un Lagrangien. De plus pour tous $z,z' \in E_n, \omega((z,f(z)),(z',f(z'))) = \omega(z,z') - \omega(f(z),f(z')) = 0$ car f préserve ω. Donc $G \subset G^\omega$. Réciproquement, si $(z,z') \in G^\omega$, alors pour $y \in E_n$ on a

$$0 = \omega((y,f(y)),(z,z')) = \omega(y,z) - \omega(f(y),z') = \omega(y,z) - \omega(y,f^{-1}(z')) = \omega(y,z-f^{-1}(z'))$$

donc $z = f^{-1}(z')$, ie $z' = f(z)$, donc $G^\omega \subset G$.
Enfin, si $(z,f(z)) \in \{0\}^n \times \mathbb{K}^{n*} \times \mathbb{K}^n \times \{0\}^{n*}$, alors $z \in \mathbb{K}^{n*} \cap f^{-1}(\mathbb{K}^n) = \{0\}$ donc $z = 0$. Et par dimension, on a alors aussi $G + \{0\}^n \times \mathbb{K}^{n*} \times \mathbb{K}^n \times \{0\}^{n*} = E_n \oplus E_n$. Donc ces deux Lagrangiens sont transverses.

— $F' := \{0\}^{2n} \times D \times \mathbb{K}^k \times \{0\}^{k*}$ est un sous-espace isotrope de $E_n \times \overline{E_n} \times E_{n+k}$, car

$$\omega'((0,z,z,x),(0,z',z',x')) = -\omega(z,z') + \omega(z,z') + \omega(x,x') = 0$$

si $x,x' \in \mathbb{K}^k \times \{0\}^{k*}$. On a de plus $F'^\omega = E_n \times D \times \mathbb{K}^k \times \{0\}^{k*}$ (une inclusion est claire, d'où l'inclusion réciproque par dimension). Alors si $L \in \Lambda'_{n,k}$, $G \times L \cap F' = \{0\}$. En effet, si $(z,w,x,y) \in G \times L \cap F'$, alors $z = 0$, $w = f(z) = 0$, $x = w = 0$, et $y \in \mathbb{K}^k \times \{0\}^{k*}$ mais L est transverse à $F^\omega_{n,k}$ donc $L \cap F_{n,k} = \{0\}$, donc $y = 0$. D'où $G \times L \cap F' = \{0\}$.

— On a $\rho_{F'}(G \times L) = f^{-1}(\rho_{n,k}(L))$. En effet, $(z,f(z),f(z),x) \in G \times L \cap F'^\omega \iff (f(z),x) \in L \wedge x \in \mathbb{K}^k \cap L = \{0\} \iff f(z) \in \rho_{n,k}(L) \wedge x = 0$.

— Comme D est un Lagrangien de $\overline{E_n} \oplus E_n$ et qu'on a clairement D isomorphe à $\mathbb{K}^{2n}$ en tant qu'espace vectoriel, par la Proposition 4, il existe un isomorphisme ψ de $(\overline{E_n} \oplus E_n, (-\omega_\varepsilon) \oplus \omega_\varepsilon)$ vers $(E_n \oplus E_n, \omega_\varepsilon \oplus \omega_\varepsilon)$ envoyant D sur $\mathbb{K}^n \times \{0\}^n \times \mathbb{K}^n \times \{0\}^n$.
En fait, si on pose $\varphi : u \in \mathbb{K}^{n*} \mapsto \underline{(u(e_1),\dots,u(e_n))} \in \mathbb{K}^n$ isomorphisme, on peut choisir

$$\psi(x+x',z+z') = \left(\frac{x+z}{2} + (z'-x')\right) + \left(-\varphi\left(\frac{x'+z'}{2}\right) + \varepsilon\varphi^{-1}(x-z)\right)$$

comme on le vérifie aisément. On pose alors

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & E_n \times \overline{E_n} \times (E_n \times E_k) & \to & E_{3n+k} = \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^k \times \mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^{n*} \times \mathbb{K}^{n*} \times \mathbb{K}^{k*} \times \mathbb{K}^{n*} \\ & (t+t', x+x', y+y', z+z') & \mapsto & (t, \frac{x+z}{2}, y, -\varphi\left(\frac{x'+z'}{2}\right)) + (t', z'-x', y', \varepsilon\varphi^{-1}(x-z)) \end{array}$$

C'est un isomorphisme d'espaces ε-hyperboliques qui envoie F' sur $F_{n,k+2n}$ et F'^ω sur $F^\omega_{n,k+2n}$.

(Cette formule est valide pour $\varepsilon = \pm 1$; pour $\varepsilon = 0$, afin de préserver la bijectivité, il faut remplacer les occurrences de ε par 1 ou par -1, au choix)

On peut donc finalement prendre $\tau_{n,k}(f,L) = \Phi(G \times L)$. $\square$

Définition 8. On peut alors définir la limite inductive $\Lambda'_{n,\infty}$ en utilisant les inclusions

$$\begin{array}{rccc} \iota_j : & \Lambda'_{n,2nj} & \to & \Lambda'_{n,2n(j+1)} \\ & L & \mapsto & \tau_{n,2nj}(\mathrm{Id}_{E_n}, L) \end{array}$$

Puis on peut définir $\rho'_{n,\infty} : \Lambda'_{n,\infty} \to \Lambda_n$. On définit également Λ''_∞ comme la limite inductive en j des Λ''_{2nj} avec les inclusions

$$\iota'_j : L \in \Lambda''_{2nj} \mapsto L \times M \in \Lambda''_{2n(j+1)}$$

où $M \in \Lambda''_{2n}$ est quelconque fixé.

Theorème 2. *$\rho'_{n,\infty} : \Lambda'_{n,\infty} \to \Lambda_n$ est une fibration de Serre dont les fibres ont le type d'homotopie faible de Λ''_∞.*

Démonstration. Commençons par montrer que $\rho'_{n,\infty}$ est une fibration de Serre. Soit B^d la boule unité fermée de $\mathbb{R}^d$. Soit $K : B^d \times [0,1] \to \Lambda_n$. Supposons disposer d'un relèvement L de $K_{|B^d \times \{0\}}$.

Commençons par montrer que pour $(x,t) \in B^d \times [0,1]$, on peut choisir $f_{x,t} \in \mathrm{Aut}(E_n, \omega_\varepsilon)$ continûment tel que $f_{x,t}^{-1}(K(x,0)) = K(x,t)$, et $f_{x,0} = id_{E_n}$. Soit $(x_0,t_0) \in B^d \times [0,1]$, $K_0 = K(x_0,t_0)$ et $L_0 \simeq K_0^*$ un Lagrangien transverse à K_0 dans E_n. Dans un voisinage V de (x_0,t_0), $K(x,t)$ est transverse à L_0 et on peut écrire $K(x,t) = K_0 + u_{x,t}$ où $u_{x,t} : K_0 \to K_0^*$ est $-\varepsilon$-symétrique. De plus, comme $(x,t) \mapsto K(x,t)$ est continue, $(x,t) \mapsto u_{x,t}$ aussi. Fixons (x,t) dans ce voisinage, notons $u = u_{x,t}$ et posons $g = g_{x,t} := id_{E_n} + u$ c'est-à-dire que si $y \in K_0, z \in K_0^*$ alors $g(y,z) = y + z + uy$. On a alors clairement $g_{x,t}(K_0) = K(x,t)$. De plus im g contient L_0 et $K(x,t)$ donc g est inversible par hypothèse de transversalité sur le voisinage. Enfin, g préserve ω, car si $y, y' \in K_0, z, z' \in K_0^*$,

$$\omega(y+z+uy, y'+z'+uy') = \omega(y+z, y'+z') + \omega(y, uy') + \omega(uy, y')$$

$$= \omega(y+z, y'+z') + \varepsilon\underline{\langle uy', y\rangle} + \langle uy, y'\rangle = \omega(y+z, y'+z') + \varepsilon\langle y, uy'\rangle - \varepsilon\langle y, uy'\rangle = \omega(y+z, y'+z')$$

car $u^* = -\varepsilon u$. Donc si l'on dispose de $f_{x,t}$ pour un élément (x_1,t_1) du voisinage, on peut construire $f_{x,t}$ dans tout le voisinage en posant $f_{x,t} = f_{x_1,t_1} \circ g_{x_0,t_0} \circ g_{x,t}^{-1}$. Par compacité, on peut donc construire $f_{x,t}$ sur tout $B^d \times [0,1]$, le seul problème est qu'il faut vérifier que cela coïncide bien aux endroits où $f_{x,t}$ est défini plusieurs fois. Pour y remédier, on montre que l'on peut construire $f_{x,t}$ sur des voisinages homéomorphes à $[0,1]^{d+1}$ en ayant déjà construit $f_{x,t}$ sur $[0,1]^d \times \{0\}$. Cela suffira à conclure car alors on pourra découper $B^d \times [0,1] \simeq [0,1]^{d+1}$ en M^{d+1} cubes sur lesquels tous les $K(x,t)$ ont un Lagrangien transverse commun, puis définir f sur ces cubes dans le bon ordre. Supposons donc disposer de $V \simeq [0,1]^{d+1}$ sur lequel tous les $K(x,t)$ sont transverses à L_0, et où on a déjà défini f sur $[0,1]^d \times \{0\}$. Pour $(x,t) \in [0,1]^{d+1}$, on écrit alors $K(x,t) = K(x,0) + u_{x,t}$ avec $u_{x,t} : K(x,0) = L_0^* \to L_0$. Comme l'identification $K(x,0) = L_0^*$ est continue en x, $u_{x,t}$ est continue en (x,t). On peut donc conclure comme précédemment en utilisant $g_{x,t}(y,z) = y + z + u_{x,t}(y)$. D'où la définition de $f_{x,t}$.

On montre ensuite que l'on peut relever K. Par compacité, on a k_0 tel que $L(B^d) \in \Lambda'_{n,k_0}$. Comme Γ est ouvert et B^d compact, pour tout $t \in [0,1]$ on a $f_{x,t'} \circ f_{x,t}^{-1} \in \Gamma$ et $f_{x,t} \circ f_{x,t'}^{-1} \in \Gamma$ pour tout t' dans un voisinage ouvert V_t de t et tout $x \in B^d$. Par compacité de $[0,1]$, on peut trouver $0 = s_0 < t_0 < s_1 < t_1 < \cdots t_{m-1} < s_m = 1$ tels que $[s_i, s_{i+1}] \subset V_{t_i}$. Sur $B^d \times [0, s_1]$, on peut relever K en prenant $L(x,t) = \tau_{n,k_0}(f_{x,t}, L(x,0))$. Ce relèvement est bien continu car par construction τ_{n,k_0} est continue. De plus,

$$\rho'_{n,\infty}(\tau_{n,k_0}(f_{x,t}, L(x,0))) = \rho'_{n,k_0+2n}(\tau_{n,k_0}(f_{x,t}, L(x,0))) = f_{x,t}^{-1}(\rho'_{n,k_0}(L(x,0))) = f_{x,t}^{-1}(K(x,0)) = K(x,t)$$

Ensuite, on pose $k_1 = k_0 + 4n$, et pour $x \in B^d, L(x,t_1) = \tau_{n,k_0+2n}(f_{x,t_1} \circ f_{s_1}^{-1}, L(s_1)) \in \Lambda'_{n,k_1}$. On définit alors pour $x \in B^d$ et $t \in [s_1,s_2]$, $L(x,t) = \tau_{n,k_1}(f_{x,t} \circ f_{x,t_1}^{-1}, L(t_1)) \in \Lambda'_{n,k_1+2n}$. Par choix des inclusions pour la limite inductive, les définitions coïncident dans $\Lambda'_{n,\infty}$ en s_1 et en t_1. On continue ainsi, en posant à chaque étape $k_{i+1} = k_i + 4n$. On a ainsi construit le relèvement voulu, donc $\rho'_{n,\infty}$ est une fibration de Serre.

Montrons que les fibres ont le type d'homotopie faible de Λ''_∞. Montrons que $\rho'^{-1}_{n,k}(\mathbb{K}^n)$ a le type d'homotopie de Λ''_k. Soit $L \in \rho'^{-1}_{n,k}(\mathbb{K}^n)$. L est transverse à $\mathbb{K}^{(n+k)*}$ donc s'écrit $\mathbb{K}^{n+k} + u$ où $u : \mathbb{K}^{n+k} \to \mathbb{K}^{(n+k)*}$ est $-\varepsilon$-symétrique. De plus, si $x \in \mathbb{K}^k, y \in \mathbb{K}^n$ et $u(x,y) \in \mathbb{K}^{n*}$, alors $(x,y,u(x,y)) \in L \cap F^\omega$ donc $(y,u(x,y)) \in p(L \cap F^\omega) = \rho_{n,k}(L) = \mathbb{K}^n$ donc $u(x,y) = 0$. Donc u est à valeurs dans un sous espace vectoriel de dimension k de $\mathbb{K}^{(n+k)*}$, en somme directe avec $\mathbb{K}^{n*}$. De plus, si $x \in \mathbb{K}^k - \{0\}$, alors $u(x,0) \neq 0$ car $(x,0,u(x,0)) \in L \cap F = \{0\}$. Donc $\mathrm{rg}\, u \geq k$, puis avec l'argument précédent, $\mathrm{rg}\, u = k$. Donc $\mathrm{im}\, u$ est un supplémentaire de $\mathbb{K}^{n*}$ dans $\mathbb{K}^{(n+k)*}$, et $\ker u$ est un supplémentaire de $\mathbb{K}^k$ dans $\mathbb{K}^{n+k}$. $\mathrm{im}\, u$ est alors paramétrée par $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{k*}, \mathbb{K}^{n*})$, dans le sens où $\mathrm{im}\, u = \mathbb{K}^{k*} + f$. De même, $\ker u$ est paramétré par $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^k)$. L (c'est-à-dire u) est alors paramétré par (f,g,h) où $h \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^{k*})$, où l'image de u est le graphe de f, et le noyau de u est le graphe de g, et u est donnée explicitement par

$$u(x,y) = ((id_{\mathbb{K}^{k*}} + f) \circ h)(x - g(y))$$

La condition $\mathrm{rg}\, u = k$ impose que h soit inversible. Notons $p_1 : \mathbb{K}^{n+k} \to \mathbb{K}^k$ et $p_2 : \mathbb{K}^{n+k} \to \mathbb{K}^n$ les projections relativement à $(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^n)$ et $i_1 : \mathbb{K}^{k*} \to \mathbb{K}^{(n+k)*}, i_2 : \mathbb{K}^{n*} \to \mathbb{K}^{n+k*}$ les inclusions. Alors $u = (i_1 + i_2 \circ f) \circ h \circ (p_1 - g \circ p_2)$ donc

$$u^* = (p_1^* - p_2^* \circ g^*) \circ h^* \circ (i_1^* + f^* \circ i_2^*).$$

Or $p_1^* = i_1$ et $p_2^* = i_2$ et réciproquement, donc

$$u^* = (i_1 - i_2 \circ g^*) \circ h^* \circ (p_1 + f^* \circ p_2).$$

Or $u^* = -\varepsilon u$ donc $\ker u = \ker u^* = \ker(p_1 + f^* \circ p_2)$, donc le graphe de g est le même que celui de $-f^*$, donc $g = -f^*$. Donc

$$u^* = (i_1 + i_2 \circ f) \circ h^* \circ (p_1 - g \circ p_2).$$

Or $(i_1 + i_2 \circ f)$ est injective et $(p_1 - g \circ p_2)$ surjective, donc $h^* = -\varepsilon h$. Donc h est $-\varepsilon$-symétrique, $\mathbb{K}^k + h$ est un Lagrangien de E_k. Comme h est inversible, ce Lagrangien est transverse à $\mathbb{K}^k$ et à $\mathbb{K}^{k*}$.

Réciproquement, étant donnés $\mathbb{K}^k + h \in \Lambda''_k$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{k*}, \mathbb{K}^{n*})$, on montre que $L := \mathbb{K}^{n+k} + u \in \rho'^{-1}_{n,k}(\mathbb{K}^n)$ où $u(x,y) = ((id_{\mathbb{K}^{k*}} + f) \circ h)(x - g(y))$ et $g = -f^*$. En effet, h est alors inversible, donc u est de rang k. Par les calculs qui précèdent, u est $-\varepsilon$-symétrique donc $\mathbb{K}^{n+k} + u$ est bien un Lagrangien, et il est transverse à $\mathbb{K}^{(n+k)*}$. Si $(x,ux) \in (\mathbb{K}^{n+k} + u) \cap \mathbb{K}^k$, alors $ux = 0$ et $x \in \mathbb{K}^k$, $(id_{\mathbb{K}^{k*}} + f) \circ h)(x) = 0$, donc $x = 0$. Donc $\mathbb{K}^{n+k} + u$ est transverse à F^ω, donc appartient bien à $\Lambda'_{n,k}$. De plus, si $(y,uy) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^{n*}$, alors $uy = (h(g(y)), f(h(g(y))))$ donc $h(g(y)) = 0$,, donc $uy = 0$. Donc $\rho_{n,k}(L) \subset \mathbb{K}^n$, puis $\rho_{n,k}(L) = \mathbb{K}^n$ par dimension.

Donc $\rho'^{-1}_{n,k}(\mathbb{K}^n)$ est homéomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^{k*}, \mathbb{K}^{n*}) \times \Lambda''_k$, donc a le type d'homotopie de Λ''_k.

On a implicitement supposé depuis qu'on a utilisé $u^* = -\varepsilon u$ l'hypothèse $\varepsilon = \pm 1$. Dans le cas $\varepsilon = 0$, on choisit librement f, g et h sous la seule hypothèse h inversible, et on trouve donc quand même le type d'homotopie désiré.

Bien qu'étant un très fort élément dans ce sens, ceci ne suffit cependant pas à démontrer que $\rho'^{-1}_{n,\infty}(\mathbb{K}^n)$ a le type d'homotopie de Λ''_∞. Pour une preuve détaillée de ce fait, on se reportera à l'annexe.

□

5 Calcul des bases et des fibres

5.1 Technique de calcul des bases

Il s'agit dans cette section de calculer le type d'homéomorphisme de Λ_n la grassmannienne des Lagrangiens (munie de la topologie de la grassmannienne des n-plans de E_n). On note à partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce texte $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

Proposition 6. *Si $\varepsilon = 0$, alors Λ_n s'identifie naturellement à :*
- $\mathrm{O}_{2n}/(\mathrm{O}_n \times \mathrm{O}_n)$ *si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- $\mathrm{U}_{2n}/(\mathrm{U}_n \times \mathrm{U}_n)$ *si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
- $\mathrm{Sp}_{2n}/(\mathrm{Sp}_n \times \mathrm{Sp}_n)$ *si* $\mathbb{K} = \mathbb{H}$

Démonstration. On munit E_n de la forme standard μ (produit scalaire ou hermitien canonique). L'espace des isométries de E_n agit alors transitivement sur les n-plans, qui sont exactement les Lagrangiens. Le stabilisateur d'un n-plan, par exemple de $\mathbb{K}^n$, s'identifie naturellement au groupe produit des isométries de $\mathbb{K}^n$ et de son orthogonal $\mathbb{K}^{n*}$, ce qui conclut. $\square$

On considère désormais toujours μ cette forme canonique sur E_n. En identifiant naturellement E_n à $\mathbb{K}^{2n}$, elle s'écrit $\mu(X,Y) = \overline{X}^T Y = X^* Y$. On suppose aussi $\varepsilon = \pm 1$.

On note $\widehat{t} = \underline{\overline{t}}$. On remarque que $t \mapsto \underline{t}$ et $t \mapsto \overline{t}$ commutent (dans tous les cas que nous étudions).

Définition 9. Soit J un endomorphisme de $\mathbb{K}^{2n}$. On lui associe la forme linéaire à droite $\omega_J(x,y) = \mu(\widehat{Jx}, y)$.

Proposition 7. *ω_J définit un module ε-symétrique dès lors que J inversible, $J^* = \varepsilon J, \widehat{J} = J$ et ω_J est nulle sur un sous-espace de dimension n de $\mathbb{K}^{2n}$.*

Démonstration. Supposons ces conditions vérifiées. ω_J est alors linéaire à droite. De plus, $\omega_J(x,y) = \mu(\widehat{Jx}, y) = \widehat{Jx}^* y = \underline{(Jx)}^T y = \underline{x}^T \underline{J}^T y = \underline{y^T Jx} = \varepsilon \underline{\underline{y}^T J^* x} = \varepsilon \underline{\widehat{y}^* \widehat{J}^* x} = \varepsilon \underline{\mu(\widehat{Jy}, x)} = \varepsilon \underline{\omega_J(y,x)}$, donc ω_J est ε-symétrique. Et si on a $\omega_J(x,\cdot) = 0$, alors $\widehat{(Jx)}^* = 0$ donc $Jx = 0$, donc $x = 0$. Enfin, si on note L un sous-espace de dimension n sur lequel ω_J est nulle, on a clairement $L \subseteq L^\omega$. De plus, si $x \in L^\omega$, alors $\omega_J(x,\cdot)_{|L} = 0$. Par conséquent, l'application $x \in L^\omega \to \omega_J(\underline{x},\cdot)_{|L^\mu} \in L^{\mu *}$ est injective comme composée d'applications injectives. Elle est de plus linéaire. Donc $\dim L^\omega \leq n = \dim L$, donc L est un Lagrangien comme souhaité. $\square$

On suppose désormais que les hypothèses de la proposition précédente sont satisfaites.

On remarque ensuite que, si $g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{K})$ préserve μ, alors g préserve ω_J si et seulement si $Jg = \widehat{g}J$. En effet :

$$
\begin{array}{lll}
g \text{ préserve } \omega_J & \iff & \forall x,y \in \mathbb{K}^{2n}, \omega_J(gx,gy) = \omega_J(x,y) \\
 & \iff & \forall x,y \in \mathbb{K}^{2n}, \mu(\widehat{Jgx}, gy) = \mu(\widehat{Jx}, y) \\
 & \iff & \forall x,y \in \mathbb{K}^{2n}, \mu(g^{-1}\widehat{Jgx}, y) = \mu(\widehat{Jx}, y) \\
 & \iff & \forall x \in \mathbb{K}^{2n}, g^{-1}\widehat{Jgx} = \widehat{Jx} \\
 & \iff & \forall x \in \mathbb{K}^{2n}, g^{-1}\widehat{J}\widehat{g}\widehat{x} = \widehat{J}\widehat{x} \\
 & \iff & Jg = \widehat{g}J
\end{array}
$$

Ceci est encore équivalent à $gJ = J\widehat{g}$, puisque $\widehat{J} = J$ par hypothèse.

Notons donc $G = \{g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{K}) \mid g \text{ préserve } \mu \text{ et } \omega_J\}$. G agit naturellement sur Λ_n.

Proposition 8. *On suppose J^2 central dans $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{K})$. L'action de G sur Λ_n est transitive.*

Démonstration. Soient $L, L' \in \Lambda_n$. On en fixe des bases e, e' unitaires pour μ. Il existe alors une application $g : L \to L'$ qui envoie e sur e'. On remarque que $\widehat{JL} = L^\mu, \widehat{JL'} = L'^\mu$ (où F^μ désigne l'orthogonal de F au sens de μ). En effet, si $x, y \in L$, on a $0 = \omega_J(x,y) = \mu(\widehat{Jx}, y)$ donc $\widehat{Jx} \in L^\mu$. Mais $\widehat{Jx} = \widehat{J}\widehat{x} = J\widehat{x}$, or $\{\widehat{x} \mid x \in L\}$ est un sous-espace de même dimension que L, et on déduit alors l'égalité de l'inversibilité de J. On peut donc étendre g en une application $\mathbb{K}^{2n} \to \mathbb{K}^{2n}$ en posant $gJx = J\widehat{g}x$ pour $x \in L$. On a alors, pour $x, y \in L$:

$$Jg(x+Jy) = Jgx + JgJy = \widehat{g}Jx + J^2\widehat{g}y = \widehat{g}Jx + \widehat{g}J^2y = \widehat{g}(J(x+Jy))$$

grâce à l'hypothèse J^2 central. Donc $Jg = \widehat{g}J$.

On a ensuite, pour $x, x', y, y' \in L$:

$$\begin{aligned}
\mu(g(x+Jy), g(x'+Jy')) &= \mu(gx, gx') + \mu(J\widehat{g}y, J\widehat{g}y') \\
&= \mu(x,x') + \mu(\widehat{g}y, J^*\widehat{g}Jy') \\
&= \mu(x,x') + \mu(\widehat{g}y, \widehat{g}J^*Jy') \\
&= \mu(x,x') + \mu(\widehat{g\widehat{y}, g\widehat{J^*Jy'}}) \\
&= \mu(x,x') + \mu(\widehat{\widehat{y}, \widehat{J^*Jy'}}) \\
&= \mu(x,x') + \mu(y, J^*Jy') \\
&= \mu(x,x') + \mu(Jy, Jy') \\
&= \mu(x+Jy, x'+Jy')
\end{aligned}$$

Donc g est une μ-isométrie telle que $Jg = \widehat{g}J$, donc $g \in G$, et par définition $gL = L'$. □

On a donc montré :

Proposition 9. *Soit $\varepsilon = \pm 1$, et soit μ la forme canonique sur $\mathbb{K}^{2n}$. On note $\widehat{t} = \underline{t}$. Soit $J \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{K})$ telle que $J^* = \varepsilon J, J^2 = \pm \mathrm{Id}$ et $\widehat{J} = J$. On suppose que ω_J est nulle sur un sous-espace L de dimension n. On pose G le groupe des μ-isométries g de $\mathbb{K}^{2n}$ telles que $gJ = J\widehat{g}$, agissant naturellement sur Λ_n, et H le stabilisateur de L sous cette action. Alors $\Lambda_n \simeq G/H$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que G est un groupe de Lie, en tant que sous-groupe fermé du groupe des μ-isométries. □

On va désormais appliquer ce résultat pour calculer les bases des différents espaces qui nous serviront à démontrer le théorème de périodicité de Bott. On conserve ces notations dans la suite.

5.2 Calcul des fibres

Dans cette section, on se propose de calculer le type d'homotopie de Λ''_n la grassmannienne des Lagrangiens transverses aux deux Lagrangiens de base de E_n. On rappelle que Λ''_n est paramétré par les applications $u : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ qui sont $-\varepsilon$-symétriques et inversibles (à cause de la condition de transversalité aux deux Lagrangiens). On note $\sim$ l'équivalence d'homotopie. En fait, on cherchera plutôt à calculer le type d'homotopie de Λ''_∞.

5.2.1 Cas $\varepsilon = 0$

On le fait dans le cas réel pour fixer les notations.

On a donc $\Lambda''_n \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \simeq \{$ bases de $\mathbb{K}^n\} \sim \{$ bases orthonormées de $\mathbb{K}^n\}$ par Gram-Schmidt $\simeq \mathrm{O}_n$.

On trouve donc $\Lambda''_n \sim \mathrm{O}_n$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathrm{U}_n$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et Sp_n si $\mathbb{K} = \mathbb{H}$.

5.2.2 Cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}, \varepsilon=-1$

Ici on a

$$\begin{aligned} \Lambda_n'' &\simeq \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid g^T = g\} \\ &= \bigsqcup_{k=0}^{n} \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid g \text{ symétrique a } k \text{ valeurs propres positives, avec multiplicité}\} \end{aligned}$$

On peut alors se ramener par une rétraction par déformation forte (par exemple en posant $H_t(g) = g(g^2)^{-t/2}$) à :

$$\Lambda_n'' \sim \bigsqcup_{k=0}^{n} \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid g \text{ symétrique a } k \text{ valeurs propres égales à } 1 \text{ et } n-k \text{ égales à } -1\}$$

Et donc choisir g dans l'ensemble de droite à k fixé est équivalent à choisir un sous-espace de dimension k et à le prendre comme sous-espace propre associé à 1. Autrement dit, chacun des ensembles apparaissant à droite est homéomorphe à la grassmannienne $\mathcal{G}(k,n)$ des k-plans en dimension n. Or O_n agit sur $\mathcal{G}(k,n)$ transitivement, avec pour stabilisateur de $\mathbb{R}^k \times 0$ le sous-groupe $\mathrm{O}_k \times \mathrm{O}_{n-k}$. Finalement, $\Lambda_n'' \sim \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathrm{O}_n/(\mathrm{O}_k \times \mathrm{O}_{n-k})$.

Ici les composantes connexes ne sont pas toutes homéomorphes ; afin de justifier le passage à la limite, on étudie donc la façon dont ι_l les envoie les unes dans les autres. Soit $0 \leq k \leq n$. On suppose que $n = 2pl$ et qu'on est en train d'étudier la fibre de $\rho'_{p,n}$. Un élément de la fibre au-dessus de $\mathbb{K}^p$ avec k valeurs propres positives est $f = 0, h = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$, où les notations sont celles de la fin de la preuve du théorème 2. Un calcul facile à partir de la formule explicite donnée dans la construction de ι montre que $\iota_l(f,h)$ est associé à un couple $(\tilde{f},\tilde{h})$ avec $\tilde{h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_p \\ 0 & h & 0 \\ I_p & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dont on voit aisément qu'il est de signature $(k+p,(n-k)+p)$. Ainsi ι_l envoie $\mathrm{O}_n/(\mathrm{O}_k \times \mathrm{O}_{n-k})$ dans $\mathrm{O}_{n+2p}/(\mathrm{O}_{k+p} \times \mathrm{O}_{n-k+p})$ (en effet, l'ensemble des matrices symétriques de même signature est connexe). Tous les indices tendent vers l'infini et donc l'espace a pour limite $\mathrm{O}/(\mathrm{O} \times \mathrm{O})$. Donc $\rho'^{-1}_{p,\infty}(\mathbb{K}^n) = \mathbb{Z} \times \mathrm{O}/(\mathrm{O} \times \mathrm{O})$.

5.2.3 Cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}, \varepsilon=1$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{H}, \varepsilon=-1$ avec $\underline{t}=\overline{t}$

Les matrices $-\varepsilon$-symétriques sont ici les matrice hermitiennes (à un facteur i près dans le cas complexe). Puisque les matrices hermitiennes se réduisent de la même façon que les matrices symétriques réelles, que ce soit sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{H}$, on peut appliquer exactement le même raisonnement que dans le cas précédent pour trouver $\Lambda_n'' \sim \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathrm{U}_n/(\mathrm{U}_k \times \mathrm{U}_{n-k})$ dans le cas complexe et $\Lambda_n'' = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathrm{Sp}_n/(\mathrm{Sp}_k \times \mathrm{Sp}_{n-k})$ dans le cas quaternionique.

Et donc, de même, $\Lambda_\infty'' = \mathbb{Z} \times \mathrm{U}/(\mathrm{U} \times \mathrm{U})$ dans le cas complexe et $\Lambda_\infty'' = \mathbb{Z} \times \mathrm{Sp}/(\mathrm{Sp} \times \mathrm{Sp})$ dans le cas quaternionique.

5.2.4 Cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}, \varepsilon=1$

On suppose dans cette partie n pair, et on écrit $n = 2m$. On cherche à déterminer le type d'homotopie de l'ensemble des matrices antisymétriques inversibles réelles. Le carré d'une telle matrice est symétrique défini négatif, et donc en posant $H_t(g) = g(-g^2)^{t/2}$, on obtient une rétraction par déformation forte de Λ_n'' sur les matrices antisymétriques de carré $-\mathrm{Id}$ ($(-g^2)^{t/2}$ commute avec g car elle est dans $\mathbb{R}[g]$). Or la réduction des matrices antisymétriques assure que O_n agit transitivement par conjugaison sur ces matrices. De plus, le stabilisateur de $\begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$ est U_m, comme on l'a vu précédemment. Donc $\Lambda''_m \sim \mathrm{O}_{2m} / \mathrm{U}_m$

5.2.5 Cas $\mathbb{K} = \mathbb{H}, \varepsilon = 1$

Ici, Λ''_n est l'ensemble des matrices antihermitiennes inversibles. Or une matrice antihermitienne se diagonalise sous la forme $P \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $a_i \in \mathbb{H}_0$ quaternions purs, $P \in \mathrm{Sp}_n$.

On remarque ensuite que, pour $x \in \mathbb{H}_0$, il existe $u \in \mathrm{Sp}_1$ tel que $uxu^{-1} = i|x|$ (puisque l'action de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sur la sphère est transitive, et que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est précisément l'image de Sp_1 par le morphisme $u \mapsto (x \mapsto uxu^{-1})$). Ainsi, on peut en fait diagonaliser toute matrice antihermitienne sous la forme $Pi \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $a_i \in \mathbb{R}_+^*, P \in \mathrm{Sp}_n$. Autrement dit, on peut écrire $\mathbb{H}^n$ comme somme directe de sous-espaces propres de la matrice associés à des valeurs propres dans $i\mathbb{R}_+^*$. Cette décomposition est de surcroît canonique (les modules des valeurs propres sont bien définis). Ainsi, on peut effectuer une rétraction par déformation forte de Λ''_n sur l'ensemble des matrices de la forme $PiP^{-1}, P \in \mathrm{Sp}_n$. De plus, le stabilisateur de $i\,\mathrm{Id}$ sous l'action de Sp_n est U_n comme nous l'avons vu précédemment, et donc $\Lambda''_n \sim \mathrm{Sp}_n / \mathrm{U}_n$.

5.2.6 Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \varepsilon = -1, \underline{t} = t$

Ici, Λ''_n est l'ensemble des matrices symétriques complexes inversibles.

On commence par montrer le lemme de réduction suivant :

Lemme 2. *Toute matrice $S \in \Lambda''_n$ s'écrit $S = P^T P, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Soit $q(X) = X^T S X$ la forme quadratique associée à S, $b(X,Y) = X^T S Y$ la forme bilinéaire symétrique associée à M. Montrons tout d'abord qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs deux à deux orthogonaux (et ce pour toute forme quadratique sur un k-espace vectoriel de dimension finie). On raisonne par récurrence sur n.

— Si $n = 0$ ou 1, c'est trivial.

— Supposons le résultat vrai en dimension n. Soit v un vecteur tel que $q(v) \neq 0$ (s'il n'existe pas, on a $q = 0$ et donc toute base convient). Soit par hypothèse de récurrence une base orthogonale du noyau de $b(v, \cdot)$, supplémentaire de kv car $b(v,v) = q(v) \neq 0$. Alors la complétion de cette base par v fournit la base désirée.

Dans un langage plus matriciel, il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $q(P^{-1}X) = \sum_{i=0}^n a_i X_i^2$ pour tout $X \in \mathbb{C}^n$. Puisque chaque a_i peut s'écrire b_i^2, on a en fait, quitte à changer P et en utilisant le caractère inversible de S : $q(P^{-1}X) = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Donc $X^T (P^{-1})^T S P^{-1} X = X^T X$, donc $(P^{-1})^T S P^{-1} = \mathrm{Id}$, donc $S = P^T P$. □

On en déduit que l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur Λ''_n donnée par $P.S = P^T S P$ est transitive (cette matrice est bien dans Λ''_n). De plus, le stabilisateur de I_n sous cette action est $\{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid P^T P = I_n\} = \mathrm{O}_n(\mathbb{C})$.

La décomposition polaire assure que, si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors il existe un unique couple (U, P) avec $U \in \mathrm{U}_n$ et P hermitienne définie positive tel que $M = UP$. En fait, toute telle matrice P s'écrit elle-même de façon unique $P = \exp(Q)$ avec Q hermitienne. On a donc un difféomorphisme $(U,Q) \in U_n \times \mathrm{Herm}_n(\mathbb{C}) \to M = U\exp(Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

On définit une rétraction de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur U_n en posant, pour $M = U\exp(Q)$, $M_t = U\exp((1-t)Q)$. Montrons que cette rétraction est compatible à l'action, ie que si $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{C})$, alors $M_t \in \mathrm{O}_n(\mathbb{C})$. On écrit $M = U\exp(Q)$ comme précédemment, et $P = \exp(Q)$. On a alors $M = (M^T)^{-1} = (P^TU^T)^{-1} = (U^T)^{-1}(P^T)^{-1}$. Or $(U^T)^{-1}$ est unitaire et $(P^T)^{-1}$ est hermitienne définie positive. Donc, par unicité de la décomposition polaire, on a $U = (U^T)^{-1}$ et $P = (P^T)^{-1}$, ie $\exp(Q) = \exp(-Q^T)$, et donc $Q = -Q^T$. Enfin : $M_t^TM_t = \exp((1-t)Q^T)U^TU\exp((1-t)Q) = \exp(-tQ^T)M^TM\exp(-tQ) = \exp(tQ)I_n\exp(-tQ) = I_n$ comme voulu.

Donc la rétraction de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur U_n est compatible à l'action et induit une équivalence d'homotopie entre Λ''_n et $\mathrm{U}_n/(\mathrm{U}_n \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{U}_n/\mathrm{O}_n$.

5.2.7 Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \varepsilon = 1, \underline{t} = t$

On utilise ici le fait que $n = 2pl$ est pair et on étudie donc Λ''_n avec $n = 2m$. Λ''_n est ici l'ensemble des matrices antisymétriques complexes inversibles.

On commence aussi par montrer le lemme suivant :

Lemme 3. *Toute matrice $M \in \Lambda''_{2n}$ peut s'écrire $M = P^TJP$ avec $P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ et J la forme symplectique standard $J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$.*

Démonstration. Soit $b(X,Y) = X^TMY$ la forme bilinéaire antisymétrique associée à M.

Par les Propositions 4 et 2, il existe un isomorphisme $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^{m*} = \mathbb{C}^n$ tel que pour tous $x,y \in \mathbb{C}^n, b(u(x),u(y)) = \omega_\varepsilon(x,y) = x^TJy$. Ainsi, si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est la matrice associée à u, alors $P^TMP = J$, donc $M = (P^{-1})^TJP^{-1}$. □

Ainsi, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ agit transitivement sur Λ''_n par $P \cdot M = P^TMP$. Le stabilisateur de J est le groupe symplectique sur $\mathbb{C}$, c'est à dire l'ensemble des matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $P^TJP = J$. On notera $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$ ce groupe. On remarque que $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C}) \cap U_n = \mathrm{Sp}_n$ d'après des calculs effectués dans la partie sur les bases. On a donc $\Lambda''_n \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$. Montrons que l'on peut rétracter par déformation cet espace sur $\mathrm{U}_n/\mathrm{Sp}_n$.

On reprend le difféomorphisme $(U,Q) \in U_n \times \mathrm{Herm}_n(\mathbb{C}) \to M = U\exp(Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, ainsi que la rétraction de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur U_n définie par, si $M = U\exp(Q), M_t = U\exp((1-t)Q)$. Montrons que cette rétraction est compatible à l'action, c'est à dire que si $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$, alors $M_t \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$. Si $M = UP = U\exp(Q) \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$,

$$M = J^{-1}(M^T)^{-1}J = J^{-1}(U^T)^{-1}(P^T)^{-1}J = [J^{-1}(U^T)^{-1}J][J^{-1}(P^T)^{-1}J]$$

Or $J^{-1}(U^T)^{-1}J \in U_n$ et $J^{-1}(P^T)^{-1}J$ est hermitienne définie positive donc par unicité de la décomposition polaire $U = J^{-1}(U^T)^{-1}J$ et $J^{-1}(P^T)^{-1}J = P$, c'est-à-dire $U \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$ et $\exp(Q) = J^{-1}\exp(-Q^T)J = \exp(-J^{-1}Q^TJ)$ donc $Q = -J^{-1}Q^TJ$ car $-J^{-1}Q^TJ$ est hermitienne. Donc pour tout $t \in [0,1]$,

$$J^{-1}M_t^TJ = J^{-1}(U\exp(tQ))^TJ = J^{-1}\exp(tQ^T)U^TJ = \exp(tJ^{-1}Q^TJ)J^{-1}U^TJ = \exp(-tQ)U^{-1} = M_t^{-1}.$$

Donc on a bien $M_t \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$.

Donc la rétraction est bien définie sur Λ''_n, donc $\Lambda''_n \sim \mathrm{U}_n/(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C}) \cap U_n) = \mathrm{U}_n/\mathrm{Sp}_n$.

6 Stratification

On veut maintenant, comme annoncé, minorer le degré de connexité de l'espace total de la fibration de Serre.

Dans tout ce paragraphe, on a noté $m = n + k$.

Définition 10. Un espace stratifié est un espace topologique $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ où X_i est muni d'un structure de variété et pour tout $1 \leq i \leq n$, $\overline{X_i} = \bigcup_{j \leq i} X_j$.

Lemme 4. *Soit E un espace affine de dimension n, et $X \subset E$ un espace stratifié par des variétés $X_1, \cdots, X_m$ de dimension $\leq d$. Alors $E - X$ est $(n-d-2)$-connexe.*

Démonstration. Soit $k \leq n-d-2$ et $f : \mathbb{S}^k \to E - X \subseteq E$. Comme E est contractile, on a $g : \mathbb{D}^{k+1} \to E$ continue prolongeant f. Quitte à convoler, on peut trouver $g' : \mathbb{D}^{k+1} \to E$ $\mathcal{C}^\infty$ aussi proche de g que l'on veut. Par le théorème de transversalité de Thom (Théorème 6), on peut perturber légèrement g' en g'' de telle sorte à ce qu'elle soit transverse à X_i pour tout i. Comme $k+1+\dim X_i < n$ par hypothèse, cela implique que g' ne rencontre pas X.

Soient f' et f'' les restrictions de g' et g'' à $\mathbb{S}^k$. Comme $X = \overline{X_m}$ est fermé dans E, on peut supposer que f', puis f'' sont à valeurs dans $E - X$ ouvert de E. Comme on peut prendre $||f - f'||_\infty$ et $||f' - f''||_\infty$ aussi petits que l'on veut, on peut les choisir de telle sorte à ce que l'homotopie qui envoie f sur f' puis sur f'' à vitesse constante soit à image dans $E - X$. Comme f'' est triviale dans $\pi_k(E - X)$, f aussi. $\square$

Lemme 5. *Soient $0 \leq p \leq m = n+k$. Alors l'espace $\mathrm{Sym}^p_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^m)$ des applications de corang p forme une sous-variété de $\mathrm{Sym}_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^m)$ de codimension (réelle) égale à la dimension (réelle) de $\mathrm{Sym}_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^p)$.*

Démonstration. Soit $u_0 \in \mathrm{Sym}^p_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^m)$. Soit e une base de $\mathbb{K}^m$ dont les p premiers vecteurs forment une base de $\ker u_0$. Si $\varepsilon = \pm 1$, soit f la base duale de e, qui est donc une base de $\mathbb{K}^{m*}$. Si $\varepsilon = 0$, soit f une base de $\mathbb{K}^m$ tel que pour tout $l > p$, $f_l = u_0(e_l)$. Dans les deux cas, la matrice de u_0 dans les bases (e, f) est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}$$

où d_0 est inversible. En effet, les p premières colonnes sont nécessairement nulles. C'est ensuite clair si $\varepsilon = 0$, et on a même $d_0 = I_{n-p}$. Si $\varepsilon = \pm 1$, la matrice est $-\varepsilon$-symétrique par choix des bases, donc on a bien des zéros en haut à doite.

Soit alors $u \in \mathrm{Sym}_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^m)$ dans un voisinage U assez petit de u_0. Dans la base (e, f) u s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et on choisit U tel que d soit inversible. Donc $\mathrm{rg}\, u \geq m - p$. De plus

$$\begin{aligned} x, y \in \ker u &\iff \begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} ax+by=0 \\ y=-d^{-1}cx \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (a-bd^{-1}c)x=0 \\ y=-d^{-1}cx \end{cases} \end{aligned}$$

donc $\mathrm{rg}\, u = m-p \iff \mathrm{rg}\, u \leq m-p \iff \dim\ker u \geq p \iff a - bd^{-1}c = 0$. Soit alors $\varphi : u \in \mathrm{Sym}_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^m) \mapsto a - bd^{-1}c \in \mathrm{Sym}_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^p)$. C'est une submersion car on peut bouger librement la sous-matrice $a \in \mathrm{Sym}_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^p)$, et on vient de montrer que $\varphi^{-1}(\{0\}) \cap U = \mathrm{Sym}^p_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^m) \cap U$. Donc $\mathrm{Sym}^p_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^m)$ est bien une sous-variété de $\mathrm{Sym}_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^m)$, dont la codimension vaut $\dim \mathrm{Sym}_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^p)$. $\square$

On calcule immédiatement (seul le cas $p=1$ nous sera utile) :
— $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Sym}_0(\mathbb{R}^p)) = p^2$
— $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Sym}_0(\mathbb{C}^p)) = 2p^2$
— $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Sym}_0(\mathbb{H}^p)) = 4p^2$
— $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Sym}_1(\mathbb{R}^p)) = \frac{p(p+1)}{2}$
— $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Sym}_1(\mathbb{C}^p)) = p(p+1)$ avec $\underline{t} = t$
— $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Sym}_{-1}(\mathbb{R}^p)) = \frac{p(p-1)}{2}$
— $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Sym}_{-1}(\mathbb{C}^p)) = p(p-1)$ avec $\underline{t} = t$
— $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Sym}_1(\mathbb{C}^p)) = p^2$ avec $\underline{t} = \bar{t}$.
— $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Sym}_1(\mathbb{H}^p)) = p(2p-1)$ car il y a p degrés de liberté sur la diagonale et $4\frac{p(p-1)}{2}$ en dehors
— $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Sym}_{-1}(\mathbb{H}^p)) = p(2p+1)$ car il y a $3p$ degrés de liberté sur la diagonale et $4\frac{p(p-1)}{2}$ en dehors

Lemme 6. *Soient $0 \leq q \leq p \leq n+q \leq n+k = m$. Alors l'espace $\mathrm{Gr}_{p,q}(\mathbb{K}^m)$ des p-plans de $\mathbb{K}^m$ qui ont une intersection de dimension q avec $F_{n,k} = \mathbb{K}^k$ forme une sous-variété de $\mathrm{Gr}_p(\mathbb{K}^m)$ de codimension réelle $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \cdot q(q+n-p)$.*

Démonstration. Soit $P_0 \in \mathrm{Gr}_{p,q}(\mathbb{K}^m)$. Soit $Q_0 = P_0 \cap F$ qui est de dimension q, puis soit S un supplémentaire de Q_0 dans $\mathbb{K}^m$. Alors $R_0 := P_0 \cap S$ est de dimension $p-q$ et $P_0 = Q_0 \oplus R_0$. Soit $P \in \mathrm{Gr}_p(\mathbb{K}^m)$ dans un voisinage U assez petit de P_0. On montre que $P \in \mathrm{Gr}_{p,q}(\mathbb{K}^m) \iff \exists (Q,R) \in \mathrm{Gr}_q(F) \times \mathrm{Gr}_{p-q}(S), P = Q \oplus R$.

En effet, le sens réciproque est clair car si $P = Q \oplus R$, alors $Q \subset P \cap F$ donc $\dim(P \cap F) \geq q$. De plus, quitte à restreindre U, on peut supposer que $\dim(P \cap F) \leq \dim(P_0 \cap F) = q$. Montrons le sens direct. Soit $P \in U \cap \mathrm{Gr}_{p,q}(\mathbb{K}^m)$. On pose $Q = P \cap F \in \mathrm{Gr}_q(F)$ par hypothèse. Ensuite,

$$\dim(P \cap S) = \dim P + \dim S - \dim(P+S)$$

$$\geq \dim P_0 + \dim S - \dim X = \dim(P_0 \cap S)$$

$$= \dim R_0 = p - q.$$

Donc en posant $R = P \cap S$, on a $Q \oplus R \subset P$ puis on a égalité par dimension. D'où la décomposition voulue.

De plus, on remarque qu'avec cette construction, Q et R sont proches de Q_0 et R_0 si P est proche de P_0. Donc $\mathrm{Gr}_{p,q}(\mathbb{K}^m)$ est paramétré localement par $\mathrm{Gr}_q(F) \times \mathrm{Gr}_{p-q}(S)$, donc c'est bien une variété de codimension dans $\mathrm{Gr}_p(\mathbb{K}^m)$ égale sur $\mathbb{K}$ à

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Gr}_p(\mathbb{K}^m) - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Gr}_q(\mathbb{K}^k) - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Gr}_{p-q}(\mathbb{K}^{m-q}) = p(m-p) - q(k-q) - (p-q)(m-p)$$

$$= q(q-k) + q(m-p) = q(q+n-p)$$

D'où le résultat. □

Remarque. On a utilisé $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Gr}_p(\mathbb{K}^m) = p(m-p)$. En effet, un p-plan proche d'un autre p-plan fixé P est paramétré par une application $f \in \mathcal{L}(P,S)$ où S est un supplémentaire de P dans $\mathbb{K}^m$.

Lemme 7. $\ker : \mathrm{Sym}^p_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^{m*}) \to \mathrm{Gr}_p(\mathbb{K}^m), u \mapsto \ker u$ *est une submersion.*

Démonstration. On fait agir $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^m)$ sur $\mathrm{Sym}^p_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^{m*})$ par $g \cdot u = g^{-1*} u g^{-1}$, cela est bien défini car $(g^{-1*} u g^{-1})^* = g^{-1*} u^* g^{-1} = -\varepsilon g^{-1*} u g^{-1}$. On fait aussi agir $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^m)$ sur $\mathrm{Gr}_p(\mathbb{K}^m)$ naturellement, et on vérifie que ker est équivariante par rapport à ces actions. En effet, $\ker(g \cdot u) = \ker(u g^{-1}) = g \ker u$. Enfin, l'action est transitive sur $\mathrm{Gr}_p(\mathbb{K}^m)$ et $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^m)$ est un groupe de Lie donc ker est une submersion. □

Définition 11. On définit $\mathrm{Sym}^{p,q}_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^m) = \ker^{-1}(\mathrm{Gr}_{p,q}(\mathbb{K}^m))$, qui est donc une sous-variété de $\mathrm{Sym}^{p}_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^{m*})$ par les lemmes 5 et 6, de codimension réelle dans $\mathrm{Sym}^{p}_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^m)$ égale à $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}\cdot q(q+n-p)$.

On note $c_n = n\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K} + \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Sym}_{-\varepsilon}(\mathbb{K})$.

Proposition 10. *$\Lambda'_{n+k} - \Lambda'_{n,k}$ est un espace stratifié par des variétés de codimension réelle plus grande ou égale à c_n.*

Démonstration. En identifiant Λ'_{n+k} à $\mathrm{Sym}_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^m)$, $\Lambda'_{n+k} - \Lambda'_{n,k}$ est identifié aux endomorphismes dont le noyau intersecte non trivialement F, c'est à dire, en notant p leur corang et q la dimension de l'intersection avec F, à

$$\bigcup_{p=1}^{n}\bigcup_{q=1}^{p}\mathrm{Sym}^{p,q}_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^m)$$

À condition d'ordonner les couples $(-p,q)$ par ordre lexicographique, cette écriture fait de $\Lambda'_{n,k}$ un espace stratifié. Le dernier élément de la stratification, donc celui qui a la plus petite codimension, est celui avec $(p,q) = (1,1)$. Il a bien pour codimension $n\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K} + \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Sym}_{-\varepsilon}(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{Sym}_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^m)$, par les lemmes 5 et 6. □

Remarque. Dans les cas qui nous intéressent, c_n vaut

$$\begin{array}{cl}
n+1 & \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{R}, \varepsilon=0 \\
2n+2 & \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{C}, \varepsilon=0 \\
4n+4 & \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{H}, \varepsilon=0 \\
n & \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{R}, \varepsilon=1, \underline{t}=t. \\
2n+1 & \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{C}, \varepsilon=1, \underline{t}=\bar{t}. \\
4n+3 & \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{H}, \varepsilon=1, \underline{t}=\bar{t}. \\
n+1 & \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{R}, \varepsilon=-1, \underline{t}=t. \\
4n+1 & \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{H}, \varepsilon=-1, \underline{t}=\bar{t}. \\
2n & \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{C}, \varepsilon=1, \underline{t}=t. \\
2n+2 & \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{C}, \varepsilon=-1, \underline{t}=t.
\end{array}$$

Corollaire 1. *$\Lambda'_{n,k}$ est c_n-connexe.*

Démonstration. Cela découle du Lemme 4. □

7 Périodicité de Bott

On rappelle les résultats obtenus jusqu'ici.

Proposition 11. *Il existe 10 fibrations de Serre telles que :*

Base	***Fibre***	***Minoration de la connexité de l'espace total***
$\mathrm{O}_{2n}/(\mathrm{O}_n \times \mathrm{O}_n)$	O	$n+1$
$\mathrm{U}_{2n}/(\mathrm{U}_n \times \mathrm{U}_n)$	U	$2n+2$
$\mathrm{Sp}_{2n}/(\mathrm{Sp}_n \times \mathrm{Sp}_n)$	Sp	$4n+4$
‰$_n$	O/U	n
U_n	$\mathbb{Z} \times \mathrm{U}/(\mathrm{U} \times \mathrm{U})$	$2n+1$
Sp_n	Sp/U	$4n+3$
$\mathrm{U}_n/\mathrm{O}_n$	$\mathbb{Z} \times \mathrm{O}/(\mathrm{O} \times \mathrm{O})$	$n+1$
$\mathrm{U}_{2n}/\mathrm{Sp}_n$	$\mathbb{Z} \times \mathrm{Sp}/(\mathrm{Sp} \times \mathrm{Sp})$	$4n+1$
‰$_{2n}/\mathrm{U}_n$	U/Sp	$2n$
$\mathrm{Sp}_n/\mathrm{U}_n$	U/O	$2n+2$

Remarque. Les fibrations ne sont pas nécessairement surjectives dans les cas où la base est non connexe (en fait, elles ne le sont jamais car l'espace total, lui, est toujours connexe). La fibre indiquée est celle au-dessus du point de base. La non-connexité de certaines bases n'a aucune influence sur la preuve (pour les bases, seuls les π_k avec $k \geq 1$ interviennent).

On utilisera le lemme suivant :

Lemme 8. *Soient $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des espaces topologiques séparés en inclusion croissante. Si K est un compact de $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset E_n$.*

Démonstration. Si par l'absurde ce n'était pas le cas, on aurait une extractrice φ et une suite $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in E_{\varphi(n)} - E_{\varphi(n)-1}$. Alors $X = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est fermé dans E (car son intersection avec chacun des E_n est finie donc fermée) et inclus dans K compact. Donc X est compact. De plus, X est muni de la topologie discrète (par le même raisonnement que précédemment) donc il est fini, absurde. $\square$

On remarque ensuite le fait suivant :

Proposition 12. *On a une fibration localement triviale $\mathrm{O}_n \to \mathbb{S}^{n-1}$ de fibre O_{n-1}, donnée par l'action naturelle de O_n sur $\mathbb{S}^{n-1}$ au point $(1,0,\ldots,0)$. Pour $k \leq n-3$, on a un isomorphisme $\pi_k(\mathrm{O}_{n-1}) \to \pi_k(\mathrm{O}_n)$ induit par l'inclusion naturelle de O_{n-1} dans O_n.*

De même, on a des isomorphismes naturels $\pi_k(\mathrm{U}_{n-1}) \to \pi_k(\mathrm{U}_n)$ pour $k \leq 2n-3$, et $\pi_k(\mathrm{Sp}_{n-1}) \to \pi_k(\mathrm{Sp}_n)$ pour $k \leq 4n-3$.

Démonstration. O_n est un groupe de Lie, donc cette action, transitive, définit bien une fibration lorsqu'on l'évalue en un point précis. De plus, le stabilisateur de $(1,0,\ldots,0)$ est bien O_{n-1}, qui correspond donc à la fibre. On écrit alors la suite exacte longue de groupes d'homotopie associée à cette fibration :

$$0 = \pi_{k+1}(\mathbb{S}^{n-1}) \to \pi_k(\mathrm{O}_{n-1}) \to \pi_k(\mathrm{O}_n) \to \pi_k(\mathbb{S}^{n-1}) = 0$$

pour $k+1 < n-1$, ie $k \leq n-3$.

De même, on a une action naturelle de U_n sur $\mathbb{S}^{2n-1}$, transitive, de stabilisateur U_{n-1}, et une action de Sp_n sur $\mathbb{S}^{4n-1}$, elle aussi transitive et de stabilisateur Sp_{n-1}, ce qui donnc les isomorphismes désirés. $\square$

Autrement dit, les groupes d'homotopie des groupes d'isométries se stabilisent à partir d'un certain rang. En fait, par compacité de la sphère et en utilisant le lemme 8, on trouve que ces groupes d'homotopie stables sont ceux de O, U et Sp. On cherche maintenant à les calculer.

On a les isomorphismes suivants, d'après le lemme 4 :

$$\begin{array}{cc}
\pi_{k+1}(\mathrm{O}_{2n}/(\mathrm{O}_n\times\mathrm{O}_n)) = \pi_k(\mathrm{O}) & k\leq n-2\\
\pi_{k+1}(\mathrm{U}_{2n}/(\mathrm{U}_n\times\mathrm{U}_n)) = \pi_k(\mathrm{U}) & k\leq 2n-1\\
\pi_{k+1}(\mathrm{Sp}_{2n}/(\mathrm{Sp}_n\times\mathrm{Sp}_n)) = \pi_k(\mathrm{Sp}) & k\leq 4n+1\\
\pi_{k+1}(\mathrm{O}_n) = \pi_k(\mathrm{O}/\mathrm{U}) & k\leq n-3\\
\pi_{k+1}(\mathrm{U}_n) = \pi_k(\mathbb{Z}\times\mathrm{U}/(\mathrm{U}\times\mathrm{U})) & k\leq 2n-2\\
\pi_{k+1}(\mathrm{Sp}_n) = \pi_k(\mathrm{Sp}/\mathrm{U}) & k\leq 4n\\
\pi_{k+1}(\mathrm{U}_n/\mathrm{O}_n) = \pi_k(\mathbb{Z}\times\mathrm{O}/(\mathrm{O}\times\mathrm{O})) & k\leq n-2\\
\pi_{k+1}(\mathrm{U}_{2n}/\mathrm{Sp}_n) = \pi_k(\mathbb{Z}\times\mathrm{Sp}/(\mathrm{Sp}\times\mathrm{Sp})) & k\leq 4n-2\\
\pi_{k+1}(\mathrm{O}_{2n}/\mathrm{U}_n) = \pi_k(\mathrm{U}/\mathrm{Sp}) & k\leq 2n-3\\
\pi_{k+1}(\mathrm{Sp}_n/\mathrm{U}_n) = \pi_k(\mathrm{U}/\mathrm{O}) & k\leq 2n-1
\end{array}$$

En écrivant $\mathrm{O}_n = (\mathrm{O}_n\times\mathrm{O}_n)/\mathrm{O}_n$, on trouve que tous les groupes qui apparaissent ici sont du type G_n/H_n (colonne de gauche) ou G/H (colonne de droite), et que de plus, pour n suffisamment grand, les inclusions $G_n\to G_m$, $H_n\to H_m$ lorsque $n\leq m$ induisent des isomorphismes sur les π_k pour k assez petit par rapport à n. On a donc, grâce à la suite exacte associée à la fibration $G_n\to G_n/H_n$, un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_k(H_n) & \longrightarrow & \pi_k(G_n) & \longrightarrow & \pi_k(G_n/H_n) & \longrightarrow & \pi_{k-1}(H_n) & \longrightarrow & \pi_{k-1}(G_n)\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\pi_k(H_m) & \longrightarrow & \pi_k(G_m) & \longrightarrow & \pi_k(G_m/H_m) & \longrightarrow & \pi_{k-1}(H_m) & \longrightarrow & \pi_{k-1}(G_m)
\end{array}$$

où tout commute, les lignes sont exactes, et les flèches verticales sont des isomorphismes, sauf éventuellement celle du milieu. Le lemme des cinq assure alors que celle du milieu est aussi un isomorphisme, et donc il y a aussi stabilisation des groupes d'homotopies des groupes quotients apparaissant dans nos fibrations. On a donc :

$$\begin{array}{c}
\pi_{k+1}(\mathrm{O}/(\mathrm{O}\times\mathrm{O})) = \pi_k(\mathrm{O})\\
\pi_{k+1}(\mathrm{U}/(\mathrm{U}\times\mathrm{U})) = \pi_k(\mathrm{U})\\
\pi_{k+1}(\mathrm{Sp}/(\mathrm{Sp}\times\mathrm{Sp})) = \pi_k(\mathrm{Sp})\\
\pi_{k+1}(\mathrm{O}) = \pi_k(\mathrm{O}/\mathrm{U})\\
\pi_{k+1}(\mathrm{U}) = \pi_k(\mathbb{Z}\times\mathrm{U}/(\mathrm{U}\times\mathrm{U}))\\
\pi_{k+1}(\mathrm{Sp}) = \pi_k(\mathrm{Sp}/\mathrm{U})\\
\pi_{k+1}(\mathrm{U}/\mathrm{O}) = \pi_k(\mathbb{Z}\times\mathrm{O}/(\mathrm{O}\times\mathrm{O}))\\
\pi_{k+1}(\mathrm{U}/\mathrm{Sp}) = \pi_k(\mathbb{Z}\times\mathrm{Sp}/(\mathrm{Sp}\times\mathrm{Sp}))\\
\pi_{k+1}(\mathrm{O}/\mathrm{U}) = \pi_k(\mathrm{U}/\mathrm{Sp})\\
\pi_{k+1}(\mathrm{Sp}/\mathrm{U}) = \pi_k(\mathrm{U}/\mathrm{O})
\end{array}$$

On en déduit $\pi_{k+2}(\mathrm{U}) = \pi_{k+1}(\mathbb{Z}\times\mathrm{U}/(\mathrm{U}\times\mathrm{U})) = \pi_{k+1}(\mathbb{Z})\times\pi_{k+1}(\mathrm{U}/(\mathrm{U}\times\mathrm{U})) = \pi_{k+1}(\mathrm{U}/(\mathrm{U}\times\mathrm{U})) = \pi_k(U)$.

De même, $\pi_{k+4}(\mathrm{O}) = \pi_{k+3}(\mathrm{O}/\mathrm{U}) = \pi_{k+2}(\mathrm{U}/\mathrm{Sp}) = \pi_{k+1}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Sp}/(\mathrm{Sp}\times\mathrm{Sp})) = \pi_k(\mathrm{Sp})$
et $\pi_{k+4}(\mathrm{Sp}) = \pi_{k+3}(\mathrm{Sp}/\mathrm{U}) = \pi_{k+2}(\mathrm{U}/\mathrm{O}) = \pi_{k+1}(\mathbb{Z}\times\mathrm{O}/(\mathrm{O}\times\mathrm{O})) = \pi_k(\mathrm{O})$. On a démontré :

Theorème 3 (Périodicité de Bott)**.** *Pour $k\geq 0$, on a :*

$$\begin{array}{c}
\pi_{k+2}(\mathrm{U}) = \pi_k(\mathrm{U})\\
\pi_{k+4}(\mathrm{O}) = \pi_k(\mathrm{Sp})\\
\pi_{k+4}(\mathrm{Sp}) = \pi_k(\mathrm{O})
\end{array}$$

En particulier, $\pi_{k+8}(\mathrm{O}) = \pi_k(\mathrm{O})$ *et* $\pi_{k+8}(\mathrm{Sp}) = \pi_k(\mathrm{Sp})$.

8 Annexes

8.1 Calcul des bases

Comme annoncé, on va ici détailler le calcul des sept bases manquantes.

8.1.1 Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}, \varepsilon = 1, \underline{t} = \overline{t}$

Ici $\widehat{t} = t$.

On pose $J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$. J est clairement inversible, $J^* = J, J^2 = \mathrm{Id}$. ω_J possède un Lagrangien, par exemple $L = \mathrm{Vect}(e_i + e_{n+i}, 1 \leq i \leq n)$, sur lequel ω_J est clairement nulle. Pour simplifier les notations, on fait ensuite le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mais il n'y a aucune différence avec $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. On a :

$$\begin{aligned} G &= \{g \in \mathrm{O}_{2n} \mid g \text{ commute à } J\} \\ &= \left\{ g \in \mathrm{O}_{2n} \mid g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid A, B \in \mathrm{O}_n \right\} \end{aligned}$$

Et le stabilisateur de L est :

$$\begin{aligned} H &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid A, B \in \mathrm{O}_n, \forall X \in \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ Y \end{pmatrix} \text{ pour un } Y \in \mathbb{R}^n \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid A, B \in \mathrm{O}_n, \forall X \in \mathbb{R}^n, AX = BX \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{O}_n \right\} \end{aligned}$$

On a alors $G/H \simeq \mathrm{O}_n$ clairement (en tant qu'espace topologique). Donc $\Lambda_n \simeq \mathrm{O}_n$ dans le cas $\mathbb{R}$, quadratique, U_n dans le cas $\mathbb{C}$, hermitien et Sp_n dans le cas $\mathbb{H}$, hermitien.

8.1.2 Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \varepsilon = -1$

Ici $\widehat{t} = t$.

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$, qui est clairement inversible, $J^* = -J, J^2 = -\mathrm{Id}$. De plus, $L = \mathbb{R}^n \times \{0\}^n$ fournit un Lagrangien.

Pour $g = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} g \in G &\iff g \in \mathrm{O}_{2n} \text{ et } D = A, C = -B \\ &\iff g = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}, A^T A + B^T B = I_n, A^T B = B^T A \\ &\iff A + iB \in \mathrm{U}_n \end{aligned}$$

Donc $G = \mathrm{U}_n$.

D'autre part, si on suppose $g \in G$:

$$\begin{aligned} g \in H &\iff \forall X \in R^n, \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour un } Y \in R^n \\ &\iff \forall X \in R^n, BX = 0 \\ &\iff B = 0 \end{aligned}$$

Donc $H = \mathrm{O}_n \subset \mathrm{U}_n$, donc $\Lambda_n \simeq \mathrm{U}_n / \mathrm{O}_n$.

8.1.3 Cas $\mathbb{K} = \mathbb{H}, \varepsilon = -1$

Ici $\widehat{t} = t$.

On pose $J = i\,\mathrm{Id}$. J est clairement inversible, $J^* = \overline{J}^T = -J, J^2 = -\mathrm{Id}$. De plus, $L = \mathrm{Vect}(e_p + je_{n+p}, 1 \leq p \leq n)$ est un Lagrangien. En effet, si $1 \leq p, q \leq n$:

$$\mu(J(e_p + je_{n+p}), e_q + je_{n+q}) = \mu(ie_p + ke_{n+p}, e_q + je_{n+q}) = \mu(ie_p, e_q) + \mu(ke_{n+p}, je_{n+q})$$

Puis ceci est nul si $p \neq q$, et, si $p = q$, cela vaut $-i - kj = 0$. De plus, L est clairement un sous-espace vectoriel à droite de dimension n.

On remarque ensuite que, pour une matrice quaternionique, commuter à J est équivalent à ce que chacun de ses coefficients commute avec i, et donc à ce que la matrice soit en fait complexe. Ainsi, G est le groupe des isométries de $\mathbb{H}^{2n}$ qui sont complexes. Comme les isométries de $\mathbb{H}^{2n}$ sont les matrices g telles que $g^* g = \mathrm{Id}$, on trouve $G = \mathrm{U}_{2n}$.

Ensuite, si $g \in G$, qu'on écrit $g = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ avec $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\begin{aligned} g \in H &\iff \forall X \in \mathbb{H}^n, \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ jX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ jY \end{pmatrix} \text{ pour un } Y \in \mathbb{H}^n \\ &\iff \forall X \in \mathbb{H}^n, \begin{pmatrix} (A + Cj)X \\ (B + Dj)X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ jY \end{pmatrix} \text{ pour un } Y \in \mathbb{H}^n \\ &\iff \forall X \in \mathbb{H}^n, j(A + Cj)X = (B + Dj)X \\ &\iff j(A + Cj) = B + Dj \\ &\iff jA - \overline{C} = B + j\overline{D} \\ &\iff -\overline{C} = B \text{ et } \overline{D} = A \\ &\iff g = \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en utilisant le fait que, pour $z \in \mathbb{C}$, on a $jzj = -\overline{z}, zj = j\overline{z}$.

Mais alors, puisque $g \in G = \mathrm{U}_{2n}$, on a $g^* g = \mathrm{Id}$, donc on trouve que $AA^* + \overline{B}B^T = BB^* + \overline{A}A^T = I_n$ et $AB^* - \overline{B}A^T = BA^* - \overline{A}B^T = 0$. Dans la première égalité, les deux premières quantités sont conjuguées et doivent être égales à une matrice réelle, et dans la seconde, chacune est égale à l'opposé du conjugué de l'autre, et elles doivent être nulles. C'est donc équivalent à $AA^* + \overline{B}B^T = I_n, BA^* - \overline{A}B^T = 0$.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} A + jB \in \mathrm{Sp}_n &\iff (A + jB)(A + jB)^* = I_n \\ &\iff AA^* - jBB^*j + jBA^* - AB^*j = I_n \\ &\iff AA^* + \overline{BB^*} + j(BA^* - \overline{AB^*}) = I_n \\ &\iff AA^* + \overline{B}B^* = I_n, BA^* - \overline{A}B^T = 0 \end{aligned}$$

Donc, via l'identification naturelle, on trouve $H=\mathrm{Sp}_n$. On en déduit finalement que, dans ce cas, $\Lambda_n \simeq \mathrm{U}_{2n}/\mathrm{Sp}_n$.

8.1.4 Cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}, \varepsilon=1$ avec $\underline{t}=t$

Ici $\widehat{t}=\bar{t}$.

On pose $J=\mathrm{Id}$. On a bien sûr J inversible, $J^*=J, J^2$ central, $\widehat{J}=J$. De plus, $\mathrm{Vect}(e_p+ie_{n+p}, 1\leq p\leq n)$ est un Lagrangien. En effet, si $1\leq p,q\leq n$, on a :

$$\begin{aligned}\mu(J\overline{e_p+ie_{n+p}}, e_q+ie_{n+q}) &= \mu(e_p-ie_{n+p}, e_q+ie_{n+q})\\ = \mu(e_p,e_q)+\mu(-ie_{n+p}, ie_{n+q}) &= \mu(e_p,e_q)+\overline{-i}\cdot i\mu(e_{n+p},e_{n+q})=0\end{aligned}$$

Ensuite, les éléments de G sont les isométries complexes égales à leur conjugué, soit exactement les isométries réelles, donc $G=\mathrm{O}_{2n}$.

Puis le même raisonnement que dans le cas précédent montre que $H=U_n\subset \mathrm{O}_{2n}$, d'où $\Lambda_n\simeq \mathrm{O}_{2n}/U_n$.

8.1.5 Cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}, \varepsilon=-1$ avec $\underline{t}=t$

Ici encore $\widehat{t}=\bar{t}$.

On pose $J=\begin{pmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}$, qui est clairement inversible, $J^*=-J, J^2=-\mathrm{Id}$. De plus, $L=\mathbb{C}^n\times\{0\}^n$ fournit un Lagrangien.

À partir de là, un raisonnement très similaire à celui du cas symplectique réel aboutit.

Pour $g=\begin{pmatrix}A & C\\ B & D\end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned}g\in G \quad&\Longleftrightarrow\quad g\in \mathrm{U}_{2n}\ \text{ et } D=\overline{A}, C=-\overline{B}\\ &\Longleftrightarrow\quad g=\begin{pmatrix}A & -\overline{B}\\ B & \overline{A}\end{pmatrix}, AA^*+\overline{B}B^T=I_n, AB^*=\overline{B}A^T\\ &\Longleftrightarrow\quad A+jB\in\mathrm{Sp}_n\end{aligned}$$

Donc $G=\mathrm{Sp}_n$.

D'autre part, si on suppose $g\in G$:

$$\begin{aligned}g\in H \quad&\Longleftrightarrow\quad \forall X\in R^n, \begin{pmatrix}A & -\overline{B}\\ B & \overline{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Y\\ 0\end{pmatrix} \text{ pour un } Y\in R^n\\ &\Longleftrightarrow\quad \forall X\in R^n, BX=0\\ &\Longleftrightarrow\quad B=0\end{aligned}$$

Donc $H=\mathrm{U}_n\subset\mathrm{Sp}_n$, donc $\Lambda_n\simeq \mathrm{Sp}_n/\mathrm{U}_n$.

8.2 Fibration de Serre

On se propose ici de démontrer quelques propriétés élémentaires des fibrations de Serre.

Définition 12. Une *fibration de Serre* $p: X\to E$ d'espace total X et de base E est une application vérifiant la propriété de relèvement des homotopies pour les disques : si $H_t: B^d\to E$ est une homotopie et $H_0': B^d\to X$ en est un relèvement à l'instant initial, alors il existe $H_t': B^d\to X$ relèvement de H_t coïncidant en 0 avec le relèvement donné.

Si un point de base $x_0\in X$ est donné, et qu'on note $e_0=p(x_0)$, la fibre au-dessus de e_0 est $F_0=p^{-1}(e_0)$.

En fait, comme $(I \times B^d, \{0\} \times B^d) \simeq (I \times B^d, \{0\} \times B^d \cup I \times \partial B^d)$, la propriété précédente entraîne le relèvement des homotopies relativement au bord du disque, puis même pour toute paire (X,A) où X est un CW-complexe et A un sous-complexe. On pose $J^{n-1} = \{0\} \times I^d \cup I \times \partial I^d)$ pour abréger, et on a alors la propriété de relèvement des homotopies pour la paire (I^n, J^{n-1}).

Définition 13. Pour $n \geq 1$, étant donnés $x_0 \in A \subset X$, on définit le n-ième groupe d'homotopie relatif $\pi_n(X,A,x_0)$ comme étant l'ensemble des applications $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X,A,x_0)$ à homotopie près (parmi les applications de ce type). Pour $n \geq 2$, on le munit d'une structure de groupe en posant $f \cdot g(s,t,x) = f(2s,t,x)$ si $s \leq \frac{1}{2}$ et $[f]\cdot[g](s,t,x) = g(2s-1,t,x)$ sinon, avec $s,t \in I, x \in I^{n-2}$. Cette loi passe au quotient et définit une loi de groupe, abélien si $n \geq 3$, ce de façon analogue au cas des groupes d'homotopie non relatifs.

Proposition 13. *On a une suite exacte longue*

$$\cdots \to \pi_n(A,x_0) \to \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(X,A,x_0) \to \pi_{n-1}(A,x_0) \to \cdots$$

induite par $\iota : (A,x_0) \to (X,x_0), p : (X,x_0,x_0) \to (X,A,x_0)$ *et des applications connectantes* ∂ *construites dans la preuve.*

Démonstration. On commence par construire ∂. Pour cela, si $[f] \in \pi_n(X,A,x_0)$, on pose $\partial[f]$ la restriction de f à $\{1\} \times I^{n-1}$, à homotopie près. Cette application est bien définie car si f et g homotopes dans (X,A,x_0), alors la restriction de l'homotopie à $\{1\} \times I^{n-1}$ fournit une homotopie entre ∂f et ∂g dans (A,x_0).

- Exactitude en $\pi_n(A,x_0)$: soit pour commencer $[f] \in \pi_{n+1}(X,A,x_0)$. On a alors $\iota_*\partial[f] = 0$ car ∂f est homotope dans (X,x_0) à l'application constante égale à x_0, via f.
  D'autre part, si $[f] \in \pi_n(A,x_0)$ est nulle dans $\pi_n(X,x_0)$, alors avec H homotopie de l'application constante égale à x_0 vers f, on a $[h] \in \pi_{n+1}(X,A,x_0)$ et $\partial[H] = [f]$.
- Exactitude en $\pi_n(X,x_0)$: soit d'abord $[f] \in \pi_n(A,x_0)$. Il est clair que $[f]$ est nulle dans $\pi_n(X,A,x_0)$, puisqu'on peut alors prendre des valeurs dans A sur l'un des bords de I^n.
  Puis soit $[f] \in \pi_n(X,x_0)$ nulle dans $\pi_n(X,A,x_0)$. On fixe H homotopie dans (X,A,x_0) de l'application constante égale à x_0 jusqu'à f. f est alors homotope dans (X,x_0) à H_1, puisque H envoie J^{n-1} sur x_0. Mais H_1 est à valeurs dans A. D'où le résultat.
- Exactitude en $\pi_n(X,A,x_0)$: soit $[f] \in \pi_n(X,x_0)$. Comme f vaut x_0 sur $\{1\} \times I^{n-1}$, il est évident que $\partial p_*[f] = 0$.
  Ensuite, soit $[f] \in \pi_n(X,A,x_0)$ telle que $\partial[f] = 0$. On a alors $f_{|\{1\}\times I^{n-1}}$ homotope dans (A,x_0) à l'application constante égale à x_0. Concaténant f et l'homotopie, on obtient une application homotope à f dans (X,A,x_0), et associée à une classe dans $\pi_n(X,x_0)$.

□

Theorème 4. *Soit* $p : (X,x_0) \to (E,e_0)$ *une fibration de Serre de fibre au point-base* (F,x_0)*. L'application* $p_* : \pi_n(X,F,x_0) \to \pi_n(E,e_0)$ *est alors un isomorphisme. On a en particulier une suite exacte longue :*

$$\cdots \to \pi_n(F,x_0) \to \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(E,e_0) \to \pi_{n-1}(F,x_0) \to \cdots$$

induite par $\iota : (F,x_0) \hookrightarrow (X,x_0)$, p *et des applications connectantes* ∂.

Démonstration. On commence par vérifier la surjectivité de p_*. Pour cela, soit $[f] \in \pi_n(E,e_0)$, avec $f : (I^n, \partial I^n) \to (E,e_0)$. On peut relever f en imposant que le relèvement soit constant égal à x_0 sur J^{n-1}. Notons g le relèvement obtenu. On a alors $g : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X,F,x_0)$, et $p \circ g = f$ comme désiré.

Pour ce qui est de l'injectivité, soient $g_0, g_1 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, F, x_0)$ telles que $p_*[g_0] = p_*[g_1]$. Posons $f_0 = p \circ g_0, f_1 = p \circ g_1$. On a donc une homotopie $H_t : (I^n, \partial I^n) \to (E, e_0)$ avec $H_0 = f_0, H_1 = f_1$. On dispose également d'un relèvement partiel de H, égal à g_0 à $t = 0$, à g_1 à $t = 1$ et à x_0 sur $J^{n-1} \times I$. La propriété de relèvement des homotopies permet alors d'obtenir un relèvement complet de H, noté H'. H' fournit alors une homotopie dans (X, F, x_0) de g_0 à g_1, et donc $[g_0] = [g_1]$. □

Définition 14. Soit $p : X \to E$ une fibration de Serre et soit $f : F \to E$ continue. On pose $f^*(X) = \{(x, y) \in X \times F \mid p(x) = f(y)\}$ et $p^* : (x, y) \in f^*(X) \mapsto y \in F$ le *tiré-en-arrière* de p par f. p^* est une fibration de Serre. De plus, si $y \in F$, la fibre de $p*$ au-dessus de y et celle de p au-dessus de $f(y)$ sont homéomorphes.

Démonstration. Soit $H_t : B^d \to F$ et soit $H'_0 : B^d \to f^*(X)$ relèvement de H_0. On pose alors $G_t = f \circ H_t : B^d \to E$ et $G'_0 = p_1 \circ H'_0 : B^d \to X$. On a alors $p \circ G'_0 = G_0$. Puisque p est une fibration de Serre, on peut relever G_t en G'_t. On pose alors $H'_t(x) = (G'_t(x), H_t(x))$ qui convient.

L'homéomorphisme demandé est ensuite simplement $(x, y) \in p^{*-1}(y) \mapsto y \in p^{-1}(f(y))$. □

Définition 15. Une *équivalence d'homotopie faible* entre deux espaces X et Y est $f : X \to Y$ induisant des isomorphismes $f_* : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ pour tout $n \geq 0$, et ce sur chaque composante connexe par arcs de X.

On dit que deux espaces X et Y sont faiblement (homotopiquement) équivalents s'il existe des espaces $X = X_0, X_1, \dots, X_n = Y$ et, pour $1 \leq i \leq n$, des équivalences d'homotopie faibles $f_i : X_{i-1} \to X_i$ ou $f_i : X_i \to X_{i-1}$. Autrement dit, il s'agit de la relation d'équivalence engendrée par l'existence d'une équivalence d'homotopie faible entre deux espaces.

L'isomorphisme des π_0 assure en particulier qu'une équivalence d'homotopie faible induit une bijection entre les ensembles des composantes connexes par arcs.

Si deux espaces sont faiblement équivalents, on dispose alors d'une bijection entre leurs composantes connexes de sorte que les π_n des composantes connexes ainsi reliées soient isomorphes.

Theorème 5. *Soit $p : X \to E$ une fibration de Serre de base connexe par arcs. Alors toutes les fibres de p sont faiblement homotopiquement équivalentes.*

Démonstration. Soient $e_0, e_1 \in E$. Soit $\gamma : I \to E$ chemin de e_0 à e_1. On considère le tiré-en-arrière de p selon γ, noté $q : \gamma^*(X) \to I$.

Désormais, on s'est ramené au cas où la base est contractile (si on montre le résultat dans ce cas, on l'aura dans le cas général car l'opération de "tiré-en-arrière" préserve les fibres). Mais si la base est contractile, la suite exacte longue d'homotopie associée à la fibration nous dit que, si on prend $x_0 \in q^{-1}(0)$, alors l'inclusion de $q^{-1}(0)$ dans $\gamma^*(X)$ induit des isomorphismes $\pi_n(q^{-1}(0), x_0) \to \pi_n(\gamma^*(X), x_0)$, ce qui est exactement la définition d'une équivalence d'homotopie faible de $q^{-1}(0)$ dans $\gamma^*(X)$. De même, on obtient une telle équivalence d'homotopie faible de $q^{-1}(1)$ dans $\gamma^*(X)$, et ceci démontre que les fibres de q, et donc celles de p, sont faiblement équivalentes. □

8.3 Théorème de transversalité de Thom

On se propose ici de démontrer une forme faible du théorème de transversalité de Thom, permettant de relier la codimension du complémentaire d'une sous-variété au degré de connexité de l'espace total.

Étant données V et W deux variétés, on rappelle que $\mathcal{C}^\infty(V, W)$ est muni de deux topologies : la *topologie usuelle* (compact-ouvert) et la *topologie fine*. Une base de la topologie usuelle (resp. fine) est obtenue en considérant une application $f : V \to W$ lisse, ainsi que des compacts K_i en nombre fini (resp.

localement fini) tous contenus dans des ouverts de carte et d'image elle aussi contenue dans un ouvert de cartes (on fixe alors de telles cartes), des réels $\varepsilon_i > 0$ et un entier $r \in \mathbb{N}$. On pose alors $\mathcal{U}_r(f,(K_i,\varepsilon_i)_{i\in I})$ l'ensemble des $g : V \to W$ lisses telles que les dérivées partielles d'ordre au plus r de g soient ε_i-proches de celles de f sur K_i, pour tout $i \in I$.

On voit facilement que ces ouverts forment bien une base pour une topologie. Elles coïncident manifestement lorsque V est compacte. Cependant, lorsque V n'est pas compacte, la topologie usuelle contrôle mal le comportement à l'infini, et en particulier elle cesse de présenter la propriété de Baire ; c'est pourquoi on se tournera ici plutôt vers la topologie fine, puisque le théorème de Thom énonce qu'un certain ensemble est maigre.

Proposition 14. *$\mathcal{C}^\infty(V,W)$ muni de la topologie fine est un espace de Baire.*

Démonstration. Ce résultat nous entraînerait trop loin ; voir *Differential Topology*, Hirsch. □

Définition 16. Soit $f : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $S \subset W$ une sous-variété. On dit que f est transverse à S si $\forall x \in f^{-1}(S), T_xS + df(T_xV) = T_xW$.

En particulier, si $\dim V$ est strictement inférieur à la codimension de S, f est transverse à S si et seulement si elle ne rencontre pas S. Cette notion est définie de même lorsque S et V sont à bord.

Une propriété essentielle des applications transverses est leur bon comportement vis-à-vis de l'image réciproque.

Lemme 9. *Soit $f : V \to W$ lisse, $S \subset W$ sous-variété. On suppose f transverse à S. Alors $f^{-1}(S)$ est une sous-variété de V.*

Démonstration. Soit $a \in f^{-1}(S), b = f(a) \in S$ et $h : U \to \mathbb{R}^q$ une submersion sur un ouvert U contenant b qui définit S, ie telle que $S \cap U = h^{-1}(0)$.

On a alors, sur $f^{-1}(U)$ voisinage de a, que $f^{-1}(S) \cap f^{-1}(U) = (h\circ f)^{-1}(0)$. De plus, $d(h\circ f)_a = dh_b df_a$, et dh_b est nulle sur T_bS, et est surjective, donc :

$$d(h\circ f)_a(T_aV) = dh_b(df_a(T_aV)) = dh_b(df_a(T_aV) + T_bS) = dh_b(T_bW) = \mathbb{R}^q$$

Donc $h \circ f$ est une submersion près de a. Donc $f^{-1}(S)$ est une sous-variété de V. □

Lemme 10. *Soit $f : V \times Q \to W$ lisse qui est transversale à une sous-variété $S \subset W$. Alors, pour presque tout $u \in Q$, l'application $f_u : x \in V \mapsto f(x,u) \in W$ est transverse à S.*

Démonstration. Soit $q : V \times Q \to Q$ la projection et $W = f^{-1}(S)$ sous-variété de $V \times Q$. On observe que, pour $u \in Q$, il y a équivalence entre :

— f_u est transverse à S

— W est transverse à $V \times \{u\}$

— u est une valeur régulière de $q_{|W} : W \to Q$

Ensuite, le théorème de Sard conclut immédiatement.

Montrons les équivalences.

— On suppose f_u transverse à S. Soit $(x,u) \in q_{|W}^{-1}(u)$, ie $x \in V$ tel que $(x,u) \in W$, ie tel que $f(x,u) \in S$, ie tel que $f_u(x) \in S$. On a alors par hypothèse $df_x(T_xV) + T_{f_u(x)}S = (df_u)_x(T_xV) + T_{f_u(x)}S = T_{f_u(x)}W$, donc il existe $L : T_uQ \to T_xV$ telle que, pour $v \in T_xQ$, on a $df(v) - (df_uL)(v) \in T_{f_u(x)}$. Or on a $T_{(x,u)}W = df^{-1}(T_{f_u(x)}S)$. Soit alors $v \in T_uQ$. On a donc $v - Lv \in T_{(x,u)}W$, et ensuite $v = dq(v - Lv) \in dq(T_{(x,u)}W)$. Donc $dq_{(x,u)}$ surjective. Donc u valeur régulière de $q_{|W}$.

— On suppose que u est une valeur régulière de $q_{|W}$. Soit $(x,u) \in W \cap V \times \{u\}$. On a $q(x,u) = u$ donc $dq_{(x,u)}$ est surjective. Soit $v + v' \in T_{(x,u)}(V \times Q) = T_xV \oplus T_uQ$. Alors on peut écrire $v' = dq(v'' + v')$ pour un $v'' + v' \in T_{(x,u)}W$, donc on a $v + v' = (v - v'') + (v'' + v')$. Donc W transverse à $V \times \{u\}$.

— On suppose que W est transverse à $V \times \{u\}$. Soit $x \in f_u^{-1}(S), y = f(x,u)$. Soit $w \in T_yW$. On peut écrire $w = w' + df_{(x,u)}(v)$ avec $w' \in T_yS, v \in T_{(x,u)}(V \times Q)$, car f est transverse à S. Puis on peut écrire $v = v' + v''$ avec $v' \in T_xV$ et $v'' \in T_{(x,u)}W$, par transversalité de W et de $V \times \{u\}$. Alors $w = w' + df_{(x,u)}(v'') + df_x(v')$ avec $w' + df_{(x,u)}(v'') \in T_yS$. Donc f_u transverse à S.

□

Theorème 6. *Soient V, W des variétés lisses et soit $S \subset W$ sous-variété. Alors l'ensemble des applications lisses $f : V \to W$ transverses à S est générique, c'est-à-dire de complémentaire maigre, pour la topologie fine.*

Démonstration. Pour $V' \subset V$ compact, $S' \subset S$ sous-variété, on note $\mathcal{U}_{V',S'}$ l'ensemble des applications $V \to W$ dont la restriction à V' est transverse à S'. Il s'agit ici de montrer que $\mathcal{U}_{V,S}$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses.

On remarque tout d'abord que, si on se donne une famille $(V_i, S_i)_{i \in I}$ avec I dénombrable, $V_i \subset V$ compact, $S_i \subset S$ sous-variété de sorte que $\bigcup_{i \in I} V_i \times S_i = V \times S$, alors on a $\mathcal{U}_{V,S} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_{V_i,S_i}$. De plus, il est clair que les $\mathcal{U}_{V_i,S_i}$ sont ouverts pour la topologie fine (et même usuelle). Il suffit donc de montrer qu'on peut choisir les V_i, S_i de sorte qu'ils soient denses (pour la topologie fine).

On choisit V_i disque compact d'un ouvert de carte, inclus dans un ouvert U_i muni de coordonnées (et qu'on identifie à $\mathbb{R}^n$), de sorte que $\bigcup V_i = V$. On choisit d'autre part les $S_j \subset W_i$, de la même façon (identifiés à $B^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$), et montrons qu'alors $(V_i, S_j)_{i,j}$ convient. Soit $f : V \to W$ lisse. On restreint au-dessus de $f^{-1}(W_j) \cap U_i$, et on pose $g : (x,a) \in (f^{-1}(W_j) \cap U_i) \times \mathbb{R}^m \mapsto f(x) + a \in W_j$. C'est évidemment une submersion, elle est en particulier transverse à S_j. Donc, pour presque tout a, $g(\cdot, a)$ est transverse à S_j, d'après le lemme précédent, et en particulier pour a arbitrairement petit.

On recolle ensuite l'application modifiée au-dessus de V_i avec f à l'aide d'une partition de l'unité à support un compact de $f^{-1}(W_j) \cap U_i$, ce qui montre la densité. □

8.4 Justification des passages à la limite dans les calculs de type d'homotopie

Proposition 15. *$\rho'^{-1}_{n,\infty}(\mathbb{K}^n)$ a le type d'homotopie de $\Lambda''_{2n\infty}$, où $\Lambda''_{2n\infty}$ s'obtient en envoyant Λ''_{2nl} dans $\Lambda''_{2n(l+1)}$ via :*

$$h \mapsto \begin{pmatrix} 4f_lhf_l^* & 2f_lh & 2I_n \\ 2hf_l^* & h & 0 \\ -2\varepsilon I_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où f_l est la matrice $2nl \times n$ égale à $\begin{pmatrix} -I_n & -I_n & \dots & -I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration. On suppose pour l'instant $\varepsilon = \pm 1$.

Soit $M \in \rho'^{-1}_{n,2nl}$. On rappelle qu'on peut écrire $M = \mathbb{K}^{n+k} + u$ avec $u = (i_2f + i_1) \circ h(f^*p_2 + p_1)$ avec $h \in \Lambda''_{2nl}$ (qui s'identifie naturellement aux applications $-\varepsilon$-symétriques inversibles), $f : \mathbb{K}^{k*} \to \mathbb{K}^{n*}$ linéaire.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\iota_l(M) &= \tau_{n,2nl}(\mathrm{Id}_{E_n}, M) \\
&= \Phi(D \times M) \\
&= \Phi(\{(t+t', t+t', y + h(y + f^*(w)), w + f \circ h(y + f^*(w)))\}) \\
&= \{(t, \tfrac{t+w}{2}, y, -\varphi\left(\tfrac{t' + f \circ h(y + f^*(w))}{2}\right)) + (t', f \circ h(y + f^*(w)) - t', h(y + f^*(w)), \varepsilon\varphi^{-1}(t - w))\}
\end{aligned}$$

On pose alors $x=\frac{t+w}{2}, z=-\varphi\left(\frac{t'+f\circ h(y+f^*(w))}{2}\right)$. On a donc $w=2x-t, t'=-2\varphi^{-1}(z)-f\circ h(y+f^*(2x-t))$.

Puis :

$$\begin{aligned}\iota_l(M) &= \{(t,x,y,z)+(-2\varphi^{-1}(z)-f\circ h(y+f^*(2x-t)), 2(f\circ h(y+f^*(2x-t))+\varphi^{-1}(z)),\\ &\quad h(y+f^*(2x-t)), 2\varepsilon\varphi^{-1}(t-x))\}\\ &= \{(t,x,y,z)+\tilde{u}(t,x,y,z)\}\end{aligned}$$

On calcule aisément $\ker\tilde{u}=\{(t,t,-f^*(t),0)\}$. Et on sait qu'on peut écrire $\tilde{u}=(i_2\tilde{f}+i_1)\circ\tilde{h}(\tilde{f}^*p_2+p_1)$ d'après l'étude précédente. Donc on a $-\tilde{f}^*(t)=(t,-f^*(t),0)$. Donc $\tilde{f}(x,y,z)=-x+f(y)$, ie $\tilde{f}=\begin{pmatrix}-I_n & f & 0\end{pmatrix}$.

De même, on peut aisément calculer $\tilde{h}$ en regardant les trois dernières coordonnées de $\tilde{u}(0,x,y,z)$, et on trouve :

$$\tilde{h}=\begin{pmatrix}4fhf^* & 2fh & 2I_n\\ 2hf^* & h & 0\\ -2\varepsilon I_n & 0 & 0\end{pmatrix}$$

On peut clairement identifier ρ'^{-1}_{2nl} à $A_{n,l}=\mathcal{L}(\mathbb{K}^{2nl*},\mathbb{K}^{n*})\times\mathrm{Sym}_{-\varepsilon}(\mathbb{K}^{2nl})$. On identifie désormais également Λ''_{2nl} au sous-espace de $A_{n,l}$ où la première coordonnée est égale à f_l, ce qui correspond à l'identification de l'énoncé. On a donc $\iota_l:(A_{n,l},\Lambda''_{2nl})\to(A_{n,l+1},\Lambda''_{2n(l+1)})$.

Pour montrer l'équivalence d'homotopie désirée, on construit pour tous $l\leq m$ une homotopie $H_t^{l,m}: A_{n,l}\to A_{n,l}$ qui est l'identité sur Λ''_{2nl}, telle que $\iota_l\circ H^{l,m}=H^{l+1,m}\circ\iota_l$, avec $H_0^{l,m}=\mathrm{Id}$ et telle que $H_1^{l,l}$ a son image dans Λ''_{2nl}. Supposons ces homotopies construites. On peut alors construire une rétraction par déformation forte de $\rho'^{-1}_{n,2n\infty}(\mathbb{K}^n)$ sur $\Lambda''_{2n\infty}$ en appliquant d'abord $H^{0,m}$ sur $A_{n,m}$ pour tout $m\in\mathbb{N}$ entre les instants 0 et $\frac{1}{2}$, puis $H^{1,m}\circ H_1^{0,m}$ sur $A_{n,m}$ entre les instants $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$, etc. Comme chaque point est dans l'un des $A_{n,k}$, il cesse de bouger à un moment, ce qui assure la continuité de la rétraction en 0 (puisque l'espace est muni de la topologie limite inductive). On a alors bien l'équivalence d'homotopie désirée.

Pour construire $H^{l,m}$, on commence par définir $H^{l,l}$ comme étant simplement l'application qui préserve la seconde coordonnée et qui effectue une transformation affine sur la première. Puis, pour chaque dimension, on fait en sorte que le support (ie l'ensemble des points sur lesquels $H^{l,m}$ n'est pas constante) de $H^{l,m}$ soit très petit. Pour cela, on considère tout d'abord le prolongement de $H^{l,l}$ obtenu en faisant subir la même transformation affine à f et en étendant l'application d'une façon naturelle (et en particulier compatible avec ι) au sein des matrices, ce qui est clairement possible si on ne cherche pas à préserver l'inversibilité. On considère ensuite U_m l'ouvert des points pour lesquels le segment reliant le point à son image par l'application prolongée ne contient aucun point non inversible (c'est un ouvert car $[0,1]$ compact). Quitte à restreindre, on peut supposer $U_m\subset U_{m+1}$. Des partitions de l'unité permettent alors de recoller l'application prolongée naturellement à l'identité, de façon compatible aux plongements, au sein de $A_{n,m}$. C'est bien ce qu'on voulait.

Dans le cas $\varepsilon=0$, un raisonnement très semblable mais où la combinaison convexe est faite simultanément sur f et g nous amène au résultat souhaité. Les calculs intermédiaires sont évidemment les mêmes.

□

8.5 Espaces vectoriels de dimension finie sur un corps gauche

On rappelle qu'un corps gauche est un objet algébrique vérifiant tous les axiomes d'un corps, sauf la commutativité de la multiplication.

Proposition 16 (Base incomplète sur un corps gauche)**.** *Soit V un k-espace vectoriel (ie un k-module à droite) avec k un corps gauche, et soit $L \subset G$, avec L libre et G génératrice. Il existe $L \subset B \subset G$ une base de V.*

Démonstration. Il suffit de faire la même chose que sur un k-espace vectoriel avec k commutatif.

Soit E l'ensemble des $L \subset L' \subset G$ libres, muni de l'inclusion. E est non vide (il contient L) et inductif (une union croissante de familles libres est libre par caractère finitaire de la liberté). Donc E possède un élément maximal B. Supposons par l'absurde B non génératrice. Alors, si on rajoute un élément de $G \setminus \mathrm{Vect} B \neq \emptyset$ à B, on obtient un élément de E strictement plus grand que B, absurde. D'où l'existence d'une base dans V. $\square$

Proposition 17 (Théorème spectral dans les quaternions)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{H})$ hermitienne. Alors A se diagonalise sur une base orthonormée avec des valeurs propres réelles, ie il existe $\Omega \in \mathrm{Sp}_n$ et D une matrice diagonale réelle telles que $A = \Omega D \Omega^*$.*

Démonstration. La preuve est la même que sur $\mathbb{R}$, à savoir une méthode variationnelle. Supposons le résultat vrai en dimension $n-1$ (le cas $n=0$ est évident). Soit $x \in \mathbb{H}^n$ de norme 1 qui réalise le maximum de x^*Ax (réel car A hermitienne). On a alors, pour y telle que x^*y quaternion pur (ie tangent en x à la sphère unité), $y^*Ax + x^*Ay = 0$. Mais d'autre part $y^*Ax = \overline{x^*Ay}$ donc x^*Ay est un quaternion pur, pour tout tel y. On a alors $x^\perp \subset (Ax)^\perp$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{H}$ tel que $Ax = x\lambda$. Enfin, puisque si le produit scalaire d'un vecteur avec x est initialement un quaternion pur, c'est encore le cas avec Ax, il vient que λ est réel. Le résultat suit de l'hypothèse de récurrence en se plaçant sur $x^\perp$. $\square$

Proposition 18 (Réduction des matrices antihermitiennes dans les quaternions)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{H})$ antihermitienne. Alors A se diagonalise sur une base orthonormée avec des valeurs propres quaternioniques pures, ie il existe $\Omega \in \mathrm{Sp}_n$ et D une matrice diagonale quaternionique pure telles que $A = \Omega D \Omega^*$.*

Démonstration. Une preuve variationnelle fonctionne encore. On procède par récurrence sur n, le cas $n = 0$ est évident. Pour $x = a + ib + jc + kd \in \mathbb{H}$, notons $I(x) = b$ sa partie selon i. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{H})$ antihermitienne. Soit $x \in \mathbb{H}^n$ de norme 1 qui maximise $I(x^*Ax)$. Si $y \in \mathbb{H}^n$ tel que $y^*x = 0$ (ie tangent en x à la sphère unité), alors une développement limité donne $I(y^*Ax + x^*Ay) = 0$. Or $y^*Ax = -\overline{x^*Ay}$ donc $I(y^*Ax) = 0$. Or en appliquant le même résultat à $y' = iy, jy, ky$, qui satisfont bien $y'^*x = 0$, on obtient que $y^*Ax = 0$. On conclut comme dans le lemme précédent : $x^\perp \subset (Ax)^\perp$, puis $Ax = x\lambda$ pour un certain λ, puis λ est un quaternion pur car A est antihermitienne, puis on applique l'hypothèse de récurrence à $x^\perp$. $\square$