Mémoire L3

秦珺辉 (Junhui Qin)

9 juin 2022

Table des matières

1 L'indécidabilité sur la théorie "normale" de la topologie

Si l'on considére la théorie de la topologie naturelle sur l'espace euclidien, il y aura des indécidabilités. Cela inspire que l'on doit considérer une théorie plus faible de la topologie, mais c'est mieux que l'on jette un coup d'œil sur cette indécidabilité.

On précise la définition de la structure $L(\mathbb{R}^n)$. La langue est la langue du réseau : on a la fonction $\cap$, $\cup$. On associe une structure $L(X)$ qui est le réseau des sous-ensembles fermés, à un espace X n'importe quel. On peut l'associer sa théorie $\mathrm{Th}(L(X))$.

Theorem 1.1 (Rabin)**.** $\mathrm{Th}(L(\mathbb{R}^1))$ *est décidable.*

Theorem 1.2 (Grzegorczyk)**.** *Il y a une procédure effective associant un énoncé de* $\mathrm{Th}_2(\mathbb{N})$ *à un énoncé de* $\mathrm{Th}(L(\mathbb{R}^n))$*, pour* $n \geq 2$ *et vice versa. Donc* $\mathrm{Th}(L(\mathbb{R}^n))$*,* $n \geq 2$ *est indécidable.*

Proof. Les parties ouvertes qui sont une balle avec rayon et coordonnées rationals sont codé par les nombres naturels effectivement donc les parties ouvertes sont codé par les sous-sembles de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire $\mathrm{Th}(L(\mathbb{R}^n)) \hookrightarrow \mathrm{Th}_2(\mathbb{N})$.

D'autre part, on peut traduire $\mathbb{N}$ à un triple en forme de ω-T, qui existe seulement quand $n \geq 2$. On le décrit précisément maintenant. Un triple en forme de ω est une forme (u, U, V) où U est une partie fermé de X, $u \in U$ et V est une partie discrète de U, tel que la relation $<_u$ définit un ordre de type ω sur V, où $x <_u y$ si toutes les parties connexes contenant u et y contiennent x aussi. Un triple en forme de ω vient d'un ω-codage (u, U, H_1, H_2) tel qu'ils sont fermés et $H_1 - H_2 = V$. Donc l'ensemble des triples en forme de ω est définissable, parce que la discrétion, la relation $<_u$ et l'ordre de type ω sont tout définissables. Un triple en forme de ω est dit en forme de ω-T, s'il satisfait l'énoncé suivant (donc définissable)

$$\forall\, x \in V \forall\, y \in V \exists\, z \in V [0, x) \approx [y, z),$$

où 0 est l'élément minimal de V, $[x, y) = \{z \mid x \leq_u z <_u y\}$ et $\approx$ est la relation que, $U \approx V$ s'il y a un $G \subset X$ fermé tel que chaque composant connex contient exactement un élément de U et un élément de V (c'est une relation définissable existant seulement quand $n \geq 2$). Tel un triple en forme ω-T existe dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Maintenant on peut traduire $\mathbb{N}$ comme un triple en forme ω-T, l'addition est juste la relation $[0, x) \approx [y, z)$, et les parties sont traduits aussi parce que les parties d'un ensemble discret sont fermés aussi. Donc $\mathrm{Th}_2(\mathbb{N}) \hookrightarrow \mathrm{Th}(L(\mathbb{R}^n))$. □

2 La théorie "locale" du corps topologique

Les résultats les plus importants sur la topologie concerne les propriétés locales, c'est-à-dire une propriété satisfait par tous les sous-ensembles de A s'il est satisfait par A. Cela conduit la définition suivant.

Definition 2.1. *Soit X est un corps ayant une topologie sur quoi il y a un filtre τ. Les formules sont les formules construites de la théorie à première-ordre avec variables $x, \cdots$ et $U, \cdots$, fonctions $+$, $-$, $\cdot$, et prédicats $=$ et $\in$, tel qu'il y a un exigence sur $\exists U$ (resp. $\forall U$) qu'il applique seulement aux formules négatives (resp. positives). Les énoncés locals sont les formules locales sans variable libre. On interprète naturellement par x les éléments de X, $U \in \tau$, ce qui fait une structure de cette langue. On parle que deux data (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) sont équivalent localement s'ils satisfont des mêmes énoncés locals.*

Example 2.1. *Les énoncés déterminant le corps filtré avec une topologie d'anneau sont locales :*

1. $\forall U \exists x (x \neq 0 \wedge x \in U) \wedge \forall x (x = 0 \leftrightarrow \forall V x \in V)$.
2. $\forall U \exists V \forall x \forall y (x \in V \wedge y \in V \to x - y \in V)$.
3. $\forall U \exists V \forall x \forall y (x \in V \wedge y \in V \to x \cdot y \in V)$.
4. $\forall U \forall x \exists V \forall y (y \in V \to x \cdot y \in U)$.

On peut aussi ajouter un énoncé local pour décrire le corps topologique :

5. $\forall U \exists V \forall x \exists y (x \in V \to (y \in U \wedge (1 + x) \cdot (1 + y) = 1))$.

L'équivalence locale est une relation plus faible que l'isomorphisme (mais plus fort que l'équivalence élémentaire), donc on a raison de chercher un mieux espace dans un classe d'équivalence :

Theorem 2.2. *Chaque tel (K, τ) est équivalent localement à un corps topologique avec un filtre ω-complet, noté (K^*, τ^*), c'est-à-dire qu'il est fermé par intersection dénombrable.*

Proof. Soit F un untra-filtre non-principal sur $\mathbb{N}$. On considère l'ultrapuissance $K^* = \prod K/F$, et le filtre τ^* produit comme une base par l'image de $\tau^{\mathbb{N}}$ à K^*, noté β.

D'abord, on prouve qu'il est ω-complet. Soit $U_i = (U_i^j) \in \tau^*$, on choisit $\mathbb{N} = F_1 \supset \cdots$ avec intersection vide. Donc $U = (\bigcap_{j=1}^{k(i)} U_j^i)_i$ où $i \in F_{k(i)} - F_{k(i)+1} \in \tau^*$ satisfait que $U \subset U_j$, car si $a \in U \mod F$ alors $\{i \mid a_i \in U_i\} \cap F_j \subset \{i \mid a_i \in U_j^i\}$, donc la dernier est dans F.

Maintenant, on montre qu'ils sont équivalent localement. Pour chaque énoncé local ψ, on veut montrer d'abord

$$(K^*, \beta) \models \exists U \psi \Leftrightarrow (K^*, \tau^*) \models \exists U \psi.$$

C'est facile parce que ψ est local, et β est une base de τ^*, donc on peut choisir un $A \subset \beta$ pour chaque $B \subset \tau^*$ et chaque formule atomique négative. Secondement, on a besoin de montrer que (K^*, β) est équivalent localement à (K, τ). Ils sont facilement équivalent élémentaire par la théorème de Los, donc on n'a que besoin de considérer

$$(K, \tau) \models \exists U \psi \Leftrightarrow (K^*, \beta) \models \exists U \psi,$$

où ψ est négative sur U. Si $(K, \tau) \models \exists U \psi$ alors on peut choisir $U^* = (U_i) \in \tau^*$. Inversement, si $(K^*, \beta) \models \exists U \psi$, alors il existe $U^* \in \beta$ satisfaisant $(K^*, \beta) \models \psi(U^*)$. Par récurrence, il est descendu à la formule atomique $\neg x \in U$, ce qui conduit $\{i \mid \neg x \in U_i\} \in F$, donc $\neg x \in U_i$ pour quelque i car $F \neq \emptyset$. $\square$

Donc on peut prouver quelque chose locale par traversant à l'objet ω-complet. Voici trois examples.

Theorem 2.3. *Soit (K, τ) est un corps avec un filtre. Il représente une topologie d'anneau si et seulement s'il est équivalent localement à (K', τ') où τ' est une base d'idéal, c'est-à-dire qu'elle est à la forme $\bigcup \tau_{R_i}$, où τ_{R_i} est la collection d'idéal de R_i.*

Proof. La part "si" est trivial. Inversement, on peut utiliser théorème 2.2, et ne le montrer que le cas ω-complet. Dans cette supposition, on peut choisir $U_0 \supset U_1 \supset \cdots$ tel que $U_0 = U$ pour chaque $U \in \tau$

$$U_{i+1} - U_{i+1},\, U_{i+1} \cdots U_{i+1} \subset U_i,$$

et construire $R_U = \mathbb{Z} + \bigcap U_i$. Par ω-complétude, $\bigcap U_i \in \tau$, on peut choisir $u, v \in \bigcap U_i - \{0\}$ tel que $uy = v$ pour chaque $y \in K$, donc $R_{U,0} = K$. En outre, $\tau = \bigcup \tau_U$ est direct. $\square$

Un deuxième example est plus compliqué.

Definition 2.2. *Une partie $S \subset K$ est parlé bornée si pour chaque $U \in \tau$ il y a un $V \in \tau$ tel que $V \cdot S \subset U$. (K, τ) est parlé bornée localement s'il y a un voisinage bornée de 0. C'est un énoncé local :*

$$\exists V \forall U \exists W \forall x \forall y (x \in V \wedge y \in W \rightarrow x \cdot y \in U).$$

Theorem 2.4. *Soit (K, τ) est un corps avec un filtre.*

1. *On a que (K, τ) est bornée localement avec une topologie d'anneau si et seulement s'il est équivalent localement à (K', τ') où $\tau = \tau_R$ pour quelque R avec $R_0 = K$.*
2. *(K, τ) est un corps topologique bornée localement si et seulement s'il est équivalent localement à (K', τ') où $\tau = \tau_R$ pour quelque R qui est un anneau local avec $R_0 = K$.*

Proof. Si (K, τ) est bornée localement, par théorème 2.2 il est équivalent localement à (K', τ') ω-complet. Donc (K', τ') est bornée localement muni un anneau R avec $\tau_R \subset \tau'$ et il y a une partie τ'-bornée, noté S dans τ_R. Pour chaque élément U dans τ', il y a un V tel que $V \cdot S \subset U$, donc $\exists x$, $xS \subset V$, mais $\{xS\} \subset \tau_R$, alors $\tau_R = \tau'$. En outre, (K, τ_R) est bornée localement parce que R est une partie bornée. □

Example 2.5. *Soit U bornée. Il y a un énoncé ψ élémentaire avec un nouveau prédicat P associé à ϕ local, tel que*

$$(K, \tau) \models \phi \iff (K, U) \models \psi.$$

C'est juste que l'on replace $\exists U_i (t \in U_i)$ par $\exists y_i (y_i \cdot t \in U)$ qui sont équivalents car ϕ est local.

La dernier exemple est sur le corps topologique de type V.

Definition 2.3. *Soit (K, τ) un corps avec la topologie d'anneau. Si S est bornée alors S^{-1} est "bounded away", c'est-à-dire $S^{-1} \cap U = \emptyset$ pour quelque voisinage U de 0. Si inversement, S est "bounded away" implique que S^{-1} est bornée, alors on le parle un corps V-topologique. Il y a un énoncé local pour le axiomiser :*

$$\forall U \forall V \exists W \forall x \forall y (x \in W \wedge \neg y \in U \rightarrow xy^{-1} \in V).$$

Theorem 2.6. *Soit un corps filtré (K, τ). Les conditions suivant sont équivalentes :*

1. *(K, τ) est V-topologique.*
2. *(K, τ) est équivalent localement à (K', τ_v) pour quelque valuation v.*
3. *Tous les corps filtrés (K', τ') qui sont équivalentes localement à (K, τ) sont minimales, c'est-à-dire il est le plus grosse topologie d'anneau.*

Proof. Une valuation de K donne une base $V_g = \{x \in K \mid v(x) \geq g\}$, donc $(K - V_g)^{-1} \subset V_{-g}$ est bornée car ils valuations sont bornées du dessous. Donc $2 \Rightarrow 1$.

Par théorème 2.2 on choisit un corps filtré ω-complet et par la preuve on a $\tau_R \subset \tau'$. On l'étend à un anneau A tel que $x \in A$ ou $x^{-1} \in A$ pour tous les $x \in K$. Donc il y a une valuation avec l'anneau de valuation A, donc $\tau_v \subset \tau_R \subset \tau'$, par la minimalité on a $\tau_v = \tau'$. Cela prouve $3 \Rightarrow 2$.

Si $\sigma \subset \tau$, alors le voisinage que on peut toujours choisir pour faire $1 \notin U \cdot U$ satisfait $U^{-1} \cap U = \emptyset$ donc il est "bounded away" de 0, donc U est bornée. Le même moyen montre que $\sigma = \tau$, donc $1 \Rightarrow 3$. □

Remark 2.7. *Il y a une autre notion pour la valuation, c'est l'idéal de valuation. Une partie de K est parlé un idéal de valuation si $M + M \subset M$, $M \cdot M \subset M$, $1 \notin M$ et $x \cdot y \in M \Rightarrow x \in M$ ou $y \in M$. Chaque voisinage U dans un corps filtré ω-complet V-topologique admet un idéal de valuation comme $\bigcap U_n$ donc admet une valuation.*

Remark 2.8. *Il y a un résultat plus fort que théorème 2.6 qui dit qu'il existe une valeur absolue ou une valuation sur une V topologie, pas seulement dans le sens de équivalence locale.*

3 L'application dans l'algèbre

Il y a quelques applications de la théorie locale dans l'algèbre.

Theorem 3.1 (Approximation)**.** *Soit $\tau_1, \cdots, \tau_n$ des V-topologies différentes sur K, et soit $V_i \in \tau_i$. Pour tous les $a_i \in K$, il existe b tel que $b - a_i \in V_i$ pour tous les i.*

Proof. Remarquerez que le théorème dit un énoncé local :

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall V_1 \cdots \forall V_n \exists y (y - x_1 \in V_1 \wedge \cdots \wedge y - x_n \in V_n).$$

Par le théorème 2.2, on peut supposer que chaque τ_i est ω-complet. Par la remarque 2.7 on peut choisir l'idéal de valuation M_i pour chaque i et l'anneau de valuation A_i correspondant tel que $M_i \subset V_i$. Après c'est de la pure algèbre. On montre que

$$M_1 \cap \bigcap_{j=2}^{m} (K - A_j) \neq \emptyset.$$

Par récurrence, $m = 2$ est trivial, si c'est vrai pour $m - 1$, soit $r \in M_1 \cap (K - A_2)$, on peut redéfinir M_i tel que $r \in A_i$. Par hypothèse on choisit $s \in M_1 \cap \bigcap_{j \geq 3} (K - A_j)$, alors il y a au moins un dans s et $s + r$ satisfaisant la conclusion. Donc $M_i \cap \bigcap_{i \neq j}^{m} (K - A_j) \neq \emptyset$. Cela donne $(1 + M_i) \cap \bigcap_{j \neq i} M_j \neq \emptyset$, parce que

$$m \in M_i \cap \bigcap_{i \neq j}^{m} (K - A_j) \neq \emptyset \Rightarrow (1 + m)^{-1} \in (1 + M_i) \cap \bigcap_{j \neq i} M_j \neq \emptyset.$$

On peut supposer chaque $a_i \in A_1 \cap \cdots \cap A_n = A$, et choisit $d_i \in (1 + M_i) \cap \bigcap_{j \neq i} M_j$. Alors $b = \sum a_i d_i$ satisfait que $b - a_i \in V_i$. □

Theorem 3.2 (Continuité des racines)**.** *Soit (K, τ) un corps V-topologique, $a_1, \cdots, a_n \in K$, $U \in \tau$. Donc il y a un $V \in \tau$ tel que pour tous les $b_1, \cdots, b_n \in K$ satisfaisant*

$$\prod (X - a_i) - \prod (X - b_i) \in V[X],$$

il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $a_i - b_{\sigma(i)} \in U$.

Proof. Cette conclusion est représenté par un énoncé local

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall U \exists V \forall y_1 \cdots \forall y_n$$
$$\left(\bigwedge_k \sum x_{i_1} \cdots x_{i_k} - \sum y_{i_1} \cdots y_{i_k} \in V \to \bigvee_\sigma \bigwedge_i (x_i - y_{\sigma(i)}) \in U) \right).$$

Par la même raison on suppose τ est ω-complet et choisit un idéal de valuation $M \subset U$. En outre, on peut supposer $a_i \in A$ par mise à l'échelle. La condition

$$\prod (X - a_i) - \prod (X - b_i) \in M[X]$$

donne $\prod(X - b_i) \in A[X]$, et cela implique $b_i \in A$ parce que A est clos intégralement. Dans le corps $k = A/M$, $\prod(X - a_i) = \prod(X - b_i) \in k[X]$, donc $a_i - b_{\sigma(i)} \in M \subset U$ pour quelque σ. □

Theorem 3.3 (Bornage des racines)**.** *Soit (K, τ) un corps V-topologique. Pour chaque $S \subset K$ bornée il y a une $T \subset K$ bornée tel que tous les facteurs unitaires de tous les polynômes $f \in S[X]$ unitaires et ayant degré n appartiennent à $T[X]$.*

Proof. Un énoncé local la décrit :

$$\begin{aligned}&\forall U \exists V \forall a_1 \cdots \forall a_n \forall g\\ &\left(\bigwedge \neg a_i^{-1} \in U \wedge g \mid X^n + \sum a_i X^{n-i} \to \bigwedge g \in (K - V)^{-1}[X]\right),\end{aligned}$$

donc on peut supposer τ est ω-complet, et choisit un idéal de valuation $M \subset (K - S)^{-1}$. Cela donne que $S \subset A$, donc $g \in A[X]$ car A est clos intégralement. □

Remark 3.4. *Ce moyen résout le problème de traiter différemment la valuation et la valeur absolue, qui existe dans la preuve normale.*

Un autre résultat est à propos du problème de Kowalsky.

Theorem 3.5. *Soient $\tau_1, \cdots, \tau_n$ des V-topologie sur K, et soit τ_0 une topologie d'anneau tel que $\tau_0 \subset \tau_1 + \cdots + \tau_n$. Alor il existe $I \subset \{1, \cdots, n\}$ tel que*

$$\tau_0 = \sum_I \tau_i.$$

Proof. C'est une propriété locale, donc on peut supposer K est ω-complet. Par théorème 2.3, on écrit $\tau_0 = \bigcup \tau_R$ donc il est suffisant de montrer seulement pour le cas τ_R. Par théorème 2.6, on écrit $\tau_i = \tau_{A_i}$, donc $\tau_1 + \cdots + \tau_n = \tau_B$ où $B = A_1 \cap \cdots \cap A_n$. □

4 Le corps topologique d'ordre

Maintenant on peut donner une description d'un corps topologique d'ordre, c'est-à-dire :

Definition 4.1. *Un corps filtré (K, τ) est dit topologique d'ordre s'il y a un ordre sur K tel que $\{(-a, a) | a \in K\}$ sont une base de τ.*

Theorem 4.1. *Il y a une collection des énoncés locals déterminant la propriété que (K, τ) est équivalent localement à un corps topologique d'ordre. Mais d'autre part, la propriété que (K, τ) devient un corps topologique d'ordre, n'est pas locale, c'est-à-dire il y a un corps qui est équivalent localement à un corps topologique d'ordre mais pas un corps topologique d'ordre lui-même.*

Proof. On donne les énoncés locals comme

$$\exists U \forall x_1 \cdots \forall x_n \neg 1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 \in U.$$

Le part "seulement si" est trivial. L'autre part, soit (K, τ) le satisfait. On peut supposer qu'il est ω-complet et choisir un idéal de valuation $M \subset \bigcap U_n$ où U_n est déterminé par l'énoncé au-dessus. lE corps est réel formellement, donc on le peut munir un ordre comme suivant : on prend le pré-ordre comme le groupe généré par $\sum x_i^2(1 + m_i)$, et l'étend à un pré-ordre maximal P par le lemme de Zorn. Pour chaque a, on prend $P[a] = P + Pa$. Si $0 \notin P[a]$, par la maximalité $P[a] = P$, autrement $x + ya = 0$ donc $-a = xyy^{-2} \in P$. Alors au moins un de a ou $-a$ est dans P, donc on peut donner un ordre sur P par $a \leq b$ si $b - a \in P$, donc $M \subset (-1, 1)$, mais les deux sont V-topologique donc par minimalité ils sont égales.

Pour l'exemple mentionné en dernier, on construit comme suivant. On peut construirer un corps

$$K_m = \mathbb{R}(x_1, \cdots, x_{m+1})(\sqrt{-(x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2)})$$

et choisir une valuation v tel que $\mathbb{R}(x_1, \cdots, x_m) \subset A$ avec $x_{m+1} \in M$ où A l'anneau de valuation et M son idéal de valuation. Ce corps n'est pas un corps clos réel, mais la somme de $n = 2^{[\log m]}$ carrés est loin de -1. Soit

$$K \cup \{\infty\} = \varprojlim K_m \cup \{\infty\},$$

alors il y a $A_m \supset M_m$ dans K tel que $A_m / M_m \cong K_{m-1}$, donc M_m admet l'énoncé local

$$\exists U \forall x_1 \cdots \forall x_n \neg (1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 \in U),$$

mais il existe une somme de m carrés dans M_m donc il n'est pas un corps topologique d'ordre. □

Utilisant ça, on peut déterminer la classe locale de quelques corps.

Theorem 4.2. *Soit un corps filtré (K, τ). Les conditions suivant sont équivalentes :*

1. *(K, τ) est équivalent localement à $(\mathbb{R}, \tau_{||})$.*
2. *K est clos réel et τ est induit par l'ordre.*
3. *K est clos réel V-topologique tel que les sommes d'un nombre fini de carrés sont loins de -1.*

Proof. Parce que les conclusions dans 2 sont locals, on a $1 \Rightarrow 2$, et $2 \Rightarrow 3$ est trivial. $3 \Rightarrow 2$ parce que l'on peut toujours choisir une valuation ou une valuer absolu sur un corps V-topologique (remarque 2.8). En fin, la théorie de corps clos réel est complète, et $x \in (-1, 1)$ est définissable, donc (K, τ) est équivalent localement à $(\mathbb{R}, ||_{\mathbb{R}})$, donc $2 \Rightarrow 1$. □

Theorem 4.3. *Un corps filtré (K, τ) est équivalent localement à $(\mathbb{C}, \tau_{||})$ si et seulement s'il est algébriquement clos, ayant caractéristique 0 et V-topologique.*

Proof. Soit (K, τ) est algébriquement clos, ayant caractéristique 0 et V-topologique, on peut supposer qu'il est ω-complet. Donc on a une valuation sur K.

Par le théorème de Robinson, on peut trouver que (K_1, A_1) et (K_2, A_2) sont équivalent élémentaire pour deux corps algébriquement clos avec corps résiduel de caractéristique 0, donc tous les corps algébriquement clos, ayant caractéristique 0 et V-topologique sont équivalent localement. □

5 Les corps t-henseliens

Definition 5.1. *Un corps filtré (K, τ) est dit t-henselien s'il est équivalent localement à un corps henselien (K, τ_v).*

Theorem 5.1. *Un corps filtré (K, τ) V-topologique est t-henselien si et seulement s'il satisfait les deux conditions équivalentes suivantes :*

1. *Pour chaque n il existe $U \in \tau$ tel que toutes les $f \in X^{n+1} + X^n + U[X]^{n-1}$ ont une racine dans K.*
2. *Après munissant la topologie par $U[X]$, pour chaque n l'ensemble de $f \in K[X]^n$ qui a une racine simple est ouvert.*

Un critère plus naturel est :

Theorem 5.2. *Un corps filtré (K, τ) V-topologique est t-henselien si et seulement s'il satisfait le théorème des fonctions implicites, c'est-à-dire pour $F \in K[X_0, \cdots, X_n, Y]$, $F(a_0, \cdots, a_n, b) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial Y}F(a_0, \cdots, a_n, b) \neq 0$, il y a U, $V \in \tau$ tel que, pour $a'_0, \cdots, a'_n \in U$, il existe exactement un $b' \in V$, et $F(a'_0, \cdots, a'_n, b') = 0$. En outre, le morphisme implicite est continu.*

Proof. Si (K, τ) satisfait le théorème des fonctions implicites, on choisit $F = Y^{n+1} + Y^n + X_{n-1}Y^{n-1} + \cdots + X_0$, donc $F(0, \cdots, 0, -1) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial Y}F(0, \cdots, 0, -1) \neq 0$, par l'hypothèse on a toutes les $f \in Y^{n+1} + Y^n + U[Y]^{n-1}$ ayant une racine donc par théorème 5.1 il est t-henselien.

Inversement, cette propriété est représenté par une collection des énoncés locals, donc on peut supposer que (K, τ) est ω-complet. Alors on peut choisir un idéal henselien $M \subset V$, et on écrit $f = F(a'_0, \cdots, a'_n, X)$ pour $a'_i \in a_i + M$, on a $f(b) \in M$ mais $f'(b) \notin M$, par la propriété henselienne, il existe $b' \in b + M$ tel que $F(a'_0, \cdots, a'_n, b') = 0$. En suite si b'' est une autre racine, on a $f'(b') \in M$ qui est absurde. □

On a des conclusions intéressantes suivantes.

Lemma 5.3. *Soit (K, τ) un corps t-henselien, alors :*

1. *L'ensemble $\{f(a) \mid f'(a) \neq 0\}$ est ouvert.*
2. *Si f est séparable unitaire sans racine, il existe $\tau \ni U \ni x$ et $f(K) \cap U = \emptyset$.*

Proof. Le premier est dérivé directement par 5.1. En suite, le deuxième est décrit par un énoncé local, donc on peut supposer (K, τ) est ω-complet, on choisit un anneau henselien A tel que $f \in A[X]$. Soit $fg + f'h = 1$, on a $f(K) \cap M = \emptyset$. En fait si $f(a) \in M$ donc $a \in A$ car A est clos intégralement, donc $f'(a) \notin M$, par la propriété henselienne, on a une racine de f, ça contredit la condition. □

Corollary 5.4. *Soient (K, τ) t-henselien, et $\tau_1, \cdots, \tau_n$ des V-topologies différantes de τ. Si $f' \neq 0$, alors on a que $f(K)$ est dense dans $\tau_1 + \cdots + \tau_n$.*

Proof. On sait que $\{f(a) \mid f'(a) \neq 0\}$ est non-vide et ouvert, on fixe tel $c = f(a)$. Par le théorème d'approximation 3.1, soient $a \in K$ et $V \in \tau_1 + \cdots + \tau_n$, on peut choisir $b \in a + c + V$, et $b \in c + f(K)$, donc $a + V \cap f(K) \neq \emptyset$. $\square$

Theorem 5.5. *Si K est t-henselien pour deux topologies $\tau_{1,2}$ différentes, alors K est clos séparablement.*

Proof. Si non, on choisit f irreducible et séparable sur K. Donc il existe $U \in \tau_1$ tel que $U \cap f(K) = \emptyset$, mais ça contredit que $f(K)$ est τ_1-dense dans K. $\square$

Corollary 5.6. *Si K n'est pas clos séparablement muni uniquement une topologie t-henselien, alors chaque F équivalent élémentaire à K lui aussi.*

Proof. On fixe f séparable irréductible et $m = \deg f$, par le lemma dessus, $f(K) \cap U = \emptyset$ pour quelque $U \in \tau$, donc $f(K)^{-1}$ est bornée, dès lors $\{xf(K)^{-1}\}$ sont une base de τ. On considère l'énoncé élémentaire p_n :

$$\begin{aligned}\exists\, f(\deg f \leq m \text{ et } f \text{ est séparable irréductible})\\ \forall\, x(x \in K^*)(U =)xf(K)^{-1} \cup \{0\} \text{ ou } (K - x^{-1}f(K)) \text{ satisfait}\\ \forall\, g(g = X^{l+1} + X^l + U[X]^{l-1} \text{ où } l \leq n)\exists\, x \in K(g(x) = 0).\end{aligned}$$

Évidemment K satisfait tous les p_n, donc F lui aussi. On note la topologie engendré par U dans p_n comme τ_n, et on a τ_n sont égale pour n assez grand. En fait, par la procédure des preuves, si n est assez grand, le lemme dessus est vrai pour $f \in K[X]^m$ aussi, le corollaire dessus est vrai aussi, en outre τ_n sont V-topologique donc le théorème dessus est vrai aussi. Parce que K n'est pas clos séparablement, on a $\tau_n = \tau_{n+1}$. $\square$

À la fin, on compare des corps t-henseliens avec des corps topologiquement henseliens.

Definition 5.2. *On dit que (K, τ) est un corps topologiquement henselien si :*

1. *$\tau = \tau_{||}$ pour quelque valeur absolue, et K est clos algébriquement ou réellement.*

2. *Ou, $\tau = \tau_v$ pour quelque valuation henselienne.*

Theorem 5.7. *Un corps V-topologique est topologiquement henselien si et seulement s'il existe U tel que $\forall\, n$, chaque $f \in X^{n+1} + X^n + U^n[X]^{n-1}$ a une racine dans K.*

Remark 5.8. *Il existe un corps t-henselien mais pas topologiquement henselien, c'est exactement l'exemple analogique à théorème 4.1. En fait, on note*

$$K \cup \{\infty\} = \varprojlim K_m \cup \{\infty\},$$

où K_m satisfait le lemme henselien seulement avec degré $\leq m$. La topologie est t-henselien.

D'autre part, (K, τ) n'est pas induit par une valeur absolue, en même temps si $\tau = \tau_B$ pour quelque B henselien, il existe A_m henselien aussi, donc K_m est henselien, c'est absurde.