

# Amibes d'hypersurfaces et géométrie tropicale

---

Marilou Bezos et Gabriel Maret  
ENCADRÉ PAR LÉONARD PILLE-SCHNEIDER  
4 juin 2023

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Cas archimédien</b>	<b>3</b>
2.1	Variétés algébriques affines . . . . .	3
2.2	Géométrie polyédrale . . . . .	5
2.3	Amibes . . . . .	12
2.4	Squelette . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Cas non archimédien</b>	<b>18</b>
3.1	Principes de base de la géométrie tropicale . . . . .	18
3.2	Valuations . . . . .	19
3.3	Tropicalisation d'un polynôme . . . . .	21
3.4	Théorème de Kapranov . . . . .	22
3.5	Lien avec le polytope de Newton . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Lien entre les deux cas</b>	<b>24</b>
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>28</b>
	<b>Références</b>	<b>29</b>

# 1 Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux amibes complexes associées à des polynômes à plusieurs variables. Les amibes sont des figures géométriques définies comme étant l'image du logarithme sur  $\mathbb{C}^n$ , soit  $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|)$ , des zéros de son polynôme associé. Notre but est d'étudier les hypersurfaces définies par des polynômes à coefficients dans un corps non archimédien et de faire le lien avec les amibes complexes.

Après de brefs rappels de géométrie algébrique, nous parlerons de géométrie polyédrale. Notamment, car il y a un lien entre le polytope de Newton d'un polynôme, qui n'est autre que l'enveloppe convexe des exposants apparaissant dans l'écriture du polynôme, et l'amibe complexe associée à ce polynôme. Pour établir ce lien, nous introduirons la fonction de Ronkin d'un polynôme, on verra que cette fonction est convexe et affine par morceaux sur le complémentaire de l'amibe, ce qui nous permettra de comprendre un peu mieux la structure des amibes complexes.

Afin de faire le lien avec les corps non archimédiens, nous introduirons des concepts de géométrie tropicale. La géométrie tropicale est une branche des mathématiques qui prend place dans l'algèbre min-plus, c'est-à-dire que l'on remplace la somme de deux chiffres par leur minimum et leur multiplication par leur somme. La géométrie tropicale doit son nom à Imre Simon, un informaticien brésilien, pionnier dans ce domaine. C'est en son honneur que des mathématiciens français ont utilisé l'adjectif tropical qui ferait, selon eux, référence au Brésil. En plus d'avoir un nom qui interpelle, la géométrie tropicale est utile dans plusieurs domaines, notamment en géométrie algébrique. Effectivement, on peut définir des polynômes tropicaux sur le semi-anneau tropical. Ces polynômes sont en réalité des fonctions concaves, linéaires par morceaux. Ainsi la géométrie tropicale est une version linéaire par morceaux de la géométrie algébrique classique. On verra que le passage entre les variétés algébriques et les variétés tropicales nous permet de prouver certaines propriétés sur les variétés algébriques.

Par la suite, on change de perspective et l'on se place dans un corps non archimédien avec une valuation. On peut définir une opération de tropicalisation, en fonction de la valuation. Celle-ci transforme un polynôme à coefficients dans le corps non archimédien en une fonction concave et affine par morceaux. On verra grâce au théorème de Kapranov que les valuations des racines du polynôme correspondent aux points de non-linéarité de sa version tropicale (à un passage à l'adhérence près). Puis, on démontrera que cet ensemble peut, lui aussi, être lié au polytope de Newton.

Finalement, on observe que les fonctions de valuation sont l'analogue du logarithme dans le cas non archimédien. Ceci qui nous amène à nous demander s'il n'existe pas un lien entre les amibes complexes et les hypersurfaces tropicales. Pour ce faire, on se placera dans le cas où les polynômes considérés sont à coefficients dans la clôture algébrique du corps non archimédien des séries de Laurent, qui est, lui aussi, non archimédien. Et nous démontrerons un résultat de convergence de l'amibe complexe vers l'amibe non archimédienne pour la distance de Hausdorff. Ce résultat permet de montrer que ces deux objets géométriques sont étroitement liés.

## 2 Cas archimédien

### 2.1 Variétés algébriques affines

Pour commencer, nous allons voir quelques notions de géométrie algébrique afin d'avoir quelques résultats sur les espaces de solutions d'équations polynomiales sur des corps algébriquement clos. Les objets présentés dans cette section ne seront pas centraux dans notre étude, nous ne rentrons donc pas dans les détails des preuves, mais on peut les retrouver dans le livre de Daniel Perrin [3]

Tout d'abord, nous définissons les espaces algébriques affines :

**Définition 2.1.1.** Pour  $K$  un corps, on note  $K[X_1, \dots, X_n]$  l'algèbre des polynômes à  $n$  variables sur  $K$ . On pose l'application ensembliste suivante :

$$\begin{aligned} V : \mathcal{P}(K[X_1, \dots, X_n]) &\rightarrow \mathcal{P}(K^n) \\ S &\mapsto V(S) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{P}$  dénote l'ensemble des parties et  $V(S)$  l'ensemble des zéros des polynômes de  $S$  :

$$V(S) = \{x \in K^n, Q(x) = 0 \forall Q \in S\}.$$

L'image de  $V$  est par définition l'ensemble des espaces algébriques affines.

**Remarque 1.** On pourrait ne considérer que les idéaux car  $V(S) = V(\langle S \rangle)$ , où  $\langle S \rangle$  est l'idéal engendré par  $S$ .

On donne quelques propriétés de cette application :

**Proposition 2.1.2.** L'application  $V$  a les propriétés suivantes :

1.  $V$  est décroissante pour l'inclusion.
2.  $\bigcap_{i \in J} V(S_i) = V(\bigcup_{i \in J} S_i)$  où  $S_i \subset K[X_1, \dots, X_n]$  et  $J$  un ensemble quelconque.
3.  $\bigcup_{i=1}^r V(I_i) = V(\bigcap_{i=1}^r I_i)$  pour  $I_i$  des idéaux.

*Démonstration.* 1. Plus on considère de polynômes, moins ils ont de points d'annulation en commun.

2. Ceci découle directement de la définition de l'ensemble, comme l'intersection correspond à un "pour tout".

3. On le fait pour deux idéaux  $I$  et  $J$ . On a  $V(I), V(J) \subset V(I \cap J)$  par décroissance, d'où le sens direct. Puis, on remarque que  $V(I) \cup V(J) = V(I \cdot J)$  avec  $I \cdot J = \{P \cdot Q, P \in I, Q \in J\}$ . En effet si  $P \in I$  et  $Q \in J$  et  $x$  un point, alors  $PQ(x) = 0$  ssi  $P(x) = 0$  ou  $Q(x) = 0$ . De plus  $I \cdot J \subset I \cap J$  donc  $V(I \cap J) \subset V(I \cdot J)$ .

□

On voit ainsi que l'on peut définir une topologie sur  $K^n$  :

**Définition 2.1.3.** La topologie de Zariski est une topologie sur  $K^n$  dont les fermés sont les ensembles algébriques affines. La proposition précédente assure que c'est bien une topologie (on a aussi que l'image de  $V$  contient les sous ensembles triviaux).

**Remarque 2.** Soit  $V$  un ensemble algébrique affine. Alors  $V$  s'écrit  $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$  où les  $V_i$  sont des irréductibles pour la topologie de Zariski (i.e.  $X$  est un espace topologique irréductible si :  $\forall F, G \in X$  fermés,  $X = F \cup G \Rightarrow X = F$  ou  $X = G$ ).

Nous définissons ensuite ce qui pourrait s'apparenter à une réciproque de  $V$  en définissant l'idéal annulateur d'un ensemble de points :

**Définition 2.1.4.** On pose l'application ensembliste suivante :

$$I : \mathcal{P}(K^n) \rightarrow \mathcal{P}(K[X_1, \dots, X_n])$$

$$V \mapsto I(V)$$

où  $I(V)$  l'ensemble des polynômes s'annulant sur  $V$  :

$$I(V) = \{Q \in K[X_1, \dots, X_n], Q(x) = 0 \forall x \in V\}$$

**Remarque 3.** L'image de  $I$  est comprise dans l'ensemble des idéaux de  $K[X_1, \dots, X_n]$ . De plus  $I$  aussi est décroissante.

On se demande alors en quelle mesure  $I$  constitue un inverse de  $V$ . On peut voir que  $V(I(V_0)) = V_0$  si  $V_0$  est algébrique affine. En effet  $V_0 \subset V(I(V_0))$  car  $V_0$  est annulé par  $I(V_0)$ . Et  $V_0 = V(S)$  avec  $S \in P(K[X_1, \dots, X_n])$  comme il est algébrique affine. Alors  $S \subset I(V_0)$  car  $S$  annule  $V_0$ . Donc par décroissance  $V(I(V_0)) \subset V(S) = V_0$ .

Par contre dans le cas général  $I(V(I_0)) \neq I_0$ . Par exemple  $I(V(\langle X^2 \rangle)) = I(V(\langle X \rangle))$ . On voit donc que  $V$  ne prend pas en compte la multiplicité des racines. Ainsi en réappliquant  $I$  il y a une perte de l'information initiale. On retrouve cette idée dans le Nullstellensatz :

**Théorème 2.1.5. (Nullstellensatz)** Si  $K$  est algébriquement clos alors

$$I(V(I_0)) = \text{rad}(I_0) \quad \text{où } \text{rad}(I_0) = \{R, \exists m \geq 0, R^m \in I_0\}$$

La preuve est assez longue, nous admettons donc ce résultat démontré dans [3]. Nous donnons tout de même un lemme qui est assez utile et central dans la preuve :

**Lemme 2.1.6.** Si  $I_0 \neq K[X_1, \dots, X_n]$  alors  $V(I_0) \neq \emptyset$  lorsque  $K$  est algébriquement clos.

**Remarque 4.** En dimension 1 ceci correspond à la définition d'être algébriquement clos : tout polynôme non constant admet une racine.

Ainsi  $V$  et  $I$  sont des bijections réciproques de l'ensemble des fermés de Zariski à l'ensemble des idéaux radiciels.

Dans le cas de notre étude, nous allons nous contenter de regarder les hypersurfaces affines, c'est-à-dire les  $V(f)$  où  $f$  est un polynôme, voire un polynôme de Laurent. Et plus particulièrement regarder leur image par  $\log(|\cdot|)$ , appelée l'amibe.

Pour se faire nous avons besoin de quelques définitions :

**Définition 2.1.7.** On définit les polynômes de Laurent à coefficients dans un anneau commutatif  $\mathcal{R}$  comme étant des expressions de la forme :

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha$$

Avec  $c_\alpha \in \mathcal{R} \forall \alpha$ .

Finalement, on définit le polytope de Newton d'un polynôme, c'est un objet géométrique qui nous sera utile par la suite.

**Définition 2.1.8.** Pour  $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha$  un polynôme de Laurent à n variables, alors son polytope de Newton  $\mathcal{P}_f$  est défini comme  $\mathcal{P}_f = \text{conv}\{\alpha \in \mathbb{Z}^n : c_\alpha \neq 0\}$ .

**Exemple.** Prenons  $f(x, y) = x^2y^2 + x^2y + xy^2 + x + y + 0$ , alors :

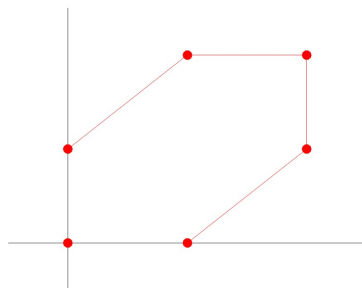


FIGURE 1 – Polytope de newton du polynôme  $f$

## 2.2 Géométrie polyédrale

Nous allons avoir besoin de quelques notions de géométrie polyédrale afin d'étudier la combinatoire des hypersurfaces. Dans cette section, nous allons donc définir quelques objets de base.

**Définition 2.2.1.** Un cône polyédral  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{R}^n$  est le cône engendré par un sous ensemble fini de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\mathcal{C} = \text{pos}(v_1, \dots, v_r) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \in \mathbb{R}^n : \lambda_i \geq 0 \forall i \right\}.$$

Le cône est simple si tous les  $v_i$  sont linéairement indépendants.

Une face d'un cône polyédral est définie comme :

$$\text{face}_w(\mathcal{C}) = \{x \in \mathcal{C} : w \cdot x \leq w \cdot y, \forall y \in \mathcal{C}\}.$$

Où  $w \in (\mathbb{R}^n)$ , et  $\cdot$  désigne le produit scalaire.

**Définition 2.2.2.** Un polyèdre  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^n$  est une intersection finie de demi-espaces fermés :

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}.$$

Avec  $A \in M_{d \times n}(\mathbb{R})$  et  $b \in \mathbb{R}^d$ .

Une face d'un polyèdre est définie de la même manière que pour un cône :

$$\text{face}_w(\mathcal{P}) = \{x \in \mathcal{P} : w \cdot x \leq w \cdot y, \forall y \in \mathcal{P}\}.$$

Où  $w \in (\mathbb{R}^n)$ .

Une face qui n'est contenue dans aucune face plus grande est appelée une facette.

**Définition 2.2.3.** Un polytope est un polyèdre borné, c'est donc l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

**Définition 2.2.4.** Un complexe polyédral est une collection finie  $\Sigma$  de polyèdres satisfaisant les deux conditions suivantes :

1. Si  $\mathcal{P} \in \Sigma$  alors toutes les faces de  $\mathcal{P}$  sont aussi dans  $\Sigma$
2. Si  $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \Sigma$  alors  $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$  est soit vide, soit une face des deux polyèdres.

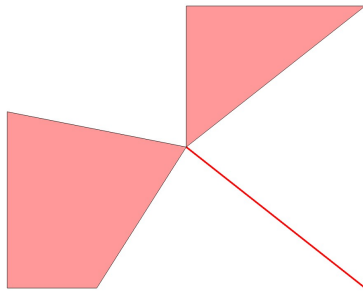
Le polyèdre de  $\Sigma$  sont appelés des cellules.

On définit le support de  $\Sigma$  comme :

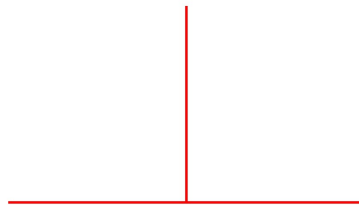
$$|\Sigma| = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in \mathcal{P} \text{ pour un certain } \mathcal{P} \in \Sigma\}$$

**Définition 2.2.5.** Un éventail est un complexe polyédral ne contenant que des cônes.

L'éventail est dit simple si tous ses cônes sont simples.



(a) Un complexe polyédral



(b) Pas un complexe polyédral

En effet, pour (b) on voit que l'intersection entre la droite verticale et la droite horizontale est une face de la première mais pas de la deuxième, ainsi (b) n'est pas un complexe. En revanche, en plus d'être un complexe, on voit que (a) est constitué uniquement de cônes, c'est donc un éventail.

À partir de ces définitions de base, nous pouvons définir les subdivisions de polyèdres qui vont être centrales dans notre étude. Il existe plusieurs manières de définir celles-ci, nous avons choisi d'utiliser les définitions introduites par Rullgard dans [4].

**Définition 2.2.6.** Soit  $\mathcal{P}$  un polyèdre. Une subdivision de  $\mathcal{P}$  est un complexe  $\Sigma$  de polyèdres telle que :  $|\Sigma| = \mathcal{P}$ .

**Définition 2.2.7.** Pour  $\sigma, \tau$  deux polyèdres et  $\tau \subset \sigma$  une face dans  $\sigma$ . Alors le cône sortant de  $\tau$  vers  $\sigma$  est le cône suivant :

$$\text{cone}(\tau, \sigma) = \{t(x - y), t \geq 0, x \in \sigma, y \in \tau\}.$$

**Exemple.** Prenons pour  $\sigma$  un rectangle et pour  $\tau_1$  l'une de ses arêtes. Alors,  $\text{cone}(\tau_1, \sigma)$  est le demi-espace dans la direction du carré par rapport à la face  $\tau_1$ . Si par contre, on prend  $\tau_2$  un sommet de  $\sigma$ , alors on obtient un quart d'espace.

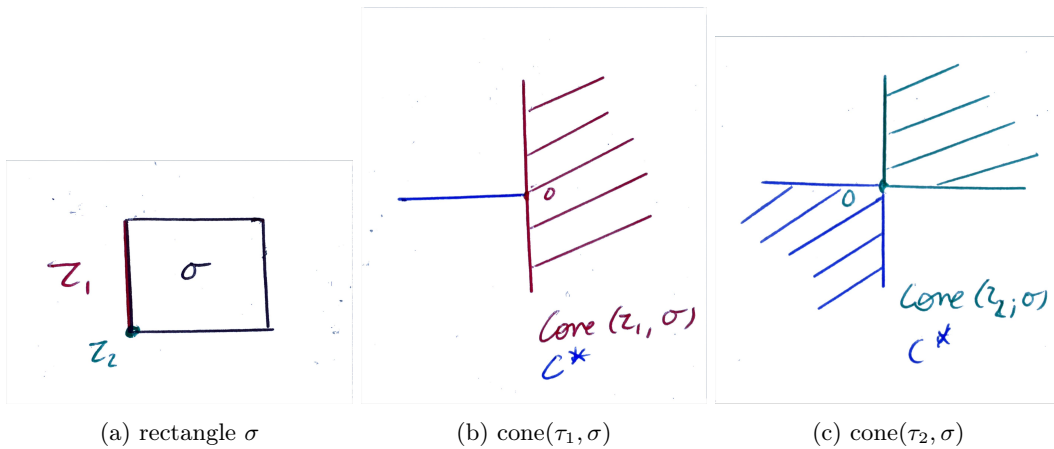


FIGURE 3 – Cône sortant d'une face

Cette définition va servir pour définir le dual d'une subdivision, pour cela, on peut commencer par le dual d'un cône.

**Définition 2.2.8.** Soit  $\mathcal{C}$  un cône. Alors le dual du cône est  $\mathcal{C}^* = \{\omega \in \mathbb{R}^n, \omega \neq 0, w \cdot x \leq 0, \forall x \in \mathcal{C}\}$ .

**Exemple.** Pour reprendre l'exemple précédent, le cône dual de  $\text{cone}(\tau_1, \sigma)$  est la demi droite partant de 0 et normale au demi espace. Et  $\text{cone}(\tau_2, \sigma)^*$  est le quart d'espace opposé au premier.

On peut maintenant définir le dual d'une subdivision :

**Définition 2.2.9.** Soit  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  deux polyèdres donnés avec une subdivision, respectivement  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ . Alors les subdivisions  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  sont duales s'il existe une bijection  $\sigma \in \Sigma \mapsto \sigma^* \in \Sigma'$  vérifiant la condition suivante :

$$\text{si } \sigma, \tau \in \Sigma, \tau \subset \sigma \Rightarrow \sigma^* \subset \tau^* \text{ et alors } \text{cone}(\tau, \sigma)^* = \text{cone}(\sigma^*, \tau^*).$$

**Remarque 5.** Cette définition ne permet pas très bien de voir comment construire les subdivisions duales. Nous allons donc montrer la technique donnée dans l'article de Rullgard [4] pour construire les subdivisions avec leurs duales.

Pour construire une subdivision de  $\mathcal{P}$ , on introduit la fonction  $s = \max\{l_1, \dots, l_n\}$  qui est le max d'un nombre fini de formes affines sur  $\mathcal{P}$  (i.e si  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ , alors  $l_i(x) = a_i \cdot x + b_i$  avec  $a_i, b_i \in \mathbb{R}^n$ , on dit alors que  $a_i$  est sa pente par analogie avec le cas en dimension 1). On peut en fait voir  $s$  comme un polyèdre. On pose :

$$\mathcal{P}_s = \{(x, s(x)), x \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

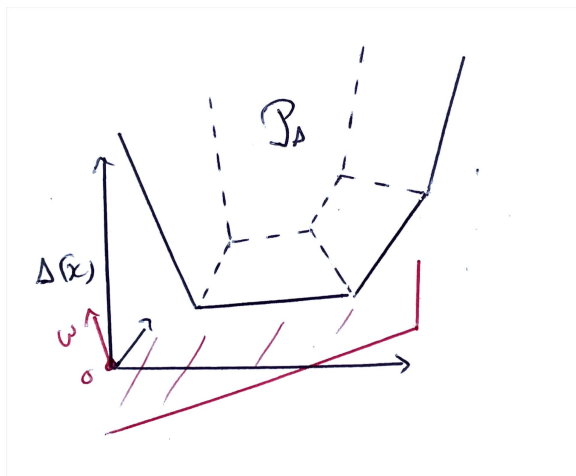


FIGURE 4 – fonction  $s$

**Proposition 2.2.10.**  $\mathcal{P}_s$  est un polyèdre de  $\mathcal{P} \times \mathbb{R}$  (C'est la même définition que sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  tout entier, soit une intersection de demi-plans). C'est l'épigraphe de  $s$ .

*Démonstration.* Si  $s(x) = \max_{i \in I} (l_i(x))$  avec  $a_i$  une forme affine sur  $\mathcal{P}$ , alors  $\mathcal{P}_s$  est l'intersection des demi-espaces  $\{(x, \lambda), \lambda \geq l_i(x)\}$ .  $\square$

**Définition 2.2.11.** On définit la transformée de Legendre de  $s$  de la manière suivante :  $\tilde{s}(\omega) = \sup_{x \in \mathcal{P}} (\omega \cdot x - s(x))$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^n$ .

**Proposition 2.2.12.** L'ensemble  $\mathcal{P}'$  des points  $\omega$  où  $\tilde{s}$  est finie est un polyèdre. Et  $\tilde{s}$  est un max de formes affines sûr  $\mathcal{P}'$ .

*Démonstration.* On verra la première partie de l'énoncé avec le point de vue géométrique. Commençons donc par montrer que  $\tilde{s}$  est un max de formes affines :

$\tilde{s}(\omega) = \sup_{x \in \mathcal{P}} (\omega \cdot x - s(x))$  est le sup d'une forme affine par morceaux, car le produit scalaire par  $\omega$  est linéaire. Montrons que le sup est atteint en l'un des sommets de  $\mathcal{P}_s$ .

En effet, on suppose que le sup est atteint en un point qui n'est pas un sommet (il est atteint, car c'est la distance entre deux fermés convexes). Comme localement la fonction est affine (au moins selon une droite), il existe une direction où l'on peut augmenter sa valeur (cf Figure 5). Donc l'ensemble des points sur lesquels le max est atteint sur la face en question est à la fois ouvert et fermé. Par connexité de la face, le max est atteint sur la face entière et donc sur un sommet de celle-ci.

Donc  $\tilde{s}(\omega) = \max_{x \in A} (\omega \cdot x - s(x))$  où  $A$  est l'ensemble des abscisses des sommets de  $\mathcal{P}_s$ , donc  $\tilde{s}$  est bien un max de formes affines.

□

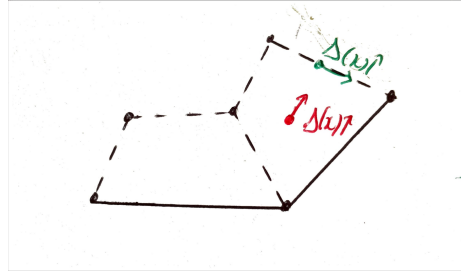


FIGURE 5

On peut en faire une interprétation géométrique. En effet, pour trouver  $\tilde{s}$  il faut observer l'hyperplan donné par  $\omega$ , soit  $\{(x, \omega \cdot x), x \in \mathcal{P}\}$  en relation avec  $\mathcal{P}_s$ .

Commençons par étudier où  $\mathcal{P} = \mathbb{R}$ . Ici,  $s$  est une fonction convexe et affine par morceaux. Choisir  $\omega$  revient à choisir une pente.  $\tilde{s}$  donne l'ordonnée à l'origine pour que la droite se colle par le bas à la figure 6. De plus, soit la droite se colle à un point de cassure, soit à une arête de  $\mathcal{P}_s$ . On voit alors qu'on peut associer à une arête de  $\mathcal{P}_s$  un unique  $\omega$  donnant la bonne pente, par contre pour un point de cassure, on a un ensemble de pentes possibles comprises entre les deux pentes données par les arêtes partant du sommet en question. On remarque déjà qu'en passant des  $x \in \mathcal{P}$  aux  $\omega$  il y a une sorte de dualité. Une arête donne un sommet et un sommet donne une arête.

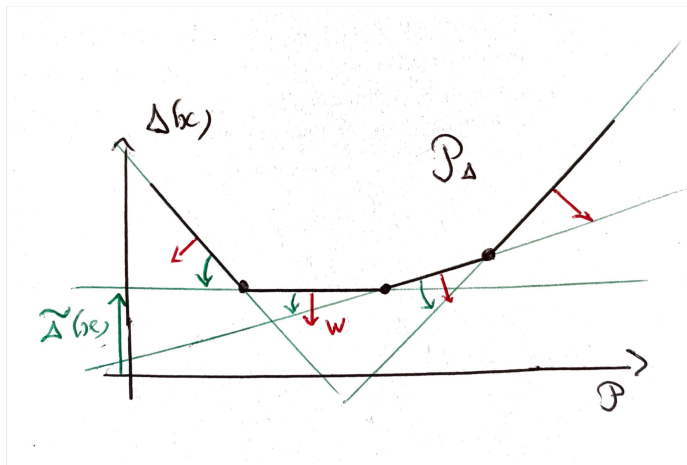


FIGURE 6 –  $s$  lorsque  $\mathcal{P} = \mathbb{R}$

Le cas de la dimension 2 ressemble plus au cas général, mais il est plus dur à se représenter. Dans ce cas  $\omega$  définit un plan qui vient se coller au polyèdre  $\mathcal{P}_s$ ,  $\tilde{s}$  définit toujours l'ordonnée à l'origine qui convient. Alors, ici chaque face de  $\mathcal{P}_s$  définit un unique  $\omega$ , sa pente. Et un plan peut venir se

coller à une arête si la pente de ce plan se trouve entre les pentes des deux faces partant de l'arête en question.

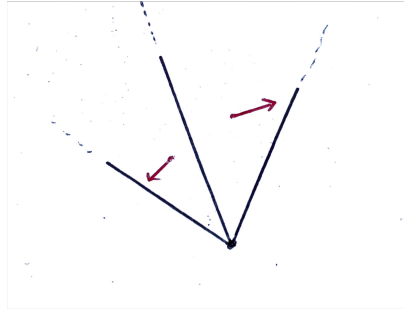


FIGURE 7 –  $\mathcal{P}$  en dimension 2

Alors, on peut observer que l'ensemble de définition de  $\tilde{s}$  est un polyèdre. Si une face est infini dans une direction, alors aucun hyperplan ne pourra aller plus loin dans cette direction. Par exemple, dans la *Figure 6*, on voit qu'il y a une pente limite à droite et à gauche par delà laquelle le sup ne sera pas atteint. Comme les faces s'assimilent à des sommets, on obtient alors les sommets délimitant le polyèdre dual  $\mathcal{P}'$ .

Nous pouvons maintenant définir les subdivisions duales associées à  $s$  et  $\tilde{s}$  :

**Définition 2.2.13.** On pose  $S(x, \omega) = s(x) + \tilde{s}(\omega) - \omega \cdot x$ . Et les deux ensembles :

- $\Sigma = \{x \in \mathcal{P}, S(x, \omega) = 0\}, \forall \omega \in \mathcal{P}'$ .
- $\Sigma' = \{\omega \in \mathcal{P}', S(x, \omega) = 0\}, \forall x \in \mathcal{P}$ .

**Proposition 2.2.14.**  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  sont des subdivisions duales de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ .

*Démonstration.* Pour cette preuve, regardons l'interprétation géométrique de  $S$ . Pour obtenir  $S(\cdot, \omega)$  on colle par le bas l'hyperplan donné par  $\omega$  au polyèdre  $\mathcal{P}_s$ . Puis, on redresse la figure pour que le plan affine obtenu devienne le plan d'ordonnée nulle. Ceci se voit algébriquement, car  $S \geq 0$  par définition du sup. Et l'annulation se fait sur toute une face délimitée par les sommets sur lesquels le max de  $\tilde{s}$  est atteint.

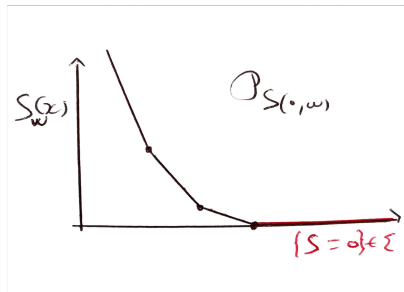


FIGURE 8 –  $S$  lorsque  $\mathcal{P} = \mathbb{R}$

On déduit de la discussion géométrique que les polyèdres dans le complexe  $\Sigma$  sont exactement les projections des faces de  $\mathcal{P}_s$  sur  $\mathcal{P}$ . C'est donc un complexe (et en particulier  $\Sigma$  est bien un ensemble fini), car l'ensemble des faces de  $\mathcal{P}_s$  forme un complexe. De plus l'union des faces fait  $\mathcal{P}$  car  $s$  est définie sur tout  $\mathcal{P}$ . On obtient de même le résultat sur  $\mathcal{P}'$ .

La partie difficile est la dualité. Tout d'abord, on peut construire la bijection :  $\sigma \in \Sigma \mapsto \sigma^* = \{\omega \in \Sigma', S(x, \omega) = 0, \forall x \in \sigma\}$ . Alors, on obtient bien une fonction décroissante. Par contre, il faut encore montrer que  $\sigma^{**} = \sigma$ , ce qui requiert le lemme de Farkas. De même pour la propriété sur les cônes. Nous allons donc admettre ce résultat-là.

□

**Exemple.** Voyons donc un exemple pour conclure cette partie. Ici, on regarde une subdivision du triangle.

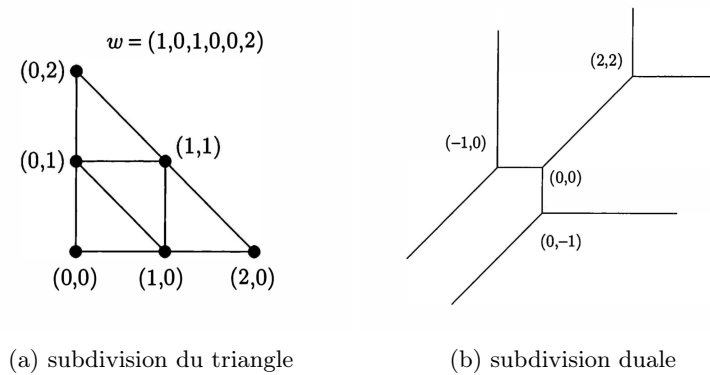


FIGURE 9 – Exemple de subdivisions duales tirés de [2]

Pour les construire, à chaque point marqué sur le triangle, on associe une certaine valeur (ici donnée par  $w$ ). Et on trouve une forme convexe et affine par morceaux qui prend ces valeurs. Ici le triangle inscrit prend la valeur 0, l'origine 2 et les deux derniers sommets 1. Alors, on obtient la subdivision dessinée. On peut voir la fonction  $s$  dans la figure suivante :

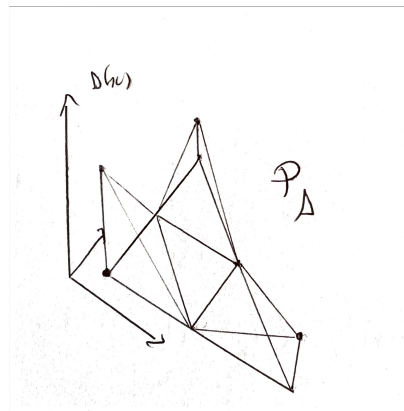


FIGURE 10 – fonction  $s$  associée

Alors pour trouver le dual, chaque face doit être changée en un sommet et elles sont reliées par des arêtes de direction opposées à celle entre les faces de la subdivision initiale. Les coordonnées associées à une face se trouvent avec le vecteur orthogonal à celle-ci et ayant pour ordonnée 1. Donc le sommet en  $(2, 2)$  correspond à la face en  $(0, 0)$  par exemple.

### 2.3 Amibes

Dans cette section, on se place dans le corps archimédien  $\mathbb{C}$  et on considère les polynômes de Laurent  $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha \in \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$ . Nous allons introduire l'amibe d'un polynôme de Laurent et faire le lien entre celle-ci et le polytope de Newton associé au polynôme. Nous allons nous rendre compte du lien étroit entre ces deux objets.

**Définition 2.3.1.** Nous définissons l'application  $\text{Log}$  définie sur le tore  $(\mathbb{C}^*)^n$  comme telle :

$$\begin{aligned} \text{Log} : (\mathbb{C}^*)^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ z = (z_1, \dots, z_n) &\mapsto (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|). \end{aligned}$$

Cette application est bien définie, car  $\log$  est bien défini sur  $\mathbb{R}_{>0}$ .

**Remarque 6.** L'application  $\text{Log}$  est une application propre, c'est-à-dire qu'elle est fermée et que l'image réciproque d'un compact est compacte. En effet, pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\text{Log}^{-1}(x) = \{z \in (\mathbb{C}^*)^n : z_j = e^{x_j + i\theta_j}\}$  est compact.

**Définition 2.3.2.** Pour  $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha$ , on appelle Amibe de  $f$  l'ensemble  $\mathcal{A}_f = \text{Log}(f^{-1}(0))$ .

**Remarque 7.** On présente ici quelques idées sous-jacentes à l'étude de  $(\mathbb{C}^*)^n$  qui permettent de montrer que les objets présentés après sont bien définis. Prenons un réseau  $L$  de dimension  $n$  (c'est-à-dire un groupe abélien libre de rang  $n$ ) et  $L^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$  son espace dual. On construit le groupe abélien suivant :  $L_{\mathbb{C}^*} = L \otimes \mathbb{C}^*$ . Si on choisit une base pour  $L$  on obtient un isomorphisme entre  $L_{\mathbb{C}^*}$  et  $(\mathbb{C}^*)^n$ , avec ces notations, on obtient que  $L_{\mathbb{C}^*}$  est en plus une variété complexe. On peut donc trouver une unique mesure de Haar sur  $L_{\mathbb{C}^*} \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ . Comme  $\text{Log}^{-1}(0)$  est compact dans  $(\mathbb{C}^*)^n$  on lui associe une mesure de Haar  $\eta_0$ . De plus, si  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $z \in \text{Log}^{-1}(x)$  on a  $\text{Log}^{-1}(0) \cdot z = \text{Log}^{-1}(x)$  donc comme la mesure est invariante par translation, on obtient donc que toutes les fibres  $\text{Log}^{-1}(x)$  ont la même mesure  $\eta_o = \eta$ .

Dans la suite de ce paragraphe, nous considérons que nous avons choisi une base pour  $L$  et que  $L = \mathbb{Z}^n$ , ainsi on garde comme notation  $(\mathbb{C}^*)^n$ .

**Définition 2.3.3.** Pour  $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha$  un polynôme de Laurent, on définit sa fonction de Ronkin :

$$\begin{aligned} N_f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \log |f(z)| d\eta(z). \end{aligned}$$

$$\text{avec } d\eta(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{z_1 \dots z_n}.$$

**Remarque 8.** Si  $z \in \text{Log}^{-1}(x)$  pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  alors  $z = (e^{x_1+i\theta_1}, \dots, e^{x_n+i\theta_n})$  avec cette notation  $d\eta(z)$  devient  $\frac{1}{(2\pi i)^n} d\theta_1 \cdot \dots \cdot d\theta_n$ ,  $\text{Log}^{-1}(x)$  devient  $[0, 2\pi]^n$  et on a :

$$N_f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} \log |f((e^{x_1+i\theta_1}, \dots, e^{x_n+i\theta_n}))| d\theta_1 \cdot \dots \cdot d\theta_n.$$

**Exemple.** Calculons la fonction de Ronkin pour  $f(z) = az_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot z_n^{\alpha_n}$  un monôme :

$$N_f(x) = \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \log |az_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot z_n^{\alpha_n}| d\eta(z) = \log |a| + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n.$$

**Définition 2.3.4.** Pour  $E$  une composante connexe de  $\mathcal{A}_f^c$ , on définit son ordre  $\alpha \in \mathbb{R}$  comme :

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} d(z_1, \dots, \zeta z_j, \dots, z_n), \text{ pour } z \in \text{Log}^{-1}(E) \\ &= \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \frac{z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}}{f(z)} d\eta(z), \text{ pour } x \in E. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant donner quelques résultats classiques sur l'amibe d'un polynôme de Laurent en la connectant avec la fonction de Ronkin de celui-ci, ces résultats viennent de [4]

**Théorème 2.3.5.** Pour  $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha$  un polynôme de Laurent, on a :

1.  $N_f$  est convexe.
2.  $N_f$  est affine sur un ouvert connexe  $E$  précisément si  $E \subset \mathcal{A}_f^c$ .
3. Si  $E$  est une composante connexe de  $\mathcal{A}_f^c$ , alors  $\text{grad}N_f|_E$  est égal à l'ordre de  $E$ .

*Démonstration.* 1. On admet que  $N_f$  est convexe sans donner les détails de la preuve que l'on peut retrouver dans l'article [4] de Rullgard. On donne tout de même l'idée :

Comme  $f$  est un polynôme de Laurent  $\log |f|$  est plurisousharmonique, ainsi  $N_f(\text{Log})$  est aussi plurisousharmonique, ce qui nous donne que  $N_f$  est bien convexe.

2. On suppose que  $E$  est un ouvert connexe avec  $E \subset \mathcal{A}_f^c$ . On peut alors définir la fonction de Ronkin  $N_{1/f}$  de la fonction  $1/f$ , ainsi  $N_{1/f}$  est convexe par le point 1. Mais on observe que  $N_{1/f} = -N_f$  alors  $N_f$  est à la fois convexe et concave, étant l'opposée d'une fonction convexe, c'est donc une fonction affine.

3. Il suffit de différencier la fonction de Ronkin pour  $x \in E$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_f}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \log |f(z)| d\eta(z) \\ &= \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} \log |f(z)| d\eta(z) \\ &= \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \frac{z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}}{f(z)} d\eta(z) \\ &= \alpha_j. \end{aligned}$$

Ici, on a pu intervertir la dérivée partielle avec l'intégrale, car  $x \in E \subset \mathcal{A}_f^c$  donc  $f \neq 0$ . □

À partir de ce théorème, on peut déduire des propriétés des composantes connexes de  $\mathcal{A}_f^c$  :

**Corollaire 2.3.6.** *Toutes les composantes connexes de  $\mathcal{A}_f^c$  sont ouvertes et convexes.*

*Démonstration.*  $A_f$  est fermée, car la fonction Log est propre, donc toutes les composantes connexes de  $\mathcal{A}_f^c$  sont ouvertes.

Pour une composante connexe  $E$  d'ordre  $\alpha$  on a par le *théorème 2.3.5* que  $N_f(x) = c + \alpha.x$  sur  $E$ , et par convexité de  $N_f : \forall y, \forall x \in E$  :

$$N_f(y) \geq N_f(x) + \text{grad } N_f(x)^T \cdot (y - x) = N_f(x) + \alpha.y - \alpha.x = c + \alpha.y.$$

Posons  $K_\alpha = \{x : N_f(x) = c + \alpha.x\}$ , c'est un ensemble convexe :  $\forall x, y \in K_\alpha, \forall t \in [0, 1]$ , on a par convexité de  $N_f$  :

$$c + \alpha.tx - (1 - t)y \leq N_f(tx + (1 - t)y) \leq tN_f(x) + (1 - t)N_f(y) = c + \alpha.tx - (1 - t)y.$$

De plus, comme  $N_f$  est affine sur  $K_\alpha$  et  $E \subset \text{int}(K_\alpha)$  par définition de  $K_\alpha$  donc on a que  $\text{int}(K_\alpha)$  est un ouvert connexe ainsi par le *Théorème 2.3.5*  $\text{int}(K_\alpha) \cap \mathcal{A}_f = \emptyset$  donc  $E = \text{int}(K)$ . □

**Corollaire 2.3.7.** *Si  $E, E'$  sont deux composantes connexes différentes de  $\mathcal{A}_f^c$  d'ordre  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement, alors  $\alpha \neq \beta$ .*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $\beta = \alpha$  :

Il existe  $c, c'$  tq :

1.  $\forall x \in E \ N_f(x) = c + \alpha.x$  et  $\forall y \in \mathbb{R}^n : N_f(y) \geq c + \alpha.y$ .
2.  $\forall x \in E' \ N_f(x) = c' + \alpha.x$  et  $\forall y \in \mathbb{R}^n : N_f(y) \geq c' + \alpha.y$ .

Alors si  $x \in E$  on obtient :  $N_f(x) = c + \alpha.x \geq c' + \alpha.x \Rightarrow c \geq c'$  et si  $x \in E'$  on obtient :  $N_f(x) = c' + \alpha.x \geq c + \alpha.x \Rightarrow c' \geq c \Rightarrow c = c'$ . Ce qui montre que  $E = E'$  par convexité de  $N_f$  et  $E, E'$ . □

Afin de simplifier nos notations, on introduit les définitions suivantes :

**Définition 2.3.8.** Soit  $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha$  un polynôme de Laurent et  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ , on définit :

$$m_\alpha(f, x) = \frac{\sum_{\beta \neq \alpha} |c_\beta| \exp(\beta.x)}{|c_\alpha| \exp(\alpha.x)}$$

et

$$m_\alpha(f) = \inf_x (m_\alpha(f, x)).$$

On peut trouver un lien entre les coefficients dominants d'un polynôme de Laurent et l'ordre des composantes connexes du complémentaire de l'amibe :

**Lemme 2.3.9.** *On suppose que  $m_\alpha(f, x) < 1$  pour un certain  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$  et un  $x \in \mathbb{R}^n$ . Alors  $x \in \mathcal{A}_f^c$  et la composante connexe contenant  $x$  est d'ordre  $\alpha$ .*

*Démonstration.* Par l'inégalité triangulaire on a :

$$0 < |c_\alpha| \exp(\alpha.x) - \sum_{\beta \neq \alpha} |c_\beta| \exp(\beta.x) \leq |c_\alpha z^\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} |c_\alpha z^\beta| = |f(z)|$$

$\forall z \in \text{Log}^{-1}(x)$  Donc  $x \in \mathcal{A}_f^c$ .

On considère la fonction :  $g : \zeta \mapsto f((e^{x_1}, \dots, \zeta e^{x_j}, \dots, e^{x_n}))$  alors c'est une fonction méromorphe et par le principe de l'argument :  $\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} d \log(f((e^{x_1}, \dots, \zeta e^{x_j}, \dots, e^{x_n})))$  est égal au nombre de zéros moins le nombre de pôles de  $g$  à l'intérieur du lacet défini par le contour  $|\zeta| = 1$ .

Maintenant comme on a  $|g(\zeta) - c_\alpha \exp(\alpha.x) \zeta^{\alpha_j}| = |\sum_{\beta \neq \alpha} c_\beta \exp(\beta.x) \zeta^{\beta_j}| < |c_\alpha \exp(\alpha.x) \zeta^{\alpha_j}|$  par hypothèse. Alors soit  $\mu$  l'ordre de la composante connexe de  $x$  dans  $\mathcal{A}_f^c$ , par le théorème de Rouché, on a :

$$\begin{aligned} \mu_j &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} d \log(f((e^{x_1}, \dots, \zeta e^{x_j}, \dots, e^{x_n}))) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} d \log\left(\sum_{\beta} c_\beta \exp(\beta.x) \zeta^{\beta_j}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} d \log(c_\alpha \exp(\alpha.x) \zeta^{\alpha_j}) = \alpha_j. \end{aligned}$$

Donc  $\mu = \alpha$ . □

**Corollaire 2.3.10.** *Si  $\alpha$  est un sommet de  $\mathcal{P}_f$ , où  $\mathcal{P}_f$  est le polytope de Newton de  $f$  (cf. définition 2.1.8, alors  $m_\alpha(f) = 0$  et donc  $\mathcal{A}_f^c$  a une composante connexe d'ordre  $\alpha$ .*

*Démonstration.* Comme  $\alpha$  est un sommet de  $\mathcal{P}_f$ ,  $\exists y \in \mathbb{R}^n$  tel que  $(\alpha - \beta).y > 0 \forall \beta$  tel que  $c_\beta \neq 0$ . Maintenant, on voit que  $\forall \beta \in \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{P}_f$  la fonction  $t \mapsto \exp(\beta - \alpha).(x + ty)$  est décroissante car  $(\alpha - \beta).y > 0 \Rightarrow (\beta - \alpha) < 0$  donc lorsque  $t \mapsto \infty$  on obtient que la fonction tend vers 0. En particulier :

$$m_\alpha(f, x + ty) = \frac{\sum_{\beta \neq \alpha} |c_\beta| \exp(\beta.x + t\beta.y)}{|c_\alpha| \exp(\alpha.x + t\alpha.y)} \rightarrow 0.$$

Lorsque  $t \mapsto \infty$ . Ainsi  $m_\alpha(f) = 0$ . □

**Définition 2.3.11.** Soit  $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe, alors  $\xi \in \mathbb{R}^n$  est un sous gradient de  $u$  en  $x_0 \in U$  si  $\forall x \in U$  on a  $\xi.(x - x_0) \leq u(x) - u(x_0)$ . On note  $\text{grad } u(x_0)$  l'ensemble des sous gradients de  $u$  en  $x_0$ .

On note aussi  $\text{grad } u(V) = \bigcup_{x_0 \in V} \text{grad } u(x_0)$  pour  $V \subset U$ .

**Théorème 2.3.12.**  $\text{grad } N_f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{P}_f$ .

*Démonstration.*  $\mathcal{P}_f$  est un polyèdre borné ainsi on peut écrire  $\mathcal{P}$  comme  $\mathcal{P} = \{y \in \mathbb{R}^n : y.A \geq k\}$  (voir définition 2.2.2), on prend donc  $a \in \mathbb{Z}^n$  une colonne quelconque de  $A$  alors  $y.a \geq k \forall y \in \mathcal{P}_f$

en particulier  $\forall \alpha$  tel que  $c_\alpha \neq 0$ .

Soit  $\xi \in \text{grad } N_f(x)$  pour un  $x \in \mathbb{R}^n$ . Si  $z \in \text{Log}^{-1}(x)$  alors

$$\zeta^{-k} f(\zeta^a z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha \zeta^{\alpha \cdot a - k} z^\alpha = g(\zeta)$$

est holomorphe sur le disque unité  $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ .

On applique le principe du maximum à  $g : \sup_{\zeta \in \mathbb{D}} |g(\zeta)| \leq \sup_{|\zeta|=1} |g(\zeta)|$ . Donc :

$$\sup_{|\zeta|=e^{-t}} |g(\zeta)| \leq \sup_{|\zeta|=1} |g(\zeta)|.$$

Donc :

$$\sup_{|\zeta|=e^{-t}} |g(\zeta)| = \sup_{z \in \text{Log}^{-1}(x-ta)} |e^{kt} f(z)| \leq \sup_{|\zeta|=1} |f(\zeta^a z)| = \sup_{z \in \text{Log}^{-1}(x)} |f(z)|.$$

Ainsi

$$N_f(x-ta) = \int_{\text{Log}^{-1}(x-ta)} \log |f(z)| d\eta(z) \leq -kt + \sup_{z \in \text{Log}^{-1}(x)} \log |f(z)|.$$

Alors par définition du sous gradient :

$$\xi \cdot (-ta) = \xi \cdot (x-ta-x) \leq N_f(x-ta) - N_f(x) \leq -kt + \sup_{z \in \text{Log}^{-1}(x)} \log |f(z)| - N_f(x).$$

Comme  $\text{Log}^{-1}(x)$  est compact,  $\sup_{z \in \text{Log}^{-1}(x)} \log |f(z)| - N_f(x)$  est fini donc quand on fait tendre  $t \mapsto \infty$  on obtient  $\xi \cdot a \geq k$ . Or ceci est vrai pour tout  $a$  vérifiant cette propriété, comme un polyèdre est défini par ces demi-espaces affines on a  $\xi \in \mathcal{P}_f$ .

Maintenant, on prend  $\xi \in \mathcal{P}_f$ . Si  $\xi$  est un sommet, alors par le *Théorème 2.3.12* et le *Corollaire 2.3.10*  $\xi \in \text{grad } N_f(\mathbb{R}^n)$  car il existe une composante connexe de  $\mathcal{A}_f^c$  d'ordre  $\xi$ . Si  $\xi$  n'est pas un sommet, alors pour tout  $x$ , il existe un sommêt  $\alpha$  de  $\mathcal{P}_f$  tel que  $(\alpha - \xi) \cdot x \geq 0$  (on utilise la définition d'un face de polyèdre), et de plus  $N_f(x) \geq C_\alpha + \alpha \cdot x$ . Quitte à prendre le min des constantes, on peut supposer que la constante  $C_\alpha = C$  est la même pour chaque sommet, ainsi :

$$N_f(x) - \xi \cdot x = N_f(x) - \alpha \cdot x + (\alpha - \xi) \cdot x \geq C + \max_{\alpha \text{ sommet de } \mathcal{P}_f} ((\alpha - \xi) \cdot x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \infty.$$

Donc  $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $N_f(x) - \xi \cdot x$  atteint son minimum en  $x_0$  donc  $N_f(x) - N_f(x_0) \geq \xi \cdot (x - x_0)$ .

Ainsi  $\xi \in \text{grad } N_f(x_0)$ . □

**Théorème 2.3.13.** *L'application suivante est injective :*

$$\begin{aligned} \{E_\alpha, \text{ composante connexe de } \mathcal{A}_f^c \text{ d'ordre } \alpha\} &\rightarrow \mathcal{P}_f \cap \mathbb{Z}^n \\ E_\alpha &\mapsto \alpha \end{aligned}$$

De plus on trouve les bornes suivante :

$$\# \text{Sommet de } \mathcal{P}_f \leq \# \text{ composantes connexes de } \mathcal{A}_f^c \leq \#\mathbb{Z}^n \cap \mathcal{P}_f.$$

*Démonstration.* On obtient que  $\text{grad}N_f|_{E_\alpha} = \alpha \in \mathcal{P}_f$  par le *Théorème 2.3.12* donc l'application est bien définie et l'injectivité vient du *Corollaire 2.3.7*.

La borne supérieure vient de l'injectivité de l'application que l'on vient de définir et la borne inférieure vient du *Corollaire 2.3.10*.  $\square$

Il existe d'autres résultats mettant en relation l'amibe d'un polynôme de Laurent et le polytope de Newton, mais en ce qui nous concerne nous avons tous les résultats nécessaires pour nous permettre de continuer, nous en restons donc là.

## 2.4 Squelette

On va maintenant utiliser ce qui a été développé sur les amibes pour définir leur squelette qui ressemble à une approximation affine par morceaux de l'amibe. Ceci est encore tiré de [4] Pour cela, on fait une subdivision de l'espace total (comme on considère des polynômes, la fonction est définie sur tout l'espace). Cette subdivision se réalise à l'aide de la fonction de Ronkin qui est presque un max de fonction affines. En effet, on pose  $s(x) = \max_{\alpha \text{ ordre}} (\Phi_\alpha(x))$  où  $\Phi_\alpha$  est la fonction affine coïncidant avec  $N_f$  sur la composante  $E_f(\alpha)$  donc  $\Phi_\alpha(x) = \alpha \cdot x + c_\alpha$ . Alors les sommets du polyèdre dual  $\tilde{s}$  sont associés aux faces, ce sont donc exactement les composantes  $\alpha$ . Donc ces sommets sont tous des points entiers du polytope de Newton. Ainsi, la subdivision  $\Sigma'$  associée à  $\tilde{s}$  est une subdivision du polytope de Newton !

**Définition 2.4.1.** On définit le squelette de l'amibe de  $f$ , noté  $S_f$  comme le  $(n-1)$ -squelette du complexe polyédral  $\Sigma$ .

**Proposition 2.4.2.**  $S_f$  est une rétraction par déformation forte de l'amibe  $\mathcal{A}_f$ .

*Démonstration.* Nous allons uniquement montrer que  $S_f \subset \mathcal{A}_f$  et admettre le résultat de rétraction qui demande des constructions explicites. Si par l'absurde, on a un point  $x$  du squelette dans  $\mathcal{A}_f^c$ , alors comme c'est le  $n-1$  squelette de  $\Sigma$ ,  $x$  est dans au moins deux faces du complexe. Donc le max de  $s$  est atteint 2 fois au moins. Ainsi, comme  $x \in \mathcal{A}_f^c$ ,  $x$  est dans deux composantes de  $\mathcal{A}_f^c$  car ce sont les lieux où les max sont atteints. Or, elles sont disjointes. C'est donc absurde.  $\square$

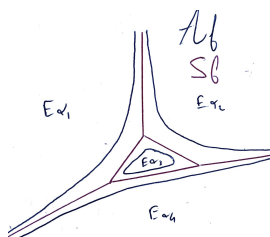


FIGURE 11 – et  $\{\alpha\}^*$

### 3 Cas non archimédien

#### 3.1 Principes de base de la géométrie tropicale

Afin d'étudier les amibes non archimédiennes, que nous définirons plus tard, nous allons avoir besoin de quelques notions de base de géométrie tropicale. En effet, lorsque l'on s'intéresse aux polynômes à coefficients dans un corps non archimédien, on se rend compte que leurs amibes peuvent se retrouver à partir de fonctions linéaires par morceaux définies sur  $\mathbb{R}^n$  qui s'obtiennent en "tropicalisant" les polynômes.

Cette section est grandement inspirée du chapitre 1 de [2], le livre de Maclagan et Sturmfels.

**Définition 3.1.1.** On définit le semi-anneau tropical  $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$  tel que :

1.  $x \oplus y = \min\{x, y\}$ .
2.  $x \odot y = x + y$ .

Pour tout  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Cela définit un semi-anneau dont les lois sont associatives, commutatives, admettent un élément neutre ( $\infty$  et 0 resp.) et sont distributives :

$$x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z$$

pour tout  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Par contre, il n'y a pas d'inverse à l'addition. Par exemple, l'équation  $5 \oplus x = 6$  n'a pas de solution, c'est pour cela que c'est un semi-anneau.

Ce qui va nous intéresser pour la suite ce sont les polynômes définis sur cet anneau :

**Définition 3.1.2.** Un monôme en  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  est un produit de ces variables ou les répétitions sont permises.

**Exemple.**  $x_2 \odot x_3 \odot x_1 \odot x_2 = x_1 + 2x_2 + 2x_3$ .

**Définition 3.1.3.** Un polynôme tropical est une combinaison linéaire finie de monômes.

- Exemple.**
1.  $p(x_1, x_2, x_3) = a \odot x_1^2 x_2 \oplus b \odot x_3^4 \oplus c \odot x_1 x_3$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .
  2.  $p(x) = x^3 \oplus -1 \odot x^2 \oplus x \oplus 2 = \min\{3x, 2x - 1, x, 2\}$ .

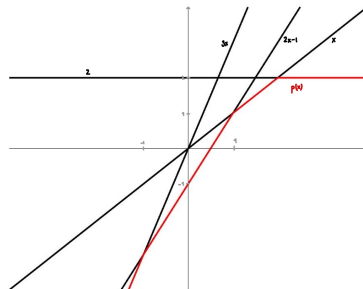


FIGURE 12 –  $p(x)$

On peut montrer que les polynômes tropicaux en  $n$  variables vus comme fonction de  $\mathbb{R}^n$  sont continues, concaves et linéaires par morceaux et on observe que les points de non-linéarité sont exactement les points où le minimum est atteint plusieurs fois, ces points sont par définition les racines du polynôme tropical.

On peut définir ce qu'on pourrait appeler l'analogie tropical de la variété affine d'un polynôme :

**Définition 3.1.4.** Pour un polynôme tropical  $p$ , on définit son hypersurface tropicale comme

$$V(p) = \{w \in \mathbb{R}^n : \text{le minimum dans } p(w) \text{ est atteint au moins deux fois}\}$$

ou de manière équivalente,  $w$  est un point de non-linéarité de  $p$ . Ainsi  $V(p)$  est l'ensemble des racines du polynôme tropical  $p$ .

**Exemple.** Une droite tropicale définie par un polynôme :  $p(x, y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c = \min\{a + x, b + y, c\}$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$  est constituée de trois demi-droites :  $\{c = b + y \leq a + x\}$ ,  $\{c = a + x \leq b + y\}$  et  $\{a + x = b + y \leq c\}$  partant du point  $(c - a, c - b)$ .

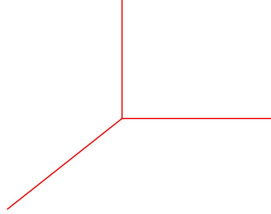


FIGURE 13 –  $V(p)$

**Définition 3.1.5.** Pour  $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_{\alpha} z^{\alpha}$  un polynôme tropical à  $n$  variables alors comme dans la définition 2.1.8 alors son polytope de Newton  $\mathcal{P}_f$  est défini comme  $\mathcal{P}_f = \text{conv}\{\alpha \in \mathbb{Z}^n : c_{\alpha} \neq 0\}$ .

## 3.2 Valuations

Nous allons maintenant introduire ce qu'est une valuation sur un corps et donner quelques propriétés de celle-ci.

**Définition 3.2.1.** Soit  $K$  un corps, une valuation sur  $K$  est une fonction  $\text{val} : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  qui satisfait les conditions suivantes :  $\forall a, b \in K$  on veut :

1.  $\text{val}(a) = \infty$  ssi  $a = 0$ .
2.  $\text{val}(ab) = \text{val}(a) + \text{val}(b)$ .
3.  $\text{val}(a + b) \geq \min\{\text{val}(a), \text{val}(b)\}$ .

On définit le groupe de valuation  $\Gamma_{\text{val}}$  associé à  $\text{val}$  comme l'image de la valuation restreinte à  $K^*$  i.e  $\Gamma_{\text{val}} = \text{val}(K^*)$ , c'est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ .

De cette définition, on peut en tirer quelques propriétés sur les valuations :

**Lemme 3.2.2.** Soit  $\text{val} : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  une valuation sur un corps  $K$  alors :

1.  $\text{val}(1) = 0$ .
2.  $\forall b \in K \text{ val}(-b) = \text{val}(b)$ .
3.  $\forall a, b \in K$ , si  $\text{val}(a) \neq \text{val}(b)$  alors  $\text{val}(a + b) = \min(\text{val}(a), \text{val}(b))$ .

**Remarque 9.** On peut définir une valuation de la même manière en remplaçant  $K$  par un anneau  $A$  commutatif.

*Démonstration.* 1.  $\text{val}(1) = \text{val}(1^2) = \text{val}(1) + \text{val}(1) \iff \text{val}(1) = 0$ .

2.  $\text{val}(1) = \text{val}((-1)^2) = \text{val}(-1) + \text{val}(-1) = 0 \Rightarrow \text{val}(-1) = 0$ .

Donc  $\text{val}(-b) = \text{val}(-1) + \text{val}(b) = \text{val}(b)$ .

3. Supposons que  $\text{val}(a) < \text{val}(b)$  alors, on sait que  $\text{val}(a + b) \geq \min(\text{val}(a), \text{val}(b)) = \text{val}(a)$  et de plus :

$$\text{val}(a) = \text{val}(a + b - b) \geq \min(\text{val}(a + b), \text{val}(b)) \geq \text{val}(a + b).$$

Ainsi, on a bien  $\text{val}(a + b) = \text{val}(a) = \min(\text{val}(a), \text{val}(b))$ .

□

**Remarque 10.** Pour un corps valué  $(K, \text{val})$  on dit que la valuation admet une section s'il existe un morphisme de groupe  $\phi : (\Gamma_{\text{val}}, +) \rightarrow (K^*, \cdot)$  tel que  $\text{val}(\phi(\omega)) = \omega$  et on notera  $t^\omega$  l'élément  $\phi(\omega) \in K^*$ .

Dans [2] MacLagan et Sturmfels démontrent que si  $K$  est un corps algébriquement clos, alors sa valuation admet une section. On admettra ce résultat.

**Remarque 11.** On considère l'anneau de valuation  $R = \{c \in K : \text{val}(c) \geq 0\}$ , alors cet anneau est local (i.e a un unique idéal maximal). En effet  $\text{val}(xx^{-1}) = \text{val}(1) = 0$  pour tout élément  $x \in K$  inversible, ainsi  $x \in R$  est inversible si et seulement si  $\text{val}(x) = 0$  ainsi pour  $x, y \in R$  avec  $x$  non inversible, on a bien  $\text{val}(xy) = \text{val}(x) + \text{val}(y) > 0$  donc les éléments non inversibles de  $R$  forment bien un idéal. Cet idéal est l'unique idéal maximal de  $R$ .

On a utilisé le fait qu'un anneau est local si et seulement l'ensemble de ses éléments inversibles forment un idéal.

**Définition 3.2.3.** On définit  $m_K = \{c \in K : \text{val}(c) > 0\}$  qui est l'unique idéal maximal de  $R$ . On peut donc définir l'anneau quotient  $k = R/m_K$  qui un corps. Ce corps est appelé corps résiduel de  $(K, \text{val})$  et on note  $\bar{c}$  l'image de  $c \in R$  dans le quotient  $k$ .

**Exemple.** Soit  $K$  un corps et on considère  $K[t]$  l'anneau des polynômes à coefficients dans  $K$ , alors on définit la valuation suivante :

$$\begin{aligned} \text{val} : K[t] &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ P(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} c_\alpha t^\alpha &\mapsto \inf\{\alpha : c_\alpha \neq 0\}. \end{aligned}$$

Avec  $\text{val}(0) = \infty$ .

Un polynôme a donc pour valuation le plus petit exposant qui apparaît dans son développement. On

peut étendre cette valuation au corps  $K(t)$  des fonctions rationnelles avec  $\text{val}(f/g) = \text{val}(f) - \text{val}(g)$ . Ainsi pour  $f \in K(t)$ ,  $\text{val}(f)$  est moins l'ordre du pôle de  $f$  en 0 ou l'ordre du zéro de  $f$  en 0.

**Proposition 3.2.4.** *La fonction définie au-dessus définie sur le corps des fonctions rationnelles est bien une valuation.*

*Démonstration.* Vérifions que la fonction  $\text{val}$  vérifie bien les propriétés d'une valuation :

1. Par définition, on a  $\text{val}(0) = \infty$ .
2. Soit  $f, g \in K(t)$  on écrit alors  $f(t) = t^w \sum_{k=0}^n a_k t^k$  et  $g(t) = t^u \sum_{l=0}^m b_l t^l$ . Alors :

$$\text{val}(fg) = \text{val}(t^{w+u} (\sum_{i=0}^{n+m} (\sum_{k+l=i} a_k b_l) t^i)) = w + u = \text{val}(f) + \text{val}(g).$$

3. on suppose que  $w < u$  alors  $\text{val}(f + g) = w$ . Si  $w = u$  alors,  $\text{val}(f + g) = w$  sauf si  $a_0 = -b_0$  dans ce cas  $\text{val}(f + g) > w$ .

C'est bien une valuation. □

**Remarque 12.** Cette valuation peut être étendue au corps des séries de Puiseux  $K\{\{t\}\} = \bigcup_{n \geq 1} K((t^{1/n}))$ , avec  $K((t))$  le corps des séries formelles à coefficients dans  $K$ , Maclagan et Sturmfels dans [2] montre que  $K\{\{t\}\}$  est la clôture algébrique de  $K(t)$  lorsque  $K$  est algébriquement clos.

Une valuation non triviale  $\text{val}$  sur un corps  $K$  induit une valeur absolue :

$$|\cdot|_{\text{val}} : K \rightarrow \mathbb{R}$$

$$c \mapsto \begin{cases} \exp(-\text{val}(c)), & c \neq 0. \\ 0 & c = 0. \end{cases}$$

Cela vérifie bien les axiomes d'une norme :  $\forall c, c' \in K$  :

1.  $|c|_{\text{val}} = 0 \iff c = 0$ .
2.  $|cc'|_{\text{val}} = \exp(-\text{val}(cc')) = \exp(-\text{val}(c) - \text{val}(c')) = |c|_{\text{val}} \cdot |c'|_{\text{val}}$ .
3.  $|c + c'|_{\text{val}} = \exp(-\text{val}(a + b)) \leq |c|_{\text{val}} + |c'|_{\text{val}}$ .

De plus, on observe que :  $|c + c'|_{\text{val}} \leq \max\{|c|_{\text{val}}, |c'|_{\text{val}}\}$ , la valeur absolue induite est donc une valeur absolue non archimédienne.

Cette norme induit une distance sur  $K$  qui en fait un corps non archimédien.

### 3.3 Tropicalisation d'un polynôme

Dans cette section, on considère un corps valué  $(K, \text{val})$  avec une valuation non triviale qui admet une section  $\omega \mapsto t^\omega$  (voir *Remarque 10*) et on travaille dans l'anneau  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] = L$ . Pour chaque polynôme dans cet anneau, on peut lui associer son analogue tropical :

**Définition 3.3.1.** Soit  $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha x^\alpha \in L$  un polynôme de Laurent, alors on définit sa tropicalisation  $\text{trop}(f)$  comme :

$$\text{trop}(f)(\omega) = \min_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (\text{val}(c_\alpha) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i) = \min_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (\text{val}(c_\alpha) + \alpha \cdot \omega).$$

La fonction  $\text{trop}(f) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est un polynôme tropical, i.e. concave et linéaire par morceaux.

**Définition 3.3.2.** Soit  $f \in L$  un polynôme de Laurent :

1. On définit sa variété algébrique dans le tore  $(K^*)^n$  comme :

$$V(f) = \{y \in (K^*)^n : f(y) = 0\}.$$

2. On définit son hypersurface tropicale :

$$V(\text{trop}(f)) = \{\omega \in \mathbb{R}^n : \text{le min dans } \text{trop}(f)(\omega) \text{ est atteint au moins deux fois}\}.$$

### 3.4 Théorème de Kapranov

Nous allons énoncer le théorème de Kapranov qui donne une description de  $V(\text{trop}(f))$  en fonction de  $f$  lui-même.

**Théorème 3.4.1.** Soit  $K$  un corps algébriquement clos avec une valuation non triviale. Alors si  $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha x^\alpha$  est un polynôme de Laurent :

$$V(\text{trop}(f)) = \overline{\{(\text{val}(y_1), \dots, \text{val}(y_n)), y \in V(f)\}}.$$

L'adhérence considérée est celle de la topologie classique.

**Remarque 13.** On admet ce théorème, car il y a une très bonne preuve donnée dans le livre [2] de Diane Maclagan. On peut toutefois observer l'inclusion  $\supset$  qui est le sens facile. En effet, comme la variété tropicale est fermée (c'est une union de portions de droites), il suffit d'avoir les valuations de zéros de  $f$ . Soit  $y \in V(f)$ , alors  $f(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha y^\alpha = 0$ , donc sa valuation est infinie. Si le minimum du tropicalisé n'est atteint qu'une fois, en  $\alpha$ , alors on peut écrire  $f(y) = c_\alpha y^\alpha + (\sum_{\beta \neq \alpha} c_\beta y^\beta)$ . La valuation d'une somme est plus grande que le minimum de la somme des valuations, donc  $\text{val}(\sum_{\beta \neq \alpha} c_\beta y^\beta) > \text{val}(c_\alpha y^\alpha)$ . Mais alors la valuation de  $f(y)$  serait exactement  $\text{val}(c_\alpha y^\alpha)$ . Ceci est absurde, car elle est infinie. D'où le sens facile.

**Remarque 14.** La présence de l'adhérence vient du fait que la valuation peut être à valeurs rationnelles, par exemple pour les séries de Plusieurs qui est la clôture algébrique des polynômes de Laurent.

**Remarque 15.** Le deuxième ensemble ressemble beaucoup à l'amibe complexe que nous avons défini dans la section précédente. Ici, on applique la fonction  $\text{val}$  qui peut correspondre, comme on a pu le voir, à  $-\log(|\cdot|)$ . Alors, comme l'amibe complexe est un ensemble fermé, on dit que l'amibe archimédienne de  $f$  est l'adhérence de l'image des zéros de  $f$  par la valuation. Alors Kapranov nous dit que c'est exactement l'hypersurface tropicale du tropicalisé de  $f$ .

### 3.5 Lien avec le polytope de Newton

Il y a une deuxième manière d'envisager l'hypersurface tropicale  $V(\text{trop}(f))$  :

Avant cela, il faut définir les subdivisions engendrées par un nombre fini de points.

**Définition 3.5.1.** Soit  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  un polyèdre, et  $A$  un sous ensemble fini de  $\mathcal{P}$  contenant ses sommets. On associe  $v_a \in \mathbb{R}$  pour tout  $a \in A$ ,  $\mathcal{A}ff$  est alors l'ensemble des formes affines  $l$  sur  $\mathcal{P}$  telles que  $l(a) \leq v_a$  avec au moins une égalité et  $s(x) = \sup_{l \in \mathcal{A}ff}(l(x))$ .

**Proposition 3.5.2.** L'application  $s$  est le max d'un nombre fini de formes affines.

*Démonstration.* Les seules formes affines  $l$  qui comptent sont celles dont l'espace affine engendré par les points  $(a, l(a))$  tels que  $l(a) = v_a$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ . Alors, elles sont entièrement définies par les points en question et donc sont en nombre fini.  $\square$

Voici un exemple en dimension 1 :

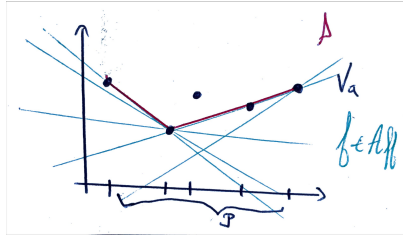


FIGURE 14 –  $s$  engendré par un nombre fini de points en dimension 1

**Remarque 16.** Les points où  $s(a) = v_a$  sont exactement les points tels qu'il existe une fonction  $l \in \mathcal{A}ff$  avec  $l(a) = v_a$ . En effet,  $v_a \geq s(a)$  par définition de  $\mathcal{A}ff$ .

**Définition 3.5.3.** On définit alors la subdivision de  $\mathcal{P}$  engendrée par  $(v_a)_{a \in A}$  par celle du  $s$  en question.

On énonce alors le résultat :

**Proposition 3.5.4.** Pour  $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha x^\alpha$  un polynôme à coefficients dans  $(K, \text{val})$  un corps valué de valuation non triviale. Alors  $V(\text{trop}(f))$  est le  $(n-1)$ -squelette de la subdivision duale du polytope de Newton engendrée par  $(\text{val}(c_\alpha))_{\alpha \in A}$  avec  $A = \{\alpha : c_\alpha \neq 0\}$ .

*Démonstration.* Étudions la subdivision duale donnée par  $s$ .

Il faut montrer que les brisures de pentes de  $\mathcal{P}_s = \{(x, s(x)), x \in \mathcal{P}\}$  sont exactement les points  $\omega$  sur lesquels le min de  $\text{trop}(f)(\omega)$  est atteint deux fois.

$$\begin{aligned} \tilde{s}(\omega) &= \max_{\alpha \text{ sommet de } \mathcal{P}_s} (\omega \cdot \alpha - s(\alpha)) \\ &= - \min_{\alpha \text{ sommet de } \mathcal{P}_s} (s(\alpha) - \omega \cdot \alpha). \end{aligned}$$

Si le max est atteint en  $\alpha$ , alors la fonction  $g(x) = \omega \cdot (x - \alpha) + s(\alpha)$  est dans  $\mathcal{A}ff$ . En effet,  $g(x) = s(x) + (\omega \cdot x - s(x)) - (\omega \cdot \alpha - s(\alpha)) \leq s(x)$  avec égalité si  $x = \alpha$ .

Par la *remarque 16* on a  $s(\alpha) = \text{val}(c_\alpha)$ . Mais alors comme  $s(\beta) \leq \text{val}(c_\beta)$  pour tout  $\beta$  sommet (par définition de  $s$ ), alors  $\omega \cdot \beta - s(\beta) \geq \omega \cdot \beta - \text{val}(c_\beta)$ , et alors

$$\max_{\alpha \text{ sommet de } \mathcal{P}_s} (\omega \cdot \alpha - \text{val}(c_\alpha))$$

est atteint en  $\alpha$ . Donc si le max de  $\tilde{s}$  est atteint deux fois, le min de  $\text{trop}(f)(\omega)$  est atteint deux fois. Réciproquement, si le min de  $\text{trop}(V(f))$  est atteint deux fois, alors encore une fois, on peut définir une fonction de  $\mathcal{A}ff$  prenant la valeur  $\text{val}(c_\alpha)$  en  $\alpha$  pour  $\alpha$  un point où le min est atteint. Dès lors  $s(\alpha) = \text{val}(c_\alpha)$ , et donc le max définissant  $\tilde{s}$  est atteint deux fois.  $\square$

**Exemple.** On peut reprendre l'*exemple 5* en voyant que la subdivision du triangle est celle du polynôme suivant :  $x^2t + y^2t + 2xy + 3y + 5x + 7t^2$ . La valuation étant celle de  $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ . Alors, on obtient directement la variété tropicale de notre polynôme non archimédien en prenant le dual de cette subdivision (cf. *figure 9*).

## 4 Lien entre les deux cas

Nous allons maintenant prouver un résultat donné dans [5] qui permet de faire le lien entre les amibes complexes et les hypersurfaces tropicales .

On s'intéresse aux fonctions polynomiales à coefficients dans le corps de Plusieux, la clôture algébrique des polynômes de Laurent (voir *Remarque 12*). Soit  $f(t, x) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha(t)x^\alpha \in \mathbb{C}[t][x_1, \dots, x_n]$ ,  $A \in \mathbb{Z}^n$  et  $a_\alpha$  un polynôme. On va réussir à faire le lien entre la famille des amibes de  $f$  pour un  $t$  fixé et l'hypersurface tropicale en considérant le corps des séries de Plusieux.

**Définition 4.0.1.** On définit

1.  $\mathcal{A}_f(t) = \mathcal{A}_{f(t, \cdot)} / \log(|t|)$  l'amibe normalisée de  $f$  pour  $t \in \mathbb{C}^*$  fixé.
2.  $\mathcal{A}_f$  est l'hypersurface tropicale de  $f$  vu comme polynôme à coefficient dans  $\mathbb{C}\{\{1/t\}\}$ , c'est-à-dire si  $p_f(w) = \min_{\alpha \in A} (\text{val}(a_\alpha(1/t)) + \alpha \cdot w)$  on a  $\mathcal{A}_f = V(p_f)$ .

**Remarque 17.** Ici la valuation de  $a_\alpha(1/t)$  est son ordre en tant que série de Laurent, donc l'opposé de son degré. Ainsi  $\text{val}(a_\alpha(1/t)) = -d_\alpha$  où  $d_\alpha$  est le degré de  $a_\alpha$ .

Alors, on a le résultat de convergence suivant :

**Théorème 4.0.2.** La suite  $(\mathcal{A}_f(t))_{t \in \mathbb{C}}$  converge vers  $-\mathcal{A}_f$  pour la distance de Hausdorff lorsque  $|t| \rightarrow +\infty$ .

**Rappel.** La distance de Hausdorff entre deux ensembles  $A$  et  $B$  est

$$\text{dist}(A, B) = \max(\sup_{x \in A} (d(x, B)), \sup_{y \in B} (d(y, A)))$$

où  $d(x, B) = \inf_{y \in B} (|x - y|)$ .

Alors pour montrer qu'une suite  $A_n$  tend vers  $A$ , il faut montrer que  $\sup_{x \in A_n} (d(x, A))$  et  $\sup_{x \in A} (d(x, A_n))$  tendent vers 0.

*Démonstration.* Pour cette preuve, on va tout faire en dimension 2 pour que les surfaces tropicales soient des unions de bouts de droites, ceci permet de mieux visualiser et de comprendre ce qu'il se passerait en dimension supérieure.

1. On va commencer par montrer que  $\mathcal{A}_f(t)$  s'approche de  $-\mathcal{A}_f$ . Commençons par expliciter nos ensembles :

1.  $\mathcal{A}_f(t) = \{\log_{|t|}(x) : \sum_{\alpha \in A} a_\alpha(t)x^\alpha = 0\}$ .
2.  $\mathcal{A}_f = \{\omega : \min_{\alpha \in A} (-d_\alpha + \alpha \cdot \omega) \text{ atteint au moins deux fois}\}$   
 $= \{\omega : \max_{\alpha \in A} (\alpha \cdot \omega + d_\alpha) \text{ atteint au moins deux fois}\}$   
 $= \cap_{\alpha \in A} \{\omega : \alpha \cdot \omega + d_\alpha \leq \max_{\beta \neq \alpha} (\beta \cdot \omega + d_\beta)\}$ .

Cette dernière manière de voir  $\mathcal{A}_f$  permet de voir comment approcher  $-\mathcal{A}_f$ . On pose l'ensemble

$$F_\alpha^\delta = \{\omega : d_\alpha + \alpha \cdot \omega - \delta > d_\beta + \beta \cdot \omega, \forall \beta \neq \alpha\} \text{ pour } \delta > 0.$$

Ainsi  $\overline{F_\alpha^\delta} = \{\omega : \alpha \cdot \omega + d_\alpha \leq \delta + \max_{\beta \neq \alpha} (\beta \cdot \omega + d_\beta)\}$ . On déduit de ce qui précède que  $-\mathcal{A}_f \subset S_f^\delta$ , où  $S_f^\delta = \cap_{\alpha \in A} \overline{F_\alpha^\delta}$ . On a même le lemme suivant :

**Lemme 4.0.3.**  $\text{dist}(S_f^\delta, \mathcal{A}_f) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ .

Pour voir cela, il faut constater que  $F_\alpha^\delta$  est une approximation d'une composante connexe du complémentaire de  $-\mathcal{A}_f$ . Observez le dessin suivant :

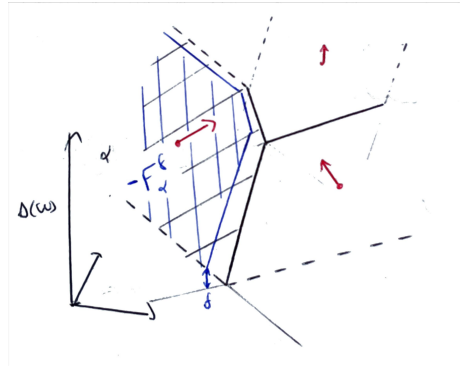


FIGURE 15 –  $F_\alpha^\delta$

Ici la fonction représentée est  $s(\omega) = \max_{\alpha \in A} (\alpha \cdot \omega + d_\alpha)$ . Les faces de  $\mathcal{P}_s$  (cf. 2.2) sont associées à un  $\alpha$ . Alors,  $F_\alpha^\delta$  en est une approximation pour la distance de Hausdorff. En effet, c'est la portion de la face qui est bien au-dessus des autres plans du max. Ainsi, par le caractère affine de ces espaces, la distance entre la face et  $F_\alpha^\delta$  est linéaire en  $\delta$ . Le résultat découle donc du fait que  $F_\alpha^\delta$  converge pour Hausdorff vers la face.

Revenons donc à notre preuve. On commence alors par montrer que pour  $|t|$  assez grand, les amibes sont dans  $S_f^\delta$ . En effet, faisons un petit calcul :

$$\text{Si } (x, t) \text{ est une racine de } f \text{ alors } \sum_{\alpha \in A} a_\alpha(t)x^\alpha = 0.$$

Pour  $\alpha \in A$ , on a  $a_\alpha(t)x^\alpha = -\sum_{\beta \neq \alpha} a_\beta(t)x^\beta$ . Donc

$$|a_\alpha(t)x^\alpha| \leq \sum_{\beta \neq \alpha} |a_\beta(t)x^\beta| \leq |A| \cdot \max_{\beta \neq \alpha} (|a_\beta(t)x^\beta|).$$

On passe au log :

$$\log_{|t|}(|a_\alpha(t)|) + \log_{|t|}(x) \cdot \alpha \leq \log_{|t|}(|A|) + \max_{\beta \neq \alpha} (\log_{|t|}(|a_\beta(t)|) + \log_{|t|}(x) \cdot \beta).$$

On peut faire cela, car  $\log_{|t|}$  est une fonction croissante si  $|t| > 1$ . Alors, tout  $\omega$  de l'amibe normalisée en  $t$  vérifie :

$$\log_{|t|}(|a_\alpha(t)|) + \omega \cdot \alpha \leq \log_{|t|}(|A|) + \max_{\beta \neq \alpha} (\log_{|t|}(|a_\beta(t)|) + \omega \cdot \beta).$$

Pour  $\alpha \in A$ .

Or,  $\log_{|t|}(|A|) \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} 0$  et lorsque  $|t|$  tend vers  $+\infty$ ,  $a_\alpha(t)$  devient équivalent à son terme de plus haut degré en  $t$ , donc celui en  $t^{d_\alpha}$ . Donc  $\log_{|t|}(|a_\alpha(t)|) \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} d_\alpha$ .

Alors, pour  $\delta > 0$ , si  $|t|$  est assez grand, on a :

$$d_\alpha + \omega \cdot \alpha \leq \delta + \max_{\beta \neq \alpha} (d_\beta + \omega \cdot \beta).$$

$\forall \omega \in \mathcal{A}_f(t), \forall \alpha$ . Ainsi  $\mathcal{A}_f(t) \subset S_f^\delta$  pour  $|t|$  assez grand.

Ceci donne une partie du résultat :  $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} (\sup_{\omega \in \mathcal{A}_f(t)} (d(\omega, -\mathcal{A}_f))) = 0$  mais pas directement la limite pour la distance de Hausdorff. Il faut encore montrer que  $\mathcal{A}_f(t)$  approche tout  $-\mathcal{A}_f$  uniformément.

2. Montrons d'abord que  $d(\omega, \mathcal{A}_f(t)) = 0$  pour tout  $\omega \in -\mathcal{A}_f$  :

On veut donc montrer que tout point de  $-\mathcal{A}_f$  peut être approché par des points des amibes complexes. Il suffit de le faire pour une partie dense de  $\mathcal{A}_f$ , on peut donc utiliser le théorème de Kapranov. Il suffit d'atteindre les valuations des solutions du polynôme  $f(1/t, \cdot)$  dans le corps  $\mathbb{C}\{\{t\}\}$ .

Soit  $(\nu_1, \dots, \nu_n)$  les valuations des séries  $x_i(t) = a_i t^{\nu_i} + \dots$ . Avec  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$  une solution de  $f(1/t, x_i(t)) = 0$  dans le corps de Puiseux.

Alors à  $t$  fixé  $f(t, x_i(1/t)) = 0$ , donc  $\log_{|t|}(x_i(1/t)) \in \mathcal{A}_f(t)$ . Et lorsque  $|t| \rightarrow +\infty$  On a que  $x_i(1/t) = a_i(1/t)^{\nu_i} + \dots$  devient équivalent à son terme de plus bas degré en  $(1/t)$ , donc à  $a_i(1/t)^{\nu_i}$ .

Alors

$$\log_{|t|}(x_i(1/t)) \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} -\nu_i.$$

Ainsi

$$\log_{|t|}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} -(\nu_1, \dots, \nu_n) \in -\mathcal{A}_f.$$

Il faut maintenant avoir une convergence uniforme :

3. Pour cela, on peut passer par les squelettes des amibes, car ils sont topologiquement plus simples.

De plus, on remarque que

$$\text{dist}(S_f(t), \mathcal{A}_f(t)) \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} 0.$$

Car  $S_f(t)$  est un rétracte par déformation forte de  $\mathcal{A}_f(t)$  et que  $\mathcal{A}_f(t)$  est coincée dans les  $S_f^\delta$  qui ont un diamètre tendant vers 0.

Alors, on en conclut que  $d(\omega, S_f(t)) \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} 0$  pour tout  $\omega \in -\mathcal{A}_f$ . Sur le squelette, on va plus facilement pouvoir obtenir quelque chose d'uniforme.

On considère toujours que le cas  $n = 2$ . Observons les portions de droites de  $-\mathcal{A}_f$  qui partent à l'infini, alors comme tout point de ces droites sont approchables par  $S_f(t)$  et que  $S_f(t)$  est constitué d'un nombre fini de bouts de droites, forcément  $S_f(t)$  a aussi une demi-droite infinie s'approchant de toutes ses droites là et dans  $S_f^\delta$ . Mais alors leur direction est forcément celle de la droite de  $-\mathcal{A}_f$  car elle est coincée dans le tube. Alors  $S_f(t)$  est en réalité une rétraction par déformation forte de  $S_f^\delta$  pour tout  $\delta$  et  $|t|$  assez grand.

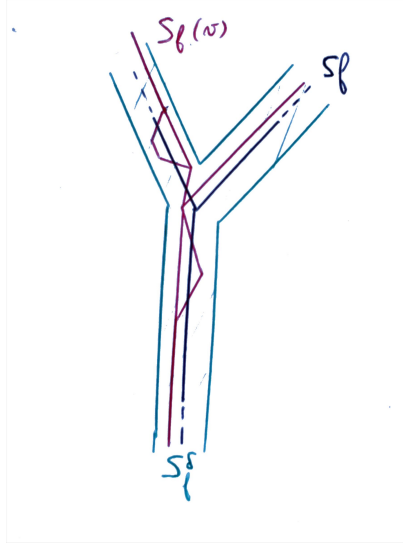


FIGURE 16 –  $S_f(t)$

Alors :

$$\text{dist}(-\mathcal{A}_f, S_f(t)) \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} 0.$$

On a donc le résultat voulu car  $\text{dist}(S_f(t), \mathcal{A}_f(t)) \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} 0$ . □

De manière informelle, ce théorème nous dit que l'on peut retrouver la variété tropicale d'un polynôme en "dézoomant" sur la figure des amibes complexes. En effet, ici on a considéré les amibes complexes renormalisées  $\mathcal{A}_f(t) = \{\log_{|t|}(x), \sum_{\alpha \in A} a_\alpha(t)x^\alpha = 0\}$ . Le fait d'appliquer  $\log_{|t|}$  plutôt que juste le logarithme indique bien que l'on écrase la figure lorsque  $|t|$  tend vers l'infini. Ainsi, les amibes ressemblent de plus en plus à leur squelette et elles tendent toutes vers la variété tropicale associée à  $f$ .

## 5 Conclusion

Nous avons défini beaucoup d'objets géométriques dans ce mémoire : l'amibe complexe et son squelette pour un polynôme de Laurent dans le paragraphe 2.4, et l'amibe non archimédienne caractérisée dans le théorème de Kapranov 3.4.1. Le théorème 4.0.2 nous permet finalement de comparer l'amibe non archimédienne d'un polynôme avec son amibe classique. Ainsi, on a pu se rendre compte du lien entre la géométrie algébrique classique et la géométrie tropicale.

La géométrie tropicale étant un domaine relativement récent des mathématiques est un champ de recherche toujours actif. Notamment, car il existe de nombreux liens avec la géométrie algébrique classique. L'un d'entre eux étant le résultat démontré dans ce mémoire, mais il en existe bien plus. On peut par exemple parler de la méthode du Patchwork de Viro qui permet de créer des hypersurfaces algébriques réelles à partir de recollement d'hypersurfaces algébrique plus simple, on pourra se référer au texte de Viro [6] pour plus de détail. Nous pouvons aussi parler de la notion d'homologie tropicale qui a été récemment introduite, et qui peut être très intéressante à approfondir, on pourra se référer [1].

## Références

- [1] I. Itenberg, L. Katzarkov, G. Mikhalkin, and I. Zharkov, *Tropical homology*, Springer, 2018.
- [2] D. Maclagan and B. Sturmfels, *Introduction to tropical geometry*, American Mathematical Society, 2015.
- [3] D. PERRIN, *Géométrie algébrique, une introduction*, EDP Sciences, CNRS EDITIONS, 2001.
- [4] H. Rullgard, *Polynomial amoebas and convexity*, Department of Mathematics Stockholm University, 2001.
- [5] B. Teissier, *Amibes non archimédiennes*, Institut Mathématique de Jussieu, March  
[http ://www.math.polytechnique.fr/xups/xups08](http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups08).
- [6] O. Viro, *Patchworking real algebraic varieties*, arXiv :math/0611382, 2006.