Pseudo-spectre

Paul Boureau
Marc Taillefer de Laportalière

Mémoire de Première Année
sous la direction d'Isabelle Gallagher

Département Mathématiques et Applications
École Normale Supérieure-PSL
4 juin 2023

Table des Matières

1 Introduction **2**

2 Premières définitions **2**

2.1 Opérateurs, Opérateurs Bornés, Opérateurs Compacts 3

2.2 Semi-groupes 6

3 Étude de l'opérateur H_ε **8**

3.1 Propriétés de H_∞ 8

3.2 Résultats principaux et pseudo-spectre 10

4 Conclusion **18**

Bibliographie **19**

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux propriétés spectrales de l'opérateur différentiel $H_\varepsilon = -\partial_x^2 + x^2 + i\varepsilon^{-1}f(x)$ sur $L^2(\mathbb{R})$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles, et ε est un paramètre voué à tendre vers 0, afin d'étudier cet opérateur et la vitesse de décroissance des solutions de $\partial_t u = -H_\varepsilon u$. Pour effectuer cette étude, nous suivons principalement l'article [GGN09] de Gallagher, Gallay et Nier, en rappelant des théorèmes et des définitions utiles.

1 Introduction

Considérons l'équation différentielle définie par

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -H_\infty u \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{X} \end{cases} \tag{1}$$

où $H_\infty := -\partial_x^2 + x^2$ est l'oscillateur harmonique, agissant sur $\mathcal{X} = L^2(\mathbb{R})$ de domaine $\mathcal{D}(H_\infty) = D(H_\varepsilon) = \{u \in H^2(\mathbb{R}); x^2 u \in L^2(\mathbb{R})\}$. Comme nous le verrons après grâce au théorème de Lumer-Phillips, les solutions de cette équation ont une décroissance en norme vers 0 de l'ordre de e^{-t} lorsque t tend vers l'infini. De même, pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée, nous pouvons étudier l'équation différentielle:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\varepsilon} f(x) u \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{X} \end{cases} \tag{2}$$

Les solutions de cette équation sont clairement de norme $L^2(\mathbb{R})$ constante car $-\frac{i}{\varepsilon} f(x)$ n'a pour conséquence qu'une rotation de la solution initiale dans $\mathbb{C}$.
Pourtant, en mélangeant ces deux équations, c'est à dire en étudiant les solutions de l'équation:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -H_\varepsilon u \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{X} \end{cases} \tag{3}$$

où $H_\varepsilon = -\partial_x^2 + x^2 + i\varepsilon^{-1}f(x)$, nous pouvons observer une décroissance plus prononcée, qui dépend fortement de ε. La différence entre les décroissances attendues dans l'équation (3), par rapport a celles des équations (1) et (2) a pour origine les interactions entre le terme disspatif (H_∞) et le terme conservatif $\Big(i\varepsilon^{-1}f(x)\Big)$ du générateur H_ε, et plus spécifiquement, leurs relations de commutation.

2 Premières définitions

Pour commencer, il est important de redéfinir quelques notions sur les opérateurs dans les espaces de Hilbert, ainsi que sur les semi-groupes fortement continus, nous présenterons aussi quelques théorèmes utiles aux futures démonstrations.

2.1 Opérateurs, Opérateurs Bornés, Opérateurs Compacts

Nous utilisons ici la démarche du livre de T. Kato [Kat13] pour exposer les résultats principaux de théorie des opérateurs qui serons utiles dans les preuves à venir.

Définitions:

- Soit $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ deux espaces de Hilbert, un opérateur linéaire T est une fonction linéaire $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ définie sur un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{X}$ appelé le domaine de T.

- On définit l'ensemble $\mathfrak{R}(T) = \{Tu : u \in \mathcal{D}(T)\} \subset \mathcal{Y}$ appelé l'image de T.

- De plus, si T est un opérateur défini sur $\mathcal{X}$, c'est-à-dire $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ alors on définit l'image numérique de T par:

$$\Theta(T) = \{\langle u, Tu\rangle : u \in \mathcal{D}(T), \|u\|_{\mathcal{X}} = 1\} \subseteq \mathbb{C}$$

- Un opérateur $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est borné si et seulement si $\exists M > 0$ tel que $\forall u \in X$: $\|Tu\|_{\mathcal{Y}} \leq M\|u\|_{\mathcal{X}}$. On note alors $\|T\|$ la norme de T définie par

$$\|T\| = \inf_{M \in \mathbb{R}_{>0}} \{M : \ \|Tu\|_{\mathcal{Y}} \leq M\|u\|_{\mathcal{X}}, \ \forall u \in \mathcal{X}\}.$$

- L'ensemble des opérateurs bornés de $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{Y}$ est noté $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ et on note $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ pour $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

- A tout opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ on associe un opérateur adjoint $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$ défini par

$$\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle, \forall y \in \mathcal{Y}^*, \forall x \in \mathcal{X}^*$$

- Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est dit compact si pour toute suite bornée $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{X}$, alors $(Tu_n)_n$ contient une sous-suite de Cauchy.

- Pour tout opérateur $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ on définit son graphe

$$G(T) = \{(u, Tu) : u \in \mathcal{D}(T)\} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$$

- Un opérateur linéaire T est fermé si son graphe est fermé.

Théorème 1 (du graphe fermé) *Soit T un opérateur fermé $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ tel que $\mathcal{D}(T) = X$, alors $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.*

Preuve:
Posons $S = T^{-1}(B_{\mathcal{Y}}(0,1))$, alors comme $\mathcal{D}(T) = \mathcal{X}$, on peut écrire

$$\mathcal{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} nS.$$

Le théorème de Baire nous dit alors que $\bar{S}$ la fermeture de S contient une boule ouverte K, de centre u_0 et de rayon $r > 0$.
De plus, tout $u \in \mathcal{X}$ vérifiant $\|u\| < 2r$ peut être écrit sous la forme $u = u' - u''$ avec $u', u'' \in K$, mais comme $K \in \bar{S}$, il existe des suites u'_n, u''_n d'éléments de S telles que:

$$\begin{cases} u'_n \to u' \\ u''_n \to u''. \end{cases}$$

De plus on a

$$\left\|T(u'_n - u''_n)\right\| \leq \left\|T(u'_n)\right\| + \left\|T(u''_n)\right\| < 2,$$

ce qui implique que $u'_n - u''_n \in 2S$ et donc que $u = \lim(u'_n - u''_n) \in \overline{2S}$.
Par homogénéité, on a alors clairement que $\forall \lambda > 0$ la boule de $\mathcal{X}$ définie par $\|u\| < \lambda r$ est un sous-ensemble de $\overline{\lambda S}$.

Soit $u \in \mathcal{X}$ vérifiant $\|u\| < 2r$, et soit ε tel que $0 < \varepsilon < 1$.
Par ce qui a été dit précédemment, $u \in \bar{S}$ donc, $\exists u_1 \in S : \|u_1 - u\| < \varepsilon r$ et $\|Tu_1\| < 1$. Ainsi, $u - u_1 \in \overline{\varepsilon S}$, on peut donc trouver $u_2 \in \varepsilon S$ à distance $\varepsilon^2 r$ de $u_1 - u_2$. En répétant ce procédé, on construit une suite $(u_n)_n$ avec les propriétés

$$\|u - u_1 - \cdots - u_n\| < \varepsilon^n r, \|Tu_n\| < \varepsilon^{n-1};\ n = 1, 2 \ldots$$

En posant $w_n = u_1 + \ldots u_n$, on trouve que $\|u - w_n\| < \varepsilon^n r \to 0$ et:

$$\|Tw_n - Tw_{n+p}\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|Tu_k\| < \varepsilon^n + \varepsilon^{n+1} + \cdots \leq (1-\varepsilon)^{-1}\varepsilon^n \to 0$$

Ainsi, $w_n \to u$ et $(Tw_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Mais comme T est fermé, on a forcément que $Tw_n \to Tu$. Enfin $\|Tw_n\| < 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots = (1-\varepsilon)^{-1}$. Ainsi on sait que $\|Tu\| \leq (1-\varepsilon)^{-1}$ pour tout $\|u\| < r$, et comme le choix de ε est arbitraire, on sait que $\|T\| < 1/r$. $\square$

On veut résoudre le problème aux valeurs propres d'un opérateur $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, c'est-à-dire trouver les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\exists u \neq 0 : Tu = \lambda u$. Pour cela, il faut passer par la notion de résolvante. Dans toute la suite, on suppose que l'opérateur T est fermé dans $\mathcal{X}$. Comme T est fermé, la même chose est vraie pour $(T - \zeta)$ pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$. Si l'opérateur $T - \zeta$ est inversible, alors on pose

$$R(\zeta) = R(\zeta, T) = (T - \zeta)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

On dit alors que ζ est dans le ensemble résolvant de T, la fonction à valeurs d'opérateurs $R(\zeta)$ définie sur l'ensemble résolvant $P(T)$ de T est appelée résolvante de T. Ainsi, pour

tout $\zeta \in P(T), R(\zeta)$ a pour domaine $\mathcal{X}$ et pour image $\mathcal{D}(T)$, et est fermé car T est fermé, donc par le théorème du graphe fermé, il est borné.
On remarque que $\forall \zeta_1, \zeta_2 \in P(T)$:

$$R(\zeta_1) - R(\zeta_2) = R(\zeta_1)(T - \zeta_2)R(\zeta_2) - R(\zeta_1)(T - \zeta_1)R(\zeta_2) = (\zeta_1 - \zeta_2)R(\zeta_1)R(\zeta_2)$$

Nous pouvons alors démontrer que:

Théorème 2 *P(T) est un ouvert du plan complexe, et $R(\zeta)$ est holomorphe sur chaque composante connexe de $P(T)$. De plus $R(\zeta)$ n'admet pas de continuation analytique en dehors de $P(T)$*

Démonstration: Soit $\zeta_0 \in P(T)$. Comme $R(\zeta)$ est borné, alors pour $|\zeta - \zeta_0|$ suffisamment petit, la série $S(\zeta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\zeta - \zeta)^n R(\zeta_0)^{n+1}$ est bien définie. Ainsi on a

$$S(\zeta)(T - \zeta)u = u, \forall u \in \mathcal{D}(T)$$

car

$$R(\zeta_0)(T - \zeta)u = u - (\zeta - \zeta_0)R(\zeta_0)u.$$

De même, on a de manière formelle $(T - \zeta)S(\zeta)v = v$ pour tout $v \in X$. La fermeture de T assure alors que $S(\zeta)v \in \mathcal{D}(T)$, ce qui montre l'égalité. Cela montre que $\zeta \in P(T)$, et $S(\zeta) = R(\zeta)$ pour tout ζ pour lequel la série converge. $\square$

Le complémentaire de $P(T)$ dans le plan complexe est appelé le spectre de T et est noté $\sigma(T)$.

Quelques dernières définitions importantes:

Définitions: Soit $\mathcal{X}$ un espace de Hilbert

- Un opérateur T dans $\mathcal{X}$ est dit accrétif si son image numérique $\Theta(T)$ est contenu dans le demi-plan droit, c'est a dire:

$$Re\langle u, Tu \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad u \in \mathcal{D}(T).$$

- Si de plus il vérifie la condition

$$\begin{cases} (T + \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \\ \left\|(T + \lambda)^{-1}\right\| \leq (Re\lambda)^{-1} \end{cases} \quad \text{pour} \quad Re\lambda > 0$$

  alors il est dit être m-accrétif

Un opérateur m-accrétif est maximal accrétif, dans le sens où il est accrétif et n'admet pas d'extension accrétive propre.

- T dans $\mathcal{X}$ est quasi-accrétif si il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $T + \alpha$ est accrétif.

- Pour un T un opérateur quasi-accrétif, si son image numérique $\Theta(T)$ n'est pas que un sous-ensemble du demi plan complexe $Re\zeta > 0$ mais aussi un sous-ensemble du secteur $|arg(\zeta - \gamma)| \leq \theta < \pi/2$ alors on dit que T est sectoriel. Dans ce cas γ est appelé son sommet, et θ son semi-angle

- On dit que l'opérateur T est dissipatif si $-T$ est accrétif

2.2 Semi-groupes

Soit X un espace de Banach, un semi-groupe à un paramètre d'opérateurs sur X est une famille d'opérateurs indexée sur les nombres positifs $(T(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ telle que

- $T(0) = I$
- $T(s+t) = T(s)T(t), \forall s, t \geq 0.$

Ce semi-groupe est dit fortement continu si et seulement si l'application

$$t \mapsto T(t)x$$

est continue pour tout $x \in X$.

Le générateur infinitésimal d'un semi-groupe est un opérateur A défini sur un sous-espace de X par:

- Le domaine de A est l'ensemble des $x \in X$ tels que

  $$h^{-1}(T(h)x - x)$$

  admet une limite lorsque $h \to 0^+$.
- La valeur de Ax est la limite du terme précédent.

Enfin, nous définissons les semi-groupes de contraction, notion clef dans les théorèmes suivants:

- Un semi-groupe fortement continu est dit être un semi-groupe de quasi-contraction si $\exists \omega \geq 0 : \|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ pour tout $t \geq 0$.
- Il est dit être de contraction si $\omega = 0$ convient, c'est à dire:

  $$\|T(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0.$$

Théorème 3 (Hille-Yosida pour les semi-groupes de contraction) ***[Admis]*** *Soit A un opérateur linéaire défini sur un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(A)$ d'un espace de Banach X, alors A génère un semi-groupe de contraction si et seulement si:*

1. *A est fermé et $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X*
2. *$\forall\lambda > 0$, λ appartient a l'ensemble résolvant de A, et on a:*

   $$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Le prochain théorème est crucial dans notre étude du semi-groupe généré par H_ε, et pour montrer ce résultat, nous suivons la démarche de Lumer et Phillips dans leur article [LP61], en l'adaptant au cas particulier des opérateurs sur les espaces de Hilbert.

Théorème 4 (Lumer-Phillips) *Un opérateur borné sur un espace de Hilbert génère un semi-groupe de contraction si et seulement si il est dissipatif.*

Pour montrer ce théorème, nous allons d'abords démontrer un autre théorème, qui lui est très proche:

Théorème 5 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire A sur un espace de Hilbert $\mathcal{X}$ avec domaine $\mathcal{D}(A)$ dense génère un semi-groupe de contraction fortement continu est que A soit disspatif, et que $\Re(I - A) = \mathcal{X}$*

Preuve: On suppose que $(S(t); t \geq 0)$ est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de contraction. Alors:

$$Re\langle x, (S(t)x - x)\rangle = Re\langle x, S(t)x\rangle - |x|^2 \leq 0,$$

donc pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ on obtient

$$Re\langle x, Ax\rangle = \lim_{t\to 0^+} Re\langle x, S(t)x - x\rangle \leq 0.$$

Ainsi le générateur infinitésimal A est dissipatif, il est aussi possible de voir que $\mathcal{D}(A)$ est dense et que $\Re(I - A) = \mathcal{X}$.
A l'inverse, si A est dissipatif, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 6 *Si A est dissipatif et $\lambda > 0$, alors $(\lambda I - A)^{-1}$ existe et est borné avec une norme $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \lambda$.*

Démonstration du Lemme:
On pose $f = \lambda y - Ay$. Alors:

$$\lambda|y|^2 = \lambda\langle y, y\rangle \leq Re\langle\lambda\langle y, y\rangle - \langle y, Ay\rangle\rangle = Re\langle f, y\rangle \leq |f||y| \quad \square$$

Ainsi, nous pouvons voir que comme A est dissipatif, $(\lambda I - A)^{-1}$ est de norme $\leq \lambda^{-1}$. Par hypothèse, nous savons que $\Re(I - A) = \mathcal{X}$ donc $\lambda = 1$ est dans l'ensemble résolvent de A. Par ce qu'on a vu précédemment, $\forall \zeta_1, \zeta_2 \in P(A)$,

$$\begin{aligned} R(\zeta_1) - R(\zeta_2) &= (\zeta_1 - \zeta_2)R(\zeta_1)R(\zeta_2) \\ \Rightarrow \forall|\lambda - 1| < 1;\quad R(\lambda, A) - R(1; A) &= (\lambda - 1)R(\lambda)R(1) \\ \Rightarrow R(\lambda; A) &= R(1; A)(I + (\lambda - I)R(1; A))^{-1}. \end{aligned}$$

Ce résultat est plus exploré par Hille et Phillips dans leur livre [HP96].

Comme la propriété de dissipativité implique que $|R(\lambda; A)| \leq \lambda^{-1}$, un prolongement analytique montre que pour tout $\lambda > 0$, $R(\lambda; A)$ existe et est de norme $\leq \lambda^{-1}$. Mais comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $\mathcal{X}$, alors par le théorème de Hille-Yoshida, A est le générateur d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de contraction. $\square$

A partir de ce théorème, il est alors aisé de montrer que le théorème de Lumer-Phillips est vrai, il suffit de montrer le lemme suivant:

Lemme 7 *Si A est un opérateur dissipatif borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{X}$, alors la résolvante de $A, R(\lambda, A)$, est définie pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > 0$.*

Démontration: Soit λ un point sur la frontière de $\sigma(A)$. Alors par définition de $\sigma(A)$ il esite une suite $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ telle que $|x_n| = 1$ et $(\lambda I - A)x_n \to 0$. Il suit alors que

$$\langle x_n, \lambda x_n - Ax_n \rangle = \lambda - \langle x_n, Ax_n \rangle \to 0$$

Mais comme $Re\langle x_n, Ax_n, \rangle \leq 0$ car A est dissipatif, on obtient que $Re\lambda \leq 0$, ce qui conclut la preuve de ce lemme $\square$

Démonstration du théorème de Lumer-Phillips
Le théorème est une conséquence directe du théorème 5 et du lemme 7. $\square$

3 Étude de l'opérateur H_ε

Nous pouvons maintenant procéder à une étude des propriétés de l'opérateur H_ε et de la vitesse de décroissance de son semi-groupe.
Pour faire cette étude, nous pouvons commencer par ré-écrire H_ε sous une autre forme: en posant $A = \partial_x + x$ et $B = i\varepsilon^{-1}f(x)$, on peut dire que

$$H_\varepsilon = A^*A + 1 + B$$

et pour l'oscillateur harmonique

$$H_\infty - 1 = A^*A$$

après avoir remarqué que $A^* = -\partial_x + x$.
Il est utile de remarquer que les opérateurs A et B satisfont des relations de commutation particulières, qui seront utiles plus bas. On pose C le commutateur de A et de B, on trouve alors:

$$C = [A, B] = \frac{i}{\varepsilon}f'(x),$$

et par un calcul simple, nous pouvons alors voir que

$$[A, C] = [A^*, C] = 0.$$

Nous associons alors à H_ε un opérateur auto-adjoint $\hat{H}_\varepsilon$ défini par $\hat{H}_\varepsilon - 1 = A^*A + C^*C$, qui a la forme explicite:

$$\hat{H}_\varepsilon = -\partial_x^2 + x^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}f'(x)^2.$$

3.1 Propriétés de H_∞

Nous rappelons maintenant quelques résultats sur l'oscillateur harmonique H_∞ et son spectre. Pour cela nous suivons la méthode proposée par Lewin dans [Lew18], en ne

s'intéressant qu'au cas de la dimension 1.
En prenant la forme $H_\infty = A^*A + 1$, on obtient, au moins dans $\mathcal{D}(H_\infty)$:

$$\langle u, Hu\rangle = \int_{\mathbb{R}} |u'(x) + xu(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 \mathrm{d}x$$

Il est possible d'annuler le premier terme de cette expression en résolvant l'EDO $f' + xf = 0$ dont la solution est $f_0 = e^{-x^2/2}$. Ainsi, la première valeur propre de H_∞ est clairement 1. L'étude et l'usage de H_∞ en mécanique quantique, nous invite à introduire la suite de vecteurs dans $L^2(\mathbb{R})$ définie par:

$$f_n = (\frac{A}{\sqrt{2}})^n f_0 = 2^{-n/2}(\partial_x + x)^n f_0$$

Remarquons que

$$[A^*, A] = (-\partial_x + x)(\partial_x + x) - (\partial_x + x)(-\partial_x + x) = 2.$$

Par construction des f_n, on a $f_{n+1} = 2^{-1/2} A f_n$. Supposons que f_n est un vecteur propre de H_∞ associé a la valeur propre $(2n+1)$ alors:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} H_\infty f_{n+1} &= H_\infty A f_n \\
&= (A^*A + 1) A f_n \\
&= A f_n + A^* A^2 f_n \\
&= A f_n + [A^*A, A] f_n + A A^* A f_n \\
&= A f_n + [A^*, A] A f_n + A(H_\infty - 1) f_n \\
&= A f_n + 2 A f_n - A f_n + A(2n+1) f_n \\
&= (2n+3) A f_n \\
\Rightarrow H_\infty f_n + 1 &= (2n+3) f_{n+1}
\end{aligned}$$

Donc par récurrence, les f_n sont bien des vecteurs propres associés aux valeurs $2n+1$.
De plus, on peut remarquer que

$$f_n(x) = P_n(x) e^{-x^2/2}$$

où les P_n sont les polynômes de Hermite:

$$P_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2/2}$$

comme les polynômes de Hermite forment une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}\mathrm{d}x)$, on sait alors que les f_n forment une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$. Ainsi, on trouve que

$$\sigma(H_\infty) = 2\mathbb{N} + 1.$$

Revenons, a l'opérateur H_ε, il nous faut maintenant déterminer son image numérique

$\Theta(H_\varepsilon)$. Soit $u \in \mathcal{D}(H_\varepsilon), \|u\| = 1$:

$$\begin{aligned}\langle u, H_\varepsilon u\rangle &= \langle u, H_\infty u\rangle + \langle u, \frac{i}{\varepsilon} f u\rangle \\ &= \langle u, H_\infty u\rangle + \frac{i}{\varepsilon}\langle u, f u\rangle\end{aligned}$$

Et puisque $\langle u, H_\infty u\rangle \geq 1$ (et notamment est réel), on a clairement:

$$\Theta(H_\varepsilon) \subseteq \mathcal{R}_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C}; Re(\lambda) \geq 1, \varepsilon Im(\lambda) \in \overline{f(\mathbb{R})}\}.$$

Donc en particulier, si f est bornée, alors H_ε est un opérateur sectoriel, et $H_\varepsilon - 1$ est maximal accrétif. Ainsi $1 - H_\varepsilon$ est dissipatif, donc par le théorème de Lumer-Phillips, il génère un semi-groupe de contractions, c'est à dire:

$$\begin{aligned}\left\|e^{t(1-H_\varepsilon)}\right\| &\leq 1 \\ \Rightarrow e^t\|e^{-tH_\varepsilon}\| &\leq 1 \\ \Rightarrow \|e^{-tH_\varepsilon}\| &\leq e^{-t}.\end{aligned}$$

On trouve bien la borne annoncée précédemment sur le semi-groupe généré par H_ε (et de même par H_∞).

3.2 Résultats principaux et pseudo-spectre

Pour étudier plus précisément les propriétés de l'opérateur H_ε, nous allons introduire deux quantités liés au spectre de l'opérateur: $\Sigma(\varepsilon)$, et $\Psi(\varepsilon)$
Nous définissons $\Sigma(\varepsilon)$ par:

$$\Sigma(\varepsilon) = \inf Re(\sigma(H_\varepsilon)).$$

Avec cette quantité, nous cherchons à localiser la partie réelle du spectre de H_ε, grâce a ce que nous avons montré sur l'oscillateur harmonique, il est clair que $\Sigma(\varepsilon)$ est strictement positif.

Le δ-pseudo-spectre d'un opérateur A est défini pour $\delta > 0$ par

$$\sigma_\delta(A) = \{\zeta \in \mathbb{C} : \left\|(\zeta - A)^{-1}\right\| \geq \frac{1}{\delta}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Il est aussi possible de voir cet ensemble comme la réunion des spectres des opérateurs qui sont δ proches de A, c'est-à-dire les opérateurs $B = A + \Delta A$ où ΔA est un opérateur vérifiant $\|\Delta A\| \leq \delta$. Nous n'allons pas recourir au pseudo-spectre en général, mais seulement définir la quantité pseudo-spectrale $\Psi(\varepsilon)$ qui est reliée a la norme de la résolvante de H_ε le long de l'axe $i\mathbb{R}$. On pose donc:

$$\Psi(\varepsilon) = (\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\|(H_\varepsilon - i\lambda)^{-1}\right\|)^{-1}.$$

Le lemme suivant permet d'estimer ces deux quantités pour des opérateurs accrétifs.

Lemme 8 *Soit A un opérateur maximal accrétif sur un espace de Hilbert $\mathcal{X}$ dont l'image numérique est contenue dans le secteur $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - 2\alpha\}$ pour un certain $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4}]$. On suppose que A est inversible, et on note:*

$$\Sigma = \inf Re(\sigma(A)) > 0$$
$$\Psi = (\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\|(A - i\lambda)^{-1}\right\|)^{-1}.$$

S'il existe $C \geq 1$ et $\mu > 0$ tels que $\forall t \geq 0 : \left\|e^{-tA}\right\| \leq Ce^{-\mu t}$ on a

$$\Sigma \geq \mu \quad \text{ et } \quad \Psi \geq \frac{\mu}{1 + \log(C)}$$

Démonstration: Comme $\left\|e^{-tA}\right\| \leq Ce^{-\mu t}$ pour tout $t \geq 0$, alors la résolvante

$$(A - z)^{-1} = \int_0^\infty e^{-tA} e^{tz} \mathrm{d}t$$

est au moins définie pour tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que $Re\ z < \mu$; ainsi $\Sigma > \mu$. De plus en posant $z = i\lambda \in i\mathbb{R}$ et en utilisant le fait que e^{-tA} est un semi-groupe de contractions dans $\mathcal{X}$, on trouve:

$$\begin{aligned}
\left\|(A - i\lambda)^{-1}\right\| &\leq \int_0^\infty \left\|e^{-tA}\right\| \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^\infty \min\{1, Ce^{-\mu t}\} \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{\log(C)/\mu} \mathrm{d}t + \int_{\log(C)/\mu}^\infty Ce^{-\mu t} \mathrm{d}t = \frac{1 + \log(C)}{\mu}
\end{aligned}$$

Ici on remarque qu'on majore $\left\|e^{-tA}\right\|$ par 1 pour t petit, puis dès que l'estimation en $Ce^{-\mu t}$ est meilleure, on prend cette majoration.

Cette inégalité est valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc en prenant le supremum on obtient que $\Psi \geq \frac{\mu}{1+\log(C)}$. $\square$

Pour effectuer la preuve d'un prochain théorème, il est utile de suivre une méthode variationnelle développée par Villani sous le nom d'hypocoercivité [Vil07]. Cette méthode s'applique aux opérateurs linéaires de la forme $L = A^*A + B$ sur un espace de Hilbert X, sur lequel $B^* = -B$. Sous certaines conditions, il est alors possible d'obtenir des comparaisons entre les propriétés spectrales de L et de l'opérateur auto-adjoint $\hat{L} = A^*A + C^*C$ où $C = [A, B]$.

Théorème 9 (Villani) *Soit $\mathcal{X}$ un espace de Hilbert, et soient A, B deux opérateurs non-bornés sur $\mathcal{X}$ tels que $B^* = -B$.*
Soit L l'opérateur défini par $L = A^*A + B$
En notant $[A, B] = C$ et sous les hypothèses:

1. $[A, C] = 0, [A^*, C] = 0$;

2. $[A, A^*]$ *est borné relativement à* I *et à* A*;*

3. $[B, C]$ *est borné relativement à* A, A^2, C *et* AC;

4. $A^*A + C^*C$ *est coercif,*

alors pour le bon choix de constantes a, b, c*, on a l'inéquation différentielle:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}(e^{-tL}u) \leq -K\mathcal{F}(e^{-tL}u)$$

et $\mathcal{F}$ *est la fonctionnelle définie par*

$$\mathcal{F}(u) = ||u||^2 + a||Au||^2 + 2bRe\langle Au, Cu\rangle + c||Cu||^2$$

où K *est une constante positive ne dépendant que des constantes apparues implicitement dans les conditions 2. 3. et 4.*

Remarque:
Dans l'énoncé du théorème précédent, on dit que l'opérateur S est borné relativement a la famille $T_1, \dots T_k$ d'opérateurs s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$||Sy|| \leq C(||T_1y|| + \cdots + ||T_ky||).$$

Nous ne démontrons pas ce théorème de Villani, par contre nous nous inspirons de la fonctionnelle de ce théorème pour faire une étude de notre problème. Le cadre est le bon, il est tout à fait possible de voir que l'opérateur H_ε et ses composantes satisfont toutes les hypothèses du théorème, à la possible exception de la coercivité de $\hat{H}_\varepsilon$, que nous allons devoir rajouter. Par contre, pour obtenir une information précise sur la vitesse de décroissance du semi-groupe lui-même, nous allons refaire la preuve du théorème dans notre cas particulier, afin d'obtenir la constante K apparue dans l'énoncé. Nous pousserons aussi la preuve plus loin, afin de contrôler $\Psi(\varepsilon)$ et $\Sigma(\varepsilon)$.

Nous pouvons alors énoncer le théorème central de ce mémoire, dont la preuve suit celle du théorème précèdent, afin d'obtenir des bornes sur les quantités $\Sigma(\varepsilon)$ et $\Psi(\varepsilon)$. Comme dit plus tôt, nous rajoutons une hypothèse de coercivité a l'opérateur $\hat{H}_\varepsilon$, avec la constante de coercivité dépendant de ε

Théorème 10 *Soit* $f \in C^3(\mathbb{R})$ *satisfaisant* $f'', f''' \in L^\infty(\mathbb{R})$ *et telle qu'il existe* $M_1 > 0$, $\nu \in (0, 1/2]$ *tels que pour tout* $u \in \mathcal{D}(H_\varepsilon)$ *et* $\varepsilon \in (0, 1]$

$$\langle \hat{H}_\varepsilon u, u\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} (|\partial_x u|^2 + x^2|u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}f'(x)^2|u|^2)\mathrm{d}x \geq \frac{M_1}{\varepsilon^{2\nu}}\|u\|^2_{L^2}.$$

Alors il existe $M_2 > 0$ *tel que* $\forall \varepsilon \in (0, 1]$

$$\Sigma(\varepsilon) \geq \frac{M_2}{e^\nu}, \text{ et } \Psi(\varepsilon) \geq \frac{M_2}{\varepsilon^\nu \log(2/\varepsilon)}.$$

Démonstration du théorème: Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ telle que f'' et f''' soient dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Soit $u \in \mathcal{D}$ une solution de l'équation parabolique

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t) - x^2 u(x,t) - \frac{i}{\varepsilon} f(x) u(x,t).$$

Afin de contrôler l'évolution de $u(x,t)$, on introduit la fonctionnelle quadratique inspirée du théorème de Villani:

$$\Phi(t) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{2}|u|^2 + \frac{\alpha}{2}(|\partial_x u|^2 + x^2|u|^2) + \beta Re((\partial_x \bar{u}) i f'(x) u) + \frac{\gamma}{2} f'(x)^2 |u|^2) \mathrm{d}x,$$

où α, β et γ sont des constantes positives qui seront déterminées plus tard. On suppose juste que que $4\beta^2 \leq \alpha\gamma$ afin que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \beta Re((\partial_x \bar{u}) i f(x) u \mathrm{d}t &\leq \beta \Big(\int_{\mathbb{R}} Re(\partial_x \bar{u})^2 \Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathbb{R}} f'^2 |u|^2 \Big)^{1/2} \\
&\leq \frac{\beta}{2} \Big(\int_{\mathbb{R}} Re(\partial_x \bar{u})^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} f'^2 |u|^2 \mathrm{d}x \Big) \\
&\leq \frac{\alpha}{4} \int_{\mathbb{R}} (|\partial_x u|^2 + x^2|u|^2) \mathrm{d}x + \frac{\gamma}{4} \int_{\mathbb{R}} f'(x)^2 |u|^2 \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

d'où on obtient une majoration de $\Phi(t)$ qui nous sera utile plus loin dans la preuve:

$$\Phi(t) \leq \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{2}|u|^2 + \frac{3\alpha}{4}(|\partial_x u|^2 + x^2|u|^2) + \frac{3\gamma}{4} f'(x)^2 |u|^2 \Big) \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Afin de calculer la dérivée temporelle de $\Phi(t)$, nous montrons les égalités suivantes:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}} u\bar{u} \, \mathrm{d}x \\
\text{par le théorème de dérivation sous le signe intégral} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial_t (u\bar{u}) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \Big(\int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)\bar{u} \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} (\partial_t \bar{u}) u \, \mathrm{d}x \Big) \\
&= \frac{1}{2} \Big(\int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)\bar{u} \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \overline{(\partial_t u)\bar{u}} \, \mathrm{d}x \Big) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}((\partial_t u)\bar{u}) \, \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Re} \Big(\int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)\bar{u} \, \mathrm{d}x \Big) \\
\text{en remplaçant dans l'équation parabolique vérifiée par } u &= \mathrm{Re} \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big(\partial_x^2 u - x^2 u - \frac{i}{\varepsilon} f(x) u \Big) \bar{u} \, \mathrm{d}x \Big) \\
\text{on identifie les termes réels et imaginaires purs} &= \mathrm{Re} \Big(\int_{\mathbb{R}} (\partial_x^2 u)\bar{u} \, \mathrm{d}x \Big) - \int_{\mathbb{R}} x^2 |u|^2 \mathrm{d}x \\
\text{par intégration par parties} &= - \int_{\mathbb{R}} \Big(|\partial_x u|^2 + x^2 |u|^2 \Big) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}}\alpha\left(|\partial_x u|^2+x^2|u|^2\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\alpha\left(\partial_t((\partial_x u)(\partial_x\bar{u}))+x^2\partial_t(u\bar{u})\right)\mathrm{d}x\\
&= \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\alpha\left(\partial_x\partial_t u\right)\left(\partial_x\bar{u}\right)\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\alpha x^2\partial_t(u)\bar{u}\mathrm{d}x\\
&= \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\alpha(\partial_x\bar{u})\left(\partial_x^3 u-2xu-x^2\partial_x u-\frac{i}{\varepsilon}f'(x)u-\frac{i}{\varepsilon}f(x)\partial_x u\right)\mathrm{d}x\\
&\quad+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\alpha x^2\bar{u}\left(\partial_x^2 u-x^2u-\frac{i}{\varepsilon}f(x)u\right)\mathrm{d}x\\
\text{par intégration par parties} &= -\int_{\mathbb{R}}\alpha|\partial_x^2 u|^2\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\alpha x^2u(\partial_x^2\bar{u})\mathrm{d}x-\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\alpha(\partial_x\bar{u})\frac{i}{\varepsilon}f'(x)u\mathrm{d}x\\
\text{on identifie les parties réelles}\quad &\quad -\int_{\mathbb{R}}\alpha|x^2u|^2\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\alpha x^2u(\partial_x^2\bar{u})\mathrm{d}x\\
&= -\int_{\mathbb{R}}\alpha\left|\partial_x^2 u-x^2u\right|^2\ \mathrm{d}x-Re\int_{\mathbb{R}}\alpha\left(\partial_x\bar{u}\right)\frac{i}{\varepsilon}f'(x)u\ \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\beta\left(\partial_x\bar{u}\right)if'(x)u\ \mathrm{d}x &= \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\beta if'(x)(\partial_x\partial_t\bar{u})u\ \mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\beta if'(x)(\partial_x\bar{u})(\partial_t u)\ \mathrm{d}x\\
\text{on conjugue le premier terme} &= \mathrm{Re}-\int_{\mathbb{R}}\beta if'(x)\bar{u}\left(\partial_x^3 u-2xu-x^2\partial_x u-\frac{i}{\varepsilon}f'(x)u-\frac{i}{\varepsilon}f(x)\partial_x u\right)\ \mathrm{d}x\\
&\quad+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\beta if'(x)(\partial_x\bar{u})(\partial_t u)\ \mathrm{d}x\\
\text{en intégrant par parties} &= -\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\beta f'(x)^2|u|^2\ \mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\beta\left(\partial_x\bar{u}\right)if'(x)\left(\partial_x^2 u-x^2u\right)\mathrm{d}x\\
&\quad+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\beta if''(x)\bar{u}\left(\partial_x^2 u-x^2u\right)\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\frac{\beta}{\varepsilon}f'(x)f(x)\bar{u}(\partial_x u)\mathrm{d}x\\
&\quad+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\beta if'(x)(\partial_x\bar{u})(\partial_t u)\ \mathrm{d}x\\
\text{on intègre par parties} &= -\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\beta f'(x)^2|u|^2\ \mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\beta\left(\partial_x\bar{u}\right)if'(x)\left(\partial_x^2 u-x^2u\right)\mathrm{d}x\\
\text{le reste est imaginaire pur}\quad &\quad -\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\beta\bar{u}if'''(x)\partial_x u\ \mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}}\frac{\beta}{\varepsilon}f'(x)f(x)\bar{u}(\partial_x u)\mathrm{d}x\\
&\quad+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\beta if'(x)(\partial_x\bar{u})(\partial_t u)\ \mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}}\beta f'(x)^2|u|^2\ \mathrm{d}x-\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\beta\bar{u}if'''(x)\partial_x u\ \mathrm{d}x\\
&\quad+2\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\beta\left(\partial_x\bar{u}\right)if'(x)\left(\partial_x^2 u-x^2u\right)\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}}\gamma f'(x)^2|u|^2\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\gamma f'(x)^2\partial_t(u\bar{u})\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\gamma f'(x)^2\bar{u}\left(\partial_x^2 u - x^2u - \frac{i}{\varepsilon}f(x)u\right)\mathrm{d}x \\
\text{le dernier terme est imaginaire pur} &= -\int_{\mathbb{R}}\gamma f'(x)^2|\partial_x u|^2\mathrm{d}x - 2\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\gamma f'(x)f(x)\bar{u}(\partial_x u)\mathrm{d}x \\
\text{et on intègre par parties} &\quad -\int_{\mathbb{R}}\gamma f'(x)^2x^2|u|^2\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\mathbb{R}}\gamma f'(x)^2\left(|\partial_x u|^2 + x^2|u|^2\right)\mathrm{d}x - 2\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\gamma f'(x)f''(x)\bar{u}\partial_x u\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On pose

$$K_j = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\partial_x^j f(x)\right|,\quad j=2,3$$

On a alors par Hölder les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
&-\alpha\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}(\partial_x\bar{u})_\varepsilon\frac{i}{\varepsilon}f'(x)u\ \mathrm{d}x \le \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x u|^2\ \mathrm{d}x + \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}}f'(x)^2|u|^2\ \mathrm{d}x, \\
&2\beta\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}(\partial_x\bar{u})\,if'(x)\left(\partial_x^2u - x^2u\right)\mathrm{d}x \le \frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}}\left|\partial_x^2u - x^2u\right|^2\ \mathrm{d}x + \frac{2\beta^2}{\alpha}\int_{\mathbb{R}}f'(x)^2\left|\partial_x u\right|^2\ \mathrm{d}x, \\
&-2\gamma\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}f'(x)f''(x)\bar{u}\partial_x u\ \mathrm{d}x \le \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x u|^2\ \mathrm{d}x + 4\gamma^2K_2^2\int_{\mathbb{R}}f'(x)^2|u|^2\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

De plus, comme la plus petite valeur propre de H_∞ est 1, on sait que $\langle u, H_\infty u\rangle \ge u^2$, d'où l'inégalité

$$-\beta\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\bar{u}if'''(x)\partial_x u\ \mathrm{d}x \le K_3\beta\int_{\mathbb{R}}|u\partial_x u|\,\mathrm{d}x \le K_3\beta\int_{\mathbb{R}}\left(|\partial_x u|^2 + x^2|u|^2\right)\mathrm{d}x$$

Par les inégalités précédentes, on obtient:

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) \le &(-1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + K_3\beta)\int_{\mathbb{R}}(|\partial_x u|^2 + x^2|u|^2)\mathrm{d}x \\
&+ (-\alpha + \frac{\alpha}{2})\int_{\mathbb{R}}|\partial_x^2 u - x^2u|^2\mathrm{d}x + (-\frac{\beta}{\varepsilon} + \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} + 4\gamma^2K_2^2)\int_{\mathbb{R}}f'(x)|u|^2\mathrm{d}x \\
&+ (-\gamma + \frac{2\beta^2}{\alpha})\int_{\mathbb{R}}f'(x)^2(|\partial_x u|^2 + x^2|u|^2)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On fixe maintenant:

$$\beta = \min(\frac{1}{4K_3},\ \frac{1}{32k_2}), \alpha = (\frac{\beta\varepsilon}{4})^{1/2},\ \gamma = 8(\frac{\beta^2}{\varepsilon})^{1/2}$$

On peut facilement vérifier que nous sommes bien dans le cadre évoqué plus tôt, c'est à dire: $4\beta^2 \leq \alpha\gamma,\ 4\gamma^2 K_2^2 \leq \beta/(4\varepsilon)$, et on arrive a l'estimation plus simple:

$$\begin{aligned}\Phi'(t) \leq & -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}(|\partial_x u|^2 + x^2|u|^2)\mathrm{d}x - \frac{\beta}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} f'(x)|u|^2\mathrm{d}x \\ & -\frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x^2 u - x^2 u|^2\mathrm{d}x + -\frac{\gamma}{2}\int_{\mathbb{R}} f'(x)^2(|\partial_x u|^2 + x^2|u|^2)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

comme il s'agit d'une majoration de $\Phi'(t)$, on peut ignorer les deux termes négatifs de la deuxième ligne, et ne garder qu'une borne supérieure. D'où:

$$\Phi'(t) \leq -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}(|\partial_x u|^2 + x^2|u|^2)\mathrm{d}x - \frac{\beta}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} f'(x)|u|^2\mathrm{d}x.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\varepsilon \leq 2\beta$, et en utilisant l'hypothèse de l'énoncé sur la coercivité de $\hat{H}_\varepsilon$ on obtient

$$\Phi'(t) \leq -\frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}}(|\partial_x u|^2 + x^2|u|^2)\mathrm{d}x - \frac{\beta}{4\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} f'(x)|u|^2\mathrm{d}x - \frac{M_1}{8}(\frac{2\beta}{\varepsilon})^\nu\int_{\mathbb{R}}|u|^2\mathrm{d}x.$$

Grâce à l'inégalité (4), et en posant

$$\eta = \min\Big(\frac{1}{6\alpha}, \frac{\beta}{3\varepsilon\gamma}, \frac{M1}{4}\Big(\frac{2\beta}{\varepsilon}\Big)^\nu\Big)$$

On obtient:

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &\leq -\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{M_1}{8}\Big(\frac{2\beta}{\varepsilon}\Big)^\nu|u|^2 + \frac{1}{8}(|\partial_x u|^2 + x^2|u|^2) + \frac{\beta}{4\varepsilon}f'(x)|u|^2\Big)\mathrm{d}x \\ &\leq -\eta\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{1}{2}|u|^2 + \frac{3\alpha}{4}(|\partial_x u|^2 + x^2|u|^2) + \frac{3\gamma}{4}f'(x)|u|^2\Big)\mathrm{d}x \\ &\leq -\eta\Phi(t)\end{aligned}$$

Comme $\nu \leq 1/2$ et par notre définition de α, β, γ, nous avons l'existence de $M_2 > 0$ tel que $\eta \geq M_2\varepsilon^{-\nu}$ pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$.

Ce que nous avons fait pour l'instant est suivre la méthode de [Vil07] pour construire une fonctionnelle quadratique Φ équivalente (à des constantes dépendant de ε) au carré de la norme dans $D(H_\infty^{1/2}) = \{u \in H^1(\mathbb{R}); xu \in L^2\}$ et qui satisfait $\Phi(t) \leq e^{-\eta(t-s)}\Phi(s)$ pour tout $t \geq s \geq 0$. Nous avons bien donc redémontré le théorème de Villani pour notre cas particulier avec l'atout en plus que nous connaissons la constante η qui majore la dérivée temporelle de Φ.

Pour déduire de l'information sur le semi-groupe e^{-tH_ε} dans $L^2(\mathbb{R})$, on utilise l'argument standard suivant:
Soit $u(x,t)$ une solution au problème

$$\begin{cases}\partial_t u = \partial_x^2 u - x^2 u - \frac{i}{\varepsilon}f'(x)u \\ u(0) = u_0 \in L^2(\mathbb{R})\end{cases}$$

telle que pour tout $t \geq 0$, $u(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$.
Alors en vue des égalités démontrées précédemment:

$$\begin{aligned} \|\partial_x u\|^2 + \|xu\|^2 &= -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2 \\ \Rightarrow \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} (\|\partial_x u\|^2 + \|xu\|^2)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}(\|u_0\|^2 - \left\|u(\sqrt{\varepsilon})\right\|^2) \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $\tau \in (0, \sqrt{\varepsilon}]$ tel que :

$$\|u(\tau)\|^2 \leq \|u_0\|^2,\ \|\partial_x u(\tau)\|^2 + \|xu(\tau)\|^2 \leq \frac{\|u_0\|^2}{2\sqrt{\varepsilon}}$$

Alors, par définition de Φ et des constantes α, β, γ, ainsi que le fait que $|f'(x)| \leq |f'(0)| + K_2|x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on voit que

$$\Phi(\sqrt{\varepsilon}) \leq \Phi(\tau) \leq \frac{C}{\varepsilon}||u_0||^2,\ \text{pour un certain } C > 0 \text{ indépendant de } \varepsilon \in (0,1].$$

Ici, pour pouvoir raffiner notre étude, nous découpons le champ en deux plages: pour $t > \sqrt{\varepsilon}$ nous utilisons les propriétés montrés au-dessus pour faire les majorations nécessaires. Dans l'autre cas ($t \leq \sqrt{\varepsilon}$) la norme du semi-groupe est plus difficile à étudier, donc nous ferons une majoration brutale du semi-groupe par 1.

Ainsi, pour tout $t \geq 0$, on obtient:

$$||u(t+\sqrt{\varepsilon})||^2 \leq 2\Phi(t+\sqrt{\varepsilon}) \leq 2e^{-\eta t}\Phi(\sqrt{\varepsilon}) \leq \frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}e^{-\eta t}||u_0||^2$$

D'où:

$$||e^{-(t+\sqrt{\varepsilon})H_\varepsilon}|| \leq \left(\frac{2C}{\varepsilon}\right)^{1/2} e^{-M_2 t/\varepsilon^\nu} \quad \text{Pour tout } t \geq 0$$

Mais comme on sait aussi que $||e^{-tH_\varepsilon}|| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$, il suit du lemme 8 que $\Sigma(\varepsilon) \geq M_2/\varepsilon^\nu$. De plus, en suivant la preuve de ce lemme, on obtient que:

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon)^{-1} &\leq \int_0^\infty ||e^{-tH_\varepsilon}|| \\ &\leq \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \mathrm{d}t + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^\infty \min\Big[1, \Big(\frac{2C}{\varepsilon}\Big)^{1/2} e^{-M_2 t/\varepsilon^\nu}\Big]\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \mathrm{d}t + \int_0^\infty \min\Big[1, \Big(\frac{2C}{\varepsilon}\Big)^{1/2} e^{-M_2 t/\varepsilon^\nu}\Big]\mathrm{d}t \\ &\leq \sqrt{\varepsilon} + \frac{\varepsilon^\nu}{M_2}\Big(1 + \log\Big(\frac{2C}{\varepsilon}\Big)^{1/2}\Big) \end{aligned}$$

Mais comme $\nu \leq 1/2$, on peut en déduire que $\Psi(\varepsilon)^{-1} \leq C' e^\nu \log(2/\varepsilon)$, ce qui conclut la preuve du théorème. $\square$

Nous avons donc bien montré le résultat annoncé sur la vitesse de décroissance du semi-groupe généré par H_ε. En même temps, nous avons pu faire une étude plus approfondie de la dépendance de Ψ et de Σ en ε. Toujours dans [GGN09], les auteurs ont montré que pour certaines fonctions f la borne sur $\Sigma(\varepsilon)$ est optimale, mais qu'il est tout de même possible d'affiner les estimations des variations de ces deux quantités.

Théorème 11 ***[Admis]*** *Si $f \in C^3(\mathbb{R})$ vérifie*

- *les points critiques de f sont non dégénérés ($f'(x) = 0 \Rightarrow f''(x) \neq 0$)*
- *il existe des constantes $C > 0, k \in \mathbb{N}$ telles que pour tout $|x| > 1$ on ait*

$$\left|\partial_x^l (f(x) - \frac{1}{|x|^k})\right| \leq \frac{C}{|x|^{k+l+1}}, \text{ pour } l = 0, 1, 2, 3$$

Alors $\exists M_3, M_4 \geq 1$ tels que $\forall \varepsilon \in (0, 1]$ on a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_3 \varepsilon^{2\nu}} &\leq \Sigma(\varepsilon) \leq \frac{M_3}{\varepsilon^{2\nu}} \\ \frac{1}{M_4 \varepsilon^{2\bar{\nu}}} &\leq \Psi(\varepsilon) \leq \frac{1}{M_3 \varepsilon^{2\bar{\nu}}} \end{aligned}$$

où $\nu = 1/(k+2)$ et $\bar{\nu} = 2/(k+4)$

Nous admettons ici ce théorème, mais sa preuve suit des méthodes classiques d'analyse d'opérateurs aux dérivées partielles.

Les bornes montrées dans ce second théorème sont meilleures que celles du théorème 10. Mais nécessitent des hypothèses bien plus fortes sur f, avec notamment de la décroissance algébrique lorsque x tend vers l'infini. Ce résultat montre par contre qu'il est tout à fait possible d'améliorer les bornes que nous avons montrées sur $\Psi(\varepsilon)$ et $\Sigma(\varepsilon)$ en modifiant légèrement le cadre dans lequel le problème est posé.

4 Conclusion

Nous avons donc pu faire une analyse du semi-groupe de l'opérateur H_ε, notamment du point de vue de la décroissance de la norme des solutions de l'équation aux dérivées partielles associée. Afin d'établir ce résultat, nous avons du montrer des résultats plus généraux de théorie des opérateurs linéaires, dont notamment le théorème de Lumer-Phillips. Il a aussi fallu introduire des notions liées au pseudo-spectre de l'opérateur H_ε. La notion de pseudo-spectre est beaucoup plus profonde que ce que nous avons évoqué ici, et nous n'avons fait qu'emprunter un objet qui y est lié pour faire notre étude. Il serait alors intéressant de pousser plus loin cette notion, pour voir ce qu'elle peut révéler de plus sur le spectre et le comportement général des opérateurs.

Bibliographie

[LP61] G. Lumer and R. S. Phillips. “Dissipative operators in a Banach space.” In: *Pacific Journal of Mathematics* 11.2 (1961), pp. 679–698.

[HP96] Einar Hille and Ralph S. Phillips. *Functional Analysis and Semi-Groups*. Vol. 31. American Mathematical Society, 1996.

[Vil07] Cédric Villani. “Hypocoercive Diffusion Operators”. eng. In: *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana* 10-B.2 (June 2007), pp. 257–275. URL: `http://eudml.org/doc/290402`.

[GGN09] Isabelle Gallagher, Thierry Gallay, and Francis Nier. “Spectral Asymptotics for Large Skew-Symmetric Perturbations of the Harmonic Oscillator”. In: *International Mathematics Research Notices* 2009.12 (Feb. 2009), pp. 2147–2199. ISSN: 1073-7928. DOI: `10.1093/imrn/rnp013`.

[Kat13] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Vol. 132. Springer Science & Business Media, 2013.

[Lew18] Mathieu Lewin. “Théorie spectrale & mécanique quantique”. Master. Lecture, cours de l’École Polytechnique, 2018. Ecole Polytechnique, France, Jan. 2018. URL: `https://hal.science/cel-01935749`.