ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE – PARIS

MATHÉMATIQUES

Mémoire de première année

ESPACES DE BERKOVICH ET ANALYTIFICATION DE VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES SUR UN CORPS NON ARCHIMÉDIEN

Elias CAEIRO et Owen SABATIN

Encadré par Antoine DUCROS

Juin 2023

Introduction

Ce document est une version abrégée de notre rédaction originelle. Le lecteur intéressé pourra la consulter ici.

Le grand succès de la géométrie complexe en géométrie algébrique, qui permet d'utiliser des méthodes analytiques et transcendantes pour résoudre des problèmes algébriques, a motivé l'introduction d'une géométrie non archimédienne pour travailler sur d'autres corps. Cette interaction entre géométrie algébrique et géométrie analytique est particulièrement incarnée dans le célèbre article de Serre du même nom [Ser56]. La première tentative de répondre à ce besoin fut effectuée par Tate lorsqu'il fonda la *géométrie rigide analytique* [Tat71], qui occupe désormais une place centrale en géométrie arithmétique. La difficulté principale pour fonder une telle théorie réside dans le caractère totalement discontinu des corps non archimédiens, qui paraît amusante au premier abord mais pose de véritables problèmes pour construire un faisceau de fonctions analytiques. En effet, tout faisceau de fonction analytiques raisonnable $\mathcal{O}$ sur un tel corps K devrait naturellement satisfaire

$$\mathcal{O}(D(0,1)) = \{f \in K[\![T]\!] \mid f \text{ de rayon de convergence au moins } 1\}.$$

Le problème est que si l'on définit simplement une fonction analytique comme une fonction partout localement développable en série entière et qu'on partitionne $D(0,1)$ en deux ouverts disjoints non vides U et V, la fonction $f|_U = 0$ et $f|_V = 1$ serait analytique mais pas globalement une série entière... La solution de Tate fut de restreindre le faisceau structural à une certaine topologie de Grothendieck moins fine que la topologie usuelle : au lieu d'autoriser tous les recouvrements dans la condition de faisceau, on n'autorise plus que certains recouvrements, dis "admissibles".

Désormais, il existe d'autres fondations pour une géométrie analytique non archimédienne : l'approche par les schémas formels de Raynaud [Ray74], l'approche par les espaces adiques de Huber [Hub94], et l'approche de Berkovich [Ber90]. C'est sur cette dernière que nous nous concentrons. Grosso modo, c'est un peu l'analogue du passage du spectre maximal (les idéaux maximaux) au spectre premier (tous les idéaux premiers) : elle rajoute encore plus de points aux espaces analytiques (Tate avait déjà rajouté un point par idéal maximal de l'anneau des fonctions ; notons que lorsque le corps de base est algébriquement clos, sa construction ne rajoute en fait aucun point à l'espace, d'après le Nullstellensatz analytique), de manière à obtenir une topologie beaucoup plus réelle. Par exemple, les espaces de Berkovich sont localement connexes par arcs et possèdent un faisceau structural pour leur véritable topologie. En fait, ils possèdent un faisceau pour une G-topologie dont les briques de base sont compactes, qui inclue à la fois les ouverts usuels et certaines parties compactes, ce qui leur donne une certaine flexibilité. Même si l'on présente ici la théorie de Berkovich, les approches ne sont pas indépendantes. On dispose en effet de certaines équivalences de catégories entre les espaces analytiques (vérifiant certaines propriétés) de chaque théorie, si bien qu'une de nos références principales pour ce mémoire est un livre de géométrie rigide [Bos14].

Les espaces de Berkovich possèdent de nombreuses similarités avec les schémas, comme le lecteur pourra constater. Le but du présent mémoire est donc de présenter les bases de cette théorie. Les références principales sur lesquelles ce mémoire se base sont les suivantes : les trois premiers chapitres du livre fondateur de Berkovich [Ber90], les deux premières sections de son article sur la cohomologie étale [Ber93], les trois premiers chapitres du livre de géométrie rigide de Bosch [Bos14], les notes introductives de Temkin [DFN15, Introduction to Berkovich Analytif Spaces], et le mémoire de maîtrise de Jakob Werner [Wer19]. Nous tenons à remercier chaleureusement Antoine Ducros pour nous avoir encadrés dans la rédaction de ce mémoire, pour avoir répondu à nos questions, pour nous avoir dirigé vers des références adaptées, et pour ses nombreux commentaires sur notre travail.

Au vu du contenu, ce mémoire est naturellement rédigé dans le langage de la théorie des catégories, de l'algèbre commutative et de la théorie des faisceaux telles que présentées dans [Duc21] et [Wed16] (pour les faisceaux). On fera également de nombreuses analogies avec la théorie élémentaire des schémas telle que présentée dans [Duc21] et le début du chapitre 2 de [Har77]. À la fin du chapitre 3 et dans le chapitre 4 on utilisera également la cohomologie des faisceaux telle que dans [Har77, chapitre 3] et [Wed16] ainsi qu'un peu plus de géométrie algébrique.

Dans le chapitre 4, on introduit le spectre de Berkovich $\mathcal{M}$ qui est l'analogue du spectre premier Spec en géométrie algébrique et on montre quelques résultats dessus, analogues à ceux des schémas affines. Il s'agit des « points » sur une algèbre de fonctions.

Dans le chapitre 2, on définit et étudie les algèbres affinoïdes sur un corps, qui sont l'analogue des algèbres de type fini sur un corps K. Il s'agit de quotients d'algèbres de séries convergentes sur un disque (fermé) n-dimensionnel. On introduit également une classe de parties intéressantes du spectre de telles algèbres dont nous nous servirons ensuite pour construire le faisceau structural.

Dans le chapitre 3, on définit les espaces analytiques, l'analogue des schémas localement de type fini sur un corps, d'abord dans le cas affinoïde, puis par recollement. Comme pour les schémas, cette catégorie admet des produits fibrés, et on étudie certaines classes de morphismes (immersions, morphismes séparés, finis, propres, etc.). On parle également de faisceaux cohérents et de leur cohomologie.

Enfin, le chapitre 4 est la consécration de nos analogies entre géométrie algébrique et géométrie analytique. On y construit un foncteur des schémas de type fini sur un corps vers les espaces analytiques sur ce corps qui concrétise les analogies évoquées, et on montre quelques résultats de type GAGA.

Table des matières

Chapitre 1

Spectre de Berkovich

Sommaire

1.1 Anneaux et modules de Banach

Commençons par introduire nos objets d'études. Soit A un anneau. Une *semi-norme* sur A est une fonction $\|\cdot\| : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sous-additive et sous-multiplicative telle que $\|0\| = 0$ et $\|1\| = 1$. Si $\|f\| \neq 0$ [1] pour tout $f \neq 0$, il s'agit d'une *norme*. Cela correspond à ce que la topologie induite par $\|\cdot\|$ soit séparée. Elle est *uniforme* si $\|f^n\| = \|f\|^n$ pour tout $f \in A$ et $n \in \mathbb{N}$. Une (semi-)norme multiplicative est appelé (semi-)valuation. Un anneau (semi-)normé (resp. valué) est un anneau muni d'une (semi-)norme (resp. valuation). Un *anneau de Banach* est un anneau normé, complet pour la structure métrique induite par cette norme. Cela revient à ce que toutes les séries absolument convergentes convergent.

Si $(A, \|\cdot\|_A)$ est un anneau semi-normé et M un A-module, une *semi-norme* sur M est une fonction $\|\cdot\|_M : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sous-additive, telle que $\|0\|_M = 0$, et qui soit *bornée*, c'est-à-dire pour laquelle il existe une constante $C > 0$ telle que $\|am\|_M \leq C\|a\|_A\|m\|_M$ pour tout $a \in A$ et $m \in M$. Notons qu'on a forcément $C \geq 1$ en prenant $\|a\| = 1$, à moins que la semi-norme sur M soit nulle. On définit de même les normes, les modules (semi-)normés, et les modules de Banach.

Un *morphisme* entre anneaux (resp. modules) semi-normés est un morphisme $\varphi : A \to B$ d'anneaux (resp. de modules) *borné*, c'est-à-dire pour lequel il existe une constante $C > 0$ telle que $\|\varphi(a)\| \leq C\|a\|$ pour tout $a \in A$. On note $\|\varphi\|$ l'infimum des C convenant. On définit ainsi la catégorie SNAnn des anneaux semi-normés, sa sous-catégorie pleine BanAnn des anneaux de Banach, la catégorie $A-\mathsf{SNMod}$ des A-modules semi-normés pour $A \in \mathsf{SNAnn}$ et sa sous-catégorie pleine $A-\mathsf{BanMod}$ des A-modules de Banach si $A \in \mathsf{BanAnn}$.

On dira également que deux semi-normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont *équivalentes* s'il existe $C, C' > 0$ telles que $C\|\cdot\| \leq \|\cdot\|' \leq C'\|\cdot\|$. Cela revient à ce que l'identité $(M, \|\cdot\|) \to (M, \|\cdot\|')$ soit un isomorphisme. Une semi-norme $\|\cdot\|'$ est *bornée* sur $(A, \|\cdot\|)$ s'il existe $C > 0$ tel que $\|\cdot\|' \leq C\|\cdot\|$, i.e. si l'identité $(M, \|\cdot\|) \to (M, \|\cdot\|')$ est un morphisme. Une semi-norme $\|\cdot\|$

1. On note $f, g, h, \ldots$, les éléments de A car on adopte une vision géométrique : les éléments de A correspondent à des fonctions sur le spectre (qu'on introduira plus tard), comme en géométrie algébrique.

est *non archimédienne* si $|f+g| \leq \max(|f|,|g|)$ pour tous f,g, et *archimédienne* sinon. Si M est un groupe abélien non-archimédien, on a $\|f+g\| = \max(\|f\|,\|g\|)$ dès que $\|f\| \neq \|g\|$.

Remarque 1. Si $|\cdot|$ est une semi-norme uniforme sur un anneau semi-normée $(A, \|\cdot\|)$, elle est bornée si et seulement si $|\cdot| \leq \|\cdot\|$. En effet, si $|f| \leq C\|f\|$ pour tout $f \in A$, on a $|f|^n = |f^n| \leq C\|f^n\| \leq C\|f\|^n$ et donc $|f| \leq C^{1/n}\|f\|$, i.e. $|f| \leq \|f\|$ en prenant la limite quand $n \to \infty$.

Voyons à présent quelques constructions élémentaires sur les modules semi-normés.

- (Produit d'anneaux) Si A et B sont des anneaux semi-normés, on note $A \times B$ l'anneau $A \times B$ muni de la semi-norme $\|(a,b)\| = \max(\|a\|,\|b\|)$. On vérifie aisément qu'il s'agit du produit dans SNAnn.
- (Somme de modules) Si A est un anneau semi-normé et $(M_i)_{i\in I}$ une famille de A-modules semi-normés dont l'action sur A est *uniformément bornée*, i.e. il existe $C > 0$, indépendant de i, tel que $\|am\| \leq C\|a\|\|m\|$ pour tous $a \in A$ et $m \in M_i$, alors $\bigoplus_i M_i$ est le module semi-normé $\bigoplus_i M_i$ muni de la norme $\|(m_i)\| = \max_i \|m_i\|$. Il s'agit alors du coproduit des M_i dans $A{-}\mathsf{SNMod}$. La condition de borne uniforme est là uniquement pour s'assurer que $\bigoplus_i M_i$ est bien un A-module semi-normé. On note également $\prod_i M_i$ le sous-module de $\prod_i M_i$ constitué des éléments tels que $\|(m_i)\| = \sup \|m_i\| < \infty$, muni de cette même norme. Il ne s'agit cependant pas forcément du produit dans $A{-}\mathsf{SNMod}$.
- (Quotient) Si M est un A-modules semi-normé et N un sous-module, on note M/N le module semi-normé M/N muni de la semi-norme résiduelle $\|m+N\| = \inf_{n\in N}\|m+n\|$. Si M est normé et N est fermé dans M, M/N est également normé. Si $M = A$ et $N = \mathfrak{a}$ est un idéal, $A/\mathfrak{a}$ est encore un anneau semi-normé. Enfin, si A est de Banach et $\mathfrak{a}$ fermé, alors $A/\mathfrak{a}$ est encore de Banach. En effet, supposons que $\sum_i \|\overline{a_i}\| < \infty$ est une série absolument convergente dans $A/\mathfrak{a}$. On peut trouver $\alpha_i \in \mathfrak{a}$ tels que $\|a_i + \alpha_i\| \leq \|\overline{a_i}\| + 2^{-i}$. En particulier, $\sum_i a_i + \alpha_i$ converge absolument dans A, et $\overline{\sum_i a_i + \alpha_i}$ est la somme de la série $\sum_i \overline{a_i}$ dans $A/\mathfrak{a}$.
- (Séparation, complétion) Si A est un anneau semi-normé, on note A^s l'anneau normé $A/\ker\|\cdot\|$. Il s'agit de l'adjoint à gauche de l'inclusion $\mathsf{NormAnn} \to \mathsf{SNAnn}$. De même, on note $\widehat{A}$ la complétion de A^s, qui est cette fois l'adjoint à gauche de l'inclusion $\mathsf{BanAnn} \to \mathsf{SNAnn}$. Si A est un anneau normé et M un A-module semi-normé, on définit de même M^s, ainsi que $\widehat{M}$ si A est également de Banach. De plus, la factorisation obtenue $M^s \to N$ ou $\widehat{M} \to N$ à partir d'un morphisme $M \to N$ est de même norme d'opérateur.
- (Produit tensoriel) Si M et N sont des A-modules semi-normés, on note $M \otimes_A N$ le module semi-normé $M \otimes_A N$ muni de la norme $\|x\| = \inf\{\sum_i \|m_i\|\|n_i\| \mid \sum_i m_i \otimes n_i = x\}$. Si A est de Banach, on note $M\widehat{\otimes}_A N$ le *produit tensoriel complété* $(M \otimes_A N)^\wedge$ de M et N. On vérifie aisément que $\widehat{\otimes}$ est la somme amalgamée dans BanAnn (comme $\otimes$ est la somme amalgamée dans Ann). Plus précisément, $\widehat{\otimes}_A$ vérifie la propriété universelle suivante : pour tout $L \in A{-}\mathsf{BanMod}$ et toute application bilinéaire $\Phi : M \times N \to L$ bornée par $C > 0$ (i.e. $\Phi(m,n) \leq C\|m\|\|n\|$ pour tout $(m,n) \in M \times N$), il existe un unique morphisme $\Phi : M\widehat{\otimes}N \to L$ tel que

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\Phi"'] & M\widehat{\otimes}N \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
L &
\end{tikzcd}$$

commute, et φ est également bornée par C. La démonstration est aisée : par propriété universelle du produit tensoriel usuel, on dispose d'une factorisation $\varphi_0 : M \otimes N \to L$ de Φ. Pour montrer que φ s'étend à $(M \otimes N)^\wedge = M \widehat{\otimes} N$ comme voulu, il faut vérifier que φ_0 est bornée par C. Or, si $x = \sum_i m_i \otimes n_i \in M \otimes N$, on a bien

$$\|\varphi_0(x)\| = \left\| \sum_i \Phi((m_i, n_i)) \right\| \le C \sum_i \|m_i\| \|n_i\|$$

d'où $\|\varphi_0(x)\| \le C\|x\|$ en prenant l'infimum sur les telles écritures de x.

— (Hom) Si A est un anneau de Banach, et M et N des A-modules semi-normés, alors $\mathrm{Hom}_{A-\mathsf{SNMod}}(M, N)$ est également un module semi-normé, pour la norme d'opérateur introduite précédemment. Si $M = N$ il s'agit même d'une algèbre semi-normée. Comme en algèbre commutative usuelle, la paire

$$M \otimes_A - : A{-}\mathsf{SNMod} \rightleftarrows A{-}\mathsf{SNMod} : \mathrm{Hom}_{A-\mathsf{SNMod}}(M, -)$$

est une adjonction.

De plus, si M et N sont de Banach, $\mathrm{Hom}_{A-\mathsf{SNMod}}(M, N)$ l'est aussi. En effet, la norme d'opérateur est alors bien séparante ($\|\varphi\| = 0$ équivaut à ce que $\mathrm{im}\,\varphi \subseteq \ker \|\cdot\|$, i.e. $\mathrm{im}\,\varphi = 0$) et complète : supposons que $\sum_i \|\varphi_i\| < \infty$. Alors, pour tout $m \in M$, $\sum_i \|\varphi_i(m)\| \le \|m\| \sum_i \|\varphi_i(m)\| < \infty$ donc on peut poser $\varphi(m) = \sum_i \varphi_i(m_i)$. Cela définit un élément $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A-\mathsf{BanMod}}(M, N)$ qui est la somme de $\sum_i \varphi_i$.

Remarque 2. Si l'on se restreint aux semi-normes non archimédiennes, on munira plutôt $M \otimes_A N$ de la semi-norme $\|x\| = \inf\{\max_i \|m_i\|\|n_i\| \mid \sum_i m_i \otimes n_i = x\}$. Dès le prochain chapitre, on travaillera uniquement avec des semi-normes non archimédiennes, donc on adopte l'autre définition uniquement dans ce chapitre.

Il faut faire attention lorsque l'on souhaite faire des identifications de modules semi-normés. Par exemple, un morphisme $\varphi : M \to N$ de modules semi-normés n'induit pas nécessairement un isomorphisme entre $\mathrm{im}\,\varphi$ et $\mathrm{coim}\,\varphi = M/\ker\varphi$ (en particulier, la catégorie des modules semi-normés n'est pas abélienne) ; si tel est le cas on dit que φ est *admissible*. Heureusement, certaines identifications d'algèbre commutative restent tout de même valides dans ce cadre.

Proposition 3. *Soit A un anneau semi-normé, $\mathfrak{a}$ un idéal, et M un A-module semi-normé. Alors, $M \otimes_A A/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} M/\mathfrak{a}M$ est un isomorphisme. Il s'agit même d'une isométrie si $\|am\| \le \|a\|\|m\|$ pour tous $a \in A$, $m \in M$.*

Proposition 4. *Soient M et N des A-modules semi-normés, où A est un anneau de Banach. Alors, $(M \otimes_A N)^\wedge \xrightarrow{\sim} \widehat{M} \widehat{\otimes}_A \widehat{N}$.*

Démonstration. L'adjonction $(- \otimes_A N, \mathrm{Hom}_{A-\mathsf{SNMod}}(N, -))$ montre que les deux représentent le même foncteur. ■

Enfin, si M est un module semi-normé et $r > 0$, on pose $M\langle r^{-1}T\rangle$ le module des séries formelles $\sum_i m_i T^i$ avec $m_i \in M$ tels que $\left\|\sum_i m_i T^i\right\| = \sum_i \|m_i\| r^i < \infty$, muni de la semi-norme ainsi définie. Si $M = A$ est un anneau semi-normé, $A\langle r^{-1}T\rangle$ est une algèbre semi-normée. Si l'on travaille avec des semi-normes non archimédiennes (i.e. dès le prochain chapitre), on considérera plutôt les séries $\sum_i m_i T^i$ telles que $\|m_i\| r^i \to 0$, munies de la semi-norme $\max_i \|m_i\| r^i$. Cette construction vérifie la propriété universelle suivante : pour tout morphisme d'anneaux de Banach $A \to B$ et $b \in B$ tel que $\sum_i \|b^i\| r^i < \infty$, il existe un unique morphisme $A\langle r^{-1}T\rangle \to B$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \\ A\langle r^{-1}T\rangle \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

et qui envoie T sur b.

Proposition 5. *Soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux de Banach, M un A-module de Banach et $r > 0$. Alors, $M\langle r^{-1}T\rangle \widehat{\otimes}_A B \xrightarrow{\sim} (M\widehat{\otimes}_A B)\langle r^{-1}T\rangle$ est un isomorphisme.*

Pour finir, citons un résultat dont nous nous servirons tout le long.

Théorème 6. *Soit K un corps valué complet non archimédien. Alors, il existe une unique extension de $|\cdot|$ à sa clôture algébrique K^{alg}, donnée par $|\alpha| := \left|N_{L/K}(\alpha)\right|^{1/[L:K]}$ pour toute extension finie L contenant α.*

Démonstration. Voir [Bos14, appendice A, théorème 3] ou [Neu95, chapitre 2, théorème 4.8]. ■

Corollaire 7. *Soit K un corps valué non archimédien (pas nécessairement complet) et L une extension de K. Alors, la valuation de K s'étend (pas forcément uniquement) à L.*

Démonstration. D'après le lemme de Zorn, il suffit de le faire quand L est engendré par un seul élément sur K. On distingue ainsi deux cas : soit $L \simeq K(T)$, et dans ce cas on peut munir L de la norme de Gauss, cf. la proposition 30, soit L est une extension finie de K. Dans le deuxième cas, on peut considérer un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\widehat{K} \otimes_K L$ et poser $M = (\widehat{K} \otimes_K L)/\mathfrak{m}$. Alors, M est une extension finie de $\widehat{K}$, donc la valuation de $\widehat{K}$ s'étend uniquement à M d'après le théoreme précédent, et la restriction de cette valuation à $L \to M$ fournit une valuation sur L étendant celle de K. ■

1.2 Théorie de Gelfand

À partir de maintenant et dans tout le reste de ce mémoire, on travaillera uniquement avec des anneaux commutatifs, sauf mention explicite du contraire. L'idée de la construction du spectre de Berkovich est la suivante. On aimerait développer une théorie de Gelfand pour les algèbres de Banach sur un corps valué complet K autre que $\mathbb{C}$. Le problème est que, dès que celui-ci est non archimédien (ce qui est le cas à moins qu'il soit isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ d'après le théorème d'Ostrowski (voir [Neu95, chapitre 2, théorème 4.2]), même s'il est algébriquement clos, un élément $a \in A$ d'une K-algèbre de Banach n'admet pas toujours de valeur spectrale, i.e. $\lambda \in K$ tel que $a - \lambda$ ne soit pas inversible.

En effet, si c'était le cas, le théorème de Gelfand-Mazur serait vrai pour K : la seule K-algèbre de Banach à division serait K lui-même. Or, la complétion de $K(T)$ munie de la *norme de Gauss* définie sur $K[T]$ par $\left|\sum_{i=0}^n a_i T^i\right| = \max |a_i|$ (multiplicative d'après la proposition 30) est toujours une algèbre de Banach à division.

Pour pallier ce défaut, nous allons définir le spectre d'un élément à travers la théorie de Gelfand plutôt que les valeurs spectrales. Faisons quelques rappels. Si A est une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach (commutative et unitaire) et $a \in A$, le spectre de a est $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid a - \lambda \notin A^\times\}$. Il s'agit d'un compact de $\mathbb{C}$ d'après la proposition suivante, où $A^{\circ\circ} = \{a \in A \mid \exists n \geq 1,\ \|a^n\| < 1\}$.

Proposition 8. *Soit A un anneau de Banach. Si $\|a\| < 1$, alors $1 - a$ est inversible, d'inverse $\sum_i a^i$. En d'autres termes, $1 + A^{\circ\circ} \subseteq A^\times$.*

Démonstration. La série converge absolument puisque $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative donc $\sum_i \|a^i\| \leq \sum_i \|a\|^i < \infty$, et il est clair qu'elle définit un inverse de $1 - a$. La somme converge de même s'il existe $n \geq 1$ tel que $\|a^n\| < 1$, et on en déduit $1 + A^{\circ\circ} \subseteq A^\times$. ■

Corollaire 9. *Soit A un anneau de Banach et $a \in A$. Alors, toute valeur spectrale de a est bornée par $\|a\|$.*

Démonstration. Si $|\lambda| > \|a\|$, $a - \lambda = -\lambda(1 - a\lambda - 1)$ est inversible puisque $\|a\lambda^{-1}\| < 1$. ■

Corollaire 10. *Soit A un anneau de Banach. Alors, $A^\times$ est ouvert.*

Démonstration. Soit $a \in A^\times$. Alors, si $\|b\| < \|a\|^{-1}$, $a - b = a^{-1}(1 - ab)$ est inversible d'après la proposition précédente. ■

Corollaire 11. *Tout idéal maximal d'un anneau de Banach est fermé.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal d'un anneau de Banach A. Si $\overline{\mathfrak{m}} \neq \mathfrak{m}$, on a donc forcément $\overline{\mathfrak{m}} = A$. Mais alors, $A^\times$ intersecte $\overline{\mathfrak{m}}$ donc intersecte $\mathfrak{m}$ puisqu'il est ouvert, i.e. $\mathfrak{m} = A$, absurde. ■

Ainsi, $\sigma(a)$ est fermé car $A^\times$ est ouvert, et est borné par $\|a\|$, donc est bien compact. On montre également qu'il est toujours non vide lorsque $A \neq 0$ par des méthodes d'analyse complexe : si $a - \lambda$ était toujours inversible, pour toute $\varphi \in A^*$, la fonction $\lambda \mapsto \varphi((a - \lambda)^{-1})$ serait analytique et tenderait vers 0 en l'infini, donc serait nulle d'après le théorème de Liouville. Ainsi, par Hahn-Banach, $(a - \lambda)^{-1}$ serait nul pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, absurde si $A \neq 0$.

Le spectre de A elle-même est quant à lui défini comme l'algèbre des *caractères* $\widehat{A} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}-\mathsf{Alg}}(A, \mathbb{C})$, muni de la topologie faible étoile (considéré comme un sous-espace du dual topologique A^*). Il découle du théorème de Gelfand-Mazur que $\widehat{A}$ est en bijection avec les idéaux maximaux $\mathrm{Spm}(A)$ de A, à travers $\gamma \mapsto \ker\gamma$, d'inverse $\mathfrak{m} \mapsto A/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{C}$, le dernier isomorphisme découlant du théorème de Gelfand-Mazur. En particulier, puisque tout anneau non nul admet un idéal maximal, il est non vide ! De plus, d'après Banach-Alaoglu, $\widehat{A}$ est compact, comme fermé de la boule unité de A^*.

À un élément $a \in A$, on associe sa transformée de Gelfand $\widehat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$, définie par $\widehat{a}(\gamma) = \gamma(a)$. On définit ainsi une application $A \to \mathcal{C}(\widehat{A})$. Le résultat clé est que $\mathrm{im}\,\widehat{a} = \sigma(a)$ pour tout $a \in A$. En effet, λ est une valeur spectrale de a si et seulement si $a - \lambda$ est contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{m} = \ker\gamma$, i.e. $\gamma(a) = \lambda$. Comme on sait que $\widehat{A}$ est non vide, on obtient ainsi une nouvelle démonstration de la non-vacuité de $\sigma(a)$!

Évidemment, cette démonstration est circulaire à cause de l'identification entre $\widehat{A}$ et $\mathrm{Spm}(A)$ via le théorème de Gelfand-Mazur. Cependant, le raisonnement ci-dessus montre indépendamment de Gelfand-Mazur que $\mathrm{im}\,\widehat{a} \subseteq \sigma(a)$ (si $\gamma \in \widehat{A}$, $\ker\gamma$ est automatiquement maximal car $A/\ker\gamma \simeq \mathrm{im}\,\gamma = \mathbb{C}$ est un corps). Ainsi, si l'on arrive à montrer que $\widehat{A} \neq \emptyset$ sans utiliser Gelfand-Mazur, on aura reconstruit toute la théorie algébriquement.

1.3 Spectre de Berkovich

Bien sûr, la théorie de Berkovich n'a pas pour prétention de remplacer la théorie spectrale sur $\mathbb{C}$, elle vise seulement à l'élargir à un cadre plus général. Les paragraphes ci-dessus nous indiquent la marche à suivre. Soit A un anneau de Banach.

On définit le *spectre de Berkovich* $\mathcal{M}(A)$ de A comme l'espace de ses caractères. Qu'est-ce qu'un caractère ? Pour une $\mathbb{C}$-algèbre ce serait un morphisme $A \to \mathbb{C}$, mais sur un corps non archimédien, même algébriquement clos, des corps plus gros peuvent intervenir (puisque le théorème de Gelfand-Mazur n'est plus vrai), donc on définit cela comme un morphisme (borné) $A \to K$, où K est un corps valué complet quelconque.En revanche, si $A \to K$ est un caractère et L est une extension de K, on voudrait identifier les deux caractères $A \to K$ et $A \to K \hookrightarrow L$. On définit donc $\mathcal{M}(A)$ comme les caractères de A, modulo la relation d'équivalence $\gamma_1 : A \to K_1 \sim \gamma_2 : A \to K_2$ s'il existe une factorisation

$$\begin{tikzcd}
 & & K_1 \\
A \arrow[urr, "\gamma_1"] \arrow[drr, "\gamma_2"'] \arrow[r, dashed] & K \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\
 & & K_2
\end{tikzcd}$$

où K est valué complet. Évidemment, ces morphismes sont tous dans BanAnn.

Donnons une description plus agréable de $\mathcal{M}(A)$. Toute classe de caractères $\gamma : A \to K$ induit par transfert une semi-valuation $|\cdot|_\gamma$ bornée sur A. Réciproquement, une semi-valuation bornée $|\cdot|$ sur A définit un caractère $\gamma_{|\cdot|} : A \to A/\ker|\cdot| \to \mathrm{Frac}(A/\ker|\cdot|)^\wedge$. Comme γ se factorise à travers $\gamma_{|\cdot|_\gamma}$, on obtient une bijection entre les classes de caractères et les semi-valuations bornées sur A !

Cette nouvelle description permet également de trouver quelle topologie mettre sur $\mathcal{M}(A)$. On ne peut plus mettre de topologie aussi forte que sur $\widehat{A}$ car nos caractères ne sont plus à valeur dans le même corps, donc on ne peut plus les comparer à l'arrivée, mais seulement à la source. Sur $\mathbb{C}$, la topologie naturelle à mettre est la plus grossière rendant continue toutes les évaluations $\widehat{f} : \gamma \mapsto \gamma(f)$ $(f \in A)$, tandis que ici, il s'agit de la plus grossière rendant continue toutes les évaluations $\widehat{f} : |\cdot| \mapsto |f|$ $(f \in A)$.

Définition 12. Soit A un anneau de Banach. Son *spectre de Berkovich* $\mathcal{M}(A)$ est l'ensemble des semi-valuations bornées sur A, muni de la topologie initiale associée aux applications $\widehat{f} : |\cdot| \mapsto |f|$ pour $f \in A$.

Remarque 13. Si A est un corps valué K, $\mathcal{M}(A)$ est un singleton dont le seul élément correspond à la valuation $|\cdot|$ de K. En effet, si $|\cdot|'$ est une autre semi-valuation sur K, pour tout $f \in K^\times$, on a à la fois $|f|' \leq |f|$ et $|f^{-1}|' \leq |f^{-1}|$, i.e. $|f|' = |f|$.

Proposition 14. *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative. Alors, $\widehat{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(A)$.*

Démonstration. L'application envoie un caractère γ sur la semi-norme $x \mapsto |\gamma(x)|$. Il découle du théorème d'Ostrowski (voir [Neu95, chapitre 2, théorème 4.2]) qu'elle est bijective. Elle est continue par propriété universelle de la topologie initiale. Comme $\widehat{A}$ est compact et $\mathcal{M}(A)$ séparé (voir le théorème 15), il s'agit donc d'un homéomorphisme. ■

Étant donné un point du spectre $x \in \mathcal{M}(A)$, on note $|\cdot|_x$ la semi-valuation associée, $\mathcal{H}(x)$ le corps résiduel $(\operatorname{Frac} A/\ker|\cdot|_x)^\wedge$, $f(x)$ l'image de f dans $\mathcal{H}(x)$, et $|f(x)| = \widehat{f}(x) = |f|_x$ sa valeur absolue. Techniquement, on a donc $x = |\cdot|_x$ et $|f(x)| = x(f)$, mais ce n'est pas très commode à visualiser.

Notons que cette vision géométrique des choses se retrouvait déjà dans la théorie de Gelfand usuelle : si X est un espace compact et $A = \mathcal{C}(X)$ est l'algèbre des fonctions continues $X \to \mathbb{C}$, on a $X \overset{\sim}{\to} \widehat{A}$, où l'application envoie $x \in X$ sur le caractère associé à l'idéal maximal $f \mapsto f(x)$. Elle est clairement continue. Montrons la bijectivité ; il s'ensuivra qu'il s'agit d'un homéomorphisme puisque X est compact et $\widehat{A}$ séparé. D'après le lemme d'Urysohn, cette application est injective.

Montrer la surjectivité revient à montrer que les idéaux maximaux de A sont exactement les $\mathfrak{m}_x = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$. Supposons que $\mathcal{I}$ est un idéal de A contenu dans aucun $\mathfrak{m}_x$. Pour tout $x \in X$, soit $f_x \in \mathcal{I}$ tel que $f_x(x) \neq 0$. Par continuité, on dispose d'un voisinage U_x de x sur lequel f_x ne s'annule pas. Par compacité, on dispose d'un recouvrement fini $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Alors,

$$f = \sum_{i=1}^n |f_{x_i}|^2 = \sum_{i=1}^n f_{x_i}\overline{f_{x_i}}$$

appartient à $\mathcal{I}$ ne s'annule nulle part : elle appartient donc à $A^\times$. Ainsi, $\mathcal{I} = A$.

En conclusion, il faut voir un anneau de Banach A comme une « algèbre de fonctions sur un espace », et son spectre $\mathcal{M}(A)$ comme « les points de cet espace », et en fait c'est que nous ferons dans un sens plus précis une fois que nous aurons construit le faisceau structural (seulement pour une classe restreinte d'anneaux).

La construction du spectre de Berkovich est de plus fonctorielle (de manière contravariante, comme Spec) : un morphisme $\varphi : A \to B$ d'anneaux de Banach donne lieu à un morphisme $\widetilde{\varphi} : \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A)$ défini par $|f|_{\widetilde{\varphi}(y)} = |\varphi(f)|_y$.

L'analogue du théorème fondamental de la théorie de Gelfand devient le résultat suivant. Rappelons que tout élément de $\mathcal{M}(A)$ est majoré par $\|\cdot\|$, d'après la remarque 1.

Théorème 15. *Soit A un anneau de Banach commutatif non nul. Alors, $\mathcal{M}(A)$ est compact et non vide.*

Démonstration. Procédons du plus simple au plus délicat et reléguons la non-vacuité à la fin. Si $x, y \in \mathcal{M}(A)$ sont distincts, soit $f \in A$ tel que $|f(x)| \neq |f(y)|$. Supposons sans perte de généralité que $|f(x)| < |f(y)|$ et soit r un nombre réel compris strictement entre les deux. Alors, $\widehat{f}^{-1}([0, r[)$ et $\widehat{f}^{-1}(]r, +\infty[)$ sont deux ouverts disjoints qui séparent x et y. Ainsi, $\mathcal{M}(A)$ est séparé.

Passons à présent à la quasi-compacité. Soit (x_α) un système dirigé sur $\mathcal{M}(A)$ et montrons qu'il admet un sous-système dirigé convergeant. Injectons $\mathcal{M}(A)$ dans l'espace compact $T = \prod_{f \in A}[0, \|f\|]$ à travers $\iota : x \mapsto (|f(x)|)_{f \in A}$. On dispose donc d'un sous-système $(\iota(y_\beta))$ de $(\iota(x_\alpha))$ convergeant vers un certain élément $(\alpha_f)_{f \in A}$. Alors, la fonction $|f| := \alpha_f$ est une semi-valuation bornée sur A, vers laquelle converge (y_β). En effet, elle est bornée par définition, et multiplicative en passant à la limite dans la limite $\iota(y_\beta)_f \iota(y_\beta)_g = \iota(y_\beta)_{fg}$. Elle est sous-additive par le même argument. Ainsi, $\mathcal{M}(A)$ est quasi-compact.

Enfin, montrons que $\mathcal{M}(A)$ est non vide. Par fonctorialité, quitte à quotienter A par un idéal maximal, on peut supposer que $A = K$ est un corps. À présent, l'idée est qu'une semi-valuation bornée correspond à un élément minimal (pour l'ordre produit) de l'ensemble des semi-normes bornées de A. Soit donc $|\cdot|$ un élément tel que, si $\|f\|' \leq |f|$ pour tout $f \in K$ (où $\|\cdot\|'$ est une semi-norme bornée quelconque), alors $|\cdot| = \|\cdot\|'$. Il en existe un d'après le lemme de Zorn (l'infimum d'une chaîne de semi-normes bornées est encore une semi-norme bornée). Quitte à remplacer K par sa complétion pour $|\cdot|$, on peut supposer que $|\cdot|$ est sa norme. Comme on a la sous-multiplicativité, il nous suffit de montrer que $|f^{-1}| = |f|^{-1}$ pour tout $f \in K^\times$.

Montrons d'abord que $|\cdot|$ est uniforme. Supposons par l'absurde que $f \in K^\times$ et $n \in \mathbb{N}$ sont tels que $|f^n| < |f|^n$. Alors, $f - T$ n'est pas inversible dans $K\langle r^{-1}T\rangle$, où $r = |f^n|^{1/n}$. Si l'on admet cela pour le moment, il en découlera que le morphisme $\varphi : K \to K\langle r^{-1}T\rangle/(f-T)$ est injectif, puisque K est un corps et le membre de droite est non nul. Par construction, $\|\varphi(g)\| \leq |g|$ pour tout $g \in K$, mais aussi $\|\varphi(f)\| = \|T\| \leq r < |f|$. Cela contredit la minimalité de $|\cdot|$. Montrons donc que $f - T$ n'est effectivement pas inversible : cela revient à ce que $\sum_i |f^{-i}|r^i$ ne converge pas. Or, si $i = an + b$, $0 \leq b < n$, alors

$$|f^{-i}|r^i \geq |f^i|^{-1}|f^n|^{b+a/n} \geq \frac{|f^n|^{b/n}}{|f^b|}.$$

Ainsi, une tous les termes de la série sont $\geq \min_{0\leq b<n} \frac{|f^n|^{b/n}}{|f^b|} > 0$, donc la série ne peut pas converger.

Maintenant qu'on a montré que $|\cdot|$ était uniforme, montrons que $|f^{-1}| = |f|^{-1}$ pour tout $f \in K^\times$, i.e. que $|\cdot|$ est bien multiplicative. Supposons par l'absurde que $f \in K^\times$ est tel que $|f|^{-1} < |f^{-1}|$. Alors, $f - T$ n'est pas inversible dans $K\langle r^{-1}T\rangle$, où $r = |f^{-1}|^{-1}$. En effet, pusque f est uniforme, $|f^{-i}|r^i = 1$ pour tout i et donc $\sum_i |f^{-i}|r^i$ ne converge pas. On conclut comme précédemment en considérant l'injection $K \to K\langle r^{-1}T\rangle/(f-T)$. ■

Remarquons qu'on a en fait démontré que l'application canonique $\mathcal{M}(A) \to \operatorname{Spec} A$, $x \mapsto \ker|\cdot|_x$ contient $\operatorname{Spm} A$ dans son image (c'est bien sûr équivalent à notre énoncé, en l'appliquant à $A/\mathfrak{m}$, toujours de Banach car les idéaux maximaux sont fermés). Il en découle le corollaire suivant, qui est l'analogue du fait qu'un élément d'une algèbre de Banach est inversible si et seulement s'il n'admet pas 0 comme valeur spectrale (par définition dans ce cas-là).

Remarque 16. Berkovich [Ber93, proposition 2.1.1] montre en fait que $\mathcal{M}(A) \to \operatorname{Spec} A$ est tout le temps surjective lorsque A est une *algèbre affinoïde* (cf. le chapitre 2).

Corollaire 17. *Soit A un anneau de Banach commutatif. Alors, $f \in A$ est inversible si et seulement $0 \notin \operatorname{im} \widehat{f}$. Plus généralement, $f_1, \ldots, f_n \in A$ n'ont pas de zéro en commun dans $\mathcal{M}(A)$ si et seulement si $(f_1, \ldots, f_n) = A$.*

Démonstration. Supposons que $(f_1, \ldots, f_n)$ soit un idéal propre. Alors, il est contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{m}$, en particulier fermé. Si $x \in \mathcal{M}(A/\mathfrak{m})$, on a bien $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$ (dans $\mathcal{H}(x)$). ■

Terminons par la propriété topologique suivante.

Proposition 18. *Pour toute anneau de Banach A, les ouverts σ-compacts forment une base de voisinages de $\mathcal{M}(A)$.*

Démonstration. Une base de voisinages ouverts est donnée par les ouverts de la forme $U = \{y \mid |f_i(y)| < r_i,\ |g_j(y)| < s_j\}$. Soit $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots < 1$ une suite croissante convergent vers 1. Alors,

$$U = \bigcup_n \{y \mid |f_i(y)| \leq \varepsilon_i r_i,\ |g_j(y)| \leq \varepsilon_j s_j\}$$

est bien σ-compact. ∎

1.4 Formule de Gelfand

Il existe un dernier résultat de théorie de Gelfand sur des algèbres de Banach quelconques : la formule de Gelfand, très importante, par exemple, pour étudier les C^*-algèbres. Celle-ci affirme que si $a \in A$ est un élément d'une algèbre de Banach son rayon spectral $\rho(a)$ (le maximum des modules de ses valeurs spectrales) est la limite de $\|a^n\|^{1/n}$ quand $n \to \infty$. La version de Berkovich est la suivante. Notons que celle-ci fournit une démonstration purement algébrique de la formule de Gelfand sur $\mathbb{C}$, habituellement démontrée avec le principe de la borne uniforme et de l'analyse complexe ! On pose $\|\widehat{f}\|_\infty = \max_{x \in \mathcal{M}(A)} |f(x)|$; notons que le suprémum est bien atteint (si $\mathcal{M}(A)$ est non vide) puisque $\mathcal{M}(A)$ est compact et $\widehat{f}$ continue (par construction).

Théorème 19. *Soit A un anneau de Banach commutatif non nul. Alors, pour tout $f \in A$, $\rho(f) := \|\widehat{f}\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|f^n\|^{1/n}$.*

Démonstration. Une inégalité découle de la proposition 8, qui montre que $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|$ et donc, en passant à la puissance n-ème, $\rho(f^n) = \rho(f)^n \leq \|f^n\|$. Ainsi, $\rho(f) \leq \liminf_{n\to\infty} \|f^n\|^{1/n}$. Il reste à montrer l'autre sens.

Supposons que $r > \rho(f)$ et montrons que $r \geq \limsup_{n\to\infty} \|f^n\|^{1/n}$. Pour cela, nous allons montrer que $r^{-n}\|f^n\| \to 0$. On va en fait montrer que $\sum_n r^{-n}\|f^n\|$ converge, en travaillant dans l'anneau de Banach $B = A\langle rT\rangle$. Cela revient à montrer que $\sum_n f^n T^n = (1 - fT)^{-1}$ appartient à B, i.e. que $1 - fT$ est inversible dans B ($\sum_n f^n T^n$ est son inverse en tant que série entière donc c'est le seul inverse possible dans B). D'après le corollaire 17, il suffit de montrer que $|1 - fT| \neq 0$ pour toute semi-valuation bornée sur B. Or, la restriction d'une telle valuation à A est encore bornée, donc

$$|1 - fT| \geq 1 - |f||T| \geq 1 - \rho(f)\|T\| > 1 - rr^{-1} = 0.$$

Cela conclut la démonstration. ∎

Rappelons qu'un anneau semi-normé uniforme est un anneau muni d'une semi-norme uniforme, i.e. telle que $\|f^n\| = \|f\|^n$ pour tout n.

Corollaire 20. *Soit A un anneau de Banach commutatif. Alors, ρ définit une semi-norme uniforme bornée sur A, et la complétion A^u de A pour ρ est la complétion uniforme de A, i.e. $A \to A^u$ est l'adjoint à gauche de l'inclusion* $\mathsf{UBanAnn} \to \mathsf{BanAnn}$.

Démonstration. ρ est uniforme et sous-additive par définition. Il découle de la formule de Gelfand qu'elle est également sous-multiplicative. Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux de Banach, où B est uniforme. Il s'agit de montrer que φ est aussi borné pour ρ. On a $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$ pour tout $a \in A$ d'après la remarque 1. Si $n \in \mathbb{N}$, comme B est uniforme, on a $\|\varphi(a)\|^n = \|\varphi(a^n)\| \leq \|a^n\|$, d'où $|\varphi(a)| \leq \|a^n\|^{1/n}$, i.e. $|\varphi(a)| \leq \rho(a)$ en prenant la limite, comme voulu. ∎

On peut ainsi considérer la boule unité de la complétion uniforme de A. Dans le cas non archimédien, A^u est aussi non archimédienne, donc A° est un anneau et $A^{\circ\circ}$ en est un idéal. Notons que les trois constructions ci-dessous sont fonctorielles. Elles sont étudiées plus en détail dans [BGR84, chapitre 6].

Définition 21. Si A est un anneau semi-normé non archimédien, on pose $A^\circ := \{f \in A \mid \rho(f) \leq 1\}$ et $A^{\circ\circ} := \{f \in A \mid \rho(f) < 1\}$. On note également $\widetilde{A}$ le quotient $A^\circ/A^{\circ\circ}$, qu'on appelle la *réduction*.

1.5 Fibres et connexité

Les spectres de Berkovich, comme les schémas affines, ont la bonne propriété que les fibres de morphismes sont encore des objets de la théorie. Comme le produit tensoriel complété est la somme amalgamée pour les anneaux de Banach, il s'agit du produit fibré dans la catégorie duale, et une fois le faisceau structual introduit, cette proposition nous dira que le produit fibré d'un espace analytique avec un point nous donne les fibres, comme pour les schémas.

Proposition 22. *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Alors, pour tout $x \in \mathcal{M}(A)$, $\mathcal{M}(B\widehat{\otimes}_A\mathcal{H}(x)) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\varphi}^{-1}(x)$. De plus, cette flèche induit un isomorphisme sur les corps résiduels complétés $\mathcal{H}(y)$.*

Démonstration. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(B \otimes_A \mathcal{H}(x)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}(B) \arrow[d] \\
\mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) = \{x\} \arrow[r] & \mathcal{M}(A)
\end{tikzcd}$$

induit une flèche $\mathcal{M}(B\widehat{\otimes}_A\mathcal{H}(x)) \to \mathcal{M}(B) \times_{\mathcal{M}(A)} \{x\} = \widetilde{\varphi}^{-1}(x)$ dans Top. Montrons la bijectivité, il s'agira alors d'un homéomorphisme puisque $\mathcal{M}(B\widehat{\otimes}_A\mathcal{H}(x))$ est compact et $\widetilde{\varphi}^{-1}(x)$ séparé.

Utilisons la définition de $\mathcal{M}$ comme (classes de) caractères. Un caractère $B \to K$ d'image x correspond (par définition) à une factorisation de la forme

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d] & A \arrow[l] \arrow[d] \\
K & \mathcal{H}(x) \arrow[l, dashed]
\end{tikzcd}$$

Par la propriété universelle du produit tensoriel complété, il revient au même de demander une factorisation du type

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d] & B\widehat{\otimes}_A\mathcal{H}(x) \arrow[dl, dashed] \\
K &
\end{tikzcd}$$

La dernière assertion est claire en prenant K minimal.

∎

On dispose également, comme pour les schémas affines, du résultat suivant. La réciproque est démontrée avec le faisceau structural (comme pour les schémas) pour les algèbres affinoïdes, dans le corollaire 72.

Proposition 23. *Soient A et B des anneaux de Banach. Alors, $\mathcal{M}(A)\sqcup\mathcal{M}(B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(A\times B)$.*

Démonstration. Cette application est bien sûr injective ; on doit démontrer la surjectivité (par compacité). Or, une semi-valuation $|\cdot|$ sur $A \times B$ s'annule sur un idéal premier de $A \times B$, et donc sur $0 \times B$ ou $A \times 0$, i.e. provient d'une semi-valuation sur A ou B. ■

1.6 Espace affine analytique

Introduisons une version relative du spectre.

Définition 24. Soit A un anneau de Banach, et B une A-algèbre. On note $\mathcal{M}_A(B)$ l'ensemble des semi-valuations sur B, bornées sur A, muni de la topologie initiale associée aux applications $x \mapsto |f(x)|$ pour $f \in B$. On note $\mathbb{A}_A^{n,\mathrm{an}} = \mathcal{M}_A(A[T_1, \dots, T_n])$ *l'espace affine analytique de dimension* n sur A.

On a défini $\mathbb{A}^n$ comme spectre relatif, mais on peut quand même en donner une description en termes de spectres. Ici, on note $T = (T_1, \dots, T_n)$ et $A\langle r^{-1}(T - \alpha)\rangle = A\langle r_1^{-1}(T_1 - \alpha_1), \dots, r_n^{-1}(T_n - \alpha_n)\rangle$.

Proposition 25. *Soit A un anneau de Banach, $\alpha \in A_A^{n,\mathrm{an}}$ et $r \in \mathbb{R}^n_{>0}$. Alors, le fermé $E(\alpha, r) = \{y \mid \forall i,\ |(T - a)(y)| \leq r\} \subseteq \mathbb{A}_A^{n,\mathrm{an}}$ s'identifie à $\mathcal{M}(A\langle r^{-1}(T - \alpha)\rangle)$, où $T = (T_1, \dots, T_n)$.*

Remarque 26. On peut déjà observer un phénomène qu'on retrouvera plus tard quand on définira les espaces analytiques : $\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}$ est obtenu comme recollement de spectres, mais ces spectres s'identifient à des *fermés* (même compacts) plutôt que des ouverts, contrairement à ce qui se passe en géométrie algébrique classique.

Démonstration. En effet, comme $A[T]$ est dense dans $A\langle r^{-1}(T-\alpha)\rangle$, la flèche $\mathcal{M}(A\langle r^{-1}(T-\alpha)\rangle) \to \mathbb{A}_A^{n,\mathrm{an}}$ est injective, et son image est incluse dans $E(\alpha, r)$ puisque $|T_i-\alpha| \leq \|T_i-\alpha_i\| = r_i$ pour tout semi-valuation bornée sur $A\langle r^{-1}(T-\alpha)\rangle$. Réciproquement, un point $x \in E(\alpha, r)$ donne lieu à une semi-valuation bornée sur $A\langle r^{-1}(T - \alpha)\rangle$ par propriété universelle de la complétion, puisque l'hypothèse $x \in E(\alpha, r)$ montre que $|\cdot|_x$ est bornée sur $A[T]$ pour la restriction de la norme de $A\langle r^{-1}T\rangle$ à $A[T]$. Il s'agit bien d'un homéomorphisme comme $\mathbb{A}_A^{n,\mathrm{an}}$ est séparé et $\mathcal{M}(A\langle r^{-1}(T - \alpha)\rangle)$ compact. ■

En particulier, l'écriture $\mathbb{A}_A^{n,\mathrm{an}} = \bigcup_{r\in\mathbb{N}^n} E(0, r)$ montre la proposition suivante.

Corollaire 27. *Pour tout anneau de Banach A, $\mathbb{A}_A^{n,\mathrm{an}}$ est σ-compact.*

Corollaire 28. *Soit A un anneau de Banach et $x \in \mathcal{M}(A)$. La fibre de $\mathbb{A}_A^{n,\mathrm{an}} \to \mathcal{M}(A)$ en x vaut $\mathbb{A}_{\mathcal{H}(x)}^{n,\mathrm{an}}$.*

Démonstration. Cela découle de la proposition 22 et de la décomposition $\mathbb{A}^n = \bigcup_{r\in\mathbb{N}^n} E(0, r)$, puisqu'on a $A\langle r^{-1}(T - \alpha)\rangle\widehat{\otimes}_A\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(x)\langle r^{-1}(T - \alpha)\rangle$ d'après la proposition 5. ■

Chapitre 2

Algèbres affinoïdes

Sommaire

2.1 Algèbres de Tate et algèbres strictement affinoïdes

Les algèbres affinoïdes jouent le rôle en géométrie de Berkovich des algèbres de type fini sur un corps K en géométrie algébrique, tandis que les algèbres de Tate $K\langle r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\rangle$ des séries convergentes sur le polydisque $E(0,r)$ jouent le rôle des anneaux de polynômes $K[T_1, \dots, T_n]$. Cette correspondance n'est pas seulement géométrique mais également algébrique : les algèbres affinoïdes jouissent de nombreuses propriétés semblables aux algèbres de type fini. Pour simplifier les notations, on notera A_n l'algèbre de Tate $K\langle T_1, \dots, T_n\rangle$.

Dans tout ce qui suit, on fixe un corps valué complet non archimédien K. Rappelons que $K\langle r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\rangle = K(r^{-1}T)$ ($r = (r_1, \dots, r_n)$ et $T = (T_1, \dots, T_n)$) désigne l'algèbre des séries $f = \sum_i a_i T^i$ telles que $|a_i|r^i \to 0$, où $r^i = r_1^{i_1} \cdots r_n^{i_n}$ si $i = (i_1, \dots, i_n)$, munie de la norme de Gauss $|f| = \max_i |a_i|r^i$.

Remarque 29. Si K est trivialement valué, $K\langle r^{-1}T\rangle$ vaut $K[T]$ si tous les r_i sont ≥ 1, et vaut $K[\![T]\!]$ si tous les r_i sont < 1.

Proposition 30. *Soit $T = (T_1, \dots, T_n)$ et $r \in \mathbb{R}^n_{>0}$. Alors, la norme de Gauss sur $K\langle r^{-1}T\rangle$ est multiplicative. En particulier, $K\langle r^{-1}T\rangle$ est intègre.*

Démonstration. On note $|\alpha|$ la somme des termes d'un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Soient $f, g \in K\langle r^{-1}T\rangle$ qu'on écrit sous la forme $f = \sum_i a_i T^i$ et $g = \sum_j b_j T^j$, de sorte que $fg = \sum_k c_k T^k$ avec $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$. En particulier,

$$|c_k|r^k \leq \max_{i+j=k} |a_i|r^i|b_j|r^j \leq |f||g|,$$

i.e. $|fg| \leq |f| \cdot |g|$. Pour l'autre sens, soient $i_0 \in \mathbb{N}^n$ (resp. j_0) de somme minimale atteignant le maximum de $(|a_i|r^i|)_i$ (resp $(|b_j|r^j))$. Alors,

$$|c_{i_0+j_0}|r^{i_0+j_0} = |a_{i_0}||b_{j_0}|r^{i_0+j_0} = |f||g|$$

puisque $a_{i_0}b_{i_0}$ est l'unique terme de valeur absolue maximale dans la somme $c_{i_0+j_0} = \sum_{i+j=i_0+j_0} a_i b_j$. ■

Ainsi, $|\cdot|$ définit un point de $\mathcal{M}(K\langle r^{-1}T\rangle)$, qu'on appelle le *point de Gauss* de $K\langle r^{-1}T\rangle$. En particulier, il est maximal, donc coïncide avec le rayon spectral.

Remarque 31. Dans le cas où $r=1$, on peut donner une preuve plus arithmétique. En effet, dans ce cas, par homogénéité, la multiplicativité revient à ce que $|fg|=1$ si $|f|=|g|=1$. Dit autrement, si $\widetilde{f},\widetilde{g}\neq 0$, $\widetilde{fg}\neq 0$, où $\widetilde{\cdot} : K^\circ\langle T_1,\ldots,T_n\rangle \to \widetilde{K}[T_1,\ldots,T_n]$ désigne la réduction modulo $\widetilde{K}$. Cela découle simplement du fait que l'anneau d'arrivée est intègre.

Définition 32. Une K-algèbre de Banach A est dite *affinoïde* s'il existe un épimorphisme admissible $K\langle r^{-1}T\rangle \to A$. Si on peut prendre $r=1$, A est *strictement affinoïde*.

Remarque 33. Si tous les r_i appartiennent à $\sqrt{|K^\times|}$, $K\langle r^{-1}T\rangle$ est strictement affinoïde, voir le corollaire 42. Ici, on note, pour G un sous-groupe de $\mathbb{R}_{>0}$, $\sqrt{G}=\{x \mid \exists n\geq 1,\ x^n\in G\} = G\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$.

Pour étudier les algèbres affinoïdes, on commencera donc par étudier les algèbres de Tate $K\langle r^{-1}T\rangle$ et en fait d'abord celles qui sont strictement affinoïdes, qui correspondent aux algèbres étudiées en géométrie rigide. Même si on ne se servira pas de ce résultat, signalons que tous les morphismes entre algèbres strictement affinoïdes sont bornés, et que toutes les normes quotient sont équivalentes d'après [Bos14, chapitre 2, proposition 20] (en revanche, le résultat tombe en défaut pour les algèbres affinoïdes générales). Citons quelques propriétés algébriques des algèbres strictement affinoïdes, dont les démonstrations pourraient être lues dans [Bos14]. On notera, pour simplifier, $A_n = K\langle T_1,\ldots,T_n\rangle$. Commençons par la normalisation de Noether et le Nullstellensatz.

Proposition 34. *Pour toute algèbre strictement-affinoïde non nulle A, il existe $d\in\mathbb{N}$ et un monomorphisme fini $A_d\to A$.*

Corollaire 35. *Pour tout $\mathfrak{m}\in\mathrm{Spm}(A)$, où A est une K-algèbre strictement affinoïde, le corps résiduel $A/\mathfrak{m}$ est fini sur K.*

Démonstration. Par le lemme précédent, on dispose d'une injection finie $A_d\to A/\mathfrak{m}_x$. Or, si $B\to C$ est un morphisme entier d'anneaux intègres, B est un corps si et seulement si C en est un. Comme A_d est un corps seulement pour $d=0$, le résultat en découle. ∎

Grâce à ce corollaire, on peut, dans le cas strict, identifier $\mathrm{Spm}\,A$ à une partie de $\mathcal{M}(A)$, qu'on appellera *points rigides* puisqu'il s'agit des points considérés en géométrie rigide. En effet, un idéal maximal $\mathfrak{m}\in\mathrm{Spm}\,A$ fournit un caractère $A\to A/\mathfrak{m} := L$, où L est une extension finie de K, donc un corps valué complet grâce au théorème 6. Dans le cas général, on appelle « point rigide »tout idéal maximal de corps résiduel fini sur K.

Proposition 36. *L'application $(K^{\mathrm{alg}^\circ})^n \to \mathrm{Spm}\,A_n$, $x\mapsto \mathfrak{m}_x=\{f \mid f(x)=0\}$ est surjective.*

Proposition 37. *A_n est factorielle, donc normale (i.e. intégralement close) et de dimension de Krull n. De plus, tous les anneaux locaux $(A_n)_\mathfrak{m}$ avec $\mathfrak{m}\in\mathrm{Spm}\,A_n$ sont réguliers et de dimension n.*

Proposition 38. *Toute algèbre strictement affinoïde A est noethérienne, de Jacobson, et tous ses idéaux sont fermés.*

Dans la section suivante, nous étendrons ce résultat (sauf le caractère Jacobson) aux algèbres non strictement affinoïdes et montrerons que tous leurs idéaux sont fermés. Pour terminer cette section, parlons un peu de la stabilité des algèbres affinoïdes sous diverses opérations. Il découle de la discussion à la fin de la section 1 du chapitre 1 que les algèbres affinoïdes sont stables par produit tensoriel complété.

Proposition 39. *Si $A \to C$ et $B \to C$ sont des morphismes d'algèbres affinoïdes, alors $A \widehat{\otimes}_C B$ est encore affinoïde.*

Démonstration. Il suffit d'écrire A et B sous la forme $C\langle r^{-1}T\rangle/\mathfrak{a}$ et $C\langle s^{-1}S\rangle/\mathfrak{b}$ puis d'utiliser les propositions de la fin de la section 1 du chapitre 1 pour obtenir un isomorphisme $A\widehat{\otimes}_C B \simeq C\langle r^{-1}T, s^{-1}T\rangle/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$. Pour simplifier, on suppose ici $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ fermé, ce qui sera démontré dans la section suivante (théorème 51). ∎

Proposition 40. *Si $A \to B$ est un morphisme fini entre K-algèbres de Banach et A est (strictement) affinoïde, alors B l'est aussi.*

Démonstration. Supposons A strictement affinoïde. D'après le lemme de normalisation de Noether (proposition 34), on peut supposer $A = A_n$. Par hypothèse, on dispose de $b_1, \ldots, b_m \in B$ tels que $B = \sum_{i=1}^m Ab_i$, et on peut supposer $b_i \in B^\circ$. Alors, la propriété universelle des algèbres de Tate montre que $A_{m+n} = A_n\langle T_1, \ldots, T_m\rangle \to B$, $T_i \mapsto b_i$ est bien défini, et clairement surjectif. L'admissibilité découle de l'équivalence des normes de Banach sur les modules finis sur une algèbre noethérienne, voir le théorème 46. ∎

Remarque 41. L'énoncé est également vrai pour les algèbres affinoïdes, en tensorisant avec K_r pour en certain r (cf. la section suivante) et en utilisant la remarque 50.

Corollaire 42. *$K\langle r_1^{-1}T_1, \ldots, r_n^{-1}T_n\rangle$ est strictement affinoïde si $r_1, \ldots, r_n \in \sqrt{|K^\times|}$.*

Démonstration. Écrivons $r_i^N = |a_i|$. Alors, $K\langle r^{-1}T\rangle = K\langle |a|^{-1}S\rangle[T]/(T^n - S)$ est une algèbre de Banach finie sur $K\langle |a|^{-1}S\rangle \simeq K\langle S\rangle$ donc est strictement affinoïde d'après la proposition précédente. ∎

Mentionnons également, même si nous ne nous en servirons pas, le lien entre rayon spectral et points rigides.

Proposition 43. *Soit A une algèbre strictement affinoïde. Alors, pour tout $f \in A$, $\rho(f) = \max_{x\in\mathcal{M}(A)} |f(x)|$ est atteint en un point rigide.*

Démonstration. Voir [Bos14, chapitre 3, théorème 15]. ∎

Proposition 44. *Soit A une algèbre affinoïde et $f \in A$. Alors, il existe $C > 0$ tel que $\|f^n\| \leq C\rho(f)^n$ pour tout $n \geq 0$.*

Démonstration. Il découle de la proposition 48 que l'on peut supposer A strictement affinoïde et K non trivialement valué. Alors $\rho(f) \in \sqrt{|K^\times|}$ d'après [Bos14, chapitre 3, section 1, théorème 16]. Si $\rho(f) = 0$, $|f(x)| = 0$ pour tout $x \in \operatorname{Spm} A$, donc f est nilpotent puisque A est Jacobson. Sinon, on peut choisir $a \in K^\times$ tel que $\rho(f)^N = |a|$. Alors $\rho(f^N/a) = 1$, donc il existe $C \geq 0$ tel que $\|f^N/a\|^n \leq C\rho(f^N/a)^n$ pour tout n d'après [Bos14, chapitre 3, section 1, théorème 17]. Cela constitue le résultat désiré. ∎

L'intérêt pour nous est dans la version améliorée ci-dessous de la propriété universelle des algèbres de Tate.

Corollaire 45. *Soient A et B des algèbres affinoïdes. Pour tous $r_1, \ldots, r_n > 0$ et $g_1, \ldots, g_n \in B$ tels que $\rho(g_i) \leq r_i$, il existe un unique morphisme $A\langle r^{-1}T\rangle \to B$, $T_i \mapsto g_i$.*

2.2 Modules finis

Dans cette section, on développe une astuce pour passer du cas non strict ou trivialement valué au cas strict et non trivialement valué. Commençons par énoncer le résultat capital suivant, dont nous nous servirons plusieurs fois. Ici, un A-module de Banach fini M est un A-module de Banach qui admet un épimorphisme admissible $\pi : A^n \to M$ pour un certain n.

Théorème 46 ([BGR84, 3.7.3].). *Supposons K non trivialement valué. Soit A une K-algèbre de Banach noethérienne. Alors, le foncteur d'oubli induit une équivalence entre la catégorie des A-modules (resp. A-algèbres) de Banach finis et la catégorie des A-modules (resp. A-algèbres) finis. Plus précisément, si A est une K-algèbre de Banach et K est un corps valué complet, ce foncteur est pleinement fidèle, et il est essentiellement surjectif lorsque A est noethérienne et K non trivialement valué.*

Il sera souhaitable pour nous d'étendre ce théorèmes dans certains cas où K est trivialement valué et dans le cas où les modules sont non archimédiens. Nous procéderons à l'aide d'un changement de base bien choisi. Si K est un corps valué complet et $r > 0$, $r \notin \sqrt{|K^\times|}$, on notera K_r le corps valué complet $K\langle r^{-1}T, rT^{-1}\rangle := K\langle r^{-1}T, rS\rangle/(TS-1)$. De même, si $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ est constitué d'éléments multiplicativement indépendants sur $\sqrt{|K^\times|}$, on définit K_r comme $K_{r_1}\widehat{\otimes}_K \cdots \widehat{\otimes}_K K_{r_n}$, qui coïncide avec $(K_{(r_1,\ldots,r_{n-1})})_{r_n}$. Explicitement, on a la description suivante.

Lemme 47. *Soit $r > 0$. Alors, K_r est une algèbre affinoïde constituée des séries formelles $f = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i T^i$, $a_i \in K$, munie de la valuation $|f| = \max_i |a_i| r^i$. Son groupe des valeurs est engendré par $|K^\times|$ et r. Si $r \notin \sqrt{|K^\times|}$, K_r est un corps.*

Démonstration. Commençons par voir qu'il s'agit bien de la norme quotient. Si $f = \sum_{i,j\geq 0} a_{i,j} T^i S^j$, sa norme dans K_r est $\max_{i,j} |a_{i,j}| r^{i-j} \geq \max_k \left|\sum_i a_{k+i,i}\right| r^k$ par l'inégalité triangulaire. Pour la multiplicativité, écrivons $|f| = |a_u| r^u$ et $|g| = |b_v| r^v$ avec u et v maximaux, Alors,

$$fg = \sum_k T^k \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right)$$

et le maximum de $\left|\sum_{i+j=k} a_i b_j\right| r^k$ est atteint en $u+v$, pour lequel il vaut $|a_u b_v| r^{u+v}$ par l'inégalité triangulaire forte, car il s'agit de l'unique terme de valuation maximale.

Enfin, supposons $r \notin \sqrt{|K^\times|}$ et soit $0 \neq f = \sum_i a_i T^i \in K_r$. Alors, il existe un unique indice n tel que $|f| = |a_n| r^n$. En conséquence, on peut écrire $f = a_u T^u (1+g)$ avec $|g| < 1$. La proposition 8 implique alors que f est inversible. ∎

On dispose à présent de la proposition suivante, qui nous permet de passer du cas trivial au cas non trivial, ainsi que du cas affinoïde au cas strictement affinoïde !

Proposition 48. *Soit $r > 0$.*

(i) Soit V un K-espace de Banach non archimédien. Alors, tout $w \in V\widehat{\otimes}_K K_r$ s'écrit uniquement sous la forme $\sum_i v_i \otimes T^i$ avec $\|v_i\| r^i \to 0$ et on a $\|w\| = \max_i \|v_i\| r^i$. En particulier, $\|T^k v\| = r^k \|v\|$ et la flèche canonique $V \to V' := V\widehat{\otimes}_K K_r$ est un plongement isométrique.

(ii) Le foncteur $-\widehat{\otimes}_K K_r : K-\mathsf{BanMod} \to K_r-\mathsf{BanMod}$ est exact et fidèle. De plus, $V \xrightarrow{f} W$ est borné (resp. admissible) si et seulement si $V' = V\widehat{\otimes}_K K_r \xrightarrow{f'} W'$ l'est.

(iii) Soit A une K-algèbre de Banach. Alors, si $A' = A\widehat{\otimes}_K K_r$ est noethérienne (resp. tous ses idéaux sont fermés), c'est aussi le cas de A.

(iv) Soit A une K-algèbre de Banach. Alors, $\mathcal{M}(A\widehat{\otimes}_K K_r) \to \mathcal{M}(A)$ est surjective.

Démonstration. (i) Montrons que ce module de Banach vérifie la propriété universelle du produit tensoriel complété. Soit $\varphi : V \times K_r \to W$ une application K-bilinéaire de norme C. Alors, on peut poser $\Phi\left(\sum_i v_i \otimes T^i\right) = \sum_i \varphi(v_i, T^i)$ pour obtenir la factorisation souhaitée. Cette application est bien définie car $\|\varphi(v_i, T^i)\| \leq C\|v_i\|r^i \to 0$, et est clairement de norme au plus C.

(ii) L'existence et l'unicité de la décomposition montre que $-\widehat{\otimes}_K K_r$ est exact et fidèle, i.e. commute avec les noyaux et les images : si $\varphi : V \to W$ et $v = \sum_i v_i T^i \in V'$, on a $\varphi'(v) = \sum_i f(v_i)T^i$. Si $V' \to W'$ est borné, le plongement isométrique $V \to V'$ montre que $V \to W$ est borné. Réciproquement, par construction de $-\widehat{\otimes}_K K_r$, si $V \xrightarrow{f} W$ est borné, $V' \to W'$ l'est aussi. Enfin, l'admissibilité de $V \to W$ s'énonce comme l'existence d'une constante C telle que $\inf_{f(u)=f(v)} \|u\| \leq C\|f(v)\|$ pour tout $v \in V$ et la description des normes de V' et W' montrent bien que cette inégalité est équivalente sur V et sur V'.

(iii) Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Si $\mathfrak{a}' := \mathfrak{a}\widehat{\otimes}_K K_r$ est de type fini, disons engendré par $f_1, \ldots, f_k$, qu'on supposera dans $\mathfrak{a}$ puisque chacun est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{a}$ est aussi engendré par $f_1, \ldots, f_k$. En effet, on dispose d'une section K-linéaire de $K \hookrightarrow K_r$, donnée par $\varphi : K_r \to K$, $\sum_i a_i T^i \mapsto a_0$, de sorte que si $f \in \mathfrak{a}$ s'écrit comme $\sum_i g_i f_i$ avec $g_i \in A'$, on a $f = \sum_i \varphi(g_i) f_i$.

Cela montre donc que si A' est noethérienne, A l'est aussi. Maintenant, si $\mathfrak{a}'$ est fermé, i.e. complet, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \cap A$ l'est aussi.

(iv) La fibre en x vaut $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x)_r)$ et $\mathcal{H}(x)_r \neq 0$.

■

On peut immédiatement appliquer cette proposition au cas des algèbres affinoïdes, grâce au lemme suivant.

Lemme 49. *Si A est une K-algèbre affinoïde, il existe $r \in \mathbb{R}^n_{>0}$ multiplicativement indépendant sur $\sqrt{|K^\times|}$ tel que $A\widehat{\otimes}_K K_r$ soit K_r-strictement affinoïde.*

Démonstration. Si $A = K\langle s^{-1}T\rangle/\mathfrak{a}$, on prend r une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $\sqrt{|K^\times|}$ et les s_i. Alors, $A\widehat{\otimes}_K K_r$ est strictement affinoïde d'après le corollaire 42. ■

Remarque 50. En fait, la réciproque est également vraie, voir [Ber90, corollaire 2.1.8].

Grâce à l'extension des scalaires, on peut démontrer le théorème 46 dans le cas où K est trivialement valué.

Démonstration du théorème 46 dans le cas de valuation triviale.] Il nous faut montrer que toutes les applications A-linéaires $M \to N$ entre deux A-modules de Banach M et N sont bornées. Il suffit d'étendre les scalaires à K_r, $r \neq 1$: $M\widehat{\otimes}_K K_r \to N\widehat{\otimes}_K K_r$ est bornée d'après 46, et donc $M \to N$ également d'après 48. ■

Voici le résultat qui nous intéresse.

Théorème 51. *Soit A une algèbre affinoïde. Alors, A est noethérienne et tous ses idéaux sont fermés. De plus, la catégorie des A-modules (resp. A-algèbres) de Banach finis est équivalente à la catégorie des A-modules (resp. A-algèbres) finis.*

Démonstration. On sait que les algèbres strictement affinoïdes A sont noethériennes et d'idéaux fermés d'après la proposition 38. Dans les autres cas, on peut changer de base par un certain K_r pour se ramener à celui-ci et appliquer le point (iii) de la proposition 48.

Pour le deuxième point, il faut montrer la surjectivité essentielle du foncteur d'oubli. Si M est un A-module fini, on dispose d'un épimorphisme $\pi : A^n \to M$ et on peut mettre la semi-norme quotient sur M. Il reste à montrer qu'il s'agit bien d'une norme, i.e. que $\ker \pi$ est fermé, ce qui se démontre comme précédemment en changeant de base et en écrivant $\ker \pi = \ker \pi \widehat{\otimes}_K K_r \cap A^n$, $\ker \pi \widehat{\otimes}_K K_r$ étant fermé d'après [BGR84, 3.7.3, proposition 1]. Le cas des algèbres est analogue. ■

On dispose également du résultat suivant, démontré dans le cas non trivialement valué dans [BGR84, 3.7.3] et étendu au cas de valuation triviale comme précédemment.

Proposition 52. *Soit $A \to B$ un morphisme de K-algèbres de Banach noethériennes. Supposons A et B affinoïdes ou K non trivialement valué. Alors, si M et N sont des A-modules de Banach finis, on a $M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} M \widehat{\otimes}_A N$ et $M \otimes_A B \xrightarrow{\sim} M \widehat{\otimes}_A B$.*

De tout ce qui précède, on peut déduire le résultats suivant.

Proposition 53. *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme fini entre algèbres de Banach noethériennes sur un corps non trivialement valué, ou algèbres affinoïdes. Alors, $\widetilde{\varphi} : \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A)$ est à fibres finies et d'image $\mathcal{M}(A/\ker \varphi)$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{M}(A)$. Alors, $\widetilde{\varphi}^{-1}(x) \simeq \mathcal{M}(B \widehat{\otimes}_A \mathcal{H}(x))$ (d'après la proposition 22) est le spectre d'une algèbre finie sur $\mathcal{H}(x) = L$ d'après la proposition 52. Cette algèbre ne possède qu'un nombre fini d'idéaux premiers, et chaque quotient intègre ne possède qu'au plus une seule valuation bornée d'après l'équivalence des normes. Il y a donc bien un nombre fini de semi-valuations bornées sur $B \otimes_A L$.

Pour le deuxième point, supposons sans perte de généralité φ injective, quitte à remplacer A par $A/\ker \varphi$. On doit montrer que $B \otimes_A L$ est non nul. Le morphisme $A \to L$, disons de noyau $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, se factorise par $\kappa(p)$. Alors, $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ s'injecte dans

$$B \otimes_A L = B \otimes_A \kappa(p) \otimes_{\kappa(\mathfrak{p})} L$$

donc il suffit de démontrer le résultat pour $L = \kappa(\mathfrak{p})$. Or, par injectivité, $B_{\mathfrak{p}} \neq 0$, donc $B_{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{p} B_{\mathfrak{p}}$ par Nakayama et ainsi $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) = B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} B_{\mathfrak{p}} \neq 0$, comme voulu. ■

2.3 Sous-domaines affinoïdes

Étant donné une algèbre affinoïde, on peut définir certaines parties géométriques de son spectre, de manière analogue à la propriété universelle des ouverts d'un schéma.

Définition 54. Soit A une algèbre affinoïde et $X = \mathcal{M}(A)$ son spectre. Un fermé $V \subseteq X$ est un *sous domaine affinoïde* de X s'il existe une algèbre affinoïde A_V muni d'un morphisme $\varphi_V : A \to A_V$ tel que $\widetilde{\varphi}_V : \mathcal{M}(A_V) \to \mathcal{M}(A)$ est à valeurs dans V et pour toute algèbre L-affinoïde B, où $K \to L$ est une extension de corps valués complets, et pour tout morphisme $\varphi : A \to B$ tel que $\widetilde{\varphi} : \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A)$ soit à valeurs dans V, φ se factorise de manière unique à travers φ_V.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi_V"'] & B \\ A_V \arrow[ur, dashed, "\exists!"] & \end{tikzcd}$$

Bien sûr, A_V est unique à isomorphisme près, étant définie par une propriété universelle. Donnons quelques exemples de sous-domaines affinoïdes, qui vont jouer un rôle analogue à celui des ouverts principaux d'un schéma affine. La propriété universelle se vérifie dans chacun des cas aisément grâce au corollaire 45.

Exemples.

1. Si $f_1, \dots, f_n, g \in A$ engendrent A comme idéal et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$, alors

$$V = X(\varepsilon_1^{-1} f_1/g, \dots \varepsilon_n^{-1} f_n/g) := \{x \in X \mid \forall i,\ |f_i(x)| \leq \varepsilon_i |g(x)|\}$$

   est un sous-domaine affinoïde de X d'algèbre affinoïde $A_V = A\langle \varepsilon_i^{-1} T_i \rangle/(gT_i - f_i)$. Un sous-domaine affinoïde de cette forme est dit *rationnel*.
2. Un sous-domaine affinoïde $X(\varepsilon_1^{-1} f_1, \dots, \varepsilon_n f_n, \eta_1 g_1^{-1}, \dots, \eta_m g_m^{-1})$ de la forme

$$\{x \in X \mid \forall i,\ |f_i(x)| \leq \varepsilon_i,\ \forall j,\ |g_i(x)| \geq \eta_i |g(x)|\}$$

   avec $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m \in A$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \eta_1, \dots, \eta_m > 0$ est appelé un *sous-domaine de Laurent*, d'algèbre affinoïde $A\langle \varepsilon_i^{-1} T_i, \eta_j S_j \rangle/(T_i - f_i, g_j S_j - 1)$.
3. Un sous-domaine affinoïde de la forme $X(\varepsilon_1^{-1} f_1, \dots, \varepsilon_n^{-1} f_n)$ avec $f_1, \dots, f_n \in A$ est appelé un *sous-domaine de Weierstrass*, d'algèbre affinoïde $A\langle \varepsilon_i^{-1} T_i \rangle/(T_i - f_i)$.

Il résulte immédiatement de l'existence des sous-domaines de Laurent et la définition de la topologie de $\mathcal{M}(A)$ que les sous-domaines affinoïdes forment une base de voisinages.

Corollaire 55. *Soit A une algèbre affinoïde. Alors, les sous-domaines affinoïdes forment une base de voisinages de $\mathcal{M}(A)$. Si K est non-trivialement valué et A stricte, il en va de même des sous-domaines strictement affinoïdes.*

Démonstration. La première assertion est claire. Pour la seconde, il suffit de remarquer que si K n'est pas trivialement valué, $\sqrt{|K^\times|}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et tous les sous-domaines $X(\varepsilon_i^{-1} f_i, \eta_j g_j^{-1})$ avec $\varepsilon_i, \eta_j \in \sqrt{K^\times|}$ sont strictement affinoïdes. ∎

Corollaire 56. *Si K est non trivialement valué et A est une K-algèbre strictement affinoïde, les points rigides* $\operatorname{Spm} A$ *sont denses dans $\mathcal{M}(A)$.*

Démonstration. Si $U \subseteq X$ est ouvert et non vide, il contient un sous-domaine strictement affinoïde non-vide V d'après le corollaire précédent. Un tel sous domaine contient bien un point rigide puisque l'algèbre A_V admet un idéal maximal, dont le corps résiduel est fini d'après le corollaire 35. ∎

La propriété suivante montre qu'on peut identifier V à $\mathcal{M}(A_V)$, et c'est donc ce que nous ferons dans la suite. Commençons par un lemme.

Lemme 57 (Gruson)**.** *Pour tous K-espaces de Banach V et W, le morphisme canonique $V \otimes_K W \to V \widehat{\otimes}_K W$ est injectif.*

Démonstration. Lorsque K n'est pas trivialement valué il s'agit de [Gru66, section 3.2, théorème 1, assertion 4]. Lorsque K est trivialement valué, si $r \neq 1$, il suffit d'appliquer le théorème de Gruson à $V\widehat{\otimes}_K K_r$ et $W\widehat{\otimes}_K K_r$ ainsi que [Poi13, lemme 3.1] (et la proposition 48). ■

Proposition 58. *Soit A une algèbre affinoïde et V un sous-domaine affinoïde de $\mathcal{M}(A)$. Alors, $f : \mathcal{M}(A_V) \xrightarrow{\sim} V$ est un homéomorphisme. De plus, pour tout $x \in \mathcal{M}(A_V)$, on a $\mathcal{H}(f(x)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(x)$.*

Démonstration. Par compacité de $\mathcal{M}(A_V)$ et séparation de V, il suffit de montrer la bijectivité. Si $x \in V$, le morphisme d'algèbres affinoïdes $A \to H(x)$ se factorise d'une unique manière en $A \to A_V \to H(x)$, i.e. x possède un unique antécédent dans $\mathcal{M}(A_V)$. De plus, la proposition suivante montre que $A_V\widehat{\otimes}_A A_V \xrightarrow{\sim} A_V$. En tensorisant avec $\mathcal{H}(x)$, $x \in \mathcal{M}(A_V)$, on obtient donc

$$\mathcal{H}(x)\widehat{\otimes}_{\mathcal{H}(f(x))}\mathcal{H}(x) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(x).$$

D'après le théorème de Gruson, $\mathcal{H}(x)\otimes_{\mathcal{H}(f(x))}\mathcal{H}(x) \to \mathcal{H}(x)$ est aussi bijective, i.e. $\mathcal{H}(f(x)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(x)$. ■

Observons également que si $\varphi : A \to B$ est un morphisme d'algèbres affinoïdes, l'image réciproque de tout sous-domaine affinoïde V de $\mathcal{M}(A)$ est un sous-domaine affinoïde de $\mathcal{M}(B)$. En effet, on vérifie aisément que $B_{\widetilde{\varphi}^{-1}(V)} = A_V\widehat{\otimes}_A B$, à l'aide de la propriété universelle du produit tensoriel complété (il s'agit de la somme amalgamée). Si V est de Weierstrass, resp. de Laurent, resp. rationnel, il en va de même de $\widetilde{\varphi}^{-1}(V)$.

De même, si V et V' sont deux sous-domaines affinoïdes de $X = \mathcal{M}(A)$, $V \cap V'$ en est également un, d'algèbre affinoïde $A_V\widehat{\otimes}_A A_{V'}$. Si V et V' sont de Weierstrass, resp. de Laurent, resp. rationnels, il en va de même pour $V \cap V'$. Si $Z \subseteq Y$ et $Y \subseteq X$ sont des sous-domaines affinoïdes, $Z \subseteq X$ en est également. S'ils sont de Weierstrass ou rationnels, il en va de même pour $Z \subseteq X$ [Ber90, 2.2.11]. L'intérêt d'introduire les sous-domaines rationnels au-delà des sous-domaines de Laurent (qui formaient déjà une base de voisinages) et que ceux-ci sont transitifs.

En revanche, les sous-domaines affinoïdes ne sont absolument pas stables par unions finies. On dispose toutefois du théorème capital suivant.

Théorème 59 (Gerritzen-Grauert)**.** *Soit $X = \mathcal{M}(A)$ le spectre d'une algèbre affinoïde. Alors, tout sous-domaine affinoïde de X s'écrit comme une union finie de sous-domaines rationnels.*

Démonstration. Voir [Bos14, section 3.3, théorème 20] pour la démonstration dans le cas strict, [Duc03, lemme 2.4] pour le cas général à partir du cas strict, et [Tem05] pour une démonstration directement dans le cas général avec de la géométrie de Berkovich. ■

Mentionnons également le caractère frappant de la géométrie de Berkovich par rapport à la géométrie de Tate : la connexité par arcs.

Théorème 60. *Soit A une algèbre affinoïde et $X = \mathcal{M}(A)$. Alors, X est localement connexe par arcs. En particulier, si X est connexe, il est connexe par arcs.*

2.4 Préfaisceau et germes de fonctions analytiques

Soit A une algèbre affinoïde et $X = \mathcal{M}(A)$. Dans la section précédente, on a défini un préfaisceau sur la catégorie des sous-domaines affinoïdes de X munie de l'inclusion $V \mapsto \mathcal{O}_X(V) := A_V$. Nous verrons au chapitre 3 qu'il s'agit en fait d'un faisceau d'après le théorème d'acyclicité de Tate. Nous allons ici considérer la fibre $\mathcal{O}_{X,x} = \operatorname{colim}_{x\in V} A_V$ en un point x de X, où la colimite (dans la catégorie des anneaux) est prise sur les voisinages affinoïdes de x. Comme en géométrie algébrique, on observe que $\mathcal{O}_{X,x}$ est local : l'évaluation en x fournit un morphisme $\mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{H}(x)$ qui induit ainsi $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{H}(x)$ de noyau $\mathfrak{m}_x = \{f \mid |f(x)| = 0\}$. Il s'agit bien de l'unique idéal maximal, car si $f \in A$ n'est pas dans $\mathfrak{m}_x$, on peut inverser f dans $A\langle r^{-1}f^{-1}\rangle = A\langle rT\rangle/(Tf-1)$, ce qui correspond au sous domaine de Laurent $X(r^{-1}f^{-1})$, qui contient x dans son intérieur en prenant $r > 0$ assez grand.

Le fait de pouvoir inverser n'importe quelle fonction f en dehors de $\mathfrak{m}_x$ se concrétise en la factorisation $A \to A_{\mathfrak{m}_x} \to \mathcal{O}_{X,x}$ mais ce dernier morphisme est bien entendu loin d'être un isomorphisme. Cependant, pour les points rigides, il en devient un après complétion.

Proposition 61. *Soit $x \in X = \mathcal{M}(A)$ un point rigide. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$A/\mathfrak{m}_x^n \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{m}_x}/\mathfrak{m}_x^n A_{\mathfrak{m}_x} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^n\mathcal{O}_{X,x}$$

sont des isomorphismes. En particulier, les passages aux complétés selon $\mathfrak{m}_x$, $\widehat{A} \to \widehat{A_{\mathfrak{m}}} \to \widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ sont aussi des isomorphismes.

Nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 62. *Soit V un sous-domaine affinoïde de $X = \mathcal{M}(A)$ et $\mathfrak{a}$ un idéal de A tel que $\mathcal{M}(A/\mathfrak{a}) \subseteq V$. Alors, $\varphi_V : A \to A_V$ induit un isomorphisme $\varphi : A/\mathfrak{a} \to A_V/\mathfrak{a}A_V$.*

Démonstration. Comme $A \to A/\mathfrak{a}$ induit un morphisme d'image $F \subseteq V$, il se factorise en $A \to A_V \to A/\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}A_V$ est dans le noyau de $A_V \to A/\mathfrak{a}$. Ainsi, $\psi : A_V/\mathfrak{a}A_V \to A/\mathfrak{a}$ est bien défini et on a $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Comme

$$A \to A_V \to A_V/\mathfrak{a}A_V \xrightarrow{\psi} A/\mathfrak{a} \xrightarrow{\varphi} A_V/\mathfrak{a}A_V$$

et $A \to A_V \to A_V/\mathfrak{a}A_V$ sont égaux, l'unicité de la factorisation fournit bien $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ (après passage au quotient). Ainsi, φ est un isomorphisme. ∎

Démonstration de la proposition 61. Il suffit d'avoir $A_{\mathfrak{m}_x}/\mathfrak{m}_x^n A_{\mathfrak{m}_x} \xrightarrow{\sim} A_{V,\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}_x^n A_{V,\mathfrak{m}_x}$ pour tout voisinage affinoïde V de x. C'est précisément le contenu du lemme 62. ∎

Corollaire 63. *Soit A une algèbre affinoïde et V un sous-domaine affinoïde de $X = \mathcal{M}(A)$. Alors, $A \to A_V$ est plat.*

Démonstration. Commençons par le cas strict. Posons $A' = A_V$. Il suffit de montrer la platitude localement selon un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. Or, on a montré que le passage au complété de $A_{\mathfrak{m}} \to A'_{\mathfrak{m}}$, $\widehat{A_{\mathfrak{m}}} \to \widehat{A'_{\mathfrak{m}}}$ est un isomorphisme, en particulier un morphisme plat. La platitude de $A_{\mathfrak{m}} \to A'_{\mathfrak{m}}$ découle alors de [AK70, chapitre 5, proposition 3.3] car la complétion se fait selon l'idéal maximal de l'anneau local $A_{\mathfrak{m}_x}$.

Dans le cas général, on peut trouver r multiplicativement indépendant sur $\sqrt{|K^\times|}$ tel que $A_r = A\widehat{\otimes}_K K_r$ et $A'_r = A'\widehat{\otimes}_K K_r$ soient strictement affinoïdes. Par ce qui précède, A'_r est plat sur A_r. Si $\varphi : M \to N$ est un morphisme injectif de A-modules finis, qu'on munit d'une structure de modules de Banach, alors

$$\varphi_r : M_r\widehat{\otimes}_{A_r}A'_r = (M \otimes_A A')\widehat{\otimes}_K K_r \to (N \otimes_A A')\widehat{\otimes}_K K_r = N_r\widehat{\otimes}_{A_r}A'_r$$

est injective, donc $M \otimes_A A' \to N \otimes_A A'$ également d'après la proposition 48. ■

Corollaire 64. *Soient A une algèbre affinoïde et $x \in X = \mathcal{M}(A)$. Alors, $A \to \mathcal{O}_{X,x}$ est plat.*

Démonstration. $\mathcal{O}_{X,x} = \mathrm{colim}_V\, A_V$ est une colimite de A-modules plats. ■

Mentionnons également le résultat suivant, démontré dans [Ber93, théorème 2.1.4].

Proposition 65. *Soit A une algèbre affinoïde et x un point de $X = \mathcal{M}(A)$. Alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est noethérien.*

Chapitre 3

Espaces analytiques

Sommaire

3.1 Espaces affinoïdes

Il est à présent temps de parler d'espaces analytiques, i.e. de munir $X = \mathcal{M}(A)$, où A est une algèbre affinoïde, d'un faisceau d'anneaux (les « fonctions analytiques »). Il y a une difficulté à laquelle on se heurte rapidement : on aimerait construire le faisceau structural à partir des sous-domaines affinoïdes, mais ceux-ci sont fermés dans X, et non pas ouverts... Pour résoudre ce problème, nous allons poser $\mathcal{O}_X(U) = \lim_{V \subseteq U} A_V$, où la limite est prise sur les sous-domaines affinoïdes. Il est commode d'étendre la classe des sous-domaines affinoïdes de sorte qu'elle constitue une famille filtrante, car les limites filtrantes sont plus faciles à appréhender. Une manière évidente de procéder est de considérer les unions finies de sous-domaines affinoïdes. D'après le théorème de Gerritzen-Grauert, il revient au même de considérer les unions finies de sous-domaines rationnels. Comme nous allons considérer des faisceaux définis sur des fermés et non plus des ouverts, nous aurons besoin d'une définition plus étendue de faisceaux.

Définition 66 (G-topologie)**.** Un G-espace topologique est un ensemble X muni d'un ensemble $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ de *domaines admissible* ainsi que, pour chaque $U \in \mathcal{T}$, d'une famille $\mathrm{Cov}(U)$ de recouvrements $(U_i)_i$ de domaines admissibles de U dits *admissibles*, vérifiant les conditions suivantes

(1) $(U) \in \mathrm{Cov}(U)$.

(2) Si $(U_i)_i \in \mathrm{Cov}(U)$ et $(U_{i,j})_j \in \mathrm{Cov}(U_i)$ pour tout i, alors $(U_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{Cov}(U)$.

(3) Si $(U_i)_i \in \mathrm{Cov}(U)$, $V \subseteq U$, alors tous les $V \cap U_i$ sont dans $\mathcal{T}$ et $(V \cap U_i)_i \in \mathrm{Cov}(V)$.

Définition 67 (Faisceau)**.** Soient X un G-espace topologique dont la topologie est stable par intersections finies et $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur une sous-catégorie $\mathcal{U} \subseteq (\mathcal{P}(X), \subseteq)$ de l'ensemble des parties de X, stable par G-recouvrements, i.e. un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{U}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$. On dit que $\mathcal{F}$ est un *faisceau* si, pour tout $U \in \mathcal{U}$ de C et recouvrement $(U_i)_i \in \mathrm{Cov}(U)$,

$$\mathcal{F}(U) \overset{\iota}{\to} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

est exacte, où la première flèche est $f \mapsto (f|_{U_i})_i$ et les deux autres $(f_k)_k \mapsto (f_i|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$ et $(f_k)_k \mapsto (f_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j,W}$ respectivement. Ici, l'exactitude signifie que la première flèche est injective, et que son image vaut l'égalisateur des deux dernières.

Définition 68 (G-topologie compacte analytique)**.** Soit $X = \mathcal{M}(A)$ le spectre d'une algèbre affinoïde. Un *sous-domaine analytique compact* de X est un fermé $Y \subseteq X$ qui est une union finie de sous-domaines affinoïdes. On définit ainsi une G-topologie $\mathcal{T}_G$ dont les domaines sont les sous-domaines compacts analytiques et les recouvrements admissibles sont les recouvrements finis.

Nous sommes à présent (presque) en mesure de définir le faisceau structural pour la G-topologie. Il n'est en fait pas du tout évident que $V \mapsto A_V$ définisse un faisceau sur la G-topologie compacte analytique. Cela provient du théorème d'acyclicité de Tate.

Théorème 69 (d'acyclicité de Tate)**.** *Soit $X = \mathcal{M}(A)$ le spectre d'une algèbre affinoïde. Si $V = \bigcup_i V_i$ est un recouvrement fini d'un sous-domaine affinoïde par des sous-domaines affinoïdes, alors le complexe de Čech*

$$0 \to A_V \to \prod_i A_{V_i} \to \prod_{i,j} A_{V_i \cap V_j} \to \cdots$$

est exact.

Démonstration. Voir [Ber90, proposition 2.2.5]. ∎

Comme l'exactitude de $0 \to A_V \to \prod_i A_{V_i} \to \prod_{i,j} A_{V_i \cap V_j}$ exprime exactement la condition de faisceau, $V \mapsto A_V$ définit bien un faisceau sur les sous-domaines affinoïdes. Une chasse au diagramme montre qu'il peut être étendu en un faisceau sur toute la G-topologie. L'admissibilité découle, dans le cas non trivialement valué (on s'y ramène en tensorisant par K_r), du théorème de l'application ouverte et nous permet donc de munir A_V d'une structure d'algèbre de Banach.

Proposition 70 (G-faisceau structural)**.** *Soit $X = \mathcal{M}(A)$ le spectre d'une algèbre affinoïde, $V = \bigcup_i V_i$ un sous-domaine analytique compact qu'on écrit comme union finie de sous-domaines affinoïdes. Alors, $A_V := \ker\left(\prod_i A_{V_i} \to \prod_{i,j} A_{V_i \cap V_j}\right)$ ne dépend pas du recouvrement admissible choisi. De plus, $V \mapsto A_V := \mathcal{O}_X^G(V)$ définit un faisceau d'algèbres de Banach sur l'ensemble des sous-domaines compacts analytiques pour la G-topologie compacte analytique.*

On appelle un espace de la forme $(X, \mathcal{T}_G, \mathcal{O}_X^G)$, avec $X = \mathcal{M}(A)$, un *espace affinoïde*. Enfin, nous pouvons définir le faisceau structural pour la véritable topologie. Notons que cela n'est pas possible en géométrie de rigide avec le point de vue de Tate, nous sommes obligés de nous restreindre aux recouvrements admissibles ! Cette différence s'explique par la topologie très particulière des espaces de Berkovich. Observons au passage que les algèbres de fonctions $\mathcal{O}_X(U)$ ne sont cette fois plus munies d'une norme de Banach canonique, mais seulement d'une famille de normes (une pour chaque sous-domaine analytique compact $V \subseteq U$).

Proposition 71 (Faisceau structural)**.** *Soit $X = \mathcal{M}(A)$ le spectre d'une algèbre affinoïde. Alors, $\mathcal{O}_X : U \mapsto \lim_{V \subseteq U} \mathcal{O}_X^G(V)$ définit un faisceau d'algèbres sur X (pour la topologie usuelle), où la limite est prise sur les sous-domaines compacts analytiques.*

Exemple. Vérifions que le faisceau structural colle bien à l'intuition : supposons qu'on veuille déterminer l'algèbre des fonctions analytiques qui convergent sur la boule unité ouverte. On travaille donc avec $X = E(0,1) = \mathcal{M}(K\langle T\rangle)$ et $U = D(0,1)$. On a $\mathcal{O}_X(U) = \lim_{r<1} \mathcal{O}_X^G(E(0,r))$, avec $E(0,r) = X(r^{-1}T)$, de sections globales $K\langle r^{-1}T\rangle$. Si l'on plonge $K\langle r^{-1}T\rangle$ dans $K\langle T\rangle = \mathcal{O}_X^G(X)$ de manière évidente, les restrictions deviennent l'inclusion. On obtient ainsi simplement

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{r<1} K\langle r^{-1}T\rangle = \left\{ f = \sum_i a_i T^i \in K\langle T\rangle \mid \forall 0 < r < 1, \sum_i |a_i| r^i < \infty \right\},$$

conforme à l'intuition.

Corollaire 72. *Soit A une algèbre affinoïde. Alors,* $\operatorname{Spec} A$ *est connexe si et seulement si* $\mathcal{M}(A)$ *l'est.*

Démonstration. Si $X = \mathcal{M}(A) = U \sqcup V$ n'est pas connexe, on a $A \simeq \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{O}_X(V)$. La réciproque provient de la proposition 23. ∎

3.2 Espaces analytiques

On définit ensuite un espace analytique par recollement.

Définition 73 (Espace analytique)**.** Un *espace analytique* sur un corps valué complet non archimédien K est un espace topologique X muni d'une G-topologie de parties compactes $\mathcal{T}_G$, appelés *domaines compacts analytiques*, admettant des produits fibrés, et d'un G-faisceau de K-algèbres de Banach $\mathcal{O}_X^G$ tel que tout point $x \in X$ admette un voisinage compact analytique $V \in \mathcal{T}_G$ pour lequel $(X, \mathcal{T}_G|_V, \mathcal{O}_X^G|_V)$ est isomorphe à un espace affinoïde.

Remarque 74. La condition que tout point admette un voisinage dans $\mathcal{T}_G$ n'est pas nécessaire, les espaces analytiques que nous avons définis sont appelés *bons* et sont ceux considérés dans [Ber90]. Dans [Ber93], Berkovich définit une classe plus grande d'espaces analytiques : il s'agit d'un espace localement connexe X muni d'une G-topologie de parties compactes $\mathcal{T}_G$ et d'un faisceau d'algèbres de Banach $\mathcal{O}_X^G$ tel que tout $x \in X$ admette un voisinage de la forme $V_1 \cup \cdots \cup V_n$ avec $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{T}_G$, $x \in V_1 \cap \cdots \cap V_n$, et $(X, \mathcal{T}_G|_{V_i}, \mathcal{O}_X^G|_{V_i})$ est isomorphe à un espace affinoïde pour tout i.

Par exemple, l'espace affine analytique $\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}} = \bigcup_{r>0} E(0,r) = \bigcup_{r>0} D(0,r)$ est un espace analytique (on verra plus tard comment recoller des ouverts). Il résulte du corollaire 55 que si K n'est pas trivialement valué, un espace strictement analytique admet une base de voisinages de sous-domaines strictement affinoïdes. Notons également que tout espace analytique est localement compact, au sens où tout point admet un voisinage compact. Comme précédemment, on peut étendre le G-faisceau à la véritable topologie en posant $\mathcal{O}_X(U) = \lim_{V \subseteq U} \mathcal{O}_X^G(V)$.

Remarque 75. On peut en fait définir le faisceau structural sur une topologie encore plus grande : la G-topologie *analytique*, qui à la fois est plus fine que la G-topologie analytique compacte et que la véritable topologie. Elle est constituée des domaines $V \subseteq X$ pour lesquels il existe une famille (V_i) d'éléments de $\mathcal{T}_G$ tel que tout point $x \in V$ admette un voisinage de la forme $V_{i_1} \cup \cdots V_{i_n}$, avec $x \in V_{i_1} \cap \cdots \cap V_{i_n}$. Les recouvrements admissibles sont définis par la même condition, et le faisceau structural étendu comme précédemment.

Intuitivement, un morphisme d'espaces analytiques $X \to Y$ devrait consister en une application continue et G-continue $f : X \to Y$ ainsi que d'un morphisme borné de faisceaux $f^\# : \mathcal{O}_Y^G \to f_*\mathcal{O}_X^G$, mais $f_*\mathcal{O}_X$ comme faisceau d'algèbres de Banach n'a de sens que lorsque l'image réciproque d'un domaine analytique compact est un domaine analytique compact (ce qui n'est déjà pas le cas pour $\mathbb{A}^1 \to \mathcal{M}(K)$). Ici, on dira qu'une application $f : Y \to X$ est *G-continue* si, pour tout domaine analytique compact $V \subseteq X$, $f^{-1}(V)$ est un domaine analytique (voir la remarque précédente).

Définition 76. Un morphisme d'espaces analytiques $Y \to X$ consiste en une application continue et G-continue $f : Y \to X$ ainsi qu'une famille compatible de morphismes bornés $f_{U,V}^\# : \mathcal{O}_X^G(U) \to \mathcal{O}_Y^G(V)$ pour tous domaines analytiques compacts $U \subseteq X$ et $V \subseteq f^{-1}(U)$.

Évidemment, il suffit de connaître $f_{U,V}^\#$ sur une base de la G-topologie (par exemple les sous-domaines affinoïdes d'éléments de τ) pour définir un morphisme, puisqu'on peut recoller des morphismes. On peut donc composer des morphismes $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ de la manière évidente :

$$(fg)_{U,W}^\# : \mathcal{O}_X^G(U) \to \mathcal{O}_Y^G(V) \to \mathcal{O}_X^G(W)$$

a du sens dès lors que $V \subseteq f^{-1}(U)$ et $W \subseteq g^{-1}(V)$. Si $x \in (fg)^{-1}(U)$ est quelconque, on peut trouver un G-voisinage V de $g(x)$ dans $f^{-1}(U)$, puis un G-voisinage W de x dans $g^{-1}(V)$, donc $(fg)^\#$ est bien définie au voisinage de x.

On notera $K-\mathsf{An}$ la catégorie des K-espaces analytiques. Comme pour les schémas, la catégorie des espaces affinoïdes (sur K) est équivalente à l'opposée de la catégorie des algèbres affinoïdes (sur K).

Proposition 77. *La catégorie des espaces affinoïdes (sur K) est équivalente à l'opposée de la catégorie des algèbres affinoïdes (sur K).*

Démonstration. Il s'agit de montrer que si $f : \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A)$ est un morphisme d'espaces affinoïdes, l'application f est entièrement déterminée par le morphisme $\varphi : A \to B$ sur les sections globales, le reste découlera de propriétés fonctorielles comme pour les schémas. Soit $V \subseteq \mathcal{M}(A)$ et $W \subseteq \mathcal{M}(B)$ sous-domaines affinoïde tels que $f(W) \subseteq V$. En utilisant la définition des morphismes, nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_V & \xrightarrow{f_{V,W}^\#} & A_W \end{array}$$

Dans ce diagramme $f_{V,W}^\#$ est entièrement déterminé par φ, en effet le morphisme $A \to A_W$ induit de φ est tel que l'image du morphisme induit sur les spectres est contenu dans V (ceci se voit du diagramme commutatif) et on a donc la factorisation unique $\varphi_{V,W} : A_V \to A_W$ faisant commuter le diagramme plus haut et l'unicité donne $f_{V,W}^\# = \varphi_{V,W}$.

Soit $x \in \mathcal{M}(B)$, $y = f(x)$ et V_i (resp. W_i) une base de voisinage affinoïde de y (resp. de x) telle que $f(W_i) \subseteq V_i$. En utilisant le diagramme plus haut et le fait que $f_{V,W}^\# = \varphi_{V,W}$, on trouve $\mathcal{M}(\varphi)(x) \in V_i$ pour tout i et donc $\mathcal{M}(\varphi)(x) = y = f(x)$. Ainsi, $\mathcal{M}(\varphi)$ et f coïncident, donc les morphismes d'espaces analytiques également, puisque $f_{V,W} = \varphi_{V,W}$. ■

Il en découle immédiatement une sorte de propriété universelle des espaces affinoïdes analogue à celle des schémas affines. Notons que l'hypothèse de compacité de X est cruciale, car sinon $\mathcal{O}_X(X)$ n'est pas muni de norme, et on ne peut donc pas détecter les morphismes qui proviennent de morphismes bornés entre affinoïdes.

Corollaire 78. *Le foncteur des sections globales* $\Gamma : K-\mathsf{CompAn} \to K-\mathsf{AffAlg}^{op}$ *est l'adjoint à gauche du foncteur* $\mathcal{M} : K-\mathsf{AffAlg}^{op} \to K-\mathsf{CompAn}$. *En d'autres termes, si* X *est compact et* A *une algèbre affinoïde, se donner un morphisme* $X \to \mathcal{M}(A)$ *équivaut à se donner un morphisme borné* $A \to \Gamma(X)$.

Démonstration. Il faut vérifier qu'un morphisme sur les sections globales $\varphi : A \to \Gamma(X)$ induit bien un unique morphisme $X \to \mathcal{M}(A)$. Écrivons $X = \bigcup_i V_i$ comme une union finie d'espaces affinoïdes. Alors, le morphisme $V_i \to \mathcal{M}(A)$ est induit par $A \to \Gamma(X) \to \Gamma(V_i)$ d'après la proposition précédente, ce qui montre l'unicité. L'existence est également claire puisque ces morphismes se recollent. ∎

Observons enfin que tout sous-domaine analytique compact $V \in \mathcal{T}_G$ et tout ouvert (plus généralement, tout sous-domaine analytique) de X où tout point admet un voisinage affinoïde est lui-même muni d'une structure d'espace analytique avec restriction de la (G-)topologie et du faisceau. Cette structure lui fait vérifier une propriété universelle analogue à celle des sous-domaines affinoïdes.

3.3 Faisceaux cohérents

Si A est une algèbre affinoïde et M un A-module fini, on peut construire un faisceau $\widetilde{M}$ sur $\mathcal{M}(A)$ en considérant le faisceautisé de $V \mapsto M \otimes_A \mathcal{O}^G_{\mathcal{M}(A)}(V)$. Un faisceau de cette forme est appelé *cohérent*.

Remarque 79. D'après [Duc09, lemme 0.1] et [Wer19, lemme 2.2.6], un faisceau cohérent sur $(X, \mathcal{O}_X)$ est également cohérent au sens usuel des espaces annelés, mais nous ne nous en servirons pas.

Proposition 80. *Soit* $X = \mathcal{M}(A)$ *un espace affinoïde et* $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ *un faisceau cohérent sur* X. *Alors, pour tout sous-domaine compact analytique* $V \subseteq X$, *on a* $\widetilde{M}(V) = M \otimes_A A_V$.

Démonstration. Notons que si $X = \bigcup_i V_i$ est un recouvrement fini par des sous-domaines compacts analytiques, comme A_V est plat pour tout V compact analytique, le complexe de Čech

$$0 \to M \to \prod_i M \otimes_A A_{V_i} \to \prod_{i,j} M \otimes_A A_{V_i \cap V_j} \to \cdots$$

reste exact d'après le théorème d'acyclicité de Tate et la platitude des A_V. Montrons que la flèche $M \to \widetilde{M}(X)$ est bijective. Soit $s \in \widetilde{M}(X)$. Pour tout $x \in X$, on peut trouver V_x tel que $x|_{V_x} \in M \otimes_A A_{V_x}$. Par compacité, on peut extraire un sous-recouvrement fini $V_1, \ldots, V_n$, et le complexe de Čech ci-dessus montre que $s \in M$. On a donc bien $\widetilde{M}(V) = M \otimes_A A_V$ pour tout V affinoïde, et donc pour tout V compact analytique par la condition de faisceau. ∎

Notons que, si $\mathcal{F}$ est cohérent et V est un sous-domaine analytique compact, $\mathcal{F}(V) = M \otimes_A A_V$ est un module de fini sur A_V donc munissable d'une unique classe d'équivalence de normes de Banach d'après 51. Il est ainsi plus commode de partir d'un A-module fini de Banach M et de mettre la norme du produit tensoriel sur $\widetilde{M}(V)$.

Corollaire 81. *La catégorie des faisceaux cohérents sur un espace affinoïde $X = \mathcal{M}(A)$ est équivalente à la catégorie des A-modules finis.*

En général, un $\mathcal{O}_X^G$-module $\mathcal{F}$ sur un espace analytique X est dit *cohérent* si $\mathcal{F}|_V$ est cohérent pour tout V affinoïde. On peut en fait remplacer cette définition par « tout point $x \in X$ admet un voisinage affinoïde V tel que $\mathcal{F}|_V$ soit cohérent ». Vérifions le caractère local de cette définition.

Théorème 82 (Kiehl)**.** *Soit X un espace affinoïde et $\mathcal{F}$ un G-faisceau sur X tel que tout point $x \in X$ admette un voisinage affinoïde V_x tel que $\mathcal{F}|_{V_x}$ est cohérent. Alors, $\mathcal{F}$ est cohérent.*

Démonstration. Voir [Wer19, section 2.5]. ∎

On dispose des résultats suivants.

Proposition 83. *Si X est affinoïde, tout faisceau cohérent sur X est acyclique pour la G-topologie.*

Démonstration. Ils sont acycliques pour la cohomologie de Čech d'après le théorème d'acyclicité de Tate, et le résultat découle donc du théorème de Cartan [God97, théorème 5.9.2]. ∎

Proposition 84 ([Ber93, proposition 1.3.6])**.** *Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur un espace analytique X, on a $H^q(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^q(X_G, \mathcal{F}_G)$ pour tout $q \geq 0$. En particulier, si X est affinoïde, tout faisceau cohérent est acyclique.*

3.4 Recollements et produits fibrés

Commençons par un cas simple de recollement : celui où on recolle des ouverts. Pour simplifier, on se placera dans le cadre suivant, suffisant pour nos besoins d'analytification.

Proposition 85 (Recollement le long d'ouverts)**.** *Supposons disposer d'espaces analytiques $(X_i)_{i \in I}$ et, pour tous $i, j \in I$, d'un ouvert $X_{i,j}$ de X_i ainsi que d'un isomorphisme $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \xrightarrow{\sim} X_{j,i}$ vérifiant la condition de cocycle :*

- *pour tout i, $X_{i,i} = X_i$ et $\varphi_{i,i} = \mathrm{id}_{X_i}$,*
- *pour tous i, j, $\varphi_{i,j} = \varphi_{j,i}^{-1}$,*
- *pour tous i, j, k deux à deux distincts, $\varphi_{i,j}(X_{i,k} \cap X_{i,j}) = X_{j,i} \cap X_{j,k}$ et $\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j} = \varphi_{i,k}$ sur $X_{i,j} \cap X_{i,k}$.*

Alors, $X = \operatorname{colim} X_{i,j}$ existe dans la catégorie des K-espaces analytiques.

Démonstration. La preuve est la même que pour les schémas : topologiquement, $X = \coprod_i X_i / \sim$, où $\sim$ identifie $X_{i,j}$ à $X_{j,i}$. La G-topologie compacte est constituée des unions finies séparées $\bigcup_{i \in I}^n V_i$ d'éléments $V_i \in \mathcal{T}_G(X_i)$. Il est clair que tout point $x \in X$ possède un voisinage affinoïde dans $\mathcal{T}_G$: si $x \in X_i$ et V_i est un voisinage affinoïde de x dans X_i, c'en est un également dans X puisque X_i est ouvert. ∎

Comme le produit fibré de deux espaces affinoïdes $\mathcal{M}(A)$ et $\mathcal{M}(B)$ sur $\mathcal{M}(C)$ est donné par $\mathcal{M}(A \widehat{\otimes}_C B)$, il en résulte immédiatement la proposition suivante (si on sait construire $X \times_Z Y$ on sait également construire $U \times_Z V$ pour $U \subseteq X$ et $V \subseteq Y$, et on peut donc recoller les produits fibrés d'espaces quasi-affinoïdes).

Proposition 86. *La catégorie $K-\mathsf{An}$ des K-espaces analytiques admet des produits fibrés.*

Comme pour les schémas, on note donc $X_y := X \times_Y \mathcal{M}(\mathcal{H}(y))$ la fibre de $X \to Y$ en y (obtenu par recollement par un procédé analogue) : il s'agit d'un $\mathcal{H}(y)$-espace analytique dont l'espace topologique sous-jacent coïncide avec la fibre topologique, d'après la proposition 22.

Enfin, si $K \to L$ est une extension de corps valués complets non archimédiens, on dispose d'un foncteur de changement de base $-\widehat{\otimes}_K L : K-\mathsf{An} \to L-\mathsf{An}$ donné par $\mathcal{M}(A) \mapsto \mathcal{M}(A\widehat{\otimes}_K L)$ dans le cas affinoïde et obtenu dans le cas général par recollement.

Remarque 87. Si X est un espace K-analytique et $r \notin \sqrt{|K^\times|}$, on dispose d'une section continue de la projection canonique $X' = X\widehat{\otimes}_K K_r \to X$ qu'on appellera *section de Shilov.* Si Elle envoie un point $x \in X$ sur le point de Gauss de sa fibre $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x)\widehat{\otimes}_K K_r) = \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)_r)$.

Terminons par une comparaison entre le produit fibré analytique et topologique. Notons $|\cdot| : K-\mathsf{An} \to \mathsf{Top}$ le foncteur d'oubli.

Lemme 88. *Pour tous $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$, l'application $\pi : |X \times_Z Y| \to |X| \times_{|Z|} |Y|$ est compacte et surjective.*

Démonstration. Voir [PL22, proposition 4.5.1]. La surjectivité découle du fait que la fibre en (x, y) d'image commune z est donnée par $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x)\widehat{\otimes}_{\mathcal{H}(z)}\mathcal{H}(y))$, et du théorème de Gruson (lemme 57). ∎

3.5 Morphismes

On peut définir certains types de morphismes de manière analogue à ce que l'on fait pour les schémas.

Définition 89. Un morphisme $f : X \to Y$ entre espaces analytiques est

- une *immersion ouverte* si $U = f(X)$ est ouvert dans Y et f induit un isomorphisme d'espaces analytiques entre X et U,
- une *immersion fermée* si f est une immersion fermée topologique (i.e. un homéomorphisme sur son image fermée $f(X)$), $f_*\mathcal{O}_X$ est un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent, et $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ est surjectif,
- *séparé* si le morphisme diagonal $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ est une immersion fermée.
- *fini* si tout $y \in Y$ admet un voisinage affinoïde V tel que $f^{-1}(V) \to V$ soit un morphisme fini d'espaces affinoïdes (i.e. le morphisme sur les sections globales est fini).

Comme en géométrie algébrique, nous dirons que X est séparé, propre, etc. si $X \to \mathcal{M}(K)$ est séparé, propre, etc. Observons que les morphismes d'espaces affinoïdes $\mathcal{M}(A) = X \to Y = \mathcal{M}(B)$ sont tous séparés, puisque $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ correspond à l'application surjective $B\widehat{\otimes}_A B \to B$. En particulier, les morphismes d'espaces quasi-affinoïdes, i.e. les ouverts d'affinoïdes, sont également toujours séparés.

Proposition 90. *Un morphisme d'espaces analytiques $f : X \to Y$ est séparé si et seulement si $|f| : |X| \to |Y|$ est séparé. En particulier, X est séparé si et seulement $|X|$ l'est.*

Démonstration. Voir [Ber93, proposition 1.4.2] ou [PL22, proposition 4.5.6]. ∎

Comme d'habitude, les sous-espaces analytiques fermés correspondent aux idéaux cohérents $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$.

Proposition 91 (Sous-espaces analytiques fermés)**.** *L'application* $(i : Z \to X) \mapsto (\ker \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Z)$ *constitue une bijection entre les sous-espaces analytiques fermés (les classes d'isomorphismes d'immersion fermées) et les idéaux cohérents de* $\mathcal{O}_X$*. Explicitement, à un idéal cohérent* $\mathcal{I}$*, on fait correspondre l'immersion fermée donnée par le recollement de* $\mathcal{M}(\mathcal{O}_X^G(V)/\mathcal{I}(G)) \to V$ *pour* $V \subseteq X$ *affinoïde.*

Démonstration. L'assertion est locale sur le but donc il suffit de la démontrer dans le cas où $X = \mathcal{M}(A)$ est affinoïde. Posons $\mathcal{I} = \ker \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Z = \widetilde{I}$ d'après le théorème 82 et $B = \mathcal{O}_Z(Z)$. Commençons par remarquer que la suite exacte courte $0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Z \to 0$ induit $0 \to I \to A \to B \to 0$ par acyclicité (proposition 84). Ainsi, $B \simeq A/I$ (profitons-en pour remarquer que $\mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A)$ est bien une immersion fermée : l'image de $\mathcal{M}(B)$ s'identifie aux points x tels que $|f(x)| = 0$ pour tout $f \in I$). Considérons la factorisation

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "i"'] & & \mathcal{M}(B) \arrow[dl, "i'"] \\ & \mathcal{M}(A) & \end{tikzcd}$$

induite par $B = \mathcal{O}_Z(Z) \to \mathcal{O}_Z^G(V_i)$, si $Z = \bigcup_i V_i$ est une union finie de sous-domaines affinoïdes. Comme $Z \hookrightarrow X$ est injective, $Z \to \mathcal{M}(B)$ l'est aussi et est donc une immersion fermée : on s'est ainsi ramené au cas où $\mathcal{I} = 0$. La seule chose qu'il reste à démontrer est que $|Z| \xrightarrow{\sim} |X|$, puisque l'acyclicité de Tate nous donne déjà l'isomorphisme $\mathcal{O}_X^G(V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Z^G(i^{-1}(V))$ pour tout $V \subseteq X$ affinoïde. Or, on observe que si $x \in X \setminus i(Z) = U$, alors $(i_*\mathcal{O}_Z)(U) = \mathcal{O}_Z(\emptyset) = 0$ et donc $(i_*\mathcal{O}_Z)_x = 0$. Comme $i_*\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X$, cela est impossible : $i(Z) = X$. ∎

Corollaire 92. *Une immersion fermée est un morphisme fini.*

Corollaire 93. *Dans un espace séparé, l'intersection de deux affinoïdes est affinoïde.*

Démonstration. Si U et V sont affinoïdes dans X séparé, $U \times_{\mathcal{M}(K)} V$ l'est aussi, et son image réciproque $U \cap V$ par l'immersion fermée $X \to X \times_{\mathcal{M}(K)} X$ également. ∎

On ne dispose pas de bonne classe de morphismes « affinoïdes », i.e. tels que la préimage d'un affinoïde en soit à nouveau un, cette notion n'étant en particulier pas locale. En revanche, les morphismes finis vérifient cette propriété.

Proposition 94. *L'application* $(f : Y \to X) \mapsto f_*\mathcal{O}_Z$ *constitue une bijection entre les classes d'isomorphismes de morphismes finis vers* X *et les* $\mathcal{O}_X$*-algèbres cohérentes. Explicitement, à une algèbre cohérente* $\mathcal{B}$*, on fait correspondre le morphisme fini donné par le recollement de* $\mathcal{M}(\mathcal{B}^G(V)) \to V$ *pour* $V \subseteq X$ *affinoïde. En particulier, si* $f : Y \to X$ *est fini,* $f^{-1}(V)$ *est affinoïde pour tout* $V \subseteq X$ *affinoïde.*

Démonstration. $\mathcal{M}(\mathcal{B}^G(V))$ est bien défini d'après la remarque 41. Il découle de la définition des morphismes finis (et du théorème 82) que $\mathcal{B} = f_*\mathcal{O}_Z$ est une algèbre cohérente si $f : Y \to X$ est fini. Supposons sans perte de généralité $X = \mathcal{M}(A)$ affinoïde et considérons la A-algèbre finie $B = \mathcal{O}_Z(Z)$. Soit $\bigcup_i V_i$ un recouvrement fini par des sous-domaines affinoïdes tels que $\mathcal{M}(B_i) = f^{-1}(V_i) \to V_i = \mathcal{M}(A_i)$ soit un morphisme fini d'espaces affinoïdes. On souhaite montrer que le morphisme canonique $Y \to \mathcal{M}(B)$ induit par les restrictions $B \to B_i = B \otimes_A A_i$ (par cohérence) est un isomorphisme. Cela découle simplement des isomorphismes $Y \times_X V_i \simeq \mathcal{M}(B_i) \simeq \mathcal{M}(B) \times_X V_i$. ■

Pour définir les morphismes propres d'espaces analytiques, il nous faut parler de la notion d'*intérieur*.

Définition 95 (Intérieur)**.** Soit $\mathcal{M}(A) = X \to Y = \mathcal{M}(B)$ un morphisme entre espaces affinoïdes. L'*intérieur relatif* $\mathrm{Int}(X/Y) \subseteq X$ est l'ensemble des points $x \in X$ pour lesquels il existe un morphisme surjectif $\varphi : B\langle r^{-1}T\rangle \to A$ (au-dessus de $B \to A$) tel que $|\varphi(T_i)(x)| < r_i$ pour tout i. Si $X \to Y$ est un morphisme quelconque entre espaces analytiques, on note $\mathrm{Int}(X/Y)$ l'ensemble des points $x \in X$ pour lesquels il existe un voisinage affinoïde $U \in G(X)$ de x et un sous-domaine affinoïde $V \in G(Y)$ tel que $f(U) \subseteq V$ et $x \in \mathrm{Int}(U/V)$. Enfin, le *bord relatif* est $\partial(X/Y) = X \setminus \mathrm{Int}(X/Y)$.

Remarque 96. En d'autres termes, x est dans l'intérieur si et seulement s'il existe une immersion fermée de X vers un polydisque (relatif) fermé tel que l'image de x appartienne au polydisque ouvert correspondant.

Observons que, par définition de l'intérieur, $\mathrm{Int}(X/Y)$ est ouvert dans X.

Proposition 97.

(i) Si $Y \to X$ est un domaine analytique, alors $\mathrm{Int}(Y/X) = \overset{\circ}{Y}$ coïncide avec l'intérieur topologique de Y dans X.

(ii) Pour tout $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$, on a $\mathrm{Int}(Z/X) = \mathrm{Int}(Z/Y) \cap g^{-1}(\mathrm{Int}(Y/X))$.

(iii) Pour tout $f : X' \to X$, on a $f'^{-1}(\mathrm{Int}(Y/X)) \subseteq \mathrm{Int}(Y'/X')$ où $f' : Y' = Y \times_X X' \to Y$.

(iv) Pour tout $X \to Y$ et toute extension de corps valués complets non archimédiens $K \to L$, on a $\pi^{-1}(\mathrm{Int}(Y/X)) \subseteq \mathrm{Int}(Y\widehat{\otimes}_K L/X\widehat{\otimes}_K L)$, où $\pi : Y\widehat{\otimes}K \to Y$. Si $L = K_r$ pour un $r \notin \sqrt{|K^\times|}$, alors $\mathrm{Int}(Y/X) = \{y \in Y \mid \pi^{-1}(y) \subseteq \mathrm{Int}(Y\widehat{\otimes}_K L/X\widehat{\otimes}_K L)\}$.

Démonstration. Voir [Ber90, proposition 3.1.3]. ■

Définition 98. Un morphisme $f : X \to Y$ entre espaces analytiques est

— *sans bord* si $\partial(X/Y) = \emptyset$, i.e. $\mathrm{Int}(X/Y) = X$,

— *compact* s'il est topologiquement propre, i.e. s'il est séparé et la préimage d'un sous-ensemble quasi-compact de Y est quasi-compact,

— *propre* s'il est compact et sans bord.

Bien sûr, le fait d'être une immersion ouverte, une immersion fermée, séparé, sans bord, propre, ou fini est stable par changement de base et par composition. Remarquons également qu'une immersion fermée est propre. En effet, elle est bien sûr compacte, et sans bord, puisque, dans le cas affinoïde, une immersion fermée $\mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A)$ constitue déjà une immersion fermée d'un polydisque fermé relatif (de dimension 0) tel que tout point arrive dans le polydisque ouvert (qui est ici égal au polydisque fermé). Plus généralement, un morphisme fini est propre.

Proposition 99. *Un morphisme fini $f : X \to Y$ d'espaces analytiques est propre.*

Démonstration. f est quasi-compact d'après la proposition 94. Il est sans bord d'après [Ber90, proposition 2.5.2, lemme 2.5.3] et [BGR84, théorème 6.3.5.1]. Enfin, il est séparé car l'espace d'arrivée est localement compact et ses fibres sont séparées (il s'agit d'espaces affinoïdes sur un certain corps). ■

3.6 Cohomologie des morphismes propres

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 100 (Kiehl). *Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre de K-espaces analytiques et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors, pour tout $q \geq 0$, $R^q f_* \mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur Y.*

Nous allons en fait montrer une assertion un peu plus faible : que $R^q f_* \mathcal{F}(U)$ est fini sur $\mathcal{O}_Y^G(U)$ pour tout $U \subseteq Y$ affinoïde. La compatibilité sur les sections est démontrée dans [Wer19, théorème 3.3.1]. D'après la suite spectrale de Leray [Sta23, 01F2] et le théorème d'acyclicité de Tate, il revient au même de demander à ce que $R^q f_* \mathcal{F}(U) = H^q(f^{-1}(U), \mathcal{F})$ soit de fini sur $\mathcal{O}_Y^G(U)$ pour tout $U \subseteq Y$ affinoïde. C'est donc ce que nous allons démontrer. On suppose donc $Y = U = \mathcal{M}(B)$ affinoïde. Commençons par le cas où K est non trivialement valué et B strictement affinoïde.

Rappelons également que, sur un espace paracompact (en particulier sur un espace affinoïde), la cohomologie de Čech coïncide avec la cohomologie de Grothendieck [God97, théorème 5.10.2], En particulier, le théorème d'acyclicité de Tate montre que les faisceaux sur un affinoïde sont tous acycliques pour la cohomologie de Grothendieck. Enfin, la cohomologie de Čech peut se calculer à partir de n'importe quel recouvrement à intersections Grothendieck-acyclique (en particulier, affinoïde, puisque X est propre donc séparé), comme le montre la suite spectrale de la cohomologie de Čech [Sta23, 03AZ].

Puisque $X \to Y$ est propre, pour tout $x \in X$ et tout voisinage affinoïde U de x on dispose d'un voisinage affinoïde V de x tel que $V \subseteq \mathrm{Int}(U/Y)$. On a construit ainsi deux recouvrements finis $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de X tels que $\mathcal{V}$ soit strictement plus fin $\mathcal{U}$, au sens où, pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $V \subseteq \mathrm{Int}(U/Y)$.

Considérons l'application

$$(d, r) : C^{q-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \oplus Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to Z^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

avec d la différentielle de Čech, C le complexe de Čech, Z les cobords et r l'application induite de la restriction des sections de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{V}$. Il découle de la discussion sur la cohomologie que cette application est surjective (puisque $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$). De plus, le conoyau de $(d, 0) = (d, r) - (0, r)$ est $H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) = H^q(X, \mathcal{F})$.

Pour conclure, nous allons appliquer le théorème suivant (à $\alpha = (d, 0)$ et $\beta = (0, r)$), qui est une extension d'un théorème de L. Schwarz.

Théorème 101. *Soit B une K-algèbre strictement affinoïde et $\alpha, \beta : M \to N$ deux morphismes de B-modules de Banach. Supposons que α soit surjectif et que β s'insère dans une composée de morphismes de B-module normés*

$$M^\flat \xrightarrow{p} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{j} N^\#$$

telle que la composée est strictement complètement continue, avec p surjectif et j identifiant N à un sous module fermé de $N^{\#}$. Alors $\alpha+\beta : M \to N$ est d'image fermée dans N et de conoyau fini comme B-module.

Démonstration. Voir [Bos14, section 6.4, théorème 4] ou [Wer19, théorème 3.13]. ∎

Ici, les applications complètement continues sont des analogues des opérateurs compacts en analyse fonctionnelle (i.e. des limites d'opérateurs de rang fini).

Définition 102. Un morphisme $\alpha : M \to N$ de B-modules de Banach, B une algèbre strictement affinoïde, est dit *complètement continu* s'il peut s'écrire comme la limite de morphismes $\alpha_i : M \to N$, $i \geq 0$ tels que $\operatorname{im} \alpha_i$ soit un B-module fini pour tout i. Il est dit *strictement complètement continu* si on peut de plus choisir $c \in K^\circ - \{0\}$ tel que, pour tout i, $c\alpha_i(M^\circ)$ soit contenu dans un sous-B°-module fini de N°.

Notre but est donc de montrer que $(0, r)$ vérifie les hypothèses du théorème. Commençons par exhiber une famille de morphismes strictement complètement continus.

Lemme 103. *Soit B une algèbre affinoïde et $\psi : B\langle T\rangle \to A$ un morphisme de B-algèbres affinoïde. Supposons $\psi|_B : B \to A$ soit contractante. Alors, si $\rho(\psi(T_i)) < 1$ pour tout i (où ρ est le rayon spectral), ψ est strictement complètement continue.*

Démonstration. Par hypothèse, $\psi(T^k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ tend vers 0 dans N, d'après la proposition 44. Si on pose
$$M_i = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}^n, |k|=i} BT^k.$$
on voit que $M = B\langle T\rangle$ est la somme directe (dans la catégorie des modules de Banach) des modules de Banach finis M_i. Posons $\psi_i = \psi\circ\pi_i$ avec $\pi_i : M \to M_i$ la projection canonique. On sait que $\psi = \sum_i \psi_i$ puisque $\rho\circ\psi_i$ tend vers 0. Comme les M_i sont finis, ψ est complètement continue. De plus, si $c \in K^\circ \setminus \{0\}$ est tel que $|\psi(T^k)| \leq |c|^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^n$, on a $c\psi i \subseteq A^\circ$ pour tout i. Enfin, $c\psi i(M^\circ) = c\psi i(M_i^\circ)$ est un sous-module fini de A°, donc ψ est strictement complètement continue. ∎

Terminons à présent la démonstration du théorème de Kiehl. Soient $U \in \mathcal{U}$ et $V \in \mathcal{V}$ des sous-espaces strictement affinoïdes de X tels que $V \subseteq \operatorname{Int}(U/Y)$, et notons φ le morphisme canonique $A_U \to A_V$. On dispose par hypothèse d'un épimorphisme $\psi : B\langle T\rangle \to A_U$ tel que $\rho(\varphi(\psi(T_i))) < 1$ pour tout i, d'après [Ber90, proposition 2.5.9]. D'après le lemme précédent,
$$\varphi\circ\psi : B\langle T\rangle \to A_V$$
est strictement complètement continue et il en est donc de même pour l'application induite sur le complexe de Čech
$$\eta : E^q \xrightarrow{p} C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}),$$
où E^q un B-module de Banach et p un épimorphisme. Comme η restreinte à $\eta^{-1}(Z^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}))$ reste strictement complètement continue, le théorème de Schwarz, appliqué à
$$C^{q-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \to \eta^{-1}(Z^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})) \xrightarrow{(\mathrm{id},p)} C^{q-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \oplus Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{(0,r)} Z^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$
nous dit que le conoyau de $(d, 0) = (d, r) - (0, r)$ est un B-module fini, i.e. $H^q(X, \mathcal{F})$ est fini.

Dans le cas où la valeur absolue sur K est triviale ou B n'est pas strictement affinoïde, il suffit de poser $L = K_r$ pour un r multiplicativement indépendant sur $\sqrt{|K^\times|}$ adéquat et changer de base : $X \widehat{\otimes} L \to Y \widehat{\otimes} L$ est toujours propre et le complexe de Čech est obtenu par changement de base plat (proposition 48), donc sa cohomologie également – en particulier, elle est de même dimension. Il n'y a pas de problème à supposer les U_i et V_j strictement affinoïdes non plus puisqu'ils sont en nombre fini, et de même pour $\psi : B\langle T\rangle \to A_U$.

Chapitre 4

Analytification

Sommaire

4.1 Foncteur d'analytification

On peut à présent passer au cœur de ce mémoire : l'analytification. Dans cette section, on construit le foncteur d'analytification $-^{\mathrm{an}} : K\mathsf{-Var} \to K\mathsf{-An}$, où $K\mathsf{-Var}$ désigne la catégorie des schémas de type fini sur K, qu'on appellera des *variétés*. Étant donné une variété (resp. un espace analytique) X, on notera X_0 l'ensemble de ses points fermés (resp. rigides), c'est-à-dire l'ensemble de ses points $x \in X$ tel que $\kappa(x)$ (resp. $\mathcal{H}(x)$) soit fini sur K. Intuitivement, pour une variété affine sur $\mathbb{C}$, l'analytification correspond à ne garder que les points fermés, munir cet espace de la topologie complexe, et de remplacer le faisceau des fonctions régulières par le faisceau des fonctions analytiques.

Théorème 104 (Analytification)**.** *Pour toute variété algébrique X sur K, il existe un espace strictement analytique $\mathcal{X} = X^{\mathrm{an}}$ qui représente le foncteur $\mathrm{Hom}_{K-\mathsf{LocAnn}}(-, (X, \mathcal{O}_X)) : K\mathsf{-An} \to \mathsf{Set}$. En d'autres termes, $\mathcal{X}$ est muni d'une flèche $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ tel que tout morphisme d'espaces localement annelés $(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ où $\mathcal{Y}$ est un espace analytique se factorise uniquement à travers $\mathcal{X}$*

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!"] & (X, \mathcal{O}_X) \\
(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

De plus, X^{an} est toujours sans bord (sur K), et la flèche $\pi : X^{\mathrm{an}} \to X$ est surjective et induit une bijection entre $X^{\mathrm{an}}(L) \xrightarrow{\sim} X(L)$ pour toute extension finie L/K. Enfin, pour tout $x \in X^{\mathrm{an}}$, $\pi_x : \mathcal{O}_{X,\pi(x)} \to \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x}$ est (fidèlement) plat, et induit un isomorphisme entre les complétions (au sens des anneaux locaux) si $x \in X_0^{\mathrm{an}}$ est un point rigide (i.e. $\mathcal{H}(x)/K$ est finie). Si $x \in X^{\mathrm{an}}$ est tel que $\mathcal{H}(x)$ est trivialement valué, alors $\pi_x : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x}$ devient un isomorphisme après complétion.

Démonstration. Nous allons le construire explicitement, par étapes.

1. $X = \mathbb{A}^n$. Dans ce cas, on pose $\mathcal{X} = X^{\mathrm{an}} = \mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}$ (les notations sont cohérentes !). Il s'agit bien d'un espace analytique puisque

$$\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}} = \bigcup_{r>0} E(0, r) = \bigcup_{r>0} D(0, r)$$

avec $E(0,r) = \mathcal{M}(K\langle r^{-1}T\rangle)$ le polydisque fermé de rayon r et $D(0,r) \subseteq E(0,r)$ le polydisque ouvert de rayon r. On peut donc appliquer la proposition 85 pour munir $\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}$ d'une structure d'espace analytique, clairement sans-bord, en recollant les $D(0,r)$. Vérifions la propriété universelle. Il suffit de le faire, par recollement (et unicité), dans le cas où $\mathcal{Y} = \mathcal{M}(B)$ est affinoïde. Alors, tout morphisme $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ nous donne $b = (b_1, \dots, b_n) \in B^n$ en regardant l'image des T_i par le morphisme sur les sections globales. Réciproquement, étant donné un tel b, on peut définir un morphisme $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ en recollant les

$$\mathcal{M}(B\langle r^{-1}T\rangle/(T_i - b_i)) = \mathcal{Y}(r^{-1}b) \to E(0,r) = \mathcal{M}(K\langle r^{-1}T\rangle)$$

données par la propriété universelle des algèbres de Tate ($T_i \mapsto b_i$). De plus, il s'agit de l'unique tel morphisme car si on part de $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, $f^{-1}(E(0,r)) = \mathcal{Y}(r^{-1}b)$ et la conclusion découle du fait que la catégorie des espaces affinoïdes est équivalente à l'opposée de la catégorie des algèbres affinoïdes. On obtient donc $\mathrm{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \simeq \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)^n \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{Y}, X)$, comme voulu.

2. Si Z est un sous-schéma fermé de X d'idéal cohérent $\mathcal{I}$ et l'on a déjà construit X^{an}, on vérifie sans peine que Z^{an} s'identifie au sous-espace fermé de X^{an} donné par l'idéal cohérent $\mathcal{I}\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$. En particulier, on sait construire l'analytification de schémas affines. Explicitement, si $X = \operatorname{Spec} K[T]/I$, on a $X^{\mathrm{an}} = \bigcup_{r>0} \mathcal{M}(K\langle r^{-1}T\rangle/(I))$.
3. Si U est un ouvert de X et l'on a déjà construit X^{an}, on vérifie sans peine que U^{an} s'identifie à l'image réciproque de U par $X^{\mathrm{an}} \to X$. Cette observation permet de construire X^{an} en général, en l'écrivant comme une réunion finie d'ouverts affines U_i et en utilisant la proposition 85 (les images réciproques de $U_i \cap U_j$ dans U_i^{an} ou U_j^{an} s'identifient à $(U_i \cap U_j)^{\mathrm{an}}$ donc sont munies d'un isomorphisme canonique). L'intérieur étant défini localement, X^{an} est bien sans bord.

Les autres assertions sont locales, donc il suffit de les vérifier dans le cas affine, i.e. le cas 2 où $X = \operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} K[T]/I$. L'assertion sur les L points provient du fait que la valeur absolue de K se prolonge uniquement à toute extension finie de celui-ci. Dans ce cas, si $x \in X^{\mathrm{an}}$, π_x est donné par $\mathcal{O}_{X,\pi(x)}/I \to \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x}/I\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x}$ et l'assertion sur les complétions pour x rigide provient de la proposition 61.

Le morphisme π_x est local car si $f \in A$ est tel que $|f(x)| > 0$, on peut inverser f dans un voisinage affine de $\pi(x)$ car $f \notin \mathfrak{p}_{\pi(x)}$. Montrer la platitude (qui équivaut à la fidèle platitude puisqu'il s'agit d'un morphisme local) de $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x}$ sur $A_{\pi(x)}$ revient à la montrer sur A. Supposons K non triviaement valué. Alors, si x est rigide, $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x} \to A_{\pi(x)}$ est plat d'après [AK70, chapitre 5, proposition 3.3], car il l'est après complétion. En particulier, $A \to \mathcal{A}_V$ est plat pour tout V strictement affinoïde (car cela se teste sur les idéaux maximaux). On conclut en remarquant que $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x} = \operatorname{colim} \mathcal{A}_V$ est une colimite de A-algèbres plates, où la colimite est prise sur les voisinages strictement affinoïdes V de x (d'après le corollaire 55). La platitude en général se montre après extension des scalaires, en utilisant [Ber93, corollaire 2.1.3].

La surjectivité provient du corollaire 7 : si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A ($X = \operatorname{Spec} A$), une valuation sur $\operatorname{Frac} A/\mathfrak{p}$ étendant celle de K nous donne un point de X^{an} d'image $\mathfrak{p}$ (cf. la remarque ci-dessous).

■

Remarque 105. On peut observer que lorsque $X = \operatorname{Spec} A$ est affine, $|X^{\mathrm{an}}| \simeq \mathcal{M}_K(A)$.

Corollaire 106. *X^{an} est vide si et seulement si X l'est.*

Exemples.

— Si L est une extension finie de K, on vérifie aisément que $(\operatorname{Spec} L)^{\mathrm{an}} = \mathcal{M}(L)$. En effet, si $L = K[T]/\mathfrak{m}_x$, on a bien $(\operatorname{Spec} L)^{\mathrm{an}} = \bigcup_r \mathcal{M}(K\langle r^{-1}T\rangle/\mathfrak{m}_x) = \bigcup_r \mathcal{M}(L) = \mathcal{M}(L)$.

— L'espace projectif algébrique $\mathbb{P}^n_K$ est obtenu comme recollement de $n+1$ espaces affines, et donc il en va de même pour l'espace projectif analytique. On peut cependant faire mieux : on a en fait
$$\mathbb{P}^{n,\mathrm{an}}_K = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{M}\left(K\left\langle \frac{T_0}{T_i}, \ldots, \frac{T_n}{T_i}\right\rangle\right)$$
où $\mathcal{M}\left(K\left\langle \frac{T_0}{T_i}, \ldots, \frac{T_n}{T_i}\right\rangle\right)$ et $\mathcal{M}\left(K\left\langle \frac{T_0}{T_j}, \ldots, \frac{T_n}{T_j}\right\rangle\right)$ sont recollés le long de $\mathcal{M}\left(K\left\langle \frac{T_0}{T_i}, \ldots, \frac{T_n}{T_i}, \frac{T_i}{T_j}\right\rangle\right) = \mathcal{M}\left(K\left\langle \frac{T_u T_v}{T_i T_j}\right\rangle\right)$. Donnons l'idée en coordonnées homogènes (elle se traduit directement en preuve formelle) : si $[t_0 : \ldots : t_n]$ est un point de $\mathbb{P}^n$ et $|t_j| = \max_i |t_i|$, $[t_0/t_j : \ldots : t_n/t_j]$ est le même point mais cette fois toutes ses coordonnées sont de valeur absolue ≤ 1. Cette expression de $\mathbb{P}^{n,\mathrm{an}}_K$ comme le recollement de $n+1$ polydisques montre en particulier sa (quasi-)compacité.

L'analytification est bien sûr fonctorielle : un morphisme $X \to Y$ donne un morphisme $X^{\mathrm{an}} \to X \to Y$ et donc un unique morphisme $X^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ par propriété universelle. Remarquons que $X^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ est sans bord d'après la proposition 97.

Proposition 107. *Si $X \to Z$ et $Y \to Z$ sont des morphismes de variétés, on a $(X \times_Z Y)^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} X^{\mathrm{an}} \times_{Z^{\mathrm{an}}} Y^{\mathrm{an}}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que les deux ont le même foncteur des points. (Rappelons que $X \times_Z Y$ est le produit fibré de $X \to Z$ et $Y \to Z$ non seulement dans la catégorie des schémas mais aussi dans la catégorie des espaces localement annelés.) ■

On dira qu'un espace analytique X est *réduit* si $\mathcal{O}_X^G(V)$ est réduit pour tout V affinoïde (et donc tout V). On note ici $X^{\mathrm{an}}_{\mathrm{red}}$ le sous-espace fermé correspond à l'idéal cohérent de X constitué des nilpotents. X_{red} et X ont même espace topologique : cela se voit dans le cas affinoïde, puisque qu'une semi-valuation bornée sur A se factorise toujours par les nilpotents.

Proposition 108. *Soit X une K-variété. Alors, $(X_{\mathrm{red}})^{\mathrm{an}} = X^{\mathrm{an}}_{\mathrm{red}}$.*

Démonstration. La propriété est locale donc il suffit de la démontrer dans le cas affinoïde. La construction de l'analytification montre que cela revient à ce que si $I \subseteq K[T]$ est radical, alors l'idéal qu'il engendre dans $K\langle r^{-1}T\rangle$ l'est toujours. Posons $A = K[T]/(I)$ et $A' = K\langle r^{-1}T\rangle/(I)$ (la complétion de A pour la norme correspondant à r). On peut supposer A' strictement affinoïde d'après [Duc07, lemme 1.3]. Les algèbres A et A' sont excellentes d'après [Duc09], donc la réduction est équivalente à la réduction sur les anneaux locaux en les points fermés, et même sur les complétions de ces anneaux locaux. Or, celles-ci sont les mêmes d'après le théorème 104. ■

4.2 Propriétés sur les morphismes

L'analytification possède d'excellentes propriétés sur les morphismes. On dira qu'un morphisme d'espaces analytiques est *plat* s'il est plat comme espace localement annelé (i.e. sur les fibres). On dira qu'un morphisme $f : X \to Y$, où X et Y sont des variétés (resp. des espaces analytiques) est

— *non ramifié* si tout point $x \in X$ dans l'image de Y est tel que $Y_x \simeq \operatorname{Spec} A$ (resp. $\mathcal{M}(A)$), où A est une algèbre séparable finie sur $\kappa(x)$ (resp. $\mathcal{H}(x)$), i.e. un produit d'extensions de corps séparables finies,

— *étale* s'il est non ramifié et plat.

Remarque 109. Cette définition de la platitude est appelée *platitude naïve* dans [Duc18, chapitre 4], mais elle coïncide avec la notion plus générale dans le cas ici présent.

Théorème 110. *Soit $f : Y \to X$ un morphisme entre K-variétés algébriques. Alors, f est*

(1) plate,

(2) non ramifiée,

(3) étale,

(4) séparée,

(5) propre,

(6) injective,

(7) surjective,

(8) un isomorphisme,

(9) un monomorphisme,

(10) une immersion ouverte,

(11) une immersion fermée,

(12) dominante,

(13) finie

si et seulement si f^{an} l'est.

Démonstration. Voir [Ber90, proposition 3.4.6, proposition 3.4.7] pour le cas de la valuation non triviale. La démonstration est très analogue à celle dans le cas complexe présentée dans [Gro71, exposé 12]. ∎

On dira qu'un espace analytique est *irréductible* s'il ne peut pas s'écrire comme l'union de sous-espaces analytiques fermés stricts.

Corollaire 111. *Soit X une variété. Alors,*

(i) X est séparé si et seulement si $|X^{\mathrm{an}}|$ est séparé.

(ii) X est propre si et seulement si $|X^{\mathrm{an}}|$ est compact.

(iii) X est connexe si et seulement si $|X^{\mathrm{an}}|$ est connexe par arcs.

(iv) X est irréductible si et seulement si X^{an} est irréductible.

Démonstration. 1. Cela découle de la proposition précédente ainsi que de la proposition 90.

2. Cela découle de la proposition précédente.

3. Comme X^{an} est toujours localement connexe par arcs (théorème 60), il suffit de montrer que X est connexe si et seulement si X l'est. Si $X = U \sqcup V$ n'est pas connexe, alors $X^{\mathrm{an}} = U^{\mathrm{an}} \sqcup V^{\mathrm{an}} = \pi^{-1}(U) \sqcup \pi^{-1}(V)$ n'est pas connexe.

   Réciproquement, supposons X connexe. Quitte à recouvrir X d'un nombre fini d'ouverts affines U_i, on peut le supposer affine. En effet, le graphe avec U_i comme sommets et une arête entre U_i et U_j si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ est connexe puisque l'union des éléments de deux composantes disjointes formerait une partition en deux ouverts de X. Ainsi, les U_i^{an} recouvrent X^{an} et le graphe associé est aussi connexe, donc si tous les U_i^{an} sont connexes, X^{an} l'est aussi (une fonction $X^{\mathrm{an}} \to \{0,1\}$ est constante sur chaque composante connexe du graphe). Le même raisonnement nous permet de supposer X irréductible, grâce à la décomposition en composantes irréductibles. Enfin, puisque l'assertion est purement topologique, on peut le supposer intègre, quitte à prendre la réduction. On aimerait alors conclure à partir du corollaire 72, en disant que X^{an} est une union croissante de spectres d'algèbres affinoïdes intègres, donc connexes, mais il n'est pas clair que si I est premier dans $K[T]$, il engendre aussi un idéal premier dans $K\langle r^{-1}T\rangle$. Le résultat découle cependant de la démonstration donnée dans [Duc18, proposition 2.7.16].

4. Voir [Duc18, proposition 2.7.16].

■

Remarque 112. Contrairement à la géométrie complexe où la dimension de l'analytifié vaut deux fois la dimension de base, ici $\dim X = \dim X^{\mathrm{an}}$ (voir [Duc07] pour la définition de la dimension d'un espace analytique et [Ber90, proposition 3.4.3] pour une démonstration de la préservation de la dimension). En particulier, une courbe de Berkovich a un H^2 trivial. Il faut donc utiliser la cohomologie étale pour pouvoir exploiter l'information donnée par un H^2 non trivial.

4.3 Faisceaux cohérents

Un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X donne lieu a un faisceau cohérent $\mathcal{F}^{\mathrm{an}} := \pi^*\mathcal{F}$ sur X^{an}. Comme $\mathcal{O}_X^{\mathrm{an}} = \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$, il découle de la caractérisation de la cohérence comme étant localement de présentation finie (voir [Wer19, lemme 2.2.6] et [PL22, lemme 6.5.6]).

Proposition 113. *Soit X une variété. Le foncteur $-^{\mathrm{an}} : \mathsf{Coh}_X \to \mathsf{Coh}_{X^{\mathrm{an}}}$ est exact et fidèle.*

Démonstration. L'exactitude résulte de la platitude de $\pi : X^{\mathrm{an}} \to X$. Pour la fidélité, compte tenu de l'exactitude, il suffit de montrer que $\mathcal{F}^{\mathrm{an}} = 0$ implique $\mathcal{F} = 0$ (puisque $f^{\mathrm{an}} = 0$ équivaut à $(\operatorname{im} f)^{\mathrm{an}} = \operatorname{im} f^{\mathrm{an}} = 0$). Si $\mathcal{F}^{\mathrm{an}} = 0$, on a, pour $x \in X^{\mathrm{an}}$, $0 = \mathcal{F}_x^{\mathrm{an}} = \mathcal{F}_{\pi(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\pi(x)}} \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x}$ et donc $\mathcal{F}_{\pi(x)} = 0$ par pleine fidélité de $\mathcal{O}_{X,\pi(x)} \to \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x}$. Enfin, on a $\mathcal{F}_x = 0$ pour tout $x \in X_0$, i.e. $\mathcal{F} = 0$. ■

En revanche, ce foncteur est en général très loin d'être plein (une fonction analytique sur K^n n'est pas polynomiale en général), mais elle l'est lorsque X est propre (les fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ sont toutes rationnelles). On dispose en fait du théorème suivant, dont le nom fait écho à l'article *Géométrie algébrique et géométrie analytique* de Serre [Ser56].

Théorème 114 (GAGA). *Si X est une variété propre, le foncteur d'analytification induit une équivalence entre les faisceaux cohérents sur X et les faisceaux cohérents sur X^{an}, qui préserve la cohomologie.*

La flèche $H^p(X,\mathcal{F}) \to H^p(X,\mathcal{F}^{\mathrm{an}})$ provient bien sûr de l'universalité du foncteur cohomologique H^p et de la flèche entre H^0 donnée par π.

Démonstration. Voir [Poi10, appendice A]. La démonstration est presque identique à celle de Serre [Ser56] [Gro71, exposé 12]. ■

Toujours d'après la suite spectrale de Leray, modulo une version de l'analytfication relative (voir [Ber93, section 2.6] et [Poi10, appendice A]) pour des schémas sur une base affinoïde, on obtient la version suivante du GAGA.

Corollaire 115. *Si $f : X \to Y$ est un morphisme propre de variétés et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X, on a $(R^q f_* \mathcal{F})^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} R^q f_*^{\mathrm{an}} \mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ pour tout $q \geq 0$.*

Corollaire 116 (Chow)**.** *Soit X une variété propre. Alors, tout sous-espace analytique fermé de X^{an} est algébrique, i.e. de la forme Y^{an} avec $Y \hookrightarrow X$ une sous-variété fermée. Plus généralement, tout morphisme fini $\mathcal{Y} \to X^{\mathrm{an}}$ est de la forme $Y^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$.*

Démonstration. Soit $f : \mathcal{Y} \to X^{\mathrm{an}}$ un morphisme fini. Par surjectivité essentielle, la $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$-algèbre cohérente $f_* \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ correspondant à $\mathcal{Y}$ est de la forme $\mathcal{A}^{\mathrm{an}}$. Alors, $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre cohérente, donc elle correspond à un morphisme fini $Y \to X$, dont l'analytifié est $Y^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$. L'assertion sur les immersions fermées découle de l'exactitude de $-^{\mathrm{an}}$. ∎

Corollaire 117. *Le foncteur d'analytification, restreint aux variétés propres, est pleinement fidèle.*

Démonstration. Soit X et Y des variétés propres. Se donner un morphisme $X \to Y$ équivaut à se donner son graphe, i.e. un sous-schéma fermé Z de $X \times_K Y$ tel que la restriction de la projection $X \times_K Y \to X$ à Z soit un isomorphisme. La situation est la même pour les espaces analytiques propres, et le résultat découle donc du corollaire 116. ∎

Remarque 118. Avec un peu plus de travail, on peut montrer que toutes les courbes analytiques propres X sont algébrisables, voir [Duc14, proposition 3.7.1]. La partie difficile est de trouver une fonction méromorphe non constante f sur X. Une fois que l'on a cette fonction, on obtient un morphisme $X \to \mathbb{P}_K^{1,\mathrm{an}}$, propre et quasi-fini (à fibres finies) donc fini (d'après [Ber90, proposition 3.3.7]) et en particulier algébrisable.

Dans le cas général, on dispose tout de même de la préservation cohomologique dans le cas affine pour $q > 0$. On dispose plus précisement de l'analogue suivant du théorème B de Cartan.

Définition 119. Un espace analytique X est *W-recouvert par des espaces affinoïdes* s'il existe un G-recouvrement affinoïde $(D_i)_{i \geq 0}$ tel que, pour tout i, $D_i \subseteq D_{i+1}$ et l'image de $\mathcal{O}_X(D_{i+1}) \to \mathcal{O}_X(D_i)$ est dense.

Théorème 120 (Kiehl)**.** *Soit X un espace analytique W-recouvert par des espaces affinoïdes $(D_i)_{i \geq 0}$ et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors, $\mathcal{F}(X)$ est dense dans $\mathcal{F}(D_i)$ pour tout i et $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $q > 0$.*

On rappel le lemme suivant, dont on pourra trouver une démonstration dans [MP21, lemme 2.10].

Lemme 121. *Soit $q \in \mathbb{Z}$ et $C_i^\bullet$ un système projectif de complexes, de morphisme de transition $\varphi_i^\bullet$, vérifiant la condition $(*)$ suivante :*
Pour $p = q$ et $p = q-1$, $\varphi_i^p : C_{i+1}^p \to C_i^p$ est surjectif et $H^q(C_i^\bullet) = 0$. $(*)$
Alors le morphisme $H^{q+1}(\lim C_i^\bullet) \to \lim_i H^{q+1}(C_i^\bullet)$ est un isomorphisme.

Démonstration du théorème 120. Soit $s \in \mathcal{F}(D_i)$ et $\varepsilon > 0$. On choisit une suite $(s_j)_{j\geq i}$ avec $s_j \in \mathcal{F}(D_j)$, $s_i = s$ et tel que $|s_{j+1}|_{D_j} - s_j| \leq \varepsilon/j$. Alors, (s_j) est une suite de Cauchy restreint à chaque D_k, et il existe donc $t \in F(X)$ tel que $s_j|_{D_j}$ converge vers $t|_{D_j}$ pour tout $j \geq i$. Ainsi, $|t_{D_i} - s| \leq \varepsilon$ et $\mathcal{F}(X)$ est bien d'image dense dans D_i.

Pour montrer l'acyclicité de $\mathcal{F}$, on va utiliser la cohomologie de Cech associée aux recouvrements affinoïdes $\mathcal{D}_i = \{D_j \mid j \leq i\}$ de D_i (dont les intersections sont affinoïdes et donc acycliques). On veut appliquer le lemme précédent à $C_i^\bullet = C(\mathcal{D}_i, \mathcal{F})$ avec pour morphismes de transition φ_i^p induit par la projection canonique. Sachant que, pour un uplet d'indices $\ell = (\ell_0, \ldots, \ell_p)$, on a $\mathcal{D}_\ell = D_{\min \ell_j}$, en on conclut $C_i^p = \bigoplus_\ell \pi_\ell D_{\min \ell_j}$ et donc φ_i^p est bien surjectif pour tout p. Si $q \geq 2$ on sait déjà que $H^{q-1}(C_i^\bullet) = 0$ pour tout i par acyclicité de Tate. On peut donc appliquer le lemme :

$$H^q(\mathcal{D}, \mathcal{F}) = H^q(\lim_i C_i^\bullet) \simeq \lim_i H^q(C_i^\bullet) = \lim_i H^q(\mathcal{D}_i, \mathcal{F}|_{D_i}) = 0.$$

Enfin, on traite le cas $q = 1$ par un calcul explicite. Autrement dit, pour (t_i) une suite telle que $t_i \in F(D_i)$, il faut trouver $s_i \in F(D_i)$ tel que $t_i = s_{i+1} - s_i$ pour tout i. Par densité, on sait déjà qu'il existe, pour tout i, $s_i' \in \mathcal{F}(D_i)$ tel que

$$|t_i - s_{i+1}' + s_i'| \leq 2^{-n}.$$

Si l'on pose $r_i = t_i - s_{i+1}' + s_i'$ et

$$s_i'' = \sum_{j>i} r_j|_{D_i} \in \mathcal{F}(D_i),$$

on obtient $s_i'' - s_{i+1}'' = t_i - s_{i+1}' + s_i'$, i.e.

$$t_i = (s_{i+1}' - s_{i+1}'') - (s_i' - s_i'')$$

comme voulu (on prend $s_i = s_i' - s_i''$). ■

Corollaire 122. *Si X est une variété affine, X^{an} est cohomologiquement Stein, i.e. $H^q(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $q > 0$ et tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X^{an}.*

Démonstration. Soit $i : X \to \mathbb{A}_K^n$ une immersion fermée d'idéal cohérent $\mathcal{I} = \widetilde{I}$. Le premier point relève simplement du théorème précédent et de l'écriture $X^{\mathrm{an}} = \bigcup_r \mathcal{M}(K\langle r^{-1}T\rangle/(I))$ comme union croissante d'espaces affinoïdes ; les images des restrictions sont denses puisqu'elles contiennent l'image de $K[T]$. ■

Dans le cas où le corps de base est trivialement valué, l'analytification se comporte particulièrement bien sur les faisceaux cohérents.

Théorème 123 (GAGA trivial)**.** *Supposons K trivialement valué. Alors, pour toute variété X sur K, le foncteur $-^{\mathrm{an}} : \mathsf{Coh}_X \to \mathsf{Coh}_{X^{\mathrm{an}}}$ induit une équivalence de catégories. De plus, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X et tout $q > 0$, $H^q(X, \mathcal{F}) = H^q(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}^{\mathrm{an}})$.*

Démonstration. Commençons par la préservation de la cohomologie. Il suffit de la montrer dans le cas où X est quasi-affine (i.e. un ouvert d'un schéma affine) d'après la suite spectrale de la cohomologie de Čech [Sta23, 01ES]. Cette même suite spectrale appliquée à X quasi-affine montre qu'on peut en fait même le supposer affine. Le corollaire 122 constitue le cas $q > 0$ et il reste donc à traiter le cas $q = 0$.

Prenons une immersion fermée $i : X \to \mathbb{A}^n$ d'idéal cohérent $\mathcal{I} = \widetilde{I}$. On a $H^0(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}) = \mathcal{O}_X(X)$: en effet, X^{an} s'écrit comme l'union croissante des $\mathcal{M}(K\langle r^{-1}T\rangle/(I))$, dont les sections globales se stabilisent en $K[T]/I$ pour $r \geq 1$ puisqu'alors $K\langle r^{-1}T\rangle = K[T]$. Le cas d'un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ général découle du fait qu'on peut, comme est dans le cas affine, l'écrire comme le conoyau d'un morphisme $O_X^{r_1} \to O_X^{r_2}$. Comme tous les faisceaux cohérents sont acycliques, H^0 commute aux noyaux et conoyaux et on obtient bien $H^0(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}^{\mathrm{an}}) = H^0(X, \mathcal{F})$.

La pleine fidélité se démontre comme dans le GAGA usuel : si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sont cohérents sur X, alors $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})^{\mathrm{an}} = \mathcal{H}om(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}, \mathcal{G}^{\mathrm{an}})$ et on conclut en regardant le H^0. Il reste seulement à montrer la surjectivité essentielle (qu'on peut faire dans le cas affine, puisqu'il s'agit d'une propriété locale parce que la pleine fidélité a déjà été démontrée). Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X^{an}, alors pour tout $r \geq 1$, $i_*\mathcal{F}(D(0, r)) = \widetilde{M}$ pour un module fini M sur A, qui ne dépend pas de r. Ainsi, $\mathcal{F} = \widetilde{M}^{\mathrm{an}}$. ■

En combinant une version relative (pour les schémas de base un affinoïde, voir [Ber93, section 2.6] et [Poi10, appendice A]) de ce théorème au théorème de Kiehl (et à la suite spectrale de Leray et à l'observation déjà faite que la cohomologie de Čech coïncide avec la cohomologie de Grothendieck sur un espace paracompact), on obtient ainsi le théorème de Grothendieck, qui est l'analogue du théorème de Kiehl en géométrie algébrique. Il est intéressant de noter qu'on a pu démontrer un théorème de géométrie algébrique valide sur tout corps à l'aide de géométrie de Berkovich et de techniques d'analyse fonctionnelle simplement en le munissant de la valeur absolue triviale.

Corollaire 124 (Grothendieck)**.** *Soit K un corps et $f : X \to Y$ un morphisme propre de K-variétés. Alors, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X et tout $q \geq 0$, $R^q f_*\mathcal{F}$ est cohérent. En d'autres termes, pour tout $U \subseteq Y$ affine, $H^q(\mathcal{F}, f^{-1}(U))$ est un $\mathcal{O}_Y(U)$-module fini.*

Bibliographie

[AK70] A. Altman et S. Kleiman. Introduction to Grothendieck Duality Theory, volume 146 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1970. (Cité en pages 21 et 36.)

[Ber90] V. Berkovich. Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-Archimedean Fields, volume 33 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 1990. (Cité en pages i, ii, 17, 20, 24, 25, 31, 32, 33, 38, 39 et 40.)

[Ber93] V. Berkovich. *Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, vol. 78, pages 5–161, 1993. (Cité en pages ii, 8, 22, 25, 28, 29, 36, 40 et 42.)

[BGR84] S. Bosch, U. Güntzer et R. Remmert. Non-Archimedean Analysis, volume 261 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1984. (Cité en pages 10, 16, 18 et 32.)

[Bos14] S. Bosch. Lectures on Formal and Rigid Geometry, volume 2105 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 2014. (Cité en pages i, ii, 4, 14, 15, 20 et 33.)

[DFN15] A. Ducros, C. Favre et J. Nicaise, éditeurs. Berkovich Spaces and Applications, volume 2119 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 2015. (Cité en page ii.)

[Duc03] A. Ducros. *Parties semi-algébriques d'une variété p-adique*. Manuscripta Mathematica, vol. 111, pages 513–528, 2003. (Cité en page 20.)

[Duc07] A. Ducros. *Variation de la dimension d'un morphisme analytique p-adique*. Compositio Mathematica, vol. 143, no. 6, pages 1511–1532, 2007. (Cité en pages 37 et 39.)

[Duc09] A. Ducros. *Les espaces de Berkovich sont excellents*. Annales de l'Institut Fourier, vol. 59, no. 4, pages 1443–1552, 2009. (Cité en pages 27 et 37.)

[Duc14] A. Ducros. *La structure des courbes analytiques*. `https://webusers.imj-prg.fr/~antoine.ducros/livre.html`, 2014. (Cité en page 40.)

[Duc18] A. Ducros, éditeur. Families of Berkovich Spaces, volume 400 de *Astérisque*. Société Mathématique de France, 2018. (Cité en pages 38 et 39.)

[Duc21] A. Ducros. *Introduction à la théorie des schémas*. `https://webusers.imj-prg.fr/~antoine.ducros/Cours-schemas.pdf`, 2021. (Cité en page ii.)

[God97] R. Godement. Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Actualités scientifiques et industrielles. Hermann, 1997. (Cité en pages 28 et 32.)

[Gro71] A. Grothendieck, éditeur. Revêtements étales et groupe fondamental, volume 224 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1971. (Cité en pages 38 et 39.)

[Gru66] L. Gruson. *Théorie de Fredholm p-adique*. Bulletin de la Société Mathématique de France, vol. 94, pages 67–95, 1966. (Cité en page 20.)

[Har77] R. Hartshorne. Algebraic Geometry, volume 52 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1977. (Cité en page ii.)

[Hub94] R. Huber. *A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties*. Mathematische Zeitschrift, vol. 217, pages 513–551, 1994. (Cité en page i.)

[MP21] M. Maculan et J. Poineau. *Notions of Stein spaces in non-Archimedean geometry*. Journal of Algebraic Geometry, vol. 30, pages 287–330, 2021. (Cité en page 40.)

[Neu95] J. Neukirch. Algebraic Number Theory, volume 322 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1995. (Cité en pages 4 et 6.)

[PL22] J. Poineau et T. Lemanissier. *Espaces de Berkovich sur* $\mathbf{Z}$ *: catégorie, topologie, cohomologie*. prépublication, 2022. (Cité en pages 29 et 39.)

[Poi10] J. Poineau. *Raccord sur les espaces de Berkovich*. Algebra and Number Theory, vol. 4, no. 3, pages 297–334, 2010. (Cité en pages 39, 40 et 42.)

[Poi13] J. Poineau. *Les espaces de Berkovich sont angéliques*. Bulletin de la Société Mathématique de France, vol. 141, no. 2, pages 267–297, 2013. (Cité en page 20.)

[Ray74] M. Raynaud. *Géométrie rigide d'après Tate, Kiehl...* Mémoires de la Société Mathématique de France, vol. 39-40, pages 319–327, 1974. (Cité en page i.)

[Ser56] J.-P. Serre. *Géométrie algébrique et géométrie analytique*. Annales de l'institut Fourier, vol. 6, pages 1–42, 1956. (Cité en pages i et 39.)

[Sta23] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. `https://stacks.math.columbia.edu`, 2023. (Cité en pages 32 et 41.)

[Tat71] J. Tate. *Rigid Analytic Spaces*. Inventiones mathematicae, vol. 12, pages 257–289, 1971. (Cité en page i.)

[Tem05] M. Temkin. *A new proof of the Gerritzen-Grauert theorem*. Mathematische Annalen, vol. 333, pages 261–269, 2005. (Cité en page 20.)

[Wed16] T. Wedhorn. Manifolds, Sheaves, Cohomology. Springer Studium Mathematik – Master. Springer, 2016. (Cité en page ii.)

[Wer19] J. Werner. Coherent Sheaves on Non-Archimedean Spaces. Master's thesis, Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 2019. `https://homepages.uni-regensburg.de/~wej20488/`. (Cité en pages ii, 27, 28, 32, 33 et 39.)