

# Théorème du dénouement et lemme de Dehn

Luc Champignon et Tristan Pierre-Louis  
Encadré par Olivier Benoist

April 2023

# 1 Introduction

On s'intéressera ici au théorème du dénouement, énoncé dans le livre [11]. Ce théorème concerne les *nœuds* de  $\mathbb{S}^3$ , en particulier une façon de déterminer si ils sont triviaux. On utilisera des bases de géométrie différentielle et de topologie algébrique.

**Definition 1.1.** Un *nœud* (lisse) dans une variété différentielle  $X$  est une partie  $K$  qui est difféomorphe à  $\mathbb{S}^1$ <sup>1</sup>. Deux nœuds  $K$  et  $K'$  sont dit *équivalents* si il existe un difféomorphisme de  $X$  dans  $X$  qui envoie  $K$  sur  $K'$ .

**Definition 1.2.** Un nœud dans  $\mathbb{S}^3$  est dit *trivial* si il est équivalent à l'inclusion canonique de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{S}^3$ .

On remarque que le groupe fondamental ( $\pi_1$ ) du complémentaire d'un nœud est un invariant par l'équivalence de nœuds, donc défini à équivalence près. Ceci nous permet d'énoncer le théorème :

**Théorème 1.3.** (*Théorème du dénouement*) *Un nœud  $K$  dans  $\mathbb{S}^3$  est trivial si et seulement si  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K) = \mathbb{Z}$*

Le sens direct se résout sans difficulté majeure : A l'aide du théorème de Van Kampen, on montre que  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ . Par functorialité de  $\pi_1$ , on a que, si  $K$  est trivial,  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K) = \mathbb{Z}$ .

La première partie se concentrera sur la preuve de la réciproque. Celle-ci est un cas particulier d'une question beaucoup plus large, celle de trouver un invariant algébrique complet (c'est à dire déterminant un espace topologique à homéomorphisme ou homotopie près).

Ici, le groupe fondamental du complémentaire d'un nœud  $N$  dans  $\mathbb{S}^3$  est un invariant algébrique assez fort pour déterminer si celui-ci est trivial, c'est à dire caractériser  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathbb{S}^1$  parmi les complémentaires de nœud à équivalence près. Le groupe fondamental du complémentaire d'un nœud n'est pas un invariant algébrique complet dans le cas général. Le théorème du dénouement souligne donc la spécificité du cas du nœud trivial.

La preuve du sens réciproque du théorème nécessite entre autres le lemme de Dehn. La deuxième partie se consacrera à sa preuve.

**Théorème 1.4** (Lemme de Dehn). *Soit  $M$  est une 3-variété lisse à bord orientable. Si on a un plongement  $f$  de  $\mathbb{S}^2$  dans  $\partial M$  tel que  $f(\mathbb{S}^2)$  soit homotopiquement trivial dans  $M$ , alors on a  $g$  un plongement de  $\mathbb{D}^2$  dans  $M$  tel que  $g|_{\partial \mathbb{D}^2} = f$ .*

La particularité de ce lemme est que l'on déduit d'une hypothèse purement homotopique une conséquence géométrique, l'existence d'un plongement de  $\mathbb{D}^2$  borné par  $f$ .

---

1. comme  $\mathbb{S}^1$  est compact, cette définition est équivalente à définir les nœuds comme des plongements de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{S}^3$ , qui est souvent utilisée dans la littérature

Ce résultat a été énoncé pour la première fois par Max Dehn dans [3] en 1910. Cependant, la preuve donnée par Dehn était fautive comme montré par Helmut Kneser dans [7] (page 230) en 1929. Le lemme a été prouvé pour de bon par Christos Papakyriakopoulos dans [10] en 1957. Dans la partie consacrée à sa preuve, nous nous appuyerons sur la démonstration donnée par Hatcher dans [4].

## 2 Théorème du dénouement

### 2.1 Introduction

Cette première partie a pour but de démontrer le théorème du dénouement. On procède en trois étapes. On montre en premier quelques propriétés des voisinages tubulaires qui nous serviront d'outils pour démontrer le théorème du dénouement. On établit ensuite une première caractérisation du nœud trivial qui n'utilise pas le lemme de Dehn. On démontre le théorème du dénouement à proprement dit.

### 2.2 Voisinages tubulaires

Cette partie est inspirée du livre de Hirsch (chapitre 4) [6]. Nous allons commencer par exposer un outil qui sera utile par la suite : les voisinages tubulaires.

**Definition 2.1.** Soit  $M \subset N$  une sous-variété. Un voisinage tubulaire de  $M$  est la donnée d'un fibré vectoriel  $(p, E, M)$  et un plongement  $f : E \rightarrow V$  tel que  $f|_M = id_M$  où  $M$  est identifié à la section nulle et  $f(E)$  est un voisinage de  $M$  dans  $V$ . Si  $f$  n'est définie que sur un voisinage  $U$  de la section nulle, on dit que  $(f, U, (p, E, M))$  est voisinage tubulaire partiel.

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 2.2.** (*existence des voisinages tubulaires*)

*Soit  $M \subset \mathbb{R}^n$  une sous variété (sans bord) lisse. Alors  $M$  possède un voisinage tubulaire.*

*Remarque 2.3.* Ce théorème se généralise à n'importe quelle sous-variété lisse.

Pour cela, On commence par démontrer la proposition suivante :

**Proposition 2.4.** *Soit  $M \subset \mathbb{R}^n$  une sous variété (sans bord) lisse. Alors  $M$  possède un voisinage tubulaire partiel.*

*Démonstration.* On pose  $E = \{(x, y) \in M \times \mathbb{R}^n : y \in T_x^\perp\}$ ,  $p : E \rightarrow M$  la projection sur la première coordonnée et

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}^n; (x, y) \rightarrow x + y$$

. On remarque que  $f$  est injective sur la section nulle et que sa différentielle  $y$  est injective. Par le théorème d'inversion locale,  $f$  est une immersion sur un voisinage de la section nulle. On conclut grâce au lemme suivant.  $\square$

**Lemme 2.5.** *Une immersion  $f : M \rightarrow N$   $C^1$ , propre et injective sur un fermé  $K$  de  $M$  est injective sur un voisinage de  $K$ .*

*Démonstration.* Comme l'application  $f$  est une injection, pour tout  $x \in K$  il existe un voisinage ouvert  $V_x$  de  $x$  sur lequel  $f$  est injective. La famille  $(V_x \cap K)$  est un recouvrement de  $K$ . On veut en extraire un recouvrement localement fini. Soit  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite exhaustive de compacts de  $M$ . Soit  $K'_j = K_j \setminus \text{Int}(K_{j-1})$  et  $W_j = \text{Int}(K_{j+1}) \setminus K_{j-1}$ , donc  $V_j$  est compact,  $W_j$  est ouvert et  $V_j \subset W_j$ . Recouvrons le compact  $V_j$  par un nombre fini  $n_j$  d'éléments  $(A_{j,i})_{1 \leq i \leq n_j}$  de  $(V_x)$ . Ainsi la famille des  $(A_{j,i} \cap W_j)_{j \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n_j} = (B_j)_{j, i \in \mathbb{N}}$  recouvre  $\bar{M}$ . En outre l'intersection  $W_{j'} \cap W_j$  est vide dès que  $|j' - j|$  est strictement supérieur à 2, donc l'intersection  $A_{j,i} \cap A_{j',i'}$  est vide dès que  $|j' - j|$  est strictement supérieur à 2. La famille  $(B_j)_{j, i \in \mathbb{N}}$  est donc localement finie et  $f$  est injective sur chaque  $B_j$ . Soit  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  un recouvrement tel que si  $U_i$  intersecte  $U_j$  alors il existe un  $n$  tel que  $U_i \cup U_j \subset B_n \setminus f^{-1}(f(K \setminus B_n))$ . Enfin on pose  $O_1 = U_1$  et  $O_n = U_n \setminus \cup_{i \in I_n} f^{-1}(f(U_i))$  avec  $I_n = \{1 \leq i \leq n-1 \mid O_n \cap O_i = \emptyset\}$ . Alors  $O = \cup_{n \in \mathbb{N}} O_n$  est un voisinage de  $K$  sur lequel  $f$  est injective. En effet si  $f(x) = f(y)$ , par construction il existe  $n, n' \in \mathbb{N}$  tels que  $x \in O_n$  et  $y \in O_{n'}$  avec  $O_n$  et  $O_{n'}$  d'intersection non vide. Donc il existe un  $U_i$  tel que  $x, y \in U_i$ . comme  $f$  est injective sur  $U_i, x = y$ . Ainsi  $f$  est injective sur  $V$ .  $\square$

*Démonstration.* (démonstration du théorème d'existence des voisinages tubulaires) Soit  $(f, U, (p, E, M))$  un voisinage tubulaire partiel. Pour  $x \in M$ , on note  $E_x$  la fibre au dessus de  $x$  et  $U_x = U \cap E_x$ . On construit  $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$  lisse tel que pour tout  $y \in E_x$ , si  $\|y\| \leq \rho(x)$  alors  $y \in U$  et  $\rho(y) > 0$  pour tout  $y \in M$ . On procède pour cela de la manière suivante : pour tout  $x \in M$ , on fixe  $\epsilon_x > 0$  tel que  $B(x, \epsilon_x) \subset f(U)$ . Soit  $(\chi_x)$  une partition de l'unité de  $M$  subordonnée au recouvrement  $B(x, \epsilon_x)$ . Soit  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  lisse dont le support est exactement le disque unité et  $\alpha(y) \leq 1 - \|y\|$  sur le disque unité. On remarque que  $\rho(y) = \sum \chi_x(y) \epsilon_x \alpha(y - x)$  convient. Soit  $\lambda : [0, +\infty[ \rightarrow [0, 1]$ , on pose

$$\begin{aligned} h : E &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto \rho(p(y)) \lambda(\|y\|) \|y\|^{-1} y \end{aligned}$$

Alors  $h(E) \subset U$  donc  $(f \circ h, p, E, M)$  est un plongement.  $\square$

**Corollaire 2.6.** *Soit  $M \subset \mathbb{S}^3$  une sous variété lisse difféomorphe à  $\mathbb{S}^1$ , alors il existe  $V$  voisinage de  $M$  rétracte par déformation forte et  $\phi$  difféomorphe de  $V$  dans  $M \times \mathbb{D}^2$  tel que  $M$  soit envoyée sur  $M \times \{0\}$ .*

*Démonstration.* On commence par montrer que tout fibré vectoriel  $E$  orientable au dessus de  $\mathbb{S}^1$  est trivial. En effet se donner un fibré vectoriel de  $\mathbb{S}^1$  revient à se donner un fibré vectoriel du segment  $[0, 1]$  et une matrice  $M \in GL_n^+(\mathbb{R})$  (car le fibré est orientable). Comme  $GL_n^+(\mathbb{R})$  est connexe par arcs, il existe  $\gamma$

un chemin de l'identité à  $M$ . Or tout fibré au dessus d'un segment est trivial<sup>2</sup>. Alors  $(x, t) \rightarrow \gamma(t)x$  est une trivialisation du fibré.

Soit  $(f, (p, E, M))$  un voisinage tubulaire de  $M$ . On pose  $V = \{(x, f(y)) : x \in M \text{ et } y \in E_x \text{ avec } \|y\| \leq 1\}$ ,  $\phi : V \rightarrow M \times \mathbb{D}^2; (x, f(y)) \rightarrow (x, y)$  (bien défini car  $f$  est injective et que le fibré est trivial). On remarque que

$$\begin{aligned} f : V \times [0, 1] &\longrightarrow V \\ ((x, f(y)), t) &\longmapsto (x, f(ty)) \end{aligned}$$

est un rétracte par déformation.

□

### 2.3 Une caractérisation du nœud trivial

Dans cette partie, nous allons établir une caractérisation du nœud trivial qui nous sera utile par la suite. Pour cela nous utiliserons le théorème suivant.

**Théorème 2.7.** (*Théorème de Schoenflies généralisé*)

Soit  $h$  un plongement de  $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$  dans  $\mathbb{S}^n$ , alors la fermeture de chaque des 2 composantes connexes du complémentaire de  $h(\mathbb{S}^{n-1} \times \{1/2\})$  est homéomorphe à  $\mathbb{D}^n$ .

Le lecteur pourra trouver une démonstration à [2] ou [8] ainsi qu'un mémoire à ce sujet [1].

**Definition 2.8.** Un plongement  $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$  est dit plat si il existe un voisinage  $U$  de  $\mathbb{D}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  tel que  $f$  peut s'étendre en un plongement  $\hat{f} : U \rightarrow \mathbb{S}^3$ . Une partie  $D$  de  $\mathbb{S}^3$  est un disque plat si c'est l'image de  $\mathbb{D}^2$  par un plongement plat.

**Théorème 2.9.** (*caractérisation du nœud trivial*)

Un nœud  $K$  dans  $\mathbb{S}^3$  est trivial si et seulement si  $K$  est le bord d'un disque plat.

*Démonstration.* Soit  $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  qui envoie  $K$  sur  $\mathbb{S}^1$ ,  $N = (0, 0, 0, 1)$  le pôle nord de  $\mathbb{S}^3$  de tel sorte que  $P_N$  la projection stéréographique par rapport à  $N$  envoie  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$  sur  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ .  $f^{-1} \circ P_N^{-1} : \mathbb{D}^2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  est un plongement qui s'étend en  $f^{-1} \circ P_N^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  qui est encore un plongement et  $\partial f^{-1} \circ P_N^{-1}(\mathbb{D}^2) = f^{-1} \circ P_N^{-1}(\partial \mathbb{D}^2) = K$  donc  $K$  est le bord d'un disque plat.

Réciproquement : Soit  $U$  un voisinage de  $\mathbb{D}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{S}^3$  tel que  $\partial f(\mathbb{D}^2) = f(\mathbb{S}^1) = K$ . Quitte à réduire  $U$ , on peut supposer que  $U$  est homéomorphe à  $\mathbb{D}^3$  et que sa frontière  $\partial U$  possède un voisinage tubulaire. On restreint ce voisinage tubulaire à un voisinage  $V$  homéomorphe à  $\partial U \times [0, 1]$  via un homéomorphisme  $h$  qui envoie  $\partial U$  sur  $\partial U \times \{1/2\}$ . D'après le théorème de Schoenflies généralisé,  $f \circ h^{-1}(\partial U \times \{1/2\})$  et  $P_N \circ h^{-1}(\partial U \times \{1/2\})$  bordent

<sup>2</sup>. Cela ce montre en considérant la borne supérieur des  $t$  tel que le fibré est trivial sur  $[0, t]$ . On remarque que  $t$  ne peut pas être strictement inférieur à 1 car un fibré est localement trivial.

chacun 2 composantes connexes dont la fermeture est homéomorphis à  $\mathbb{D}^3$ . Par le lemme d'Alexander, on peut prolonger  $P_N^{-1} \circ f^{-1}$  en un homéomorphisme de  $\mathbb{S}^3$  dans  $\mathbb{S}^3$  qui envoie  $K$  sur  $\mathbb{S}^1$ . On régularise ensuite pour obtenir une fonction  $C^\infty$ .  $\square$

**Lemme 2.10.** (*Lemme d'Alexander*)

Une fonction continue  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  peut se prolonger en  $\hat{f} : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  continue.

*Démonstration.* Pour  $x \in \mathbb{S}^n$  et  $t \in [0, 1]$ , on pose  $\hat{f}(tx) = tf(x)$ .  $\square$

*Remarque 2.11.* Le théorème se généralise en dimension supérieure. On pourra voir [11] page 36.

*Remarque 2.12.* L'hypothèse selon laquelle le disque est plat est importante. Dans [11] à la page 78, on trouve un exemple de nœud non trivial qui borde un disque (qui n'est pas plat) construit à l'aide de la sphère cornue d'Alexander.

## 2.4 Théorème du dénouement

**Lemme 2.13.**  $H_1(\mathbb{T}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$  et 2 générateurs sont donné par  $t \rightarrow (e^{2i\pi t}, 1)$  et  $t \rightarrow (1, e^{2i\pi t})$  (en voyant  $\mathbb{T}$  dans  $\mathbb{C}^2$ ).

*Démonstration.* On utilise le morphisme de Hurewicz [5, thm 4.3.2].  $\square$

**Théorème 2.14.** (*Théorème du dénouement*) *Tn nœud  $K$  dans  $\mathbb{S}^3$  est trivial si et seulement si  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K) = \mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Soit  $F$  un voisinage de  $K$  et  $\phi : F \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$  fournie par le corollaire du théorème d'existence des voisinage tubulaire. On pose  $U = \phi^{-1}(\mathbb{S}^1 \times \text{Int}(\mathbb{D}^2))$  et  $V = \mathbb{S}^3 \setminus \phi^{-1}(\mathbb{S}^1 \times D(0, 1/2))$ . La suite exacte de Mayer-Vietoris permet d'écrire :

$$0 \longrightarrow H_1(U \cap V, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi} H_1(U, \mathbb{Z}) \oplus H_1(V, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

En effet,  $U \cap V = \mathbb{S}^3$  et  $H_2(\mathbb{S}^3) = H_1(\mathbb{S}^3) = 0$ . Comme  $U \cap V$  se rétracte par déformation sur  $\phi^{-1}(\mathbb{S}^1 \times S(0, 2/3))$ , par le lemme 2.13  $H_1(U \cap V)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ . Ce lemme nous fournit de plus une base donnée par  $a_1 : t \rightarrow \phi^{-1}(e^{2i\pi t}, 2/3)$  et  $a_2 : t \rightarrow \phi^{-1}(1, 2/3e^{2i\pi t})$ . Par ailleurs,  $U$  se rétracte sur  $K$  donc  $H_1(U)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . Soit  $b_1$  un générateur de  $H_1(U)$ . Quitte à changer  $b_1$  par  $-b_1$ , on peut supposer que  $b_1$  et  $a_1$  sont homotopes. Enfin  $V$  se rétracte sur  $\mathbb{S}^3 \setminus K$  donc  $H_1(V)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  car  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K) = \mathbb{Z}$ . Soit  $b_2$  un générateur de  $H_1(V)$ . On note

$$A = \text{Mat}_{((a_1, a_2), (b_1, b_2))}(\psi) = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$$

Comme  $a_1$  est homotope à  $b_1$  dans  $U$  et que  $a_2$  est homotopiquement trivial dans  $U$ , on a  $a = 1$  et  $b = 0$ .  $\psi$  est bijective donc  $\det(A) = d \in \{\pm 1\}$ . Quitte

à changer  $b_2$  en  $-b_2$ , on peut supposer que  $d = 1$ . Ainsi  $A \begin{Bmatrix} 1 \\ -c \end{Bmatrix} = 0$ . On a donc  $f : t \rightarrow \phi^{-1}(e^{2i\pi t}, 2/3e^{-2ci\pi t})$  homologiquement triviale dans  $V$ . Comme  $H_1(V, \mathbb{Z})$  et  $\pi_1(V)$  sont isomorphes,  $f$  est homotopiquement triviale dans  $V$ . Soit  $H$  une homotopie entre  $f$  et une constante dans  $V$ .

On applique le lemme de Dehn (3.26) à  $H$  et  $(V, \partial V)$  pour obtenir  $G$ . On pose

$$g: \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^3$$

$$x \longmapsto \begin{cases} G(2x) & \text{si } \|x\| \leq 1/2 \\ \phi^{-1}(x/\|x\|, (1 - 2\|x\|)(x/\|x\|)^{-c}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On applique alors la caractérisation du nœud trival à  $g$ . Le disque  $g(\mathbb{D}^2)$  est plat. En effet, on peut construire un voisinage de  $g(\mathbb{D}^2)$  en recollant  $F$  avec un voisinage tubulaire de l'image de  $G$  dans  $(V, \partial V)$ . On pourra se référer au livre de Hirsch [6] page 115 théorème 6.4 pour construire un voisinage tubulaire dans une variété à bord.

Réciproquement : On montre à l'aide du théorème de Van Kampen que  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ . Par functorialité de  $\pi_1$ , on a que  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K) = \mathbb{Z}$ .  $\square$

### 3 Lemme de Dehn

#### 3.1 Énoncé

On va dans cette partie prouver le théorème de la boucle (Théorème 3.1) duquel découle le lemme de Dehn (Théorème 3.26).

**Théorème 3.1** (Théorème de la boucle). *Soit  $M$  une variété lisse à bord, orientable de dimension 3. Soit  $f : (\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2) \rightarrow (M, \partial M)$  une immersion telle que le chemin  $f|_{\partial\mathbb{D}^2}$  est non homotopiquement trivial dans  $\partial M$ . Alors il existe une injection  $g : (\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2) \rightarrow (M, \partial M)$  telle que le chemin  $g|_{\partial\mathbb{D}^2}$  est non homotopiquement trivial dans  $\partial M$ .*

*Remarque 3.2.* Le théorème reste vrai si  $M$  est non orientable (cf [4]).

On rappelle au passage la définition de variété à bord.

**Definition 3.3.** Un espace  $M$  séparé et à base dénombrable d'ouverts est une variété à bord de dimension  $n$  si pour tout  $x \in M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $M$ , un ouvert  $V$  du demi espace  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$  et un homéomorphisme  $\varphi : U \rightarrow V$ . On dit alors que  $(U, \varphi)$  est une carte et on définit les mêmes notions d'atlas et de changements de carte que pour une variété topologique. Pour les variétés *lisses*, les changements de cartes sont  $C^\infty$ . De plus, on notera  $\partial M$  le bord de  $M$  défini comme l'ensemble des points  $x \in M$  tels qu'il existe une carte  $\varphi$  vérifiant  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ . On notera également  $\text{Int}(M) = M \setminus \partial M$  l'intérieur de  $M$ .

La preuve du lemme de Dehn suivra celle donnée dans [4]. Elle consiste à ramener le problème au cas particulier où  $M$  n'admet pas de revêtement double et à traiter ce cas là par des méthodes homologiques. Elle se déroulera donc en trois parties : la construction d'une tour de revêtements doubles de  $M$ , la résolution du cas sans revêtement double, et enfin la descente de la tour de revêtements.

#### 3.2 Construction d'une tour de revêtement doubles

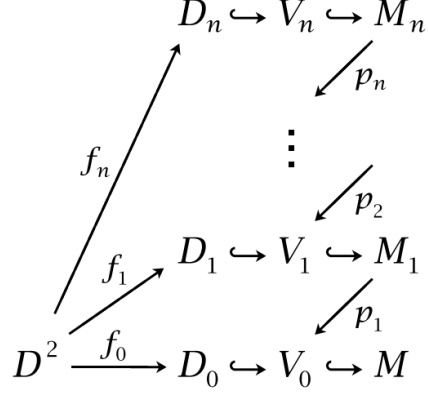
On travaillera ici dans le cadre affine par morceaux.

Pour cela, on triangule  $M$  par [9, théorème 10.6] avec une triangulation  $T$ . Le théorème d'approximation simpliciale dans [5, théorème 2C.1] nous fournit alors une triangulation  $T_D$  de  $\mathbb{D}^2$  et une approximation  $f_0 : (\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2) \rightarrow (M, \partial M)$  de  $f$  homotope à  $f$ , affine par morceaux. Le chemin  $f_0|_{\partial\mathbb{D}^2}$  est alors non homotopiquement trivial dans  $\partial M$ . Dans la preuve qui suit, on fixera  $f_0$  et  $T_D$ .

**Proposition 3.4.** *Il existe une tour de revêtements finie comme à la figure 3.4.*

*Pour tout  $i$ ,  $D_i = f_i(\mathbb{D}^2)$ ,  $V_i$  est une 3-variété à bord compacte voisine de  $D_i$  telle que  $D_i$  est un rétracte par déformation de  $V_i$  et  $(M_{i+1}, p_i)$  est un revêtement double de  $V_i$ . Enfin,  $V_n$  n'admet pas de revêtement double non trivial.*

FIGURE 1 – la tour de revêtements



*Démonstration.* On note  $D_0 := f_0(\mathbb{D}^2)$ . Le lemme 3.5 nous fournit un voisinage  $V_0$  tel que  $D_0$  est rétracte par déformation de  $V_0$ . En particulier,  $V_0$  est connexe par arcs car  $D_0$  l'est. On construit les étages de la façon suivante : Tant que  $V_i$  admet un revêtement double non trivial  $p_i : M_{i+1} \rightarrow V_i$ , on relève  $f_i$  en  $f_{i+1}$  (possible par simple connexité de  $\mathbb{D}^2$ ). On pose de même  $D_{i+1} := f_{i+1}(\mathbb{D}^2)$  et  $V_i$  un voisinage de  $D_{i+1}$  construit de la même façon. Le lemme 3.8 permet de montrer que la tour possède un nombre fini d'étages.  $\square$

**Lemme 3.5** (existence de  $V_i$ ). *Soit  $M$  une variété compacte triangulée de dimension  $n$ ,  $D$ , une sous variété de dimension  $n - 1$ , alors on a un voisinage  $V$  de  $D$  une  $n$ -variété à bord telle que  $D$  rétracte par déformation de  $V$*

Dans la démonstration, on utilise la notion de subdivision barycentrique.

**Definition 3.6** (Subdivision barycentrique). Soit  $M$  une variété de dimension  $n$ ,  $T$  une triangulation de  $M$ . On note  $\Delta^n$ , le simplexe de dimension  $n$ .

La *subdivision barycentrique* de  $\Delta^n$  est obtenue récursivement sur  $n$  comme l'ensemble des simplexes dont la base est un simplexe de la subdivision barycentrique d'une face  $\Delta^{n-1}$  et dont le sommet est le barycentre de  $\Delta^n$ .

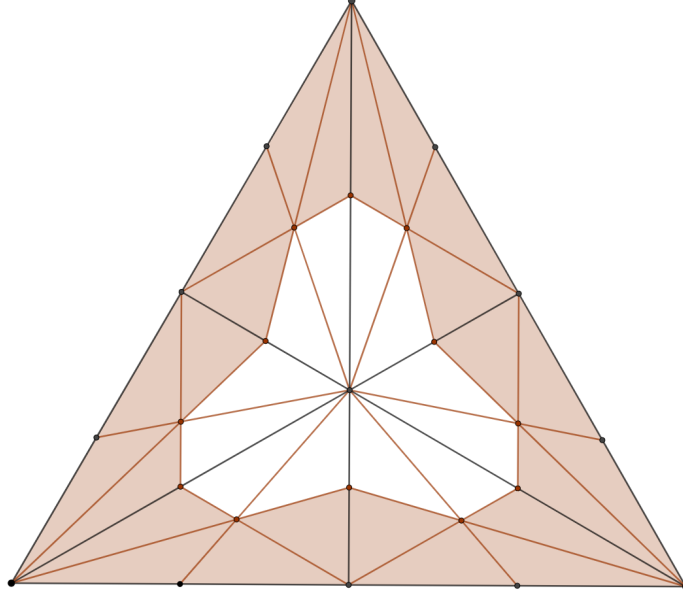
La *subdivision barycentrique* de  $T$  est la triangulation

$$T^1 := \bigcup_{t \in T} \{\text{subdivision barycentrique de } t\}$$

On peut itérer cette construction  $k$  fois, on obtient alors la  $k$ -*subdivision barycentrique* de  $T$ , notée  $T^k$  (voir figure 2).

*Démonstration du lemme 3.5.* On pose  $T^2$  la deuxième division barycentrique de la triangulation  $T$  de  $M$ . On pose  $\Sigma$  l'ensemble des simplexes de  $T^2$  qui rencontrent  $D$ . On note  $V$  l'union des simplexes de  $\Sigma$ . Montrons que  $V$  convient. C'est bien une 3-variété compacte à bord. Construisons un rétracte par déformation de  $V$  sur  $D$ .

FIGURE 2 – 2-subdivision barycentrique de  $\Delta^2$  et l'ensemble des simplexes qui rencontrent  $\partial\Delta^2$



On considère donc l'ensemble  $S$  des sommets de simplexes de  $\Sigma$  qui ne sont pas dans  $D$ . Ces sommets ne sont ni des sommets de  $T$  ni des sommets de  $T^1$ .

En effet, soit un sommet  $s$  de  $T$  n'est pas dans  $D$ . On note  $T_s$  les sous-simplexes de dimension  $< n$  de  $T$  qu'il touche. Les simplexes de  $T_s$  ne sont alors pas des simplexes ou sous-simplexes de  $D$ . En particulier, leur intérieur ne rencontre pas  $D$ . Soit  $\sigma$  un simplexe de  $T^1$  que  $s$  touche. On a  $\sigma \subset \bigcup_{t \in T_s} \text{Int}(t) \cup \{s\}$  par construction de  $T^1$ . Donc  $\sigma \cap D = \emptyset$ . Or chaque simplexe de  $T^2$  qui touche  $s$  est inclus dans un de  $T^1$  qui touche  $s$ , donc ne touche pas  $D$ . De même, si un sommet de  $T^1$  n'est pas dans  $D$ , tous les simplexes de  $T^2$  qu'il touche sont d'intersection vide avec  $D$  par construction de la subdivision barycentrique.

On note  $\Sigma_s$  les simplexes de  $\Sigma$  qui touchent  $s$ . On choisit, pour chacun des sommets  $s$  de  $S$ , un segment reliant  $s$  à  $D$  dans un simplexe de  $\Sigma_s$ . On projette continuellement les sommets de  $S$  sur  $D$  le long de ces segments (et donc on modifie continuellement les autres points de  $V$  comme barycentres pondérés des sommets de leur simplexe de  $\Sigma$ ).

Montrons que cette opération est bien un rétracte de  $V$  dans  $D$ .

Pour tout  $s \in S$ , on a un unique simplexe de dimension maximale  $t_s$  de  $D$  tel que, pour tout  $\sigma \in \Sigma_s$ ,  $\sigma$  ne rencontre  $D$  que sur  $t_s$ .

En effet, par construction de  $T^2$ , le sommet  $s$  est ajouté à  $T^2$ . Il est donc le barycentre des sommets du sous-simplexe  $t^k$  de  $T^1$  de dimension  $k$ . Or, par le lemme 3.7  $t_k$  touche au plus un simplexe de  $T$ , de chaque dimension  $i < n$ , incluant tous ceux de dimension inférieure. Les sous-simplexes de  $D$  étant des simplexes de  $T$  de dimension  $< n$ , l'union des simplexes de  $\Sigma_s$ , incluse dans  $t^k$ ,

ne rencontre au plus qu'un sous-simplexe de  $D$  de chaque dimension, donc un de dimension maximale, noté  $t_s$ , incluant tous les autres.

Chaque sommet  $s$  est donc projeté dans  $t_s$ . Soit  $\sigma \in \Sigma$ ,  $\sigma$  ne rencontre  $D$  que sur une de ses faces  $t$  (car  $\sigma \in T^2$ ). Chaque sommet de  $\sigma$  est donc projeté sur  $t$ , donc  $\sigma$  est projeté sur  $t$  donc sur  $D$ . On a bien construit le rétracte voulu.

De plus, cette construction ne perturbe pas les points de  $D$ , on a donc même un rétracte par déformation.  $\square$

**Lemme 3.7.** *Si  $M$  est une variété de dimension  $n$  à bord, triangulée par  $T$ . On note  $T^1$  la subdivision barycentrique de  $T$ . Si  $t_k$  est un sous simplexe de dimension  $k$  d'un simplexe  $\sigma$  de  $T^1$ ,  $t_k$  touche au plus un sous-simplexe  $t_k^i$  de dimension  $i < k$  de  $T$ . De plus  $\forall j < i$ ,  $t_k^j \subset t_k^i$  (sous réserve d'existence).*

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $n$ . Le cas  $n = 0$  est trivial.

On suppose qu'on a la propriété au rang  $n$ . Soit une variété  $M$  de dimension  $n + 1$ , à bord, triangulée par  $T$ . On note  $T^1$  la subdivision barycentrique de  $T$ . Soit  $t_k$  un sous simplexe de dimension  $k$  d'un simplexe  $\sigma$  de  $T^1$ . Le simplexe  $\sigma$  est inclus dans un simplexe  $\omega$  de  $T$ .

Le simplexe  $\sigma$  rencontre alors  $\omega$  sur une et une seule de ses faces par construction de la subdivision barycentrique. On la note  $\sigma'$ . La face  $\sigma'$  de  $\sigma$  est incluse dans une face  $\omega'$  de  $\omega$ . Tous les sous-simplexes de  $T$  de dimension  $< n + 1$  que  $t_k$  intersecte sont alors inclus dans  $\omega'$ . Le simplexe  $\omega'$  est une sous-variété à bord de  $M$  de dimension  $n$ .

On peut alors appliquer la propriété au rang  $n$  pour la variété à bord de dimension  $n$   $\omega'$  triangulée par  $T'$  la restriction de  $T$  à  $\omega'$  sur le sous-simplexe  $t_k \cap \sigma'$  de  $\sigma' \in T^1$ . Si  $k < n + 1$ , on a fini la construction.

Si  $k = n + 1$ , on a  $t_k = \sigma$ . On pose alors pour finir  $t_k^n := \omega'$  qui contient tous les autres  $t_k^i$  par construction.  $\square$

**Lemme 3.8.** *Dans la construction de la tour de la proposition 3.4, on arrive en un nombre fini d'étapes à  $V_n$  sans revêtement double.*

*Démonstration.* On considère le revêtement double de  $p_i^{-1}(D_{i-1})$  dans  $D_{i-1}$ . On obtient des structures simpliciales sur  $p_i^{-1}(D_{i-1})$  et  $D_{i-1}$  en relevant celles sur  $D_0$ . Comme  $p_i$  est un revêtement double, on a une permutation  $\tau_i : p_i^{-1}(D_{i-1}) \rightarrow p_i^{-1}(D_{i-1})$  qui permute les deux préimages de chaque point de  $D_{i-1}$ . Par construction de la structure simpliciale,  $\tau_i$  est un isomorphisme simplicial.

Comme  $M_i$  est connexe par arcs  $p_i^{-1}(D_{i-1})$  l'est aussi. En effet relever le rétracte de  $V_{i-1}$  sur  $D_{i-1}$  donne un rétracte de  $M_i$  sur  $p_i^{-1}(D_{i-1})$ . Or par construction,  $p_i^{-1}(D_{i-1}) = D_i \cup \tau_i(D_i)$  donc, par connexité,  $D_i \cap \tau_i(D_i)$  est non vide. On a donc au moins un simplexe de  $D_i$  envoyé par  $\tau_i$  sur un autre simplexe de  $D_i$  donc  $D_i$  a strictement plus de simplexes que  $D_{i-1}$ .

Or le nombre de simplexes de  $D_i$  est borné par le cardinal de la triangulation  $T_D$  fixée de  $\mathbb{D}^2$ . La tour a donc une hauteur bornée.  $\square$

### 3.3 Cas où M n'admet pas de revêtement double

**Proposition 3.9.** *Le théorème de la boucle est vrai dans le cas où  $V_0$ , construit comme voisinage de  $f_0(\mathbb{D}^2)$  par la proposition 3.5, n'admet pas de revêtement double.*

*Démonstration.* Comme  $V_0$  n'a pas de revêtement double,  $\pi_1(V_0)$  n'a pas de sous groupe d'indice 2. On a donc par le lemme 3.10,  $H_1(\partial V_0, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0\}$ .

Or  $\partial V_0$  est de dimension 2, donc toutes ses composantes connexes sont des 2-sphères (classification des 2-variétés). Soit  $F$  la composante connexe de  $V_n \cap \partial M$  contenant  $f(\mathbb{D}^2)$ . Par le lemme 3.12, avec  $N$  le groupe trivial, sous groupe strict car  $f|\partial\mathbb{D}^2$  non homotopiquement trivial dans  $\partial M$ , on a bien  $g$  convenant.  $\square$

**Lemme 3.10.** *Soit  $V$  une variété connexe à bords. Si  $\pi_1(V)$  n'a pas de sous groupe d'indice 2,  $H_1(\partial V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0\}$*

*Démonstration.* On a la suite exacte en homologie relative

$$H_2(V, \partial V; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\partial V; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(V; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \quad (1)$$

On va montrer que le premier et le dernier terme sont triviaux. Le groupe  $H_1(V; \mathbb{Z})$  étant l'abélianisé de  $\pi_1(V)$ , l'hypothèse nous permet de déduire que

$$\text{Hom}(H_1(V; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0\} \quad (2)$$

Or, tous les éléments d'ordre pair de  $H_1(V; \mathbb{Z})$  sont envoyés sur 0 dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . On a donc

$$\text{Hom}(H_1(V; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(V; \mathbb{Z})_{/2}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \quad (3)$$

Par ailleurs,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est un corps, et  $H_1(V; \mathbb{Z})_{/2}$  est un  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  espace vectoriel donc isomorphe à son dual  $\text{Hom}(H_1(V; \mathbb{Z})_{/2}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Donc, par (3) et (2).

$$H_1(V; \mathbb{Z})_{/2}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0\} \quad (4)$$

La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

induit une suite exacte courte de complexes de chaînes donc une suite exacte longue d'homologie :

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(V, \mathbb{Z}) & \longrightarrow_e & H_1(V, \mathbb{Z}) & \longrightarrow_f & H_1(V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \longrightarrow_h & H_0(V, \mathbb{Z}) & \longrightarrow_g & H_0(V, \mathbb{Z}) \\ & & & & & & \parallel & & \parallel \\ & & & & & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{array} \quad (5)$$

Or ici  $g$  est le produit par 2, donc  $\text{Ker}(g) = 0$  donc  $h$  est nulle donc  $f$  est surjective. On a donc

$$H_1(V, \mathbb{Z})_{/Im(e)} = H_1(V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \quad (6)$$

Or  $e$  est le produit par deux donc  $Im(e)$  est l'ensemble des éléments d'ordre pair, donc

$$H_1(V, \mathbb{Z})_{/Im(e)} = H_1(V; \mathbb{Z})_{/2} \quad (7)$$

Donc donc  $H_1(V, \mathbb{Z})_{/Im(e)}$  est trivial par (4). Donc le dernier terme de la suite (1),  $H_1(V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , est trivial par (7).

Pour le premier terme, on admet que par la dualité de Poincaré (cf [5, théorème 3.43]) :

$$H_2(V_n, \partial V_n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^1(V_n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

Or par le théorème des coefficients universels,

$$H^1(V_n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = Hom(H_1(V; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

(2) et (1) nous permettent donc de conclure.  $\square$

**Lemme 3.11.** *Soit  $F$  une sous-variété à bord fermée connexe par arcs de  $\mathbb{S}^2$ . Alors  $\pi_1(F)$  est le groupe libre engendré par les cercles de son bord sauf un.*

*Démonstration.* On appelle trou une composante connexe de  $\mathbb{S}^2 \setminus F$ . Comme  $\mathbb{S}^2$  est compact, on a un nombre fini de trous. Pour voir cela, on recouvre  $\mathbb{S}^2$  des trous ouverts et d'une carte au voisinage de chaque point (ouverte) qui ne peut intersecter qu'un seul trou. En effet dans la carte,  $F$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$  par définition des variétés à bord. On en extrait un sous recouvrement fini. On a moins de trous que d'ouverts de ce recouvrement fini donc un nombre fini de trous.

Les trous étant des sous variétés connexes par arcs de  $\mathbb{S}^2$  dont le complémentaire est connexe par arcs, ils sont homéomorphes à  $\mathbb{D}^2$ . On procède par récurrence sur le nombre de trous.

Si on a 0 trous,  $F = \mathbb{S}^2$  donc  $\pi_1(F) = \{0\}$ . La propriété est bien vérifiée.

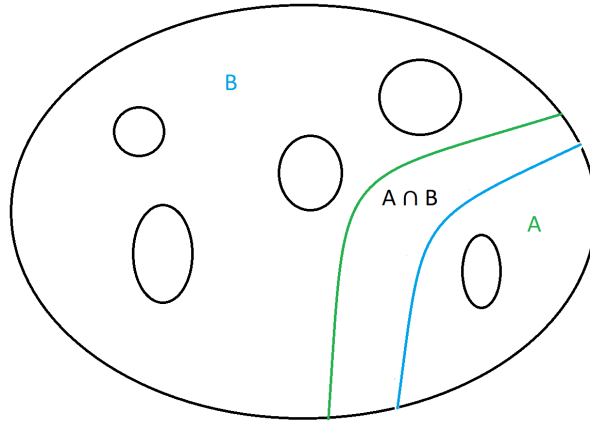


FIGURE 3 – séparation des trous(hérédité)

Si on a 1 trou ,  $F = \mathbb{D}^2$ , on a de même  $\pi_1(F) = \{0\}$ .

Si on a  $n+1$  trous où  $n > 0$ , on a une sous surface de  $\mathbb{D}^2$  à  $n$  trous. On sépare alors  $F$  en 2, une sous surface  $A$  de  $\mathbb{D}^2$  ne contenant qu'un seul trou et une  $B$  en contenant  $n-1$  comme ci-dessus (figure 3). Par récurrence, on a  $\pi_1(B)$  est  $\mathbb{Z}$  amalgamé à lui-même  $n-1$  fois. Comme  $A \cap B$  est simplement connexe, par le théorème de van Kampen,  $\pi_1(F)$  est  $\mathbb{Z}$  amalgamé à lui-même  $n$  fois. On a  $n-1$  générateurs dans  $B$  qui sont les bords des trous de  $B$ . Le  $n^{eme}$  générateur est le bord du trou de  $A$ , d'où la propriété au rang  $n+1$ .  $\square$

**Lemme 3.12.** *Si  $V$  est une 3-variété à bord telle que les composantes connexes de  $\partial V$  soient des sphères,  $F$  connexe par arcs  $\subset \partial V$ ,  $N$  un sous groupe normal strict de  $\pi_1(F)$ , alors on a  $[g] \in \pi_1(F) \setminus N$  tel que  $g$  borne un disque sans autointersections de l'intérieur de  $V$ .*

*Démonstration.*  $F$  est connexe par arcs donc  $F \subset A$ , où  $A$  est une composante connexe de  $\partial V$  donc une sphère. Par le lemme 3.11,  $\pi_1(F)$  est engendré par les cercles de son bord. Comme  $[f|_{\partial \mathbb{D}^2}] \notin N$ , on a un cercle de  $\partial F$  hors de  $N$ .

On le note  $g$ .  $A$  de étant une sphère,  $g$  borne un disque sans autointersections de  $A$ . Quitte à pousser légèrement ce disque vers  $V$  (l'intérieur ou l'extérieur de la sphère), on obtient bien le résultat voulu.  $\square$

### 3.4 Montée de la tour de revêtements

**Proposition 3.13.** *Sous les notations de la tour de revêtements construite à la proposition 3.4, on pose  $F_i := (p_1 \circ \dots \circ p_i)^{-1}(\partial M \cap f_0(\partial \mathbb{D}^2))$  et  $N_i := Ker(p_i \circ \dots \circ p_1)$  dans  $\pi_1(F_i)$ .*

*On a alors  $g_n : (\mathbb{D}^2, \partial \mathbb{D}^2) \rightarrow (V_n, \partial V_n)$  injective telle que  $g_n|_{\partial \mathbb{D}^2} \notin N_n$ .*

*Démonstration.* De la même façon que dans la proposition 3.9, les composantes connexes de  $\partial V_n$  sont des sphères. En effet,  $V_n$  n'a pas de revêtement double, donc  $\pi_1(V_n)$  n'a pas de sous groupe d'indice 2. Le lemme 3.10 nous donne donc  $H_1(\partial V_n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0\}$ . La classification des 2-variétés nous permet de conclure.

De plus,  $[f_n|_{\partial \mathbb{D}^2}] \notin N_n$  car  $[f_0|_{\partial \mathbb{D}^2}] = p_i \circ \dots \circ p_1([f_n|_{\partial \mathbb{D}^2}])$  est non triviale dans  $\pi_1(V_0 \cap \partial M)$ . En effet,  $[f_0|_{\partial \mathbb{D}^2}]$  étant non triviale dans  $\pi_1(\partial M)$  par hypothèse initiale sur  $f$ , elle ne l'est pas non plus dans  $\pi_1(V_0 \cap \partial M)$ .  $N_n$  est donc bien un sous groupe distingué strict de  $\pi_1(F_i)$ . On peut donc appliquer le lemme 3.12 qui nous fournit la fonction  $g_n$  désirée.  $\square$

### 3.5 Descente de la tour de revêtements

**Proposition 3.14.** *On reprend les notation introduites dans la construction de la tour de revêtements (proposition 3.4) et les  $F_i$ ,  $N_i$  de la proposition 3.13.*

*Si on a  $g_i : (\mathbb{D}^2, \partial \mathbb{D}^2) \rightarrow (V_i, \partial V_i)$  injective telle que  $g_i|_{\partial \mathbb{D}^2}$ , alors on a  $g_{i-1}$  vérifiant les mêmes propriétés au rang  $i-1$ .*

*Remarque 3.15.* Cette proposition conclut la preuve du théorème de la boucle

*Démonstration.* On considère l'application  $h_i := p_i \circ g_i$ . On a bien  $h_i|_{\partial\mathbb{D}^2} \notin N_{i-1}$  par construction de  $N_{i-1}$ .

Le lemme 3.16 nous fournit  $h'_i$  homotope à  $h_i$  telle que ses intersections soient en position générique. On replace dans la suite  $h_i$  par  $h'_i$ .

On note  $D$  l'ensemble des points doubles de  $h_i$ .  $D$  est alors une sous variété de  $\mathbb{D}^2$  de dimension 1 donc compacte donc ayant un nombre fini de composantes connexes (lemme 3.16). On a de plus une involution sans point fixe  $\tau$  sur  $D$  par le revêtement double  $p_i$ . Cette involution en induit une sur les composantes connexes de  $D$ .

Soit  $A$  une composante connexe de  $D$ . On a 2 cas, celui où  $A$  est un cercle et celui où  $A$  est un segment, dans les deux cas  $\tau(A)$  est homéomorphe à  $A$ . Si  $A$  est un cercle, le lemme 3.17 montre qu'on peut alors perturber  $h_i$  pour obtenir la bijectivité au voisinage de  $A$  et  $\tau(A)$  tout en gardant  $h_i \notin N_{i-1}$ . Si  $A$  est un segment, on peut faire la même opération grâce au lemme 3.23. On répète l'opération pour chaque composante connexe  $A$ .

L'application obtenue après ces perturbations convient.  $\square$

**Lemme 3.16.** *Soit  $M$  une variété lisse de dimension 3,  $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow M$  tel que tout point  $f$  a au plus deux préimages. On a alors  $f'$  holomorphe à  $f$  telle que :*

*L'auto intersection de l'image est une sous-variété à bord de dimension 1.*

*Les espaces tangents des deux feuilletés de l'intersection sont en position générique, c'est à dire non coplanaires.*

*Démonstration.* Ce résultat provient de [12, proposition 4.6.6]  $\square$

**Proposition 3.17** (cas du cercle). *Sous les notations de la proposition 3.14, si on a  $A$  un cercle de  $D$ , on a  $h'_i$  tel que  $h'_i|_{\partial\mathbb{D}^2} \notin N_{i-1}$*

*Démonstration.* On note  $B := \tau(A)$ ,  $C = h_i(A)$ . On note  $X$  une croix c'est à dire  $X = (]-1, 1[ \sqcup ]-1, 1[) / \{0 = 0\}$ . On a  $U_A, U_B$  des voisinages ouverts de  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{D}^2$ , ne rencontrant  $D$  que sur  $A$  et  $B$  respectivement. Ils sont alors homéomorphes à  $\mathbb{S}^2 \times ]-1, 1[$ . L'ensemble  $V = h_i(U_A \sqcup U_B)$  est un voisinage de  $C$  dans  $h_i(\mathbb{D}^2)$ . On le note  $V = [0, 1] \times X/R$  où  $R$  est une relation d'équivalence qui identifie  $X \times \{0\}$  et  $X \times \{1\}$  de façon continue bijective.

**Lemme 3.18.** *Les ensembles  $A$  et  $B$  sont disjoints.*

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde et on suppose que  $\tau(A) = A$ . Alors, comme  $A$  est un cercle et  $\tau|_A$  est une involution de  $A$  sans point fixe,  $\tau|_A$  est l'antipodie. On considère  $x \in A$  et  $y = \tau(x)$ . On note  $e_r^x, e_\theta^x$  les vecteurs usuels du repère polaire basé en  $x$ . Ils forment une base de  $T_x\mathbb{D}^2$ . On définit de même  $e_r^y, e_\theta^y$ .

On note  $A(t)$  le cercle  $A$  parcouru en sens direct à vitesse constante. On a  $d_x(h_i)(e_\theta^x) = d_x(h_i)(e_\theta^y)$  l'unique vecteur tangent au chemin  $h_i(A(t))$  en  $h_i(x)$ . De plus, comme  $h_i$  est en position générique,  $d_x(h_i)(T_x\mathbb{D}^2)$  et  $d_x(h_i)(T_y\mathbb{D}^2)$  sont non coplanaires dans  $T_{h_i(x)}V_{i-1}$ . Les vecteurs  $(d_x(h_i)(e_\theta^x), d_x(h_i)(e_r^x), d_x(h_i)(e_r^y))$  forment alors une base de  $T_{h_i(x)}V_{i-1}$ . On suppose quitte à changer l'orientation, qu'elle est directe. On la note  $B = (e_\theta, e_r^1, e_r^2)$ .

On va maintenant construire un lacet renversant l'orientation de  $V_{i-1}$ .

On suit un chemin continu  $\gamma$  partant de  $x$  faisant un demi tour du cercle  $A$ . Ce chemin envoie  $x$  sur  $y$  et  $y$  sur  $x$ . Le chemin  $h_i(\gamma)$  fait alors un tour complet de  $h_i(A)$  basé en  $h_i(x)$ . Le chemin  $h_i(\gamma)$  étant continu, on peut transporter la base  $B$  le long du chemin  $h_i(\gamma)$  vers une base  $B'$  directe de  $T_{h_i(x)}\mathbb{D}^2$ .

Cependant, en parcourant le chemin  $\gamma$ , on inverse les couples de vecteurs  $e_r^x, e_r^y$  et  $e_\theta^x, e_\theta^y$ . Parcourir le chemin  $h_i(\gamma)$  inverse donc le couple de vecteurs  $h_i(e_r^x) = e_r^1, h_i(e_r^y) = e_r^2$ . On a donc  $B' = (e_\theta, e_r^2, e_r^1)$ , donc  $B'$  est une base indirecte de  $T_{h_i(x)}V_{i-1}$ . C'est absurde. □

Comme  $A$  et  $B$  sont disjoints, on peut supposer  $U_A$  et  $U_B$  disjoints.

**Lemme 3.19.** *La relation d'équivalence  $R$  est l'identité*

*Démonstration.*  $R$  est continue bijective donc pour tout  $V$  voisinage de  $R((0,0))$ ,  $R^{-1}(V)$  est homéomorphe à  $V$  et est une croix donc un voisinage de  $(0,0)$ . Donc  $R((0,0)) = (0,0)$ .

On peut donc restreindre  $R$  à  $X - (0,0)$ . On obtient donc 4 applications bijectives de  $]0, 1[$  dans  $]0, 1[$  qui envoient des voisinages de 0 sur des voisinages de 0. Elles sont donc strictement croissantes, donc homotopes à l'identité.

Quitte à changer continuellement les paramétrisations des segments du  $X$  dans  $]0, \epsilon[ \times X$ , on peut supposer que ces applications composantes sont l'identité. On peut donc identifier  $R$  à une permutation  $\sigma_R$  de  $S_4$

On a alors 24 (=card( $S_4$ )) choix possibles :

On se place dans le cas où  $\sigma_R$  est un de 6 4-cycles de  $S_4$ . Le recollement par  $R$  fait de  $V - C$  un ensemble connexe. Or chaque composante connexe de  $U_A - A$  est envoyée par  $h_i$  sur une partie connexe de  $V - C$ . Comme image d'une partie connexe par  $h_i|_A$  homéomorphisme. Il en va de même pour les composantes connexes de  $U_B - B$ . Chacun des ces 4 ensembles a donc comme image  $V - C$ , ce qui contredit le fait que tout point a au plus 2 préimages par  $h_i$ .

Les 8 3-cycles de  $S_4$  se traitent d'une façon similaire. En effet,  $R$  rend alors connexe un T du  $X$ . Ainsi 3 des 4 composantes connexes de  $(U_B - B) \sqcup (U_A - A)$  sont envoyées sur ce T d'où la contradiction.

Si  $R$  est la rotation d'angle  $\pi$ , alors  $U_A$  et  $U_B$  sont des rubans de Möbius inclus dans  $\mathbb{D}^2$ . C'est absurde.

Si  $R$  est une des deux symétries par rapport aux diagonales (laissant fixe une copie de  $[1-, 1]$  et renversant l'autre), on obtient de même que  $U_A$  ou  $U_B$  est un ruban de Möbius inclus dans  $\mathbb{D}^2$ . C'est absurde.

On se place dans le cas où  $R$  est une des 4 façons de permuter deux segments adjacents ou la symétrie horizontale ou la symétrie verticale. Le recollement par  $R$  renverse alors l'orientation de  $V \subset M_i$ . Or  $M$  donc  $M_i$  est orientée. C'est absurde.

Donc  $R$  est l'identité (on a traité les 23 autres cas). □

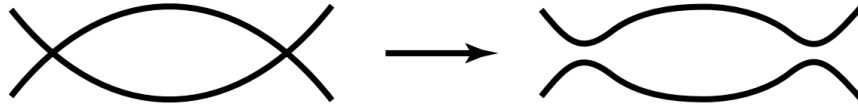
*Remarque 3.20.* Les deux lemmes précédents sont les seuls endroits de la preuve où on utilise l'orientabilité de  $M$ .

On a donc  $V = X \times \mathbb{S}^1$ . On a ensuite deux cas : Soit un des deux disque bornés par  $A$  et  $B$  est inclus dans l'autre, soit ils sont disjoints. Les lemmes 3.21 et 3.22 nous permettent de conclure.  $\square$

**Lemme 3.21.** *On peut effectuer la modification de la proposition 3.17 dans le cas où les disques bornés par  $A$  et  $B$  sont disjoints.*

*Démonstration.* Si  $D_A$  et  $D_B$  sont disjoints, on inverse les valeurs de  $h_i$  sur  $D_A$  et  $D_B$ , puis on lisse les bords comme montré sur la figure 4 ci-dessous.  $\square$

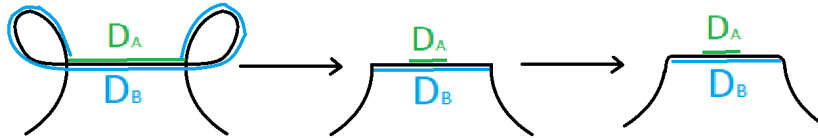
FIGURE 4 –  $D_A$  et  $D_B$  disjoints



**Lemme 3.22.** *On peut effectuer la modification de la proposition 3.17 dans le cas où un des deux disques bornés par  $A$  et  $B$  est inclus dans l'autre.*

*Démonstration.* On note ces deux disques  $D_B$ ,  $D_B$ . Supposons quitte à les échanger que  $D_A \subset D_B$ . Alors, comme sur la figure 5, on redéfinit  $h_i$  sur  $D_B$  comme  $h_i|_{D_A}$  ( $D_A$  et  $D_B$  sont deux disques donc difféomorphes). Il suffit ensuite de lisser la fonction au bord de  $C$ .  $\square$

FIGURE 5 –  $D_A \subset D_B$



**Proposition 3.23** (cas du segment). *On se place sous les notations de la proposition 3.14. Pour toute composante connexe  $A$  de  $D$  difféomorphe à un segment, on peut résoudre le problème d'injectivité sur  $A$ .*

*Démonstration.* Les segments étant des sous-variétés à bord de  $\mathbb{D}^2$ , leurs extrémités sont dans  $\partial\mathbb{D}^2$  donc ils séparent  $\mathbb{D}^2$  en deux. Il y a alors deux façons dont les segments peuvent se recoller (cf figure ci-dessous 6).

Dans chacun des deux cas, la figure 7 ci-dessous permet de définir 2 injections qui éliminent le double arc. Les lemmes 3.24 et 3.25 permettent alors de montrer qu'une de ces deux injections convient.

FIGURE 6 – 2 recollements possibles

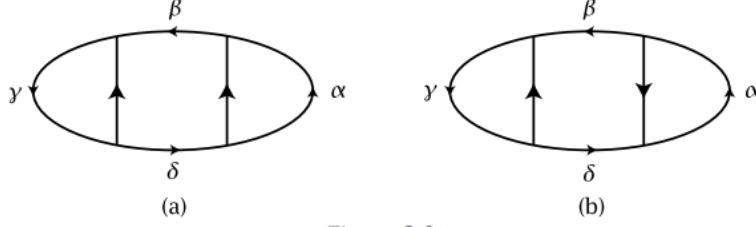
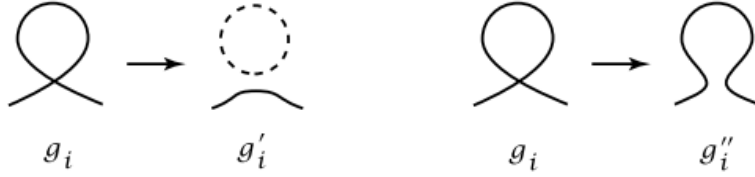


FIGURE 7 – 2 injections possibles



**Lemme 3.24.** *Une des deux convient dans le cas (a)*

*Démonstration.* On confond dans cette preuve les segments  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  et leurs images par  $h_i$ . Dans le cas (a), sous les notations du graphique, on a  $g'_i|_{\partial\mathbb{D}^2} = \alpha\gamma$ ,  $g''_i|_{\partial\mathbb{D}^2} = \alpha\beta^{-1}\gamma\delta^{-1}$ . Or on a :

$$\begin{aligned} h_i|_{\partial\mathbb{D}^2} &= \alpha\beta\gamma\delta \\ &= (\alpha\gamma)\delta^{-1}(\alpha\beta^{-1}\gamma\delta^{-1})^{-1}(\alpha\gamma)\delta \\ &= (g'_i|_{\partial\mathbb{D}^2})\delta^{-1}(g''_i|_{\partial\mathbb{D}^2})^{-1}(g'_i|_{\partial\mathbb{D}^2})\delta \end{aligned}$$

Si  $g'_i|_{\partial\mathbb{D}^2}$  et  $g''_i|_{\partial\mathbb{D}^2}$  sont dans  $N_i$ , alors  $h_i|_{\partial\mathbb{D}^2}$  l'est aussi car  $N_i$  est distingué et  $\delta$  est un lacet. C'est absurde.  $\square$

**Lemme 3.25.** *Une des deux convient dans le cas (b)*

*Démonstration.* On confond dans cette preuve les segments  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  et leurs images par  $h_i$ . Dans le cas (b), sous les notations du graphique, on a  $g'_i|_{\partial\mathbb{D}^2} = \alpha\gamma^{-1}$ ,  $g''_i|_{\partial\mathbb{D}^2} = \alpha\delta\gamma\beta$ . Or on a :

$$\begin{aligned} h_i|_{\partial\mathbb{D}^2} &= \alpha\beta\gamma\delta \\ &= (\alpha\gamma^{-1})(\gamma\delta)^{-1}(\alpha\gamma^{-1})^{-1}(\alpha\delta\gamma\beta)(\gamma\delta) \\ &= (g'_i|_{\partial\mathbb{D}^2})(\gamma\delta)^{-1}(g''_i|_{\partial\mathbb{D}^2})^{-1}(g''_i|_{\partial\mathbb{D}^2})(\gamma\delta) \end{aligned}$$

Si  $g'_i|_{\partial\mathbb{D}^2}$  et  $g''_i|_{\partial\mathbb{D}^2}$  sont dans  $N_i$ , alors  $h_i|_{\partial\mathbb{D}^2}$  l'est aussi car  $N_i$  est distingué et  $\gamma\delta$  est un lacet. C'est absurde.  $\square$

$\square$

### 3.6 Preuve du lemme de Dehn

**Théorème 3.26** (Lemme de Dehn). *Soit  $M$  est une 3-variété lisse à bord orientable. Si on a un plongement  $f$  de  $\mathbb{S}^2$  dans  $\partial M$  tel que  $f(\mathbb{S}^2)$  est homotopiquement trivial dans  $M$ , alors on a  $g$  un plongement de  $\mathbb{D}^2$  dans  $M$  tel que  $g|_{\partial\mathbb{D}^2} = f$ .*

*Remarque 3.27.* Ce théorème reste vrai si  $M$  n'est pas orientable.

*Démonstration.* On commence par supprimer tout  $\partial M$  sauf un voisinage de  $f(\mathbb{S}^2)$  homotope à  $f(\mathbb{S}^2)$  (existe par le lemme 3.5 quitte à faire un aller retour dans le cadre affine par morceaux). Le lemme 3.29 montre que  $\partial M'$  n'est pas une bande de Möbius. L'ensemble  $\partial M'$  est alors un anneau.

Alors  $f(\mathbb{S}^2)$  est non trivial dans  $\pi_1(\partial M')$ . Le fait que  $f(\mathbb{S}^2)$  soit homotopiquement trivial dans  $\pi_1(M')$  nous fournit  $g : (\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2) \rightarrow (M', \partial M')$ . Le théorème de la boucle fournit une injection  $h : (\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2) \rightarrow (M, \partial M)$  telle que  $h|_{\partial\mathbb{D}^2}$  non homotopiquement triviale et injective dans  $\partial M'$ . Or est  $\partial M'$  un anneau autour de  $f(\mathbb{S}^2)$  donc  $h|_{\partial\mathbb{D}^2}$  est homotope à  $f(\mathbb{S}^2)$ . Quitte à concaténer cette homotopie et  $h$  et à lisser le lieu de concaténation, on a l'injection souhaitée.

*Remarque 3.28.* Si on veut que le disque borné soit entièrement contenu dans l'intérieur de  $M$ , il suffit de pousser l'homotopie de  $C$  à  $h|_{\partial\mathbb{D}^2}$  très légèrement vers l'intérieur de  $M$ . □

**Lemme 3.29.** *Une variété  $M$  de dimension 3 orientable à bord ne peut pas contenir de ruban de Möbius dans  $\partial M$  qui soit homotopiquement trivial dans  $M$*

*Démonstration.* Si  $M$  est orientable, son orientation en induit une sur  $\partial M$  donc  $\partial M$  ne peut pas contenir de bande de Möbius. □

*Remarque 3.30.* Ceci reste vrai si  $M$  non orientable.

## Références

- [1] Naïl Bouberbachene. Le problème de Schoenflies. *Mémoires L3 ENS*, 2022.
- [2] Morton Brown. A proof of the generalized Schoenflies theorem. *Bull. Am. Math. Soc.*, 66 :74–76, 1960.
- [3] M. Dehn. Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. *Math. Ann.*, 69 :137–168, 1910.
- [4] Allen Hatcher. Notes on basic 3-manifold topology. 2001.
- [5] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge : Cambridge University Press, 2002.
- [6] Morris W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Grad. Texts Math.* Springer, Cham, 1976.

- [7] H. Kneser. Closed surfaces in three-dimensional manifolds. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 38 :248–260, 1929.
- [8] B. C. Mazur. On embeddings of spheres. *Acta Math.*, 105 :1–17, 1961.
- [9] J. R. Munkres. *Elementary differential topology. Lectures given at Massachusetts Institute of Technology, Fall, 1961. Revised ed*, volume 54 of *Ann. Math. Stud.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1966.
- [10] C. D. Papakyriakopoulos. On Dehn’s lemma and the asphericity of knots. *Ann. Math.*, 66 :1–26, 1957.
- [11] Dale Rolfsen. Knots and links. Mathematical Lecture Series. 7. Berkeley, Ca. : Publish or Perish, Inc. 439 p., 1976.
- [12] C. T. C. Wall. *Differential topology*, volume 156 of *Camb. Stud. Adv. Math.* Cambridge : Cambridge University Press, 2016.