

LA NOUILLE INFINIE

ENCADRÉ PAR THÉO LENOIR

THIBAUT DURAND, HUGO PEYRAUD-MAGNIN ET JEAN-BAPTISTE LAUNAY

1. INTRODUCTION

Nous étudions dans ce mémoire un modèle de systèmes méandriques aléatoires finis et infinis, à partir de l'article de Curien, Kozma, Sidoravicius et Tournier [1], et de celui de Féray et Thévenin [2]. On commence donc par présenter rapidement le modèle et les objectifs de ce mémoire. Toutes les notations introduites ici seront rappelées dans les parties suivantes.

Définition 1.1. *Un **système méandrique** de taille n est un graphe pouvant être représenté de la façon suivante : l'ensemble des sommets est $\llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket$ espacés régulièrement sur l'axe des abscisses, les arêtes sont des demi-cercles qui ne s'intersectent pas, qui relient exactement 2 sommets par au-dessus ou en-dessous de l'axe des abscisses, et chaque sommet est à l'origine d'exactly 2 arêtes (une au-dessus et une en-dessous de l'axe).*

Cette définition se généralise à la taille infinie, en prenant pour ensemble de sommets \mathbb{Z} tout entier.

*Un **méandre** est alors un système méandrique qui ne possède qu'une seule composante connexe.*

Nous justifierons dans la partie suivante l'existence de tels graphes en dimension infinie, et définirons les mesures de probabilité utilisées sur les ensembles de graphes.

Le premier objectif de notre mémoire sera alors de démontrer le théorème suivant qui a donné le nom de **nouille infinie** pour désigner ce modèle de graphe aléatoire :

Théorème 1.2. *Soit \mathcal{G} un système méandrique infini aléatoire. Alors l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

- *Presque sûrement, \mathcal{G} possède une unique composante connexe infinie.*
- *Presque sûrement, \mathcal{G} ne possède aucune composante connexe infinie.*

Remarque. Les auteurs conjecturent que c'est la deuxième de ces propriétés (p.s. aucune composante connexe infinie) qui est vérifiée. Cependant, aucune preuve de ce résultat n'existe à ce jour.

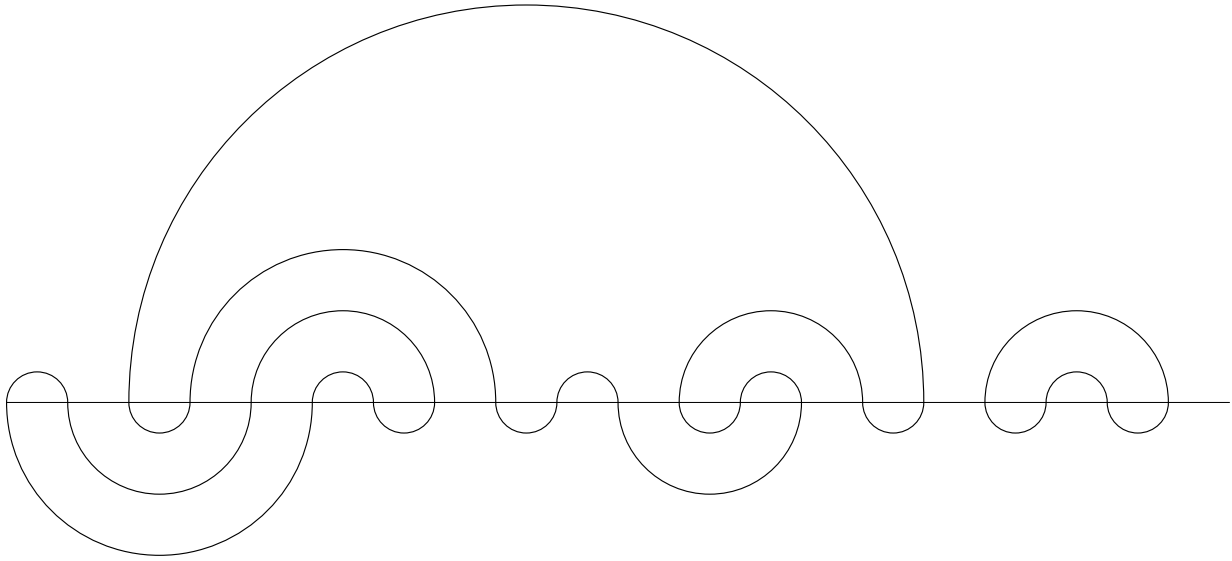


FIGURE 1 – Un système méandrique de taille 10 avec trois composantes connexes. Il est engendré par deux mots bien parenthésés : en haut par $()((())())(())()$, en bas par $((()))()()()()()$.

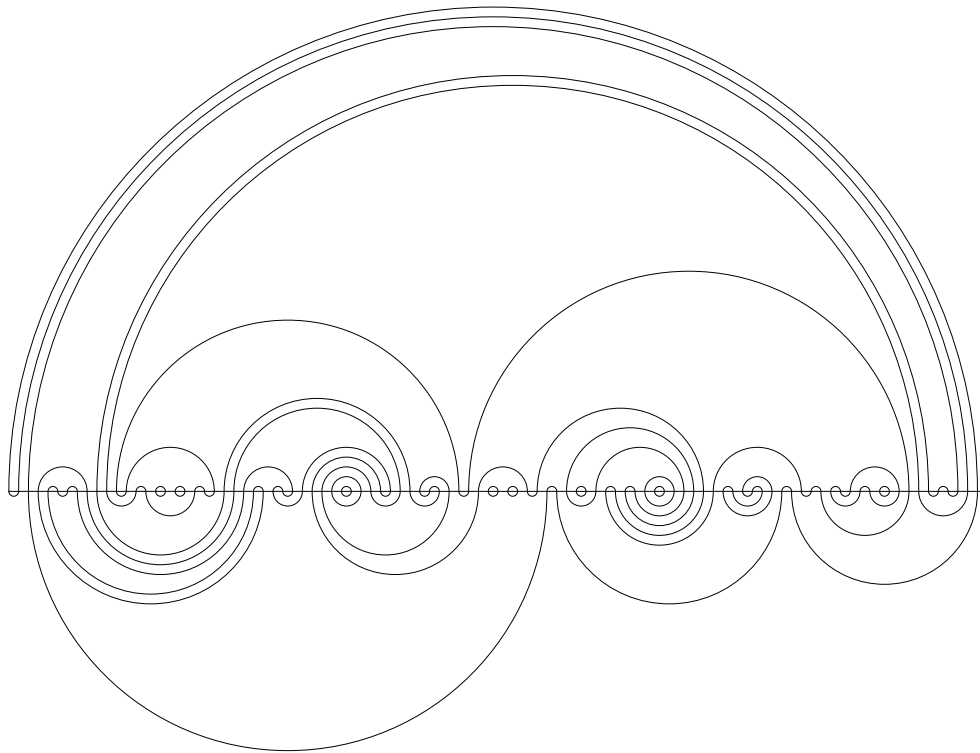


FIGURE 2 – Un système méandrique de taille 50

La preuve est construite de manière similaire à l'argument de Burton-Keane en percolation : par translation, le nombre n_c de composantes connexe est presque sûrement constant, et on obtient la majoration $n_c \leq 2$ en définissant des points de trifurcations (parties 3 à 5). On conclut la preuve en éliminant à la main la valeur 2.

Observons maintenant pour tout entier $n \geq 1$, M_n un système méandrique fini de taille n . Pour chacun, notons $cc(M_n)$ le nombre de composantes connexes du graphe. Nous verrons dans une deuxième partie de ce mémoire que la suite (M_n) ainsi définie converge localement vers le graphe \mathcal{G} au sens de Benjamini-Schramm, **quenched** en anglais (se référer à la partie 6 pour une définition de ce type de convergence). Cette convergence nous permet alors d'obtenir la limite suivante :

Théorème 1.3. *Il existe une constante $0 < \kappa < 1$ telle que $\frac{cc(M_n)}{n} \xrightarrow{\text{proba}} \kappa$.*

La dernière partie de ce mémoire aura alors pour objectif d'obtenir des expressions et un encadrement de cette constante grâce à son interprétation probabiliste : $\kappa \in [0.207, 0.292]$.

Ces résultats ouvrent plusieurs champs d'applications. En effet, les graphes aléatoires sont étudiés depuis une dizaine d'années, mais peu de résultats asymptotiques sont connus. En particulier, des problèmes de triangulation peuvent être étudiés via les arbres aléatoires. Dans le monde continu étudié en physique théorique, les graphes aléatoires apparaissent dans la construction de cartes Browniennes et dans la gravité quantique de Liouville. Si les graphes aléatoires sont maintenant bien compris, peu de résultats asymptotiques sont connus, ainsi les auteurs espèrent que les deux théorèmes obtenus ici et leur preuve puissent être utiles dans le développement de ces modèles physiques.

Plus mathématiquement, à partir des notions de la partie suivante, on peut noter $P(n)$ l'ensemble des couplages planaires de l'ensemble $\llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket$, muni de l'ordre correspondant au raffinement. Dans le diagramme de Hasse correspondant, la distance d_n entre deux éléments peut être comprise grâce aux systèmes méandriques. En effet, si ρ et π sont deux éléments de $P(n)$, et $M(\rho, \pi)$ est le système méandrique de taille n associé, on a :

$$d(\rho, \pi) = n - cc(M(\rho, \pi)).$$

Ainsi, le Théorème 1.3 a une version équivalente en terme de distance dans le diagramme de Hasse :

Théorème 1.4. *Pour tout n , soit ρ_n et π_n des éléments choisis aléatoirement uniformément et indépendamment dans $P(n)$. Alors $\frac{1}{n}d_n(\rho_n, \pi_n)$ converge en probabilité vers $1 - \kappa$.*

2. COUPLAGE ET DÉFINITION DES GRAPHES

Dans cette première partie, nous commençons par définir les graphes aléatoires étudiés : les méandres finis et infinis.

2.1. La nouille infinie. Pour définir un modèle de graphe aléatoire infini, on considère l'ensemble $\mathcal{W} := (\{-1, +1\})^{\mathbb{Z}}$, et on prend pour ensemble de travail $\Omega := (\{-1, +1\})^{\mathbb{Z}} = \mathcal{W}^2$. On appelle les éléments de Ω des configurations. La variable aléatoire considérée sur Ω est $\omega := (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, où $\omega_n := (\omega_n^+, \omega_n^-)$ avec $(\omega_n^+)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(\omega_n^-)_{n \in \mathbb{Z}}$ des familles indépendantes de variables aléatoires i.i.d. de Rademacher. On note \mathbb{P} la mesure de probabilité ainsi définie sur Ω , et \mathcal{F} la tribu cylindrique associée. Plus généralement, pour $S \subset \mathbb{Z}$, on notera $\mathcal{W}_S := (\{-1, +1\})^S$, et $\Omega_S := \mathcal{W}_S^2$ l'ensemble des configurations sur S .

On peut voir un élément $\omega^+ = (\omega_n^+)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{W}$ (resp. ω^-) à la fois comme une marche aléatoire sur \mathbb{Z} , dont on note les sommes partielles $S_n^+ := \sum_{k=0}^n \omega_k^+$ (resp. S_n^-), et comme une suite de parenthèses ouvrantes (les $+1$) et fermantes (les -1), que l'on souhaite associer entre elles pour former un mot bien parenthésé sur \mathbb{Z} entier.

Notation. Pour un élément $\eta \in \mathcal{W}$, et $k < l \in \mathbb{Z}$ on note $\eta[k, l] := \sum_{i=k}^l \eta_i$.

On observera qu'à k et η fixés, la fonction $l \in \mathbb{N} \mapsto \eta[k, k+l]$ n'augmente ou ne diminue que de 1 à chaque pas. On a ainsi une forme de TVI discret : $\forall k < m < l, \forall a \in \llbracket \eta[k, m], \eta[k, l] \rrbracket, \exists j \in \llbracket m, l \rrbracket$ tq $\eta[k, j] = a$. De même en considérant $l \in \mathbb{N} \mapsto \eta[k-l, k]$, on a : $\forall m < l < k, \forall a \in \llbracket \eta[m, k], \eta[l, k] \rrbracket, \exists j \in \llbracket m, l \rrbracket$ tq $\eta[j, k] = a$.

Définition 2.1. Un **couplage** d'un ensemble E est une partition de E en parties à 2 éléments. Si $E \subset \mathbb{Z}$, on dira qu'un couplage \mathcal{P} de E est **planaire** si de plus il n'existe pas quatre entiers $i < j < k < l$ tels que $\{i, j\} \in \mathcal{P}$ et $\{k, l\} \in \mathcal{P}$.

En particulier, si φ est une involution de \mathbb{Z} sans point fixe et sans croisement (i.e. $\forall k, l \in \mathbb{Z}^2$ si $k < l < \varphi(k)$ alors $k < \varphi(l) < \varphi(k)$), alors la partition associée $(\{k, \varphi(k)\})_k$ est naturellement un couplage planaire.

Lemme 2.2. Soit $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de variables aléatoires de Rademacher indépendantes. Presque sûrement, on peut définir un couplage planaire associé à ω via l'involution

$$\text{suivante : } \varphi(n) = \begin{cases} \min\{k > n, \omega[n, k] = 0\} & \text{si } \omega_n = +1 \\ \max\{k < n, \omega[k, n] = 0\} & \text{si } \omega_n = -1 \end{cases} .$$

S'il existe, c'est le seul couplage planaire dont les parties sont des couples $\{k, l\}$ avec $\omega_k = +1$ et $\omega_l = -1$ si $k < l$ (i.e. le seul qui décrit un mot bien parenthésé à partir de ω).

Démonstration. Si φ est bien défini, on commence par vérifier que c'est une involution sans point fixe ni croisement.

- **sans point fixe** : par la définition, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi(n) \neq n$.
- **involution** : soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega_n = +1$. Alors pour tout $l \in \mathbb{Z}$ avec $n < l < \varphi(n)$, on a :

$$\sum_{k=l}^{\varphi(n)} \omega_k = \underbrace{\sum_{k=n}^{\varphi(n)} \omega_k}_{=0} - \underbrace{\sum_{k=n}^{l-1} \omega_k}_{>0} < 0 \quad \text{par définition de } \varphi(n).$$

Ainsi, $\varphi(\varphi(n)) \leq n$, et on a égalité car $\omega[n, \varphi(n)] = 0$. Les cas où $\omega_n^+ = -1$ se traite de même, donc φ est bien une involution.

- **sans croisement** : si $k < l < \varphi(k)$ on a par définition $\omega_k = +1$, donc par définition $\omega[k, l-1] > 0$ et $\omega[k, l] > 0$. Comme $\omega[k, l-1] + \omega[l, \varphi(k)] = \omega[k, \varphi(k)] = 0$, on a $\omega[l, \varphi(k)] < 0$. Si $\omega_l = +1$, comme $\omega[l, l] > 0 > \omega[l, \varphi(k)]$, par TVI, il existe m tel que $l < m < \varphi(k)$ et $\omega[l, m] = 0$. Si $\omega_l = -1$, $\omega[l, l] < 0 < \omega[k, l]$, donc il existe n tel que $k < n < l$ et $\omega[m, l] = 0$. Quitte à prendre m minimal et n maximal dans le second, on a $k < \varphi(l) < \varphi(k)$. Le cas $\omega_k = -1$ se fait de même.

On montre alors que φ est presque sûrement bien définie. Pour un $n \in \mathbb{Z}$, on traite le cas $\omega_n = +1$, le cas $\omega_n = -1$ étant symétrique : $\varphi(n) = n + T_n$ où T_n est le premier retour en 0 de la marche aléatoire définie par $S_k = \omega[n, n+k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, T_n et donc $\varphi(n)$ existent presque sûrement, et par intersection dénombrable, φ est bien définie presque sûrement.

Enfin, prouvons que φ est bien l'unique couplage planaire qui parenthèse bien ω . En effet, soit f un couplage de \mathbb{Z} qui parenthèse bien ω . Par l'absurde on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega_n^+ = +1$ et $f(n) > \varphi(n)$. On pose $I = \{k \in \mathbb{Z}, \omega_k = +1\}$ et $J = \{k \in \mathbb{Z}, \omega_k = -1\}$. Alors sur l'intervalle $[[n, \varphi(n)]]$, comme $\omega[n, \varphi(n)] = 0$ il y a autant d'indices $i \in I$ que d'indices $j \in J$. Par planarité et cardinalité, chaque indice $j \in J \cap [[n, \varphi(n)]]$ est associé à un $i \in I \cap [[n, \varphi(n)]]$, ce qui contredit le fait que n est associé à $f(n)$. Par ailleurs, on ne peut pas avoir $n < f(n) < \varphi(n)$ car alors on aurait $\omega[n, f(n)] = 0$, ce qui contredirait la minimalité de $\varphi(n)$. \square

D'après ce qui précède, pour presque tout $\omega \in \Omega$, on peut définir deux couplages planaires \mathcal{P}^+ et \mathcal{P}^- , associées respectivement à ω^+ et ω^- via les involutions φ^+ et φ^- définies par le lemme précédent.

On peut donc tracer dans le demi-plan supérieur le graphe associé à l'involution φ^+ , en reliant les points associés par des demi-cercles qui ne s'intersectent pas. En faisant de même dans le demi-plan inférieur pour l'involution φ^- , on obtient finalement un système méandrique infini.

Notation. Le graphe ainsi obtenu sera noté $\mathcal{G}(\omega)$. Dans ce graphe, on note $E^+(\omega)$ (resp. $E^-(\omega)$) l'ensemble des arêtes au-dessus (resp. en dessous) de l'axe.

On note $n_c(\omega)$ le nombre de composantes connexes, ou **clusters**, infinies dans ce graphe.

Pour simplifier les notations, on omettra régulièrement la dépendance en ω dans les objets ainsi définis.

2.2. Systèmes méandriques finis. On se place ici sur l'intervalle $\llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket$. On ne considère cette fois que les éléments η de $\mathcal{W}_{\llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket}$ qui induisent un mot bien parenthésé (ou mot de Dyck), et on note \mathcal{D}_n l'ensemble de ces éléments. Alors, en associant par paire comme précédemment les indices des parenthèses associées, on obtient un couplage planaire de l'ensemble $\llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket$. Ainsi, on réalise une bijection entre l'ensemble \mathcal{M}_n des systèmes méandriques de taille n , et l'ensemble \mathcal{D}_n^2 .

On notera qu'en particulier, il y a exactement Cat_n^2 systèmes méandriques de taille n , où $\text{Cat}_n = |\mathcal{D}_n|$ est le n^e nombre de Catalan.

Notation. Dans la suite, on considèrera pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire M_n prise uniformément dans \mathcal{M}_n . On pourra également assimiler M_n au couple $(\eta(M_n)^+, \eta(M_n)^-)$, qui est une variable aléatoire uniforme sur \mathcal{D}_n^2 .

On notera alors $\text{cc}(M_n)$ la variable aléatoire qui compte le nombre de composantes connexes dans le graphe M_n .

La suite de ce mémoire a deux objectifs. Le premier est de déterminer les valeurs possibles de n_c . Le deuxième est de montrer que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en un sens à préciser vers la variable aléatoire $M_\infty = \mathcal{G}$, ce qui permettra d'obtenir une limite au nombre de clusters $\text{cc}(M_n)$, relativement à la taille du système méandrique considéré.

3. UNICITÉ DU NOMBRE DE CLUSTERS INFINIS

Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\mathbb{P}(n_c = k) = 1$.*

Pour démontrer ce théorème, nous commençons par établir plusieurs lemmes :

Lemme 3.2. *Soit $A \in \mathcal{F}$, et $\varepsilon > 0$. Il existe un événement A_ε dépendant d'un nombre fini de composantes de ω , tel que $\mathbb{P}(A \Delta A_\varepsilon) \leq \varepsilon$.*

Démonstration. Soit \mathcal{E} la collection des événements $A \in \mathcal{F}$ qui vérifient le lemme pour tout ε . \mathcal{E} contient les cylindres de dimension finie, puisqu'ils sont eux-même dépendants d'un nombre fini de coordonnées. Montrons alors que \mathcal{E} est une tribu. On aura alors $\mathcal{E} = \mathcal{F}$.

Soit $A \in \mathcal{E}$, $\varepsilon > 0$, A_ε vérifiant la propriété du lemme. Alors $A^C \in \mathcal{E}$, puisque A_ε^C dépend d'un nombre fini de coordonnées, et $\mathbb{P}(A^C \Delta A_\varepsilon^C) = \mathbb{P}(A \Delta A_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Par ailleurs, soit $(A^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de \mathcal{E} , et $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de A_ε^n un événement dépendant d'un nombre fini de variables tel que $\mathbb{P}(A^n \Delta A_\varepsilon^n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$. Alors on dispose de $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\mathbb{P} \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A^n \right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^N A^n \right) \right) \leq \varepsilon.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A^n \right) \Delta \left(\bigcup_{n=1}^N A_\varepsilon^n \right) \right) &\leq \mathbb{P} \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A^n \right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^N A^n \right) \right) + \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=1}^N (A^n \Delta A_\varepsilon^n) \right) \\ &\leq \varepsilon + \sum_{n=1}^N \mathbb{P}(A^n \Delta A_\varepsilon^n) \\ &\leq \varepsilon + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, \mathcal{E} est stable par complémentaire et union dénombrable, c'est bien une tribu. Donc $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. \square

Définition 3.3. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose T_n l'opérateur de translation par n sur Ω , par : $\forall \omega \in \Omega, T_n(\omega)_j = \omega_{j+n}$.

Un événement A est dit invariant par translation si $\forall n \in \mathbb{Z}, T_n A = A$, i.e. $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \omega \in \Omega, \omega \in A \Leftrightarrow T_n \omega \in A$.

On notera de plus que \mathbb{P} est invariante par translation, c'est à dire que $\forall A \in \mathcal{F}, \forall n \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(T_n A)$.

Lemme 3.4. Soit A un événement invariant par translation. Alors $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1 .

Démonstration. Soit, et $(A_n)_n$ une suite d'événements dépendant d'un nombre fini de coordonnées tel que $\mathbb{P}(A_n \Delta A) \rightarrow 0$ par le Lemme 3.2. Pour chaque A_n , il existe $x_n \in \mathbb{N}^*$ tel que A_n ne dépend que des coordonnées dans $[-x_n, x_n]$. On pose alors $B_n = T_{3x_n+1} A$. Les événements A_n et B_n sont indépendants car ils dépendent d'ensembles de coordonnées disjoints. Ainsi $\mathbb{P}(A_n \cap B_n) = \mathbb{P}(A_n) \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_n)^2$ et $\mathbb{P}(A_n)^2 \rightarrow \mathbb{P}(A)^2$. D'autre part, $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A_n \cap B_n)| \leq \mathbb{P}(A \Delta A_n) + \mathbb{P}(A \Delta B_n)$, où $\mathbb{P}(A \Delta B_n) = \mathbb{P}(T_{3x_n+1} A \Delta T_{3x_n+1} A_n) = \mathbb{P}(A \Delta A_n) \rightarrow 0$. Donc $\mathbb{P}(A_n \cap B_n) \rightarrow \mathbb{P}(A)^2$, d'où $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$. \square

Pour conclure la démonstration du Théorème 3.1, il suffit alors d'observer que les événements $\{n_c = k\}$ sont invariants par translation, et d'appliquer le lemme précédent

4. CONFIGURATION RESTREINTE À UN INTERVALLE

Définition 4.1. Soit S un intervalle de \mathbb{Z} et ω une configuration dans Ω , on définit $\mathcal{G}(\omega)$ comme précédemment, et on pose n_L^+ et n_R^+ les nombres d'arêtes sortant de S par la gauche et la droite dans E^+ :

$$\begin{aligned} n_L^+ &= n_L^+(\omega, S) := |\{x \in S, \exists y < \min(S), \{x, y\} \in E^+\}|, \\ n_R^+ &= n_R^+(\omega, S) := |\{x \in S, \exists y > \max(S), \{x, y\} \in E^+\}|, \end{aligned}$$

et de même on définit n_L^- et n_R^- pour la partie inférieure correspondant à E^- .

Alors $n_{tot} = n_{tot}(\eta) = n_L^+ + n_R^+ + n_L^- + n_R^-$.

Convention. On identifie chacune des n_{tot} arêtes sortantes de S par son point d'intersection avec un rectangle qui enveloppe S . On appelle ce point un **pont** et on le représente par un carré (cf figure 3).

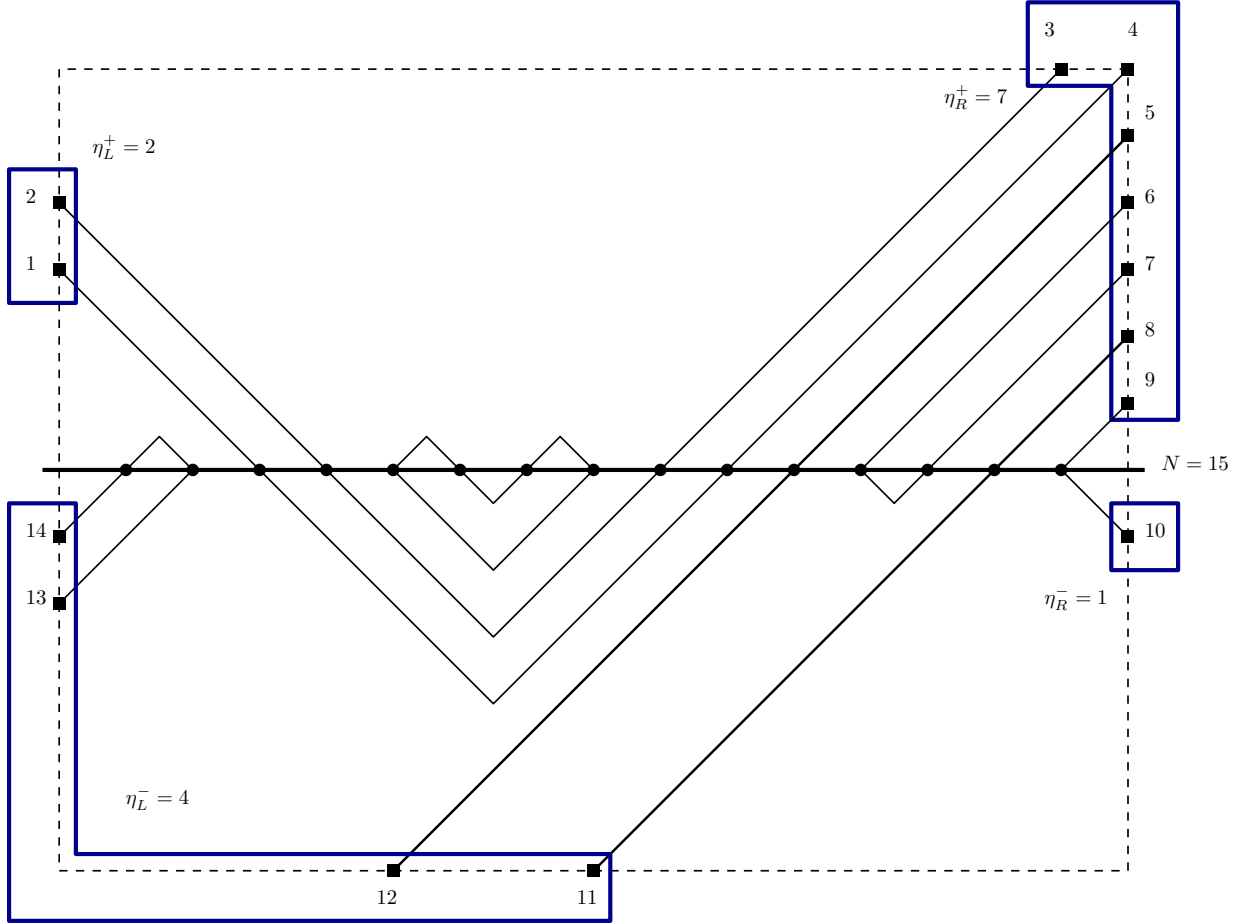


FIGURE 3 – Une configuration sur $N = 15$ sommets et les $n_{tot} = 14$ points associés

Définition-Propriété 4.2. Soit S un intervalle. A chaque configuration $\omega \in \Omega$, on peut associer un couplage planaire σ de $\llbracket 1, n_{tot} \rrbracket$: pour cela, on numérote les ponts de 1 à n_{tot} , dans le sens horaire, en partant de la demi-droite réelle négative. On apparie ensuite les ponts reliés entre eux dans $\mathcal{G}(\omega)$ restreint à S . On dit alors que ω réalise intérieurement σ .

Puisque le couplage σ ainsi défini ne dépend que de $\omega|_S$, on pourra aussi écrire qu'un élément η de Ω_S **réalise intérieurement** σ .

Démonstration. En effet, soit $\omega, \omega' \in \Omega$ tels que $\omega|_S = \omega'|_S$ et tels qu'ils admettent tout deux un bon parenthésage. On peut noter \mathcal{G} et \mathcal{G}' leurs graphes, et par le Lemme 2.2,

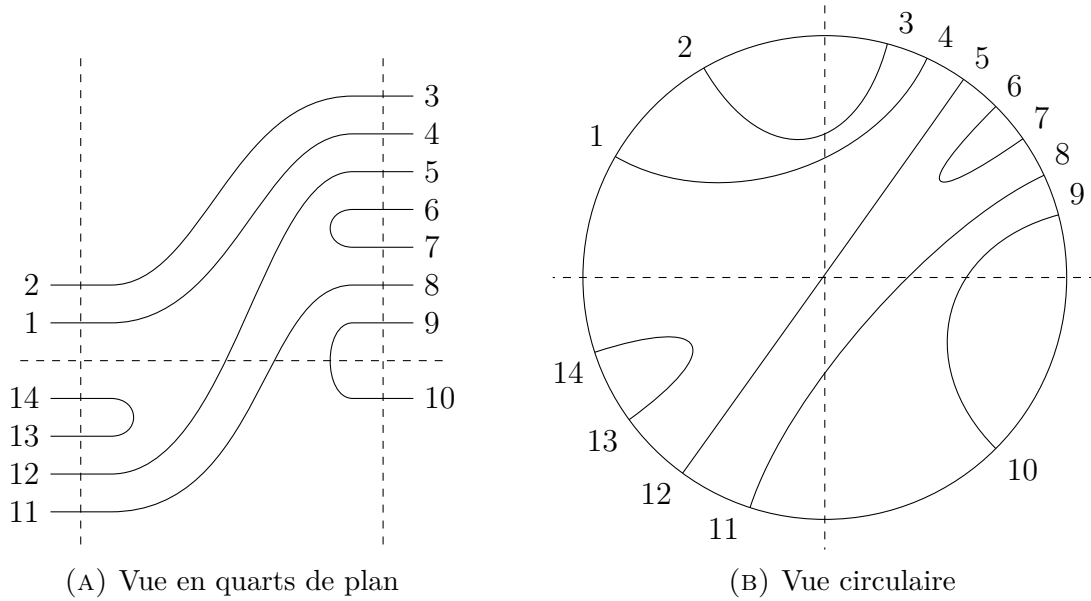


FIGURE 4 – Couplage intérieur réalisé sur l'enveloppe circulaire par la configuration de la figure 3

$\varphi = (\varphi^+, \varphi^-)$ et $\varphi' = (\varphi'^+, \varphi'^-)$ les couples d'involutions qui induisent les couplages associés respectivement à ω et ω' . Par unicité de l'involution, pour tout $x, y \in S$ on a $y = \varphi^+(x)$ (resp. $y = \varphi^-(x)$) si et seulement si $y = \varphi'^+(x)$ (resp. $y = \varphi'^-(x)$). Par ailleurs, si $x \in S$ et $\varphi^+(x) > \max(S)$ (resp. $\varphi^-(x) > \max(S)$), alors par planarité, on a également $\varphi'^+(x) > \max(S)$ (resp. $\varphi'^-(x) > \max(S)$) et réciproquement. De même si $\varphi^+(x) < \min(S)$. Ainsi, les graphes \mathcal{G} et \mathcal{G}' coïncident sur S , donc on a d'une part que $n_{tot} = n'_{tot}$, mais également que les deux couplages de $\llbracket 1, n_{tot} \rrbracket$ induits sont identiques, puisque par planarité, $\forall s \in S$, si un pont est associé à s , il a le même numéro pour ω et ω' . \square

Le lemme suivant établit que réciproquement, pour k entier positif, chaque couplage planaire de $\llbracket 1, 2k \rrbracket$ peut-être réalisé intérieurement par une configuration η bien choisie.

Lemme 4.3. *Soit $N \geq 1$ entier. Soit a^+, b^+, a^- et b^- 4 entiers positifs tels que $a^+ + b^+ \equiv a^- + b^- \equiv N \pmod{2}$, et tels que $n_{tot} = a^+ + b^+ + a^- + b^- \leq N$, et soit σ un couplage planaire de $\llbracket 1, n_{tot} \rrbracket$. Alors il existe une configuration $\eta \in \Omega_{\llbracket 1, N \rrbracket}$ telle que $(\eta_L^+, \eta_R^+, \eta_L^-, \eta_R^-) = (a^+, b^+, a^-, b^-)$ et qui réalise intérieurement σ .*

Démonstration. On commence par répartir arbitrairement les ponts sur l'enveloppe circulaire dans le sens horaire, à l'intérieur des quarts bleus (arcs de cercle).

Commençons par prouver que c'est possible quand $n_{tot} = 2$, en faisant une disjonction de cas sur l'emplacement des deux ponts.

Le lecteur est invité à consulter la figure 3 pour voir la forme des chemins induisant la configuration voulue (les sommets de η sont les points d'intersection avec l'axe $y = 0$).

- Dans le même quart : $13 \in L^-$ vers $14 \in L^- : [(+1, -1), (-1, -1)]$.
- Du même côté horizontal : $2 \in L^+$ vers $3 \in R^+ : [(-1, +1), (+1, -1)]$
- Du même côté vertical : $9 \in R^+$ vers $10 \in R^- : [(+1, +1)]$.
- En diagonale : $8 \in R^+$ vers $11 \in L^- : [(+1, -1)]$

Tous les autres cas sont similaires (à symétrie près) à l'un de ces quatres cas.

On peut désormais construire le couplage planaire η itérativement, en reliant les paires de points couplés une par une.

Lorsqu'on construit un chemin entre x et y , le rectangle est séparée en deux faces A et B , et aucun pont dans A n'est couplé à un pont dans B , sinon cela contredirait le fait que σ soit un couplage planaire de $\llbracket 1, n_{tot} \rrbracket$.

L'invariant suivant est donc maintenu au fil de la construction : chaque paire de points couplés appartient à la même face du graphe et chaque face contient un intervalle non-vide de l'axe $y = 0$.

Soit C le nombre de sommets construits.

- A paires de demi-plans opposés : incrémente C , $a^+ + b^+$ et $a^- + b^-$ de 1.
- B paires dans le même demi-plan $x \in \{+, -\}$: incrémente C et $a^x + b^x$ de 2

On a donc $C = A + 2B \leq 2(A + B) = n_{tot} \leq N$ et $C \equiv A \equiv a^+ + b^+ \equiv N \pmod{2}$.

Il suffit de rajouter $\frac{N-C}{2}$ fois des paires de points voisins avec les valeurs $(+1, +1), (-1, -1)$, ce qui ne modifie rien, pour avoir une configuration de taille N . \square

Lemme 4.4. *Le nombre d'arêtes sortant de $\llbracket 1, N \rrbracket$ est presque sûrement négligeable devant N :*

$$\frac{n_{tot}(\omega_{\llbracket 1, N \rrbracket})}{N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0 \quad p.s.$$

Démonstration. Pour $x \in \{+, -\}$, on observe que $n_L^x = - \min_{0 \leq k \leq N} S_k^x$. En effet, les arêtes sortant vers la gauche correspondant aux -1 de $\omega_{\llbracket 1, N \rrbracket}$ qui n'ont pas de $+1$ antérieur associé, soit chaque fois que la suite S_k^x atteint un nouveau minimum.

En inversant la situation, on a de même $n_R^x = - \min_{0 \leq k \leq N} (S_{N-k}^x - S_N^x) = S_N^x - \min_{0 \leq k \leq N} S_k^x$.

Par la loi forte des grands nombres, on a p.s. $\frac{S_N^x}{N} \rightarrow 0$, donc également $\min_{1 \leq k \leq N} \frac{S_k^x}{N} \rightarrow 0$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{n_{tot}}{N} = \left(\frac{S_N^+}{N} - 2 \min_{0 \leq k \leq N} \frac{S_k^+}{N} \right) + \left(\frac{S_N^-}{N} - 2 \min_{0 \leq k \leq N} \frac{S_k^-}{N} \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0 \quad p.s.$$

\square

Lemme 4.5. *Soit S un sous-ensemble fini de \mathbb{Z} et ψ une application mesurable : $\Omega_{|S^c} \rightarrow \Omega_{|S}$. Pour tout événement C , on définit $\tilde{C} = \{\tilde{\omega} \text{ tq } \exists \omega \in C, \tilde{\omega} = \psi(\omega_{|S^c})1_S + \omega_{|S^c}1_{S^c}\}$. Alors $\mathbb{P}(\tilde{C}) \geq 4^{-|S|}\mathbb{P}(C)$*

Remarque. Dans ce mémoire, les fonctions ψ considérées sont mesurables, toutefois nous n'allons pas explicitement en faire de démonstration, puisque toutes les fonctions non mesurables sont construites avec l'axiome du choix.

Démonstration. Soit $\hat{C} = \{\omega \in \Omega \text{ tq } \exists \eta \in \Omega_S \text{ tq } \eta 1_S + \omega_{|S^c}1_{S^c} \in C\}$.

On remarque que :

- $C \subset \hat{C}$ et donc $\mathbb{P}(\hat{C}) \geq \mathbb{P}(C)$
- Si $\omega_{|S^c} = \omega'_{|S^c}$ et $\omega \in \hat{C}$, alors $\omega' \in \hat{C}$. En particulier, conditionnellement à $\omega \in \hat{C}$, $\omega_{|S}$ suit une loi uniforme sur Ω_S .

On en déduit que $\forall \eta : \Omega_{S^c} \rightarrow \Omega_S, \mathbb{P}(\hat{C}) = 4^{|S|}\mathbb{P}(\hat{C} \cap \{\omega \in \Omega \text{ tq } \omega_{|S} = \eta(\omega_{|S^c})\})$ On a donc $\mathbb{P}(\tilde{C}) = \mathbb{P}(\hat{C} \cap \{\omega' \in \Omega \text{ tq } \omega'_{|S} = \psi(\omega'_{|S^c})\}) = 4^{-|S|}\mathbb{P}(\hat{C}) \geq 4^{-|S|}\mathbb{P}(C)$ \square

5. MAJORATION DU NOMBRE DE CLUSTERS INFINIS PAR TRIFURCATION

5.1. Notion de point de trifurcation. Pour déterminer les valeurs possibles de n_c , nous passons par un argument proche de ceux qui sont utilisés en percolation : on définit des points de trifurcations.

Notation.

- On note $\mathcal{C}(x)$ le cluster contenant x .
- On note $\mathcal{C}^+(a, b)$ le premier cluster de taille infinie passant au-dessus de l'intervalle $\llbracket a, b \rrbracket$, i.e. $\mathcal{C}^+(a, b) := \mathcal{C}(x')$ où $x' = \min(y > b \text{ tq } \exists z < a, \{y, z\} \in E^+ \text{ et } |\mathcal{C}(y)| = \infty)$. Par convention, si un tel cluster n'existe pas, on posera $\mathcal{C}^+(a, b) = \emptyset$
- On note $\mathcal{C}^+(x) := \mathcal{C}^+(x, x)$
- De même, on note $\mathcal{C}^-(x)$ le premier cluster de taille infini passant en-dessous de x ,

Convention. *On travaille avec la distance usuelle sur \mathbb{Z} , et $d(x, A)$ est la distance du point x à l'ensemble $A \subset \mathbb{Z}$*

Définition 5.1. *Un point $x \in \mathbb{Z}$ est appelé **point de trifurcation** s'il vérifie :*

- $(\omega_x^+, \omega_x^-) \in \{(-1, -1), (+1, +1)\}$,
- $|\mathcal{C}(x)| = \infty$,
- $d[x, \mathcal{C}^+(x)] \leq 3$ et $d[x, \mathcal{C}^-(x)] \leq 3$
- $\mathcal{C}^+(x), \mathcal{C}(x), \mathcal{C}^-(x)$ sont 2 à 2 disjoints.

On note Tri l'ensemble des points de trifurcation. Des exemples de trifurcations peuvent être vus figures 5 et 8.

Lemme 5.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $|\text{Tri} \cap \llbracket 1, N \rrbracket| \leq |\{\mathcal{C}, |\mathcal{C}| = \infty, \mathcal{C} \cap \llbracket 1, N \rrbracket \neq \emptyset\}|$.

Démonstration. Soit E l'ensemble des clusters infinis intersectant $\llbracket 1, N \rrbracket$ auquel on rajoute $\mathcal{C}^+(1, N)$ et $\mathcal{C}^-(1, N)$. Pour tout $x \in \text{Tri} \cap \llbracket 1, N \rrbracket$, on a $\{\mathcal{C}(x), \mathcal{C}^+(x), \mathcal{C}^-(x)\} \subset E$. On notera en particulier que $|E| \geq 3$ dès lors que $\text{Tri} \cap \llbracket 1, N \rrbracket \neq \emptyset$. Dans le cas contraire, l'inégalité est prouvée, donc on suppose dans la suite que $\text{Tri} \cap \llbracket 1, N \rrbracket \neq \emptyset$.

On représente le graphe $\mathcal{G}(\omega)$ dans le plan \mathbb{R}^2 . Tout cluster infini $\mathcal{C} \in E$ est alors un chemin bi-infini $t \in \mathbb{R} \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. On compactifie le plan en lui rajoutant un point à l'infini (Alexandroff) : $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \sim \mathbb{S}^2$. En suivant les chemins infinis, l'abscisse $x(t)$ des points tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Donc par une bijection croissante entre $]0, 1[$ et \mathbb{R} , les clusters infinis deviennent alors des lacets $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \mathbb{S}^2$, avec la condition supplémentaire $\gamma(0) = \gamma(1) = \infty$.

On se fixe s un point de la sphère qui ne fait partie d'aucun lacet. Le théorème de Jordan affirme que chaque lacet coupe la sphère en deux composantes connexes ouvertes, on appelle $\text{ext}(\gamma)$ celle qui contient s , et $\text{int}(\gamma)$ la seconde. Dans la figure Lemme 5.2, on visualise la sphère comme un disque quotienté par sa frontière : tous les points de norme 1 sont équivalents à ce même point s . Ainsi notre définition correspond aux intérieurs/extérieurs visuellement naturels sur la figure.

On considère \mathcal{P} l'ensemble des intérieurs de lacets, auquel on rajoute $\top = \mathbb{S}^2$, muni de l'ordre de l'inclusion. Les faces (régions connexes de \mathbb{S}^2 privé des images des lacets) sont exactement les $f_A = A \setminus (\cup_{A' \subsetneq A} A')$ pour tout $A \in \mathcal{P}$.

Les chemins étant disjoints, les lacets ne s'intersectent qu'en ∞ . Pour tous $A, B \in \mathcal{P}$ on a donc $A \cap B = \emptyset$ ou $A \subset B$ à symétrie près. En particulier, si $E \neq \emptyset$, $E \subset A$ et $E \subset B$ alors A et B sont comparables. Le diagramme de Hasse de (\mathcal{P}, \subset) est donc un arbre orienté enraciné en \top qu'on notera \mathcal{T} . Les noeuds sont les faces et chaque lacet est une arête entre les deux faces qu'il sépare.

Soit f un noeud de \mathcal{T} (une face) et \mathcal{U} un sous-ensemble des arêtes incidentes à f (une partie de sa frontière). On note $\text{Tri}(\mathcal{U})$ l'ensemble des $x \in \text{Tri} \cap \llbracket 1, N \rrbracket$ tels que $\{\mathcal{C}(x), \mathcal{C}^+(x), \mathcal{C}^-(x)\} \subset \mathcal{U}$.

On va maintenant prouver que si $|\mathcal{U}| \geq 2$ alors $|\mathcal{U}| \geq |\text{Tri}(\mathcal{U})| + 2$ par récurrence sur $|\mathcal{U}|$. Si $|\mathcal{U}| = 2$ alors il ne peut pas y avoir de point de trifurcation, l'inégalité est vraie.

Soit $x \in \text{Tri}(\mathcal{U})$ un point de trifurcation, et S le segment vertical passant par x et qui s'arrête aux premiers clusters touchés (\mathcal{C}^+ en haut et \mathcal{C}^- en bas, par définition d'un point de trifurcation). Dans \mathbb{S}^2 , S est un chemin qui coupe la face f en trois sous-faces f_1, f_2 et f_3 (voir figure 5).

Pour tout i , soit \mathcal{U}_i le sous-ensemble des arêtes de \mathcal{U} incidentes à f_i . Les lacets $\mathcal{C}(x)$, $\mathcal{C}^+(x)$ et $\mathcal{C}^-(x)$ apparaissent dans la frontière de deux sous-faces. En particulier, $2 \leq |\mathcal{U}_i| \leq |\mathcal{U}| - 1$.

Les autres lacets apparaissent dans la frontière d'une sous-face. Ainsi $|\mathcal{U}| = |\mathcal{U}_1| + |\mathcal{U}_2| + |\mathcal{U}_3| + 3$.

Tout $y \in \text{Tri}(\mathcal{U}) \setminus \{x\}$ apparaît dans l'un des $\text{Tri}(\mathcal{U}_i)$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} |\text{Tri}(\mathcal{U})| &\leq 1 + |\text{Tri}(\mathcal{U}_1)| + |\text{Tri}(\mathcal{U}_2)| + |\text{Tri}(\mathcal{U}_3)| \\ &\leq 1 + |\mathcal{U}_1| - 2 + |\mathcal{U}_2| - 2 + |\mathcal{U}_3| - 2 = |\mathcal{U}| - 2. \end{aligned}$$

En notant $\text{Tri}(f) = \text{Tri}(\mathcal{U}_f)$ où \mathcal{U}_f est l'ensemble de toutes les arêtes incidentes à f , et en gérant le cas $\deg(f) = 1$ à part, on a $\deg(f) - 1 \geq |\text{Tri}(f)| + \mathbb{1}_{\deg f \geq 2}$.

Pour conclure, soit n le nombre de noeuds et $e = n - 1$ le nombre d'arêtes de \mathcal{T} . On a $e = |E| \geq 3$, il y a donc au moins une face de degré au moins 2.

$$e = 2e - n + 1 = 1 + \sum_{f \in \mathcal{T}} (\deg(f) - 1) \geq 1 + \sum_{f \in \mathcal{T}} (|\text{Tri}(f)| + \mathbb{1}_{\deg f \geq 2}) \geq 2 + \sum_{f \in \mathcal{T}} |\text{Tri}(f)|$$

Soit $|E| = |\{\mathcal{C}, |\mathcal{C}| = \infty, \mathcal{C} \cap \llbracket 1, N \rrbracket \neq \emptyset\}| + 2 \geq 2 + |\text{Tri} \cap \llbracket 1, N \rrbracket|$

□

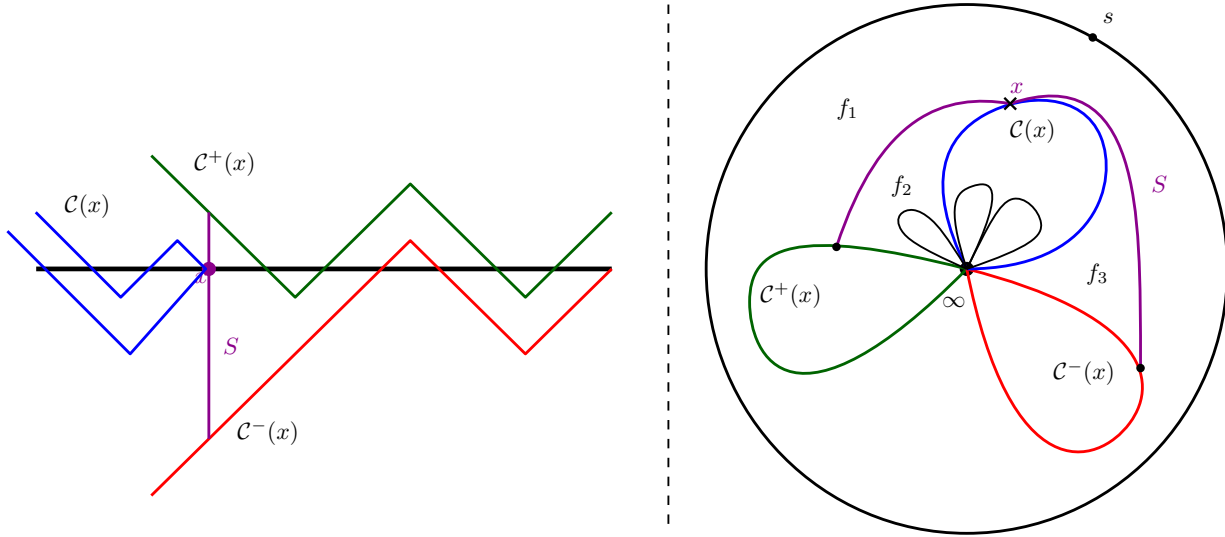


FIGURE 5 – Le point de trifurcation vu : à gauche dans \mathbb{R}^2 , à droite dans \mathbb{S}^2 (vu comme un disque quotienté où tous les points de la frontière sont égaux à s)

Lemme 5.3. *Supposons que $n_c \geq 3$ p.s. Alors $\mathbb{P}(0 \in \text{Tri}) > 0$.*

Démonstration. On considère les événements :

$$A_M = \left\{ \llbracket -M, M \rrbracket \text{ rencontre au moins 3 clusters infinis, et } n_{tot} = n_{tot}(\omega_{\llbracket -M, M \rrbracket}) \leq \frac{M}{3} \right\}.$$

La probabilité de A_M tend vers 1 quand M tend vers ∞ , par le Lemme 4.4. Donc on fixe pour la suite M tel que $\mathbb{P}(A_M) > 0$.

L'objectif est maintenant de modifier localement $\omega \in A_M$ sur $\llbracket -M, M \rrbracket$, de sorte que ω aie un point de trifurcation dans $\llbracket -3, 3 \rrbracket$. Sous les notations du lemme Lemme 4.5, on va définir une application mesurable $\psi : \Omega_{|S^c} \rightarrow \Omega_{|S}$ telle que :

$$\omega \in A_M \Rightarrow \tilde{\omega} = \psi(\omega_{|S^c})1_S + \omega_{|S^c}1_{S^c} \text{ ait un point de trifurcation entre } -3 \text{ et } 3$$

Par invariance par translation et le lemme Lemme 4.5, on aurait alors :

$$\mathbb{P}(0 \in \text{Tri}) \geq \frac{1}{7} \mathbb{P} \left(\bigcup_{-3 \leq x \leq 3} x \in \text{Tri} \right) \geq \frac{1}{7} \mathbb{P}(\tilde{A}_M) \geq \frac{1}{7} 4^{-2M} \mathbb{P}(A_M) > 0.$$

Pour conclure, il reste à construire cette fameuse fonction ψ .

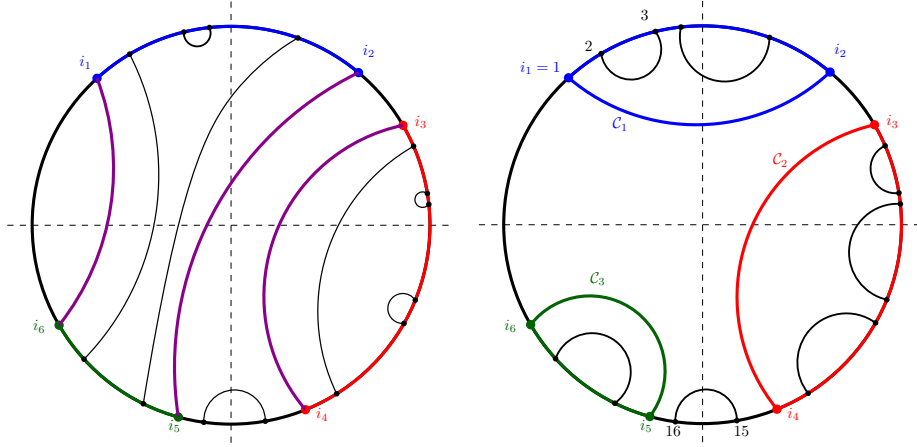


FIGURE 6 – L'ancien couplage intérieur réalisé par $\omega_{\llbracket -M, M \rrbracket}$ (gauche) et le nouveau couplage intérieur σ_{tri} à faire réaliser par $\tilde{\omega}$ (droite).

Soit $\omega \in A_M$, on définit à partir de ω un deuxième couplage planaire de $\llbracket 1, n_{tot} \rrbracket$, noté σ_{ext} . Pour cela, on appaire les ponts s'ils sont reliés à l'extérieur de $\llbracket -M, M \rrbracket$. Alors, il restera un nombre pairs de ponts correspondant à des clusters semi-infinis, que l'on note $1 \leq i_1 < \dots < i_{2k} \leq n_{tot}$ (avec $2k \geq 6$ puisqu'il y a un point de trifurcation), et que l'on appaire s'ils sont reliés via l'intérieur, i.e. dans le graphe $\mathcal{G}_{\llbracket -M, M \rrbracket}$.

Soit A un arc de cercle entre deux demi-clusters infinis consécutifs (par exemple un des arcs colorés de la figure 6). Il est stable par σ_{ext} (car le couplage planaire ne peut pas traverser

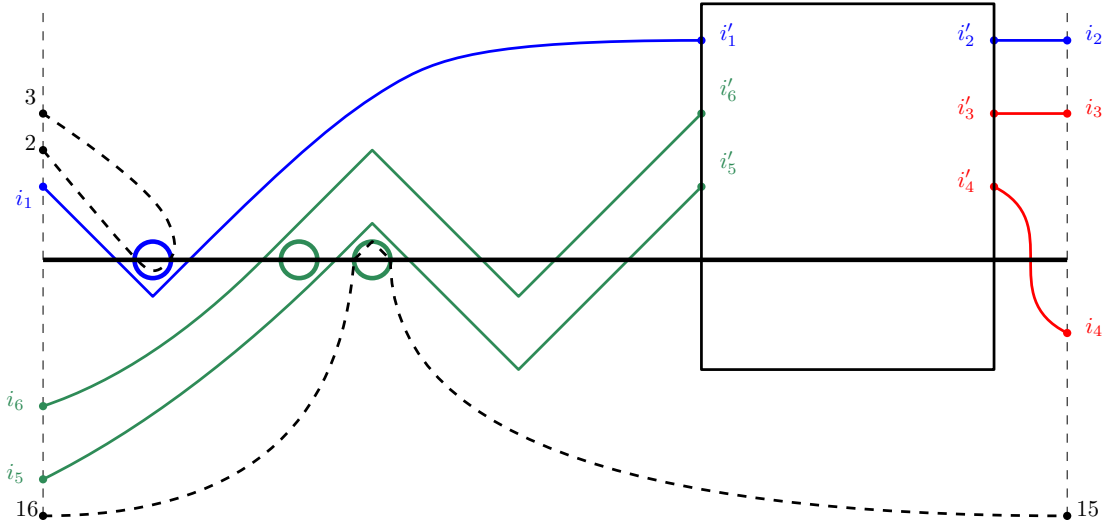


FIGURE 7 – On fait passer les ponts $i_1 \dots i_6$ en haut en créant au passage des distances arbitrairement grandes marquées par des cercles (détaillé à gauche, abrégé à droite). Les deux chemins en pointillés sont des exemples de clusters en dehors de $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3\}$ de la figure 6.

les demi-clusters) donc σ_{ext} y induit un couplage et $|A| = i_{j+1} - i_j$ est pair. Il existe donc un **nouveau** couplage intérieur σ_{tri} tel que pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, i_{2j+1} et i_{2j+2} soient appariés et que les autres ponts soient appariés à leur voisin. Un exemple est représenté figure 6.

On va maintenant créer une toute nouvelle configuration locale $\psi(\omega_{|S^c}) = \hat{\omega} \in \Omega_{|S}$.

- Qui réalise intérieurement σ_{tri}
- Dont les clusters $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et \mathcal{C}_3 issus des ponts $i_{1\dots 6}$ aient une trifurcation dans $\llbracket -3, 3 \rrbracket$

Dans la représentation graphique de la figure 3, on va tracer les chemins (créant des sommets dans $\hat{\omega}$ quand il intersecte l'axe $y = 0$).

La construction de la figure 7 redistribue les ponts autour d'un sous-intervalle $\llbracket -3, 3 \rrbracket \subset \llbracket -M, M \rrbracket$ (le centre de la configuration). Cela résout deux problèmes :

- **On va pouvoir choisir les positions verticales des nouveaux ponts (autour de $\llbracket -3, 3 \rrbracket$) arbitrairement pour correspondre aux différentes constructions du centre.** Par exemple si on souhaitait que tous les ponts soient en haut, on pourrait faire la reconnection illustrée figure 7. De manière analogue, on peut obtenir n'importe laquelle des 2^6 attributions de signes.
- Au passage, on s'assure de créer au moins deux sommets sur les bords pour créer des zones (représentées par des cercles) où faire passer les $\frac{n_{\text{tot}}-6}{2}$ autres clusters, sans rentrer dans la sous-boîte $\llbracket -3, 3 \rrbracket$.

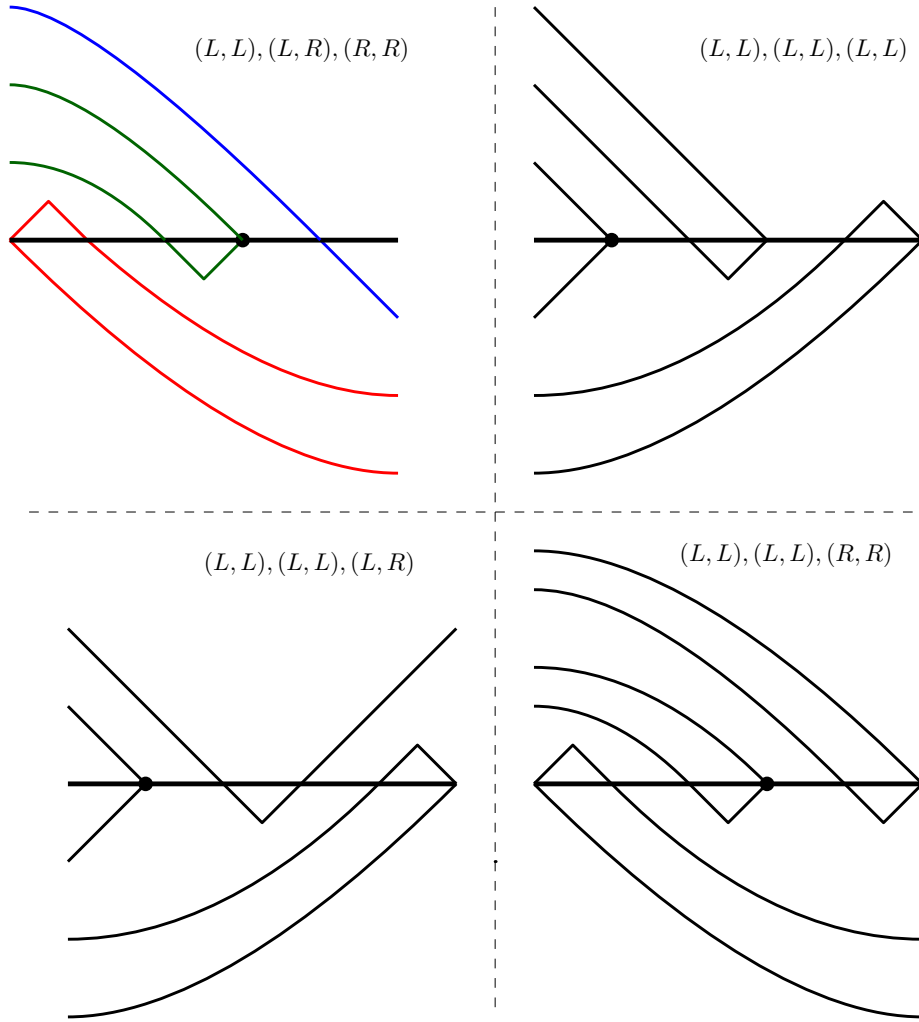


FIGURE 8 – Complétion du centre de l'intervalle S en fonction des positions horizontales des ponts de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$.

Il reste maintenant à compléter le centre de la configuration $\llbracket -3, 3 \rrbracket$, que seuls $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ intersectent, en fonction des position horizontales des ponts (gauche ou droite). À translation et symétrie près, et en utilisant le fait que par définition de σ_{trif} , $\mathcal{C}_i \not\subset \mathcal{C}_j$ sur la figure 6 pour tous $i \neq j$, on se ramène aux quatre cas construits dans la figure 8.

Dans chacune de ces constructions, les sous-ponts $i'_1 \dots i'_6$ ont des positions verticales particulières qu'on fait correspondre avec la figure 7.

On remarque que chaque paire de ponts couplés engendre au plus 6 sommets dans la configuration (deux à gauche, deux au centre, deux à droite) et maintient les invariants de parité du lemme Lemme 4.3. On a donc au plus $\frac{6}{2}n_{\text{tot}} \leq M$ sommets au total et le nombre de

sommets restants à construire est pair, on peut donc remplir $\hat{\omega}$ avec des $(+1, +1), (-1, -1)$ pour atteindre exactement $\text{Card}(\llbracket -M, M \rrbracket)$ sommets. \square

Pour conclure, nous admettons le résultat suivant, corollaire immédiat du théorème ergodique :

Théorème 5.4. *Soit $A \in \mathcal{F}$. On a p.s. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(T_{-k}A) = \mathbb{P}(A)$.*

5.2. Détermination des valeurs possibles de n_c . A l'aide de ces résultats, nous pouvons finalement montrer l'unicité presque sûre (ou son inexistence presque sûre) de la nouille infinie.

Théorème 5.5. *Presque sûrement, $n_c = k$, avec $k \leq 2$.*

Démonstration. Par l'absurde, on suppose que p.s. $n_c \geq 3$. On observe que $|\text{Tri} \cap \llbracket 1, N \rrbracket| = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(k \in \text{Tri}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(T_{-k}\{0 \in \text{Tri}\})$. On peut donc appliquer le Théorème 5.4 pour obtenir :

$$\frac{1}{n} |\text{Tri} \cap \llbracket 1, N \rrbracket| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(0 \in \text{Tri}) > 0 \quad p.s.$$

Par ailleurs, on a également que $|\text{Tri} \cap \llbracket 1, N \rrbracket|$ est plus petit que le nombre de clusters infinis intersectant $\llbracket 1, N \rrbracket$ par le Lemme 5.2. Et comme chaque cluster infini compte pour au moins 2 arêtes sortant de $\llbracket 1, N \rrbracket$, on a $\liminf(\frac{n_{\text{tot}}}{N}) \geq 2\mathbb{P}(0 \in \text{Tri})$, ce qui contredit le Lemme 4.4. \square

Théorème 5.6. *On a $n_c < 2$ p.s.*

Démonstration. Par l'absurde, on suppose p.s. $n_c = 2$. On note \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 les deux clusters.

Pour $k < l$, on définit l'événement $A_{\llbracket k, l \rrbracket}$ que les deux clusters rencontrent $\llbracket k, l \rrbracket$:

$$A_{\llbracket k, l \rrbracket} = \{\mathcal{C}_1 \cap \llbracket k, l \rrbracket \neq \emptyset, \mathcal{C}_2 \cap \llbracket k, l \rrbracket \neq \emptyset\}$$

De plus, pour tout entier N , on pose $B_N = \{n_{\text{tot}}(\omega_{\llbracket 1, N \rrbracket}) \leq N\}$.

On a d'une part que $A_{\llbracket k, l \rrbracket}$ est invariant par translation : $\mathbb{P}(A_{\llbracket k, l \rrbracket}) = \mathbb{P}(A_{\llbracket k+j, l+j \rrbracket})$. D'autre part, $\mathbb{P}(A_{\llbracket 0, N \rrbracket}) \rightarrow 1$, et par le Lemme 4.4, $\mathbb{P}(B_N) \rightarrow 1$ quand $N \rightarrow \infty$. Ainsi il existe N tel que :

$$\mathbb{P}(A_{\llbracket 0, N \rrbracket}) \geq \frac{7}{8} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B_N) \geq \frac{7}{8}.$$

et M tel que $\mathbb{P}(A_{\llbracket 0, M \rrbracket}) \geq 1 - \frac{1}{4}4^{-N}$.

Comme le nombre de chemins partant de $\llbracket k, l \rrbracket$ est fini, on peut également poser $R_{\llbracket k, l \rrbracket}$ la distance maximale atteinte par un chemin qui sort de $\llbracket k, l \rrbracket$ avant d'y revenir. Si aucun

chemin sortant de l'intervalle ne revient, on pose cette distance égale à 0. On trouve alors $r > 0$ tel que :

$$\mathbb{P}(R_{\llbracket 0, M \rrbracket} < r) \geq \frac{7}{8}.$$

On peut alors définir l'événement qui nous intéresse :

$$C = A_{\llbracket 0, M \rrbracket} \cap B_N \cap A_{\llbracket N+r, N+r+M \rrbracket} \cap \{R_{\llbracket k, l \rrbracket} < r\} \cap \{R_{\llbracket N+r, N+r+M \rrbracket} < r\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) &\geq 1 - \mathbb{P}(A_{\llbracket 0, n \rrbracket}^C) - \mathbb{P}(B_N^C) - \mathbb{P}(A_{\llbracket 0, M \rrbracket}^C) - 2\mathbb{P}(\{R_{\llbracket 0, M \rrbracket} < r\}^C) \\ &\geq 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}4^{-N} - \frac{2}{8} > \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Enfin, on suppose que C est réalisé par une configuration ω . Comme $A_{\llbracket 0, N \rrbracket}$ est réalisé, on peut couper \mathcal{C}_1 en un chemin fini qui débute et finit dans $\llbracket 0, N \rrbracket$, et deux chemins semi-infinis qui débutent dans $\llbracket 0, N \rrbracket$ et en sortent sans y revenir. Le chemin fini ne visite pas l'intervalle $\llbracket N+r, N+r+M \rrbracket$ car $R_{\llbracket 0, N \rrbracket} < r$, mais exactement un des chemins semi-infinis le rencontre, car ω réalise $A_{\llbracket N+r, N+r+M \rrbracket} \cap \{R_{\llbracket N+r, N+r+M \rrbracket} < r\}$. Cela vaut également pour \mathcal{C}_2 .

Alors on va modifier $\omega_{\llbracket 0, N \rrbracket}$ de sorte que la configuration ne vérifie plus $A_{\llbracket N+r, N+r+M \rrbracket}$. Pour cela, on recolle les deux chemins semi-infinis qui ne traversent pas l'intervalle ensemble, ce qui créera un cluster infini qui n'intersecte pas $\llbracket N+r, N+r+M \rrbracket$.

On observe alors la situation dans la sphère (identifiée à $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$). On sait que deux chemins semi-infinis partant du segment $[0, N]$ rencontrent le segment $[N+r, N+r+M]$, on les note a et b . Ils correspondent donc à deux chemins semi-infinis, qui se rejoignent en ∞ . Ainsi, sur la sphère, l'union de $[0, N]$, $[N+r, N+r+M]$ et des deux morceaux des chemins a et b qui les relie est un lacet, qui coupe la sphère en deux composantes connexes, A et B , où B est celle qui contient ∞ . Par l'absurde si a et b séparent les deux autres chemins semi-infinis c et d , i.e. si c part du segment $[0, N]$ vers une face différente de d , l'un des deux se retrouve dans la face A , et ne peut pas rejoindre l'infini sans couper le lacet (ce qui lui est interdit par planarité et par hypothèse car il ne rencontre pas $[N+r, N+r+M]$ et ne repasse pas par $[0, N]$). C'est impossible.

De plus, par planarité, le nombre d'arêtes sortant entre deux chemins semi-infinis est toujours pair, car une arête sortant entre les chemins semi-infinis quelconques a et b correspond à un chemin fini, et doit donc revenir dans $\llbracket 0, N \rrbracket$ sans couper a et b .

Ainsi il existe un couplage planaire de $\llbracket 1, n_{tot} \rrbracket$ qui associe a à b , et c à d . Par le Lemme 4.3, on peut donc changer $\omega_{\llbracket 0, N \rrbracket}$ en une configuration qui réalise intérieurement le couplage ainsi défini.

On conclut en appliquant le Lemme 4.5 à C , avec l'application de modification ψ ainsi construite. Comme $\mathbb{P}(C) > \frac{1}{4}$, on a alors $\mathbb{P}(\tilde{C}) > \frac{1}{4}4^{-N}$. Alors \tilde{C} et $A_{\llbracket N+r, N+r+M \rrbracket}$ sont disjoints, mais $\mathbb{P}(A_{\llbracket N+r, N+r+M \rrbracket}) > 1 - \frac{1}{4}4^{-N}$. C'est absurde. \square

6. CONVERGENCE DE (M_n) DANS L'ESPACE DES MÉANDRES

La suite de ce mémoire cherchera à montrer l'existence d'une limite à $\frac{cc(M_n)}{n}$, et à déterminer sa valeur. Pour cela, on commence dans cette partie par définir la topologie et la convergence étudiées sur l'ensemble des systèmes méandriques.

6.1. Définition d'une topologie. Pour créer un espace de convergence qui convient à l'étude de la suite (M_n) , on commence par élargir les définitions de système méandrique et de couplage.

Définition 6.1. Soit A une partie de \mathbb{Z} . Un **couplage partiel** \mathcal{P} de A est une partition de A en sous-ensembles à 1 ou 2 éléments, et où on assigne à chaque singleton $\{i\} \in \mathcal{P}$ une valeur ε_i dans $\{-1, +1\}$. On parlera à l'inverse de couplage **complet** s'il ne contient aucun singleton.

On dit qu'il est **planaire** s'il ne contient pas :

- (1) deux paires $\{i, j\}$ et $\{k, l\}$ avec $i < j < k < l$
- (2) une paire $\{i, j\}$ et un singleton $\{k\}$ avec $i < k < j$
- (3) deux singletons $\{i\}$ et $\{j\}$ avec $i < j, \varepsilon_i = +1$ et $\varepsilon_j = -1$

On peut représenter un couplage partiel planaire en reliant les paires par des demi-cercles comme précédemment, et en ajoutant pour chaque singleton $\{i\} \in \mathcal{P}$ des demi-arêtes dont l'extrémité gauche (resp. droite) est i si $\varepsilon_i = +1$ (resp. $\varepsilon_i = -1$).

Lemme 6.2. Soit I un intervalle de \mathbb{Z} . A chaque couplage partiel planaire \mathcal{P} de I on peut associer un élément $\eta \in \mathcal{W}_I$, en posant $\eta_i = \varepsilon_i$ si $\{i\} \in \mathcal{P}$, et $\eta_k = -1, \eta_l = +1$ si $\{k, l\} \in \mathcal{P}$ avec $k < l$.

On crée ainsi une bijection entre l'ensemble \mathcal{W}_I et l'ensemble des couplages partiels plans sur I . Par ailleurs, η est bien parenthésé si et seulement si \mathcal{P} est un couplage planaire complet.

Démonstration. On va exposer une réciproque à cette application. Soit $\eta \in \mathcal{W}_I$. On adapte légèrement l'idée du lemme Lemme 2.2, en modifiant φ de sorte à rendre compte des singletons :

$$\varphi(n) = \begin{cases} \min\{k > n, \eta[n, k] = 0\} & \text{si } \eta_n = +1 \text{ et que le min est bien défini} \\ \max\{k < n, \eta[k, n] = 0\} & \text{si } \eta_n = -1 \text{ et que le max est bien défini} \\ n & \text{sinon} \end{cases} .$$

On prend alors pour image de η le couplage partiel \mathcal{P} contenant les paires $\{n, \varphi(n)\}$ pour les n tels que $\varphi(n) \neq n$, et les singletons $\{n\}$ pour les n tels que $\varphi(n) = n$, en leur assignant $\varepsilon_n = \eta_n$.

On vérifie que \mathcal{P} est un couplage partiel planaire. Le point (1) se démontre de même que dans le lemme Lemme 2.2. Par l'absurde si (2) n'est pas vérifié, on trouve i, j, k tels que $i < j < k$, $\{i, j\} \in \mathcal{P}$ et $\{k\} \in \mathcal{P}$. On traite le cas où $\eta_j = \eta[j, j] = +1$. Alors $\varphi(i) = j$ donc $\eta[i, j] = \eta[i, k] + \eta[k + 1, j] = 0$ et $\eta[i, k] > 0$, d'où $\eta[k + 1, j] < 0$. De plus, $\eta[k, j] = 1 + \eta[k + 1, j] \leq 0$. Comme $\eta[k, k] = 1$, par TVI il existe l tel que $k < l \leq j$ tel que $\eta[k, l] = 0$. Donc $\varphi(k) = l \neq k$, ce qui est absurde.

Enfin, par l'absurde si (3) n'est pas vérifié, on trouve $i, j \in I$ tels que $i < j$, $\{i\} \in \mathcal{P}$, $\{j\} \in \mathcal{P}$, $\eta_i = +1$ et $\eta_j = -1$. On a donc d'une part $\eta[i, j] > 0$, sinon par TVI on aurait $\varphi(i) > i$. De même, $\eta[i, j] < 0$, sinon $\varphi(j) < j$. C'est absurde.

On vérifie aisément que les deux applications ainsi créées sont bien réciproques l'une de l'autre : à chaque mot bien parenthésé sur un intervalle I , on peut associer un unique couplage complet sur ce même intervalle. \square

On dispose de plus d'une notion de restriction : si $J \subset I$ est un intervalle, on peut considérer $\mathcal{P}|_J$: on ne conserve de \mathcal{P} que les paires et singletons qui ne contiennent que des éléments de J , et si une paire $\{i, j\}$ est telle que $i \in J$ et $j \notin J$, on garde le singleton $\{i\}$, et on lui assigne la valeur $+1$ si $i < j$ et -1 si $i > j$. On vérifie que dans ce cas, $\mathcal{P}|_J$ est associé à l'élément $\eta|_J \in \mathcal{W}_J$, c'est-à-dire que la bijection établie précédemment est compatible avec la restriction.

Définition 6.3. *Un **système méandrique partiel** M est le graphe associé à un couple de couplages partiels planaires $(\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-)$ ou, de manière équivalente, à un couple de mots (η^+, η^-) pris sur un même intervalle I . La restriction de M au sous-intervalle J est alors le système méandrique associé aux couples $(\mathcal{P}|_J^+, \mathcal{P}|_J^-)$ et $(\eta|_J^+, \eta|_J^-)$.*

*Un système méandrique (partiel) **marqué** est un couple (M, r) où M est un système méandrique (partiel) défini sur un intervalle $I \subset \mathbb{Z}$, et $r \in I$. On appelle l'élément r la racine du système, et on note $\mathcal{M}_{\text{marq}}$ l'ensemble des systèmes méandriques partiels marqués (définis sur un intervalle quelconque).*

De la même manière, un mot marqué est un couple (ω, r) où $\omega \in \mathcal{W}_I$ et $r \in I$. Un système méandrique (partiel ou non) marqué (M, r) sur I est associé à un unique couple de mots marqués $((\eta^+, r), (\eta^-, r))$, où $(\eta^+, \eta^-) \in \Omega_I$.

On construit alors deux espaces métriques : $\mathcal{M}_{\text{marq}}$, et l'ensemble correspondant $\mathcal{W}_{\text{marq}}$ des mots marqués sur un intervalle quelconque de \mathbb{Z} . Pour cela, on doit définir une distance sur ces ensembles.

Définition 6.4. *On dit que deux systèmes méandriques (partiels ou complets) marqués (M^1, r_1) et (M^2, r_2) (ou deux mots marqués) sont équivalents s'ils sont égaux à translation près. On écrit $(M^1, r_1) \equiv (M^2, r_2)$.*

Définition-Propriété 6.5. On peut alors poser sur \mathcal{M}_{marq} la distance :

$$d((M^1, r_1), (M^2, r_2)) = \frac{1}{1 + \max\{k \in \mathbb{N}, M^1_{\llbracket r_1-k, r_1+k \rrbracket} \equiv M^2_{\llbracket r_2-k, r_2+k \rrbracket}\}}.$$

On prend de plus les conventions suivantes lorsque le max n'est pas défini : la distance vaut 0 lorsque les systèmes méandriques sont équivalents, et elle vaut 1 si on a $M^1_{\{r_1\}} \not\equiv M^2_{\{r_2\}}$.

De même, on pose sur \mathcal{W}_{marq} la distance :

$$d((\omega^1, r_1), (\omega^2, r_2)) = \frac{1}{1 + \max\{k \in \mathbb{N}, \omega^1_{\llbracket r_1-k, r_1+k \rrbracket} \equiv \omega^2_{\llbracket r_2-k, r_2+k \rrbracket}\}}.$$

avec pour conventions que la distance vaut 0 lorsque les mots sont équivalents, et qu'elle vaut 1 si on a $\omega^1_{r_1} \neq \omega^2_{r_2}$.

Démonstration. On ne montre que l'inégalité triangulaire, la séparation et la positivité étant immédiates. On a même mieux, puisque par définition, pour (M^1, r_1) , (M^2, r_2) et (M^3, r_3) 3 systèmes méandriques partiels marqués, on a :

$$\begin{aligned} \min \left(\max\{k \in \mathbb{N}, M^1_{\llbracket r_1-k, r_1+k \rrbracket} \equiv M^2_{\llbracket r_2-k, r_2+k \rrbracket}\}, \max\{k \in \mathbb{N}, M^2_{\llbracket r_2-k, r_2+k \rrbracket} \equiv M^3_{\llbracket r_3-k, r_3+k \rrbracket}\} \right) \\ \leq \max\{k \in \mathbb{N}, M^1_{\llbracket r_1-k, r_1+k \rrbracket} \equiv M^3_{\llbracket r_3-k, r_3+k \rrbracket}\}. \end{aligned}$$

D'où

$$d((M^1, r_1), (M^3, r_3)) \leq \max \left(d((M^1, r_1), (M^2, r_2)), d((M^2, r_2), (M^3, r_3)) \right).$$

□

Lemme 6.6. Munis de ces distances, les deux espaces considérés sont des compacts.

Idée de la preuve : On peut extraire d'une suite de mots marqués une suite convergente par extraction diagonale : d'abord en faisant converger la longueur de l'intervalle dans \mathbb{R} , puis en faisant stationner les coordonnées une par une. Par la bijection précédente, on montre également la compacité de \mathcal{M}_{marq} .

6.2. Convergence vers la nouille infinie. Avec de la distance définie précédemment, on obtient une notion de convergence pour une suite de systèmes méandriques marqués. Cela n'est pas suffisant pour nous, puisque l'on considère ici une suite de systèmes méandriques non marqués et aléatoires. Nous définissons donc un autre type de convergence, qui cette fois pourra s'appliquer à notre suite (M_n)

Définition 6.7. Une suite de systèmes méandriques partiels finis (G_n) converge quenchement au sens de Benjamini-Schramm vers un système méandrique aléatoire (G, r) si, en prenant i_n une variable aléatoire uniforme sur l'ensemble des sommets de G_n , la mesure empirique conditionnelle à G_n converge faiblement vers une mesure aléatoire μ (sur \mathcal{M}_{marq}) correspondant à (G, r) , c'est-à-dire :

$$\mathcal{L}\left((G_n, i_n) | G_n\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{faiblement}} \mu.$$

Cela équivaut à dire que, pour toute fonction $f : (\mathcal{M}_{\text{marq}}, d) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue bornée, on a :

$$\mathbb{E}[f(G_n, i_n) | G_n] \xrightarrow{\text{distribution}} \int f(G, r) d\mu(G, r).$$

On peut étendre cette définition à une suite de mots (w_n) , qui convergerait vers un élément $(\omega, r) \in \mathcal{W}_{\text{marq}}$, et on notera par \xrightarrow{BS} cette convergence.

On notera que, dans le cadre de ce mémoire, nous voulons montrer que le graphe limite est presque sûrement la nouille infinie étudiée précédemment, donc au graphe aléatoire marqué $(\mathcal{G}(\omega), 0)$. La mesure μ considérée est donc déterministe et vérifie : $\int f(G, r) d\mu(G, r) = \mathbb{E}[f(\mathcal{G}, 0)]$.

De plus, dans la seconde définition, le terme vers lequel s'effectue la convergence est une constante, donc la convergence en distribution est équivalente à la convergence en probabilité. Notre objectif dans cette partie est donc de démontrer la propriété suivante :

Proposition 6.8. *La suite de graphes aléatoires (M_n) converge quenchement au sens de Benjamini-Schramm vers le graphe marqué $(\mathcal{G}, 0)$, c'est-à-dire que pour toute fonction $f : \mathcal{M}_{\text{marq}} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue bornée :*

$$\mathbb{E}[f(M_n, i_n) | M_n] \xrightarrow{\text{proba}} \mathbb{E}[f(\mathcal{G}, 0)].$$

Comme la bijection entre $\mathcal{M}_{\text{marq}}$ et $\mathcal{W}_{\text{marq}}^2$ commute avec la restriction, il nous suffit de montrer la convergence pour des mots aléatoires :

Proposition 6.9. *Pour tout $n \geq 1$, soit w^n une variable aléatoire uniforme sur \mathcal{D}_n . On pose w^∞ la variable aléatoire sur \mathcal{W} définie par la suite $(w_n^\infty)_{n \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoires de Rademacher indépendantes. Alors la suite (w^n) converge quenchement au sens de Benjamini-Schramm vers le mot marqué $(\omega, 0)$, c'est-à-dire que pour toute fonction $f : \mathcal{W}_{\text{marq}} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue bornée :*

$$\mathbb{E}[f(w^n, i_n) | w^n] \xrightarrow{\text{proba}} \mathbb{E}[f(w^\infty, 0)].$$

Démonstration. On considère d'abord le cas où f est une fonction locale, c'est-à-dire qu'elle ne dépend que d'un k -voisinage du point racine : $f(w, r) = g(w_{r-k}, \dots, w_{r+k})$. Dans ce cas on a :

$$\mathbb{E}[f(w^n, i_n) | w^n] = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{2n-k-1} g(w_{j-k}^n, \dots, w_{j+k}^n) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Le terme d'erreur est du au fait que l'on ne peut pas prendre en compte les cas où i_n est trop proche du bord de l'intervalle. C'est un terme d'effet de bord, majoré en valeur absolue par $\frac{2k}{n} \|f\|_\infty$.

Puisque w^n est une marche aléatoire qui retourne en 0 au temps $2n - 1$, il est connu (et admis ici) que :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=k}^{2n-k-1} g(w_{j-k}^n, \dots, w_{j+k}^n) \xrightarrow{\text{proba}} \mathbb{E}[g(\zeta_1, \dots, \zeta_{2k+1})].$$

où les ζ_i sont des variables aléatoires de Rademacher indépendantes, donc $\mathbb{E}[g(\zeta_1, \dots, \zeta_{2k+1})] = \mathbb{E}[f(w^\infty, 0)]$, ce qui prouve le résultat dans le cas où f est locale.

Dans le cas général, soit $f : \mathcal{W}_{marq} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée. Comme \mathcal{W}_{marq} est compact, on sait que f est uniformément continue. On approche la fonction f par les f_k telles que $f_k(w, r) = f(w_{\llbracket r-k, r+k \rrbracket}, r)$. On a $d((w, r), (w_{\llbracket r-k, r+k \rrbracket}, r)) \leq \frac{1}{k+1}$, donc f_k converge uniformément vers f . On écrit alors :

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}[f(w^n, i_n) | w^n] - \mathbb{E}[f(w^\infty, 0)] \right| &\leq \left| \mathbb{E}[f(w^n, i_n) | w^n] - \mathbb{E}[f_k(w^n, i_n) | w^n] \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{E}[f_k(w^n, i_n) | w^n] - \mathbb{E}[f_k(w^\infty, 0)] \right| + \left| \mathbb{E}[f_k(w^\infty, 0)] - \mathbb{E}[f(w^\infty, 0)] \right|. \end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme, on trouve $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k > K$, le premier et le dernier termes sont toujours inférieurs à ε . Puis, à k fixé, le deuxième terme converge en probabilité vers 0 par l'argument précédent. Ainsi, on a bien convergence en probabilité de (w^n, i_n) vers $(w^\infty, 0)$. \square

7. EXISTENCE DE LA LIMITE

Cette section a pour objectif de démontrer le théorème suivant :

Théorème 7.1. *Il existe une constante $0 < \kappa < 1$ telle que $\frac{\text{cc}(M_n)}{n} \xrightarrow{\text{proba}} \kappa$.*

Pour cela, nous allons d'abord exprimer ce rapport comme l'espérance de la fonction « taille inverse », puis prouver sa continuité presque partout.

Lemme 7.2. *Soit M un système méandrique de taille n et i_n un entier aléatoire uniforme sur $\llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket$. Alors $\frac{\text{cc}(M)}{n} = \mathbb{E} \left[\frac{2}{|C_{i_n}(M)|} \right]$*

Démonstration. Soit $U = \{u_1, \dots, u_{\text{cc}(M)}\}$ un système de représentants des composantes connexes de M , on partitionne $\llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket = \cup_{u \in U} C_u(M)$. Puisque i_n est uniformément distribué :

$$\mathbb{E} \left[\frac{2}{|C_{i_n}(M)|} \right] = \frac{2}{2n} \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{1}{|C_i(M)|} = \frac{1}{n} \sum_{u \in U} \underbrace{\sum_{i \in C_u(M)} \frac{1}{|C_i(M)|}}_{=1} = \frac{\text{cc}(M)}{n}$$

\square

Définition-Propriété 7.3. Sur l'espace $\mathcal{M}_{\text{marq}}$ des systèmes méandriques **partiels** marqués, on définit la « taille inverse » $\text{IS}(M, r) := \frac{1}{|C_r(M)|}$ avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$.

- (1) IS est continue en tout système méandrique **complet**.
- (2) L'ensemble de discontinuité de IS sur $\mathcal{M}_{\text{marq}}$ est négligeable pour la mesure $\mathcal{L}((\mathcal{G}, 0))$ (qui correspond à \mathbb{P} sur Ω , et 0 sur $\mathcal{M}_{\text{marq}} \setminus \Omega$).

Démonstration de (1). Soit $(M_j, r_j)_{j \geq 1}$ une suite dans $\mathcal{M}_{\text{marq}}$ convergeant vers un système méandrique (M, r) **complet**. On souhaite prouver $\text{IS}(M_j, r_j) \rightarrow \text{IS}(M, r)$.

Remarquons premièrement que pour tout k , il existe un rang η_k à partir duquel :

$$d((M_j, r_j), (M, r)) \leq \frac{1}{1+k} \text{ donc } M_j/[r_j - k, r_j + k] \equiv M/[r - k, r + k]$$

Cas 1 : $|C_r(M)|$ est fini. Puisque M est complet, tous les sommets sont de degré 2 donc $C_r(M)$ est un cycle. Soit k la plus longue distance entre r et un sommet de $C_r(M)$. Puisque $[r - k, r + k]$ contient entièrement $C_r(M)$, pour tout $j \geq \eta_k$, on en déduit que $C_{r_j}(M_j)$ est un cycle de même taille que $C_r(M)$ d'où $\text{IS}(M_j, r_j) = \text{IS}(M, r)$.

Cas 2 : $|C_r(M)|$ est infini. Soit $m > 0$ un entier arbitrairement grand. Il existe k tel que $C_r(M)$ contienne au moins m sommets dans $[r - k, r + k]$. Pour tout $j \geq \eta_k$, $C_{r_j}(M_j)$ contient donc au moins m points, d'où $\text{IS}(M_j, r_j) \leq 1/m \rightarrow 0$. \square

Démonstration de (2). On note trivialement que IS est continue en tout système fini (toute suite convergeante stationne). Si on prend un système infini aléatoire sur $\mathcal{M}_{\text{marq}}$, il est presque sûrement complet par le lemme Lemme 2.2, donc IS y est continue par le point précédent. L'ensemble de discontinuité de IS est donc négligeable. \square

Remarque. Justifions rapidement pourquoi IS n'est pas continue partout, on construit :

- Un système méandrique **partiel** M sur \mathbb{N} avec que des $(+1, +1)$. De chaque sommet part des demi-arêtes infinies qui ne reçoivent aucun point.
- M_j égal à M partout sauf sur $\llbracket j, 2j - 1 \rrbracket$ où il ne contient que des $(-1, -1)$.

Autrement dit on referme le cycle de 0 de plus en plus loin (localement, on ne voit plus la fermeture apcr) : $(M_j, 0) \rightarrow (M, 0)$ alors que $C_0(M) = \{0\}$ et $C_0(M_j) = \{0, 2j\}$.

Nous admettons le résultat suivant, adapté des théorèmes 4.11 et 4.12 dans l'article de Kallenberg [3] :

Proposition 7.4. Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures aléatoires sur $\mathcal{M}_{\text{marq}}$, μ une mesure aléatoire sur ce même espace. Soit g une fonction de $\mathcal{M}_{\text{marq}}$ dans \mathbb{R}_+ dont l'ensemble de points de discontinuité D_g vérifie $\mu(D_g) = 0$ presque sûrement. On suppose de plus que pour toute fonction continue bornée $f : \mathcal{M}_{\text{marq}} \rightarrow \mathbb{R}$, on a $\int f d\mu_n \xrightarrow{\text{distribution}} \int f d\mu$.

Alors $\int f d\mu_n \xrightarrow{\text{distribution}} \int f d\mu$.

Nous sommes maintenant prêts à conclure.

Démonstration du théorème Théorème 7.1. D'après les propositions Proposition 6.8 et Définition-Propriété 7.3, on peut appliquer le résultat précédent à $\mu_n = \mathcal{L}((M_n, i_n)|M_n)$, $\mu = \mathcal{L}((\mathcal{G}, 0))$ et $g = \text{IS}$, ce qui nous permet d'obtenir :

$$\frac{\text{cc}(M_n)}{n} = 2\mathbb{E} [\text{IS}(M_n, i_n)|M_n] \xrightarrow{\text{proba}} 2\mathbb{E} [\text{IS}(\mathcal{G}, 0)] =: \kappa.$$

On rappelle en effet que $\mathcal{L}((\mathcal{G}, 0))$ est une mesure déterministe, et qu'alors les convergences en probabilité et en distribution sont équivalentes. \square

On peut de plus montrer $\kappa \neq 0$, avec une très mauvaise minoration de l'espérance :

$$\kappa \geq 2 \cdot \mathbb{P}(C_0(\mathcal{G}) = \{0, 1\}) \cdot \frac{1}{|\{0, 1\}|} = \mathbb{P}(\omega_0 = (+1, +1), \omega_1 = (-1, -1)) = \frac{1}{16}$$

La limite κ étant non triviale, on se propose dans la fin de ce mémoire d'en obtenir un encadrement.

8. ENCADREMENT DE κ

On rappelle les notations suivantes : $\omega = (\omega^+, \omega^-)$ est la variable aléatoire sur Ω , $(\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-)$ les couplages planaires associés, \mathcal{G} le système méandrique infini associé, et $\mathcal{C}(0)$ la composante connexe de 0 dans ce graphe.

8.1. Borne inférieure. On commence par définir la forme de la composante connexe $\mathcal{C}(0)$ du graphe, lorsqu'elle est finie. Pour cela, soit $E \subset \mathbb{Z}$ l'ensemble des points de $\mathcal{C}(0)$. Si E est fini, on pose g la bijection croissante de $\llbracket 0, |E| - 1 \rrbracket$ dans E .

Définition 8.1. La **forme** $S(0)$ du cluster $\mathcal{C}(0)$ est le système méandrique de taille $\frac{|E|}{2}$ obtenu à partir du couple $(\eta^+, \eta^-) = \omega \circ g \in \Omega_{\llbracket 0, |E| - 1 \rrbracket}$, i.e. $\eta^+(i) = \omega^+(g(i))$ et $\eta^-(i) = \omega^-(g(i))$. En particulier, $S(0)$ est un méandre.

Si I est un intervalle de \mathbb{Z} , on peut également définir la **forme partielle** $S_I(0)$ du cluster $\mathcal{C}(0)$ dans le graphe restreint \mathcal{G}_I de la même manière, en prenant E' l'ensemble des sommets qui appartiennent à la composante connexe de 0 dans \mathcal{G}_I . Il s'agit alors d'un système méandrique partiel sur l'ensemble $\llbracket 0, |E'| - 1 \rrbracket$, à une seule composante connexe.

On observe qu'alors, en posant $\mathcal{M}_n^{(1)}$ l'ensemble des méandres de taille n (donc sur l'ensemble $\llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket$), on a :

$$\kappa = \mathbb{E} \left[\frac{2}{|\mathcal{C}(0)|} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{C \in \mathcal{M}_n^{(1)}} \frac{2}{2n} \mathbb{P}(S(0) = C) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{C \in \mathcal{M}_n^{(1)}} \mathbb{P}(S(0) = C).$$

On cherche alors à déterminer $\mathbb{P}(S(0) = C)$.

Définition 8.2. Soit $C \in \mathcal{M}_n^{(1)}$. L'union de C avec l'axe des abscisses coupe le plan en régions, 2 infinies et $2n$ finies : voir figure 9. On appelle ces régions finies les **faces** de C , et on note $\mathcal{F}(C)$ leur ensemble. Pour une face F , on note $I(F)$ l'ensemble des indices $i \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$ tels que le segment $[i, i+1]$ soit inclus dans le contour de la face F .

Dans \mathcal{G} , si le cluster $\mathcal{C}(0)$ a pour forme C , on peut considérer l'union de $\mathcal{C}(0)$ et de l'axe, qui découpe à nouveau le plan en régions finies et infinies. On notera \tilde{F} la région bornée correspondant à la face F de C , et $\tilde{I}(\tilde{F})$ l'ensemble des indices $i \in \mathbb{Z}$ tels que i est inclus dans le contour de \tilde{F} , et $i \notin E$.

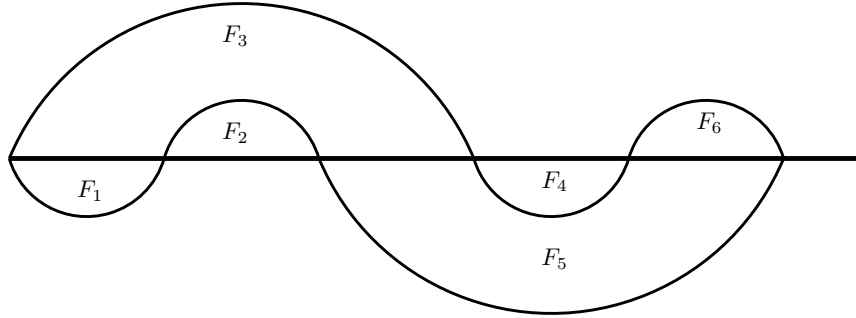


FIGURE 9 – Les six faces d'un méandre de taille 3.

Proposition 8.3. Pour tout méandre $C \in \mathcal{M}_n^{(1)}$, on a :

$$\mathbb{P}(S(0) = C) = 2^{-4n+1} n \sum_{l_1, \dots, l_{2n-1} \geq 0} \prod_{F \in \mathcal{F}(C)} \text{Cat}_{l_I(F)} 2^{-2l_I(F)}.$$

où on a posé $l_I = \sum_{i \in I} l_i$.

Démonstration. Soit $C \in \mathcal{M}_n^{(1)}$. On note pour $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, A_i l'événement $\{0 \text{ est le } i^{\text{e}} \text{ plus petit point de } \mathcal{C}(0)\}$. On a alors par translation :

$$\mathbb{P}(S(0) = C) = \sum_{i=1}^{2n} \mathbb{P}((S(0) = \mathcal{C}(0)) \cap A_i) = 2n \mathbb{P}((S(0) = \mathcal{C}(0)) \cap A_1).$$

Si l'événement $\{(S(0) = \mathcal{C}(0)) \cap A_1\}$ est réalisé, on a nécessairement que 0 est le plus petit élément de E . On note alors $E = \{0, m_1 + 1, m_1 + m_2 + 2, \dots, m_1 + \dots + m_{2n-1} + 2n - 1\}$, où chaque m_i est un élément de \mathbb{N} , et correspond au nombre de sommets n'appartenant pas à $S(0)$ entre les i^{e} et $(i+1)^{\text{e}}$ éléments de E .

Par planarité du graphe \mathcal{G} , chaque m_i est pair car chaque cluster \mathcal{C} dans \mathcal{G} différent de $\mathcal{C}(0)$ doit intersecter le segment $\llbracket e_i, e_{i+1} \rrbracket$ un nombre pair de fois. En effet, si ce n'est pas le cas, \mathcal{C} sépare les points e_i et e_{i+1} . On note donc $m_i = 2l_i$. Alors $|\tilde{I}(\tilde{F})| = 2l_{I(F)}$.

Soit $l_1, \dots, l_{2n-1} \geq 0$. On note B l'événement :

$$B = \{(S(0) = \mathcal{C}(0)) \cap A_1 \cap (E = \{0, m_1 + 1, m_1 + m_2 + 2, \dots, m_1 + \dots + m_{2n-1} + 2n - 1\})\}.$$

Il reste à montrer que :

$$\mathbb{P}(B) = 2^{-4n} \prod_{F \in \mathcal{F}(C)} \text{Cat}_{l_I(F)} 2^{-2l_I(F)}.$$

L'événement B est vérifié si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies :

- Toutes les valeurs de ω sur E correspondent aux valeurs nécessaires pour dessiner la forme $S(0)$. Cela se produit avec une probabilité 2^{-4k} .
- Pour toute face \tilde{F} au-dessus de l'axe, par planarité, il faut que les $2l_{I(F)}$ sommets de $\tilde{I}(\tilde{F})$ soient reliés entre eux (car les arêtes ne peuvent pas intersecter le contour de la face). Il faut donc que ω^+ induise un mot bien parenthésé sur cet ensemble de sommets, ce qui arrive avec probabilité $\frac{\text{Cat}_{l_{I(F)}}}{2^{l_{I(F)}}}$. Cela doit bien sur être également vrai pour toute face sous l'axe et ω^- .

Pour chaque face, les sommets considérés sont différents et n'appartiennent pas à E , donc par indépendance, on obtient bien la formule voulue. \square

Avec un outil numérique tel que Mathematica, il est alors possible de déterminer une valeur approchée de κ . En tronquant les sommes infinies, on peut obtenir la minoration $\kappa \geq 0, 207$.

8.2. Borne sup. Pour obtenir une borne sup, on considère l'événement $L_0 = \{ \text{le sommet } 0 \text{ est le point le plus à gauche de } \mathcal{C}(0) \}$. On peut réécrire κ en fonction de L_0 comme suit :

Lemme 8.4. On a $\kappa = \mathbb{E} \left[\frac{2}{|\mathcal{C}(0)|} \right] = 2\mathbb{P}(L_0)$.

Démonstration. On sait que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(L_0 | |\mathcal{C}(0)| = n) = \frac{1}{n}$ par translation. En effet, pour chaque $\eta \in L_0$, avec E l'ensemble des points de $\mathcal{C}(0)$, on a que $T_{-k}(\eta) \in L_0$ si et seulement si $k \in E$. Cet argument peut être utilisé également dans le cas $n = +\infty$ pour montrer que la probabilité voulue est nulle.

On obtient ainsi la formule voulue en revenant à l'expression de κ comme espérance, sous forme de série. \square

On cherche alors à déterminer $\mathbb{P}(L_0)$. Pour tout $k \geq 0$, on considère l'événement $B_k = \{0 \text{ n'est pas le point le plus à gauche de sa composante connexe dans } \mathcal{G}_{\llbracket -\infty, k \rrbracket}\}$, où autrement dit, l'un des chemins partant de 0 visite l'intervalle $\llbracket -\infty, -1 \rrbracket$ avant l'intervalle $\llbracket k+1, \infty \rrbracket$. En particulier, on peut remarquer que l'événement B_k ne dépend que des valeurs de ω sur $\llbracket 0, k \rrbracket$. On a de plus $L_0^C = \bigcup_{k \geq 0} B_k$.

Si L_0^C est satisfait, on peut définir $K = \min\{k \geq 0, B_k\}$. On sait que B_0 est satisfait si et seulement si $\omega_0^+ = -1$ ou $\omega_0^- = -1$, ce qui arrive avec probabilité $\frac{3}{4}$. Dans le cas contraire, on peut considérer E' l'ensemble des sommets qui appartiennent à la composante connexe de 0 dans $\mathcal{G}_{\llbracket 0, K \rrbracket}$, et $P_0 = S_{\llbracket 0, K \rrbracket}$ la forme partielle de $\mathcal{C}(0)$ sur l'intervalle $\llbracket 0, K \rrbracket$. On note alors $(\mathcal{P}_0^+, \mathcal{P}_0^-)$ les couplages partiels associés à P_0 . Comme B_K est vérifié, il existe dans \mathcal{G}

une arête qui part d'un point de E' et qui sort de $\llbracket 0, K \rrbracket$ par la gauche, donc il existe un singleton assigné -1 dans \mathcal{P}_0^+ ou dans \mathcal{P}_0^- .

Lemme 8.5. *On suppose que L_0^C est vérifié. Alors soit $K = 0$, soit la forme partielle P_0 définie ci-dessus vérifie les propriétés suivantes :*

- (1) *la restriction de P_0 à $\llbracket 0, |E| - 2 \rrbracket$ ne possède pas 0 et un singleton assigné -1 dans la même composante connexe.*
- (2) *les couplages partiels \mathcal{P}_0^+ et \mathcal{P}_0^- ont exactement un singleton chacun, l'un assigné -1 et l'autre $+1$.*
- (3) *P_0 est de taille impaire.*

Démonstration. On se place dans le cas où $K > 0$. Le point (1) provient de la minimalité de K . En effet, si ce point n'est pas vérifié, alors 0 est connecté à $\llbracket -\infty, -1 \rrbracket$ dans $\mathcal{G}_{\llbracket -\infty, K \rrbracket}$ sans passer par le point le plus grand de E , donc sans passer par K . Ainsi, en particulier, B_{K-1} est vérifié.

Pour montrer le point (2), on utilise que P_0 ne possède qu'une composante connexe. En particulier, il y a soit 0 soit 2 singletons, or comme on a trouvé auparavant un singleton assigné -1 , on sait qu'il y en a exactement 2. Comme $K = 0$, on sait de plus que celui assigné -1 n'est pas en 0, disons qu'il est en s_1 . On note s_2 la position de l'autre singleton. Par le point (1), on sait également que dans P_0 , si l'on suit le méandre en partant de 0 vers s_1 , on passe nécessairement d'abord par le point $|E'| - 1$. Donc ce point ne peut pas être entre 0 et s_2 (toujours en suivant les arêtes), ainsi s_2 est connecté à 0 dans P_0 restreint à $\llbracket 0, |E'| - 1 \rrbracket$, et par le point (1), on sait qu'alors il est assigné à la valeur $+1$.

Il reste à montrer que les deux singletons ne sont pas tous les deux dans \mathcal{P}_0^+ ou dans \mathcal{P}_0^- , ce qui prouvera (2) et (3). Pour cela, on suppose par l'absurde que les deux singletons sont dans \mathcal{P}_0^+ . On ne peut pas avoir $s_2 < s_1$ car les demi-arêtes devraient se croiser. Nécessairement $s_1 < s_2$, mais ce cas pose aussi problème car le méandre doit visiter dans l'ordre les sommets $s_1, |E'| - 1, 0$ et s_2 . \square

Définition 8.6. *Pour $n \geq 1$, on notera \mathcal{N}_n l'ensemble des méandres sur $\llbracket 0, 2n \rrbracket$ vérifiant les trois propriétés du lemme ci-dessus. \mathcal{N}_n est inclus dans l'ensemble des systèmes méandriques partiels de taille $2n + 1$.*

Pour $N \in \mathcal{N}_n$, on peut définir l'ensemble des faces $\mathcal{F}(N)$, qui sont à nouveau les régions bornées délimitées par l'union de N et de l'axe des abscisses, ainsi que les ensembles $I(F)$ correspondants. On définit également deux faces ouvertes comme suit : en notant s_1 la position dans $(\mathcal{P}_0^+, \mathcal{P}_0^-)$ du singleton assigné -1 , et s_2 la position du singleton assigné $+1$, on complète dans la représentation de N les demi-arêtes en reliant s_1 à -1 et s_2 à $2n + 1$. Les deux nouvelles régions bornées ainsi créées sont notées respectivement F_- et F_+ . On ne comptera pas les éléments -1 et $2n$ dans $I(F_-)$ et $I(F_+)$.

Si la composante connexe de 0 dans $\mathcal{G}_{\llbracket 0, K \rrbracket}$ a pour forme partielle N , on définit \tilde{F} et $\tilde{I}(\tilde{F})$ pour chaque face (y compris les deux faces ouvertes), en considérant comme frontière l'union de la composante connexe de 0 dans $\mathcal{G}_{\llbracket 0, K \rrbracket}$ (où l'on ajoute les arêtes correspondant aux deux demi-arêtes) et de l'axe. On ne tiendra à nouveau pas compte des éléments $i \leq 0$ et $i \geq \max(E')$ dans $\tilde{I}(\tilde{F}_-)$ et $\tilde{I}(\tilde{F}_+)$ respectivement.

En décomposant l'événement L_0^C selon K et la forme P_0 , on obtient la formule suivante (où le terme $\frac{3}{4}$ est la probabilité que $K = 0$) :

Proposition 8.7. *On a l'égalité suivante :*

$$1 - \frac{\kappa}{2} = \mathbb{P}(L_0^C) = \frac{3}{4} + \sum_{k \geq 1} \sum_{N \in \mathcal{N}_k} \mathbb{P}(P_0 = N).$$

Il ne reste alors qu'à déterminer une expression de $\mathbb{P}(P_0 = N)$ pour un méandre $N \in \mathcal{N}_k$ fixé. On montre la formule suivante :

Proposition 8.8. *Pour tout $n \geq 1$, pour tout $N \in \mathcal{N}_n$, on a :*

$$\mathbb{P}(P_0 = N) = 2^{-4n-2} \sum_{l_0, \dots, l_{2n-1} \geq 0} \left(\prod_{F \in \mathcal{F}(N)} \text{Cat}_{l_I(F)} 2^{-2l_I(F)} \right) \binom{2l_I(F_-)}{l_I(F_-)} 2^{-2l_I(F_-)} \binom{2l_I(F_+)}{l_I(F_+)} 2^{-2l_I(F_+)}.$$

Démonstration. L'idée de la preuve est similaire à celle de Proposition 8.3 : on fixe $n \geq 1$ et $N \in \mathcal{N}_n$. Par définition de P_0 , 0 est nécessairement le plus petit élément de E' ce qui permet à nouveau de noter $E' = \{0, m_1 + 1, m_1 + m_2 + 2, \dots, m_1 + \dots + m_{2n-1} + 2n - 1\}$, avec $m_i = 2l_i$ par planarité. On note alors $B = \{(S(0) = \mathcal{C}(0)) \cap (E' = \{0, m_1 + 1, m_1 + m_2 + 2, \dots, m_1 + \dots + m_{2n-1} + 2n - 1\})\}$, et on montre que

$$\mathbb{P}(B) = 2^{-4n-2} \prod_{F \in \mathcal{F}(N)} \text{Cat}_{l_I(F)} 2^{-2l_I(F)} \binom{2l_I(F_+)}{l_I(F_+)} 2^{-2l_I(F_+)}.$$

Les termes dûs aux faces dans $\mathcal{F}(N)$ sont calculés de même que précédemment, on se concentre donc sur F_- (la face F_+ se fera de même). On suppose que le singleton assigné -1 qui engendre F_- est dans $\mathcal{P}_{\llbracket 0, K \rrbracket}^-$ en position k . Alors k ne doit pas être appairé par \mathcal{P}^- à un élément de $\llbracket 0, k - 1 \rrbracket$, ce qui se traduit conditionnellement aux autres arêtes par :

$$\forall i \in \llbracket 0, k - 1 \rrbracket, \omega_k^- + \sum_{j \in \tilde{I}(\tilde{F}_-) \cap \llbracket i, k - 1 \rrbracket} \omega_j^- < 0.$$

Autrement dit, en posant $\tilde{I}(\tilde{F}_-) = \{i_{2l_I(F_-)}, i_{2l_I(F_-)-1}, \dots, k - 1 = i_1\}$, avec $i_{2l_I(F_-)} < i_{2l_I(F_-)-1} < \dots < i_1$, et en posant par convention $\omega_{i_0} = 0$, on a que $(\omega_{i_j}^-)_{j \in \llbracket 0, 2l_I(F_-) \rrbracket}$ induit une marche aléatoire S_j telle que $S_0 = 0$ et $\forall j, S_j < 0$. La probabilité que cela se produise est donc $\binom{2l_I(F_-)}{l_I(F_-)} 2^{-2l_I(F_-)}$.

On obtient alors la formule recherchée. \square

Avec des outils de calculs, on peut ainsi obtenir l'encadrement suivant : $0, 207 \leq \kappa \leq 0, 292$.

RÉFÉRENCES

- [1] Nicolas CURIEN et al. *Uniqueness of the infinite noodle*. arXiv :1701.01083 [math]. Jan. 2017. URL : <http://arxiv.org/abs/1701.01083> (visité le 31/05/2023).
- [2] Valentin FÉRAY et Paul THÉVENIN. *Components in meandric systems and the infinite noodle*. arXiv :2201.11572 [math]. Mai 2022. URL : <http://arxiv.org/abs/2201.11572> (visité le 31/05/2023).
- [3] Olav KALLENBERG. *Random Measures, Theory and Applications*. 1st ed. 2017. Probability Theory and Stochastic Modelling 77. Cham : Springer International Publishing : Imprint : Springer, 2017. ISBN : 9783319415987.