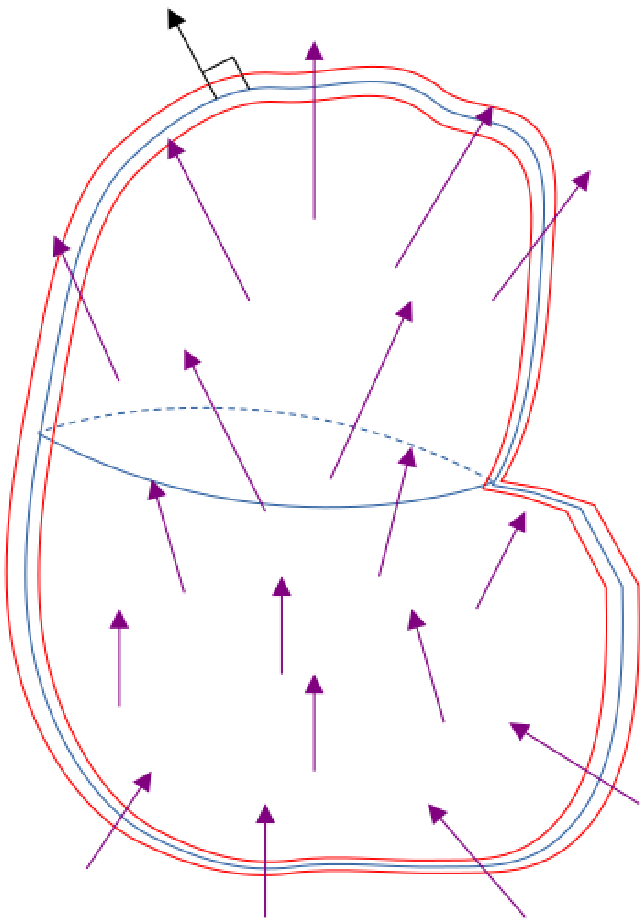
Mémoire sur le Théorème de Gauss-Green

Marthe GUILLERMIT et Driss MAITREJEAN

Mai 2023



Sommaire

1 Introduction **3**

2 Mesure de Hausdorff, périmètre fini et variation bornée **4**

3 Théorème de représentation de Riesz **10**

4 Théorème de structure des fonctions à variations bornées **14**

5 Frontières **15**

6 Théorème de Gauss Green **26**

7 Conclusion **27**

A Notations **28**

1 Introduction

Dans ce document nous allons vous parler du théorème de la divergence aussi appelé théorème de Gauss-Green 6.1. Si on se donne un ensemble $E \subset \mathbf{R^n}$ et un champ de vecteur φ sur lesquels on rajoutera des contraintes ainsi que $\mathcal{H}^{n-1}$ qui représente une mesure de volume de dimension $n-1$ dans notre espace de dimension n, on a; $\int_E \operatorname{div}\varphi\, dx = \int_{\partial_* E} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{n-1}$.

Dans un premier temps, il nous faut comprendre ce qu'est une divergence:

Définition 1.1 (Divergence)**.** *Pour $\varphi \in C_c^1(\mathbf{R^n}; \mathbf{R^n})$(L'ensemble des fonctions à dérivées partielles continues et à support compact de $\mathbf{R^n}$ dans $\mathbf{R^n}$) on appelle **divergence** de φ et on note* $\operatorname{div}\varphi(x) := tr(d_x\varphi)$ *pour tout $x \in \mathbf{R^n}$.*

Remarquons que cela nous donne explicitement $\operatorname{div}\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$.

A partir de cette définition on peut se forger une intuition du théorème en question pour des ensembles E plus simples.

Si l'on prend par exemple $E = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ un n-rectangle. On peut calculer grâce au théorème fondamental de l'analyse et au théorème de Fubini-Lebesgue:

$$\begin{aligned}
\int_E \operatorname{div}\varphi\, dx &= \int_E \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\, dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_i}^{b_i} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\, dx_1 \cdots dx_i \cdots dx_n \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\, dx_i dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \cdots \int_{a_n}^{b_n} (\varphi_i(b_i) - \varphi_i(a_i))\, dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \varphi(b_i) \cdot n_{ext\, b_i} + \varphi(a_i) \cdot n_{ext\, a_i}\, dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \\
&= \sum_{i=1}^n \Bigg[\int_{face\, b_i} \varphi(b_i) \cdot n_{ext\, b_i}\, dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \\
&+ \int_{face\, a_i} \varphi(a_i) \cdot n_{ext\, a_i}\, dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \Bigg] \\
&= \int_{\partial E} \varphi \cdot n_{ext}\, dx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Où :

- dx^{n-1} représente ce qu'on voudrait définir comme un équivalent à la mesure de Lebesgue en dimension $n-1$ sur les faces du n-rectangle.
- $n_{ext\, b_i}$ correspond aux vecteur normal extérieur sur la face du n-rectangle orthogonale à $[a_i, b_i]$ contenant b_i.
- Et $\partial E = \overline{E} \backslash \overset{o}{E} = \{x \in E | \exists i \in \{1, \cdots, n\}, \forall j \neq i,\, x_j = a_j \, ou \, b_j\}$ est la frontière du n-rectangle.

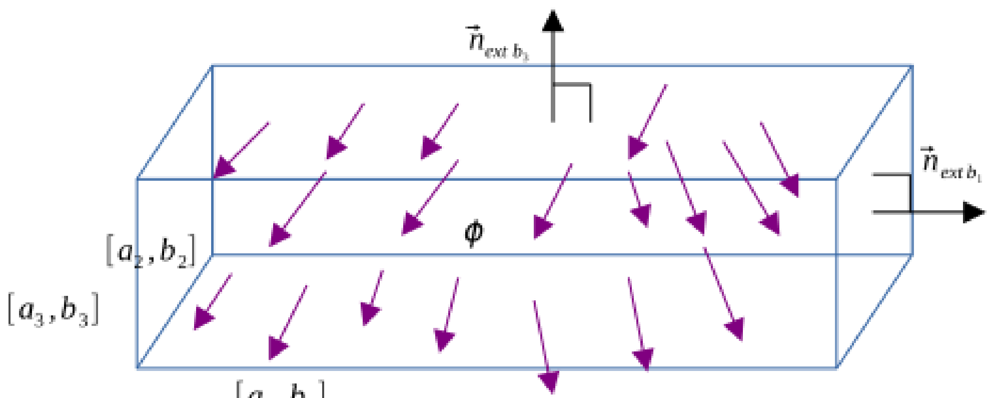


Figure 1: Cas du 3-rectangle $E = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ avec $\varphi \in C_c^1(\mathbf{R^n}; \mathbf{R^n})$.

Cela nous motive donc à essayer de démontrer le théorème pour des cas plus généraux en relaxant les hypothèses sur E ou φ. Dans ce mémoire nous choisissons de se concentrer sur E. Nous supposons aussi que le lecteur connait les définitions et propriétés classiques d'un cours introductif à la théorie de la mesure et notamment sur les mesures de Radon [1].

2 Mesure de Hausdorff, périmètre fini et variation bornée

Une mesure utilisée dans le théorème de Gauss-Green est la mesure de Hausdorff. Il est donc nécessaire de comprendre quelques une de ses propriétés pour bien saisir le théorème. Nous nous passerons donc dans cette section de certaines démonstrations pour plutôt donner une intuition solide des propriétés de cette mesure et de sa pertinence dans le cas de notre théorème.

Définition 2.1. *Pour un ensemble U, on appelle δ-recouvrement de U un recouvrement par des ouverts (U_j) dénombrables tel que pour tout U_j, $\operatorname{diam} U_j \leq \delta$. On définit alors:*

$$\mathcal{H}^s_\delta(U) \equiv \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{diamU_j^s} : avec\ (U_j)\ un\ \delta - recouvrement\ de\ U \right\}$$

et la mesure de Hausdorff est donnée par:

$$\mathcal{H}^s(U) \equiv \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(U) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$$

Preuve. Ainsi la mesure d'Hausdorff s'obtient en sommant les s-puissances des diamètres des ouverts d'un recouvrement de plus en plus fin. $\mathcal{H}^s_\delta(U)$ croît bien quand δ tend vers 0 car de moins en moins de recouvrements sont autorisés. La limite existe donc bien pour tout sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$.

[1] Afin d'éviter tout ambiguité nous nous sommes basés sur le livre très complet [2] qui contient tout ce qu'il faut en complément au mémoire sur la théorie de la mesure et les preuves plus longues ayant moins d'intérêt

$\mathcal{H}^s$ est bien une mesure extérieure: on a bien $\mathcal{H}^s(0) = 0$, et si (F_i) est une famille dénombrable d'ensembles, alors

$$\mathcal{H}^s(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i)$$

□

On peut donc définir la mesure s-dimensionnelle de Hausdorff $\mathcal{H}^s$ pour tout ensemble de $\mathbf{R}^n$. Toutefois, pour $U \subset \mathbf{R}^n$ donné, il n'existe généralement qu'un unique s pour lequel

$$0 < \mathcal{H}^s(U) < \infty$$

Définition 2.2. *Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ tel qu'il existe un unique s pour lequel:*

$$0 < \mathcal{H}^s(U) < \infty$$

s est appelé dimension de Hausdorff de l'ensemble.

Remarque. *La dimension de Hausdorff d'un ensemble n'est pas nécessairement entière. Elle est par exemple utilisée dans le cas des fractales qui ont des dimensions intermédiaires entre deux entiers. Si on se place dans le cas de s entier, qui est celui qui nous intéressera ici. Pour $s = 1, 2, 3, ...$, la mesure de Hausdorff correspond à notre idée familière de la longueur, de l'aire ou du volume. Ainsi elle se confond alors avec la mesure de Lebesgue en dimension n à une constante près: pour U sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$:*

$$\mathcal{H}^n(U) = c_n^{-1} vol^n(U)$$

avec c_n le volume de la boule unité de dimension n. Ainsi pour un sous-ensemble $F \in \mathbf{R}^n$ de dimension inférieure, $\mathcal{H}^0$ donne le nombre de points dans F, $\mathcal{H}^1$ la longueur d'une courbe lisse, $\mathcal{H}^2 = \frac{4}{\pi} \times aire(F)$, $\mathcal{H}^3 = \frac{6}{\pi} \times vol(F)$... Donc pour un ensemble au contour bien dessiné dans $\mathbf{R}^n$, la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^{n-1}$ semble la plus adaptée pour mesurer ce contour.

Donnons nous quelques exemples:

Nous donnons quelques propriétés de la mesure de Hausdorff qu'elle partage avec la mesure de Lebesgue.

Proposition 2.3 (Propriétés élémentaires de la mesure de Hausdorff)**.**

1. *$\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ pour tout $\lambda > 0$, $A \subset \mathbf{R}^n$*
2. *$\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ pour toute,isométrie affine $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $A \subset \mathbf{R}^n$*

Proof. On remarque qu'à tout recouvrement (U_i) de A on peut associer un recouvrement de λA par les (λU_i) et réciproquement. Or

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam}(\lambda U_j)^s = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^s \operatorname{diam}(U_j)^s = \lambda^s \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam}(U_j)^s$$

De même comme le diamètre est invariant par isométrie, on obtient la deuxième égalité. □

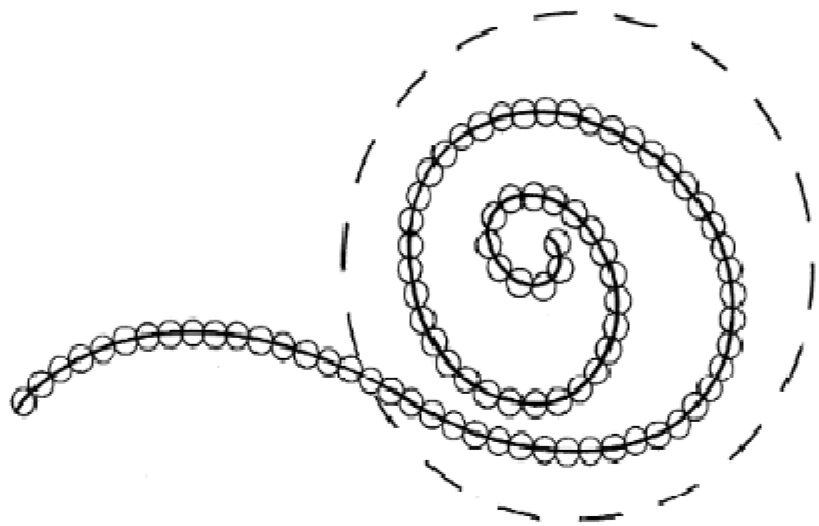


Figure 2: Mesure d'une courbe de dimension 1 avec la mesure de Hausdorff
L'ensemble qu'on cherche à mesurer est de dimension 1: on somme donc le diamètre des boules
On voit bien qu'en restreignant le diamètre des boules qui recouvrent la courbe, on s'approche de plus en plus de sa longueur, alors qu'un recouvrement grossier nous fait sous-estimer la longueur de la courbe.[2]

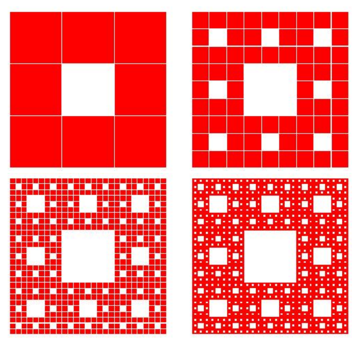


Figure 3: Les carrés de Sierpinski
On peut calculer la mesure et la dimension de Hausdorff de cet ensemble. En effet, en suivant les étapes de la construction, on voit qu'on peut toujours recouvrir l'ensemble par 8^n boules de diamètres $\sqrt{2} \times \frac{1}{3}^n$. On se convainc que ces recouvrements sont optimaux. Il s'agit donc de trouver une puissance s telle que:

$$0 < \lim_{n \to \infty} (8^n \times \sqrt{2} \times \frac{1}{3}^{sn}) < \infty$$

ce qui nous donne nécessairement $\frac{8}{3^s} = 1$ et donc $s = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 3 \times \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 1,87$

Théorème 2.4 (Théorème de densité des points hors E)**.** *Soit $E \subset \mathbf{R}^n$, E est $\mathcal{H}^s$-mesurable, et $\mathcal{H}(E)^s(E) < \infty$. Alors*

$$\lim s \to 0 \frac{\mathcal{H}^s(B(x,r) \cap E)}{r^s} = 0$$

pour $\mathcal{H}^s$-presque tout $x \in \mathbf{R}^n \;-\; E$

Proof. Preuve Soit $t > 0$ et

$$A_t \equiv \left\{ x \in \mathbf{R}^n \;-\; E | \limsup r \to 0 \frac{\mathcal{H}^s(B(x,r) \cap E)}{r^s} > t \right\}$$

Or comme $\mathcal{H}^s \llcorner E$ est une mesure de Radon, pour tout ε donné, il existe $K \subset E$ compact tel que

$$\mathcal{H}^s(E \;-\; K) \leq \varepsilon$$

On a alors $U = \mathbf{R}^n - K$ ouvert avec $A_t \subset U$

On considère le recouvrement de A_t:

$$\mathcal{F} \equiv \left\{ B(x,r) | B(x,r) \subset U, 0 < r < \delta, \frac{\mathcal{H}^s(B(x,r) \cap E)}{r^s} > t \right\}$$

Par le théorème de recouvrement de Vitali [3] on peut en extraire une famille dénombrable de boules disjointes $(B_i)_{i \in \mathbf{N}}$ avec $B_i = B(x_i, r_i)$ telles que

$$A_t \subset \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \tilde{B}_i$$

où $\tilde{B}_i = B(x_i, 5r_i)$, ce qui fait de $(B_i)_{i \in \mathbf{N}}$ un recouvrement de diamètre maximum 10δ de A_t. Ainsi:

$$\mathcal{H}^s_{10\delta} \leq \sum_{i \in \mathbf{N}} (10 r_i)^s \leq \frac{10^s}{t} \sum_{i \in \mathbf{N}} \mathcal{H}^s(B_i \cap E) \tag{1}$$

$$\leq \frac{10^s}{t} \mathcal{H}^s(U \cap E) = \frac{10^s}{t} \mathcal{H}^s(E - K) \leq \frac{10^s}{t} \varepsilon \tag{2}$$

On fait tendre δ vers 0 et on obtient $\mathcal{H}^s(A_t) \leq \frac{10^s}{t} \varepsilon$. Ainsi pour tout $t > 0$, on a $\mathcal{H}^s(A_t) = 0$ □

Il nous reste à comprendre ce qu'est un ensemble au contour bien dessiné, et c'est là qu'interviennent les fonctions à variation bornée et les ensembles de périmètre fini.

Définition 2.5 (Fonction à variations bornées)**.** *Une fonction $f \in L^1(U)$ est à variations bornées si et seulement si:*

$$\sup \left\{ \int_U f \operatorname{div} \varphi \, dx \left| \varphi \in C^1_c\left(U; \mathbf{R}^n\right), \right| \varphi \,| \leq 1 \right\} < \infty.$$

On note $BV(U)$ l'espace des fonctions à variations bornées.

[2]Figure tirée de [1]

[3]*ibid* [2]

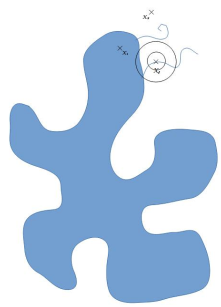


Figure 4: Densité de Hausdorff

Attention, la réciproque n'est pas vraie: ainsi x_3 est bien dans E mais $\frac{\mathcal{H}^2(B(x,r)\cap E)}{r^2} \xrightarrow{r\to 0} 0$. En revanche, $\lim\limits_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^1(B(x,r)\cap E)}{r} > 0$

Définition 2.6 (Ensemble de périmètre fini)**.** *Un ensemble $\mathcal{L}^n$-mesurable $E \subset \mathbf{R}^n$ a un périmètre fini dans U si et seulement si:*

$$\chi_E \in BV(U)$$

On peut aussi donner de ces deux concepts une définition locale:

Définition 2.7. *Une fonction $f \in L^1_{loc}(U)$ est à variations localement bornées dans U si pour tout ensemble ouvert $V \subset\subset U$,*

$$\sup \left\{ \int_V f \operatorname{div} \varphi \, dx \,\middle|\, \varphi \in C^1_c\left(V;\mathbf{R}^n\right), \left| \, \varphi \right| \leq 1 \right\} < \infty.$$

et on note

$$BV_{loc}\left(U\right)$$

l'ensemble de ces fonctions.

Définition 2.8. *Un ensemble $\mathcal{L}^n$-mesurable $E \subset \mathbf{R}^n$ à un périmètre localement fini dans U si*

$$\chi_E \in BV_{\text{loc}}(U)$$

Si cette définition est la définition canonique, il nous semble important d'ajouter quelques développements pour avoir une bonne représentation de ce qu'est un ensemble de périmètre fini. Dans $\mathbf{R}$, une fonction est à variation à bornée si la longuerur qu'elle parcourt sur l'axe des ordonnées est fini. Plus formellement, on a:

Définition 2.9 (les fonctions à variation bornée). *Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un intervalle ouvert, et $E = \{(x_i)_{1 \leq i \leq n} \text{subdivision de} U \text{avec pour tout } i \; x_i \text{point de continuité approximative}\}$. Une fonction $f \in L^1(U)$ est à variations bornées dans U si pour tout ensemble ouvert U,*

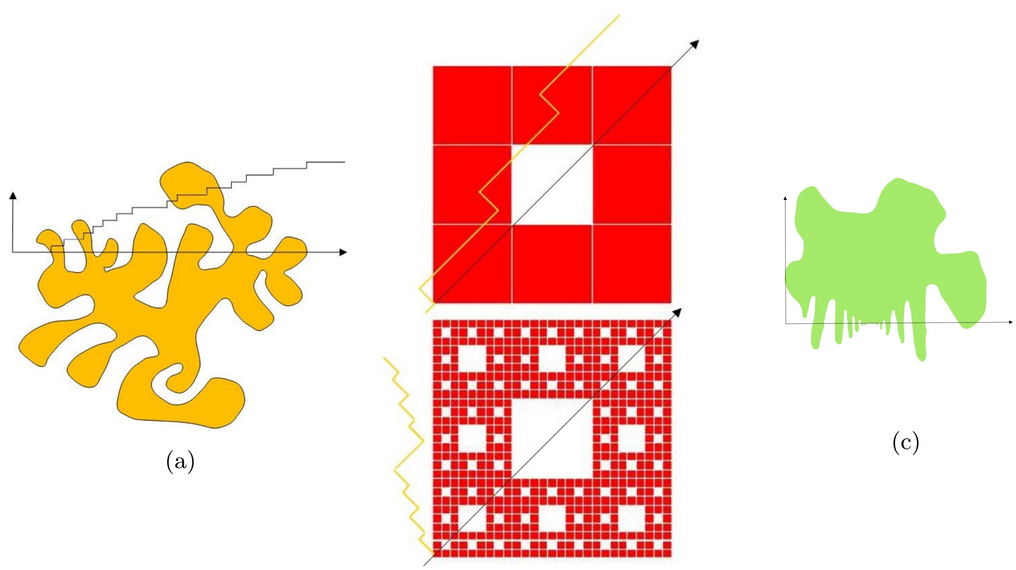
$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i-1}) - f(x_i)|, \; \text{avec } (x)_i \text{ une subdivision de } U \right\} < \infty.$$

Donnons également quelques exemples:

Exemple 2.1.

1. *La fonction $f :]0;1[\to \mathbf{R} : \; x \to \sin(\frac{1}{x})$ n'est pas à variations bornées dans $]0;1[$.*
2. *Une fonction possédant un nombre fini de discontinuités est à variations localement bornées.*
3. *Une fonction lipschitzienne est à variation localement bornée.*

On peut étendre cette définition aux dimensions supérieures en considérant la variation de notre fonction sur un axe. Cette définition permet de construire un lien avec la mesure de Hausdorff. En effet, la somme peut être assimilée à la somme des diamètres de boules qui recouvreraient le graphe de f. Un ensemble est alors de périmètre localement fini si que quelques soit la direction choisie le nombre de sauts effectués par l'indicatrice sur cette axe est localement fini.



(a) (b) (c)

Le premier ensemble est bien de périmètre fini: on voit que l'indicatrice effectue un nombre fini de sauts. Sur la deuxième figure, nous retrouvons les carrés de Sierpinski: ils ne sont pas de périmètre fini puisqu'on voit à travers leur construction itérative que l'indicatrice sur la diagonale effectue un nombre infini de sauts. Le troisième ensemble n'est pas non plus de périmètre fini.

En fait le lien entre ensemble de périmètre fini et mesure de Hausdorff peut nous permettre de donner une autre définition des ensembles de périmètre fini, que nous nous contentons d'énoncer:

Théorème 2.10. *Soit $E \subset \mathbf{R}^n$ un ensemble $\mathcal{L}^n$-mesurable. E est de périmètre fini si et seulement si:*
$$\mathcal{H}^{n-1}(K \cap \partial E) < \infty$$
pour tout $K \subset \mathbf{R}^n$ compact.

Suite à la nécessité de ce théorème pour la bonne définition d'ensemble à périmètre fini, on se rend bien compte qu'il nous faut définir une frontière ∂_* adaptée aux ensembles à périmètre fini.

3 Théorème de représentation de Riesz

Le théorème de représentation de Riesz nous garantit que toute forme linéaire d'un espace d'applications continues peut s'écrire comme une intégrale contre une mesure. Le résultat est donc purement formel, et le théorème ne précise pas quelle mesure ou application choisir.

Théorème 3.1 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit $L : C_c(\mathbf{R^n}; \mathbf{R^m}) \to \mathbf{R}$ une application linéaire vérifiant*
$$\sup\{L(f)|f \in C_c(\mathbf{R^n}; \mathbf{R^m}, |f| \leq 1, \mathrm{spt}(f) \subset K\} < \infty$$
pour tout compact $K \subset \mathbf{R^n}$. Alors il existe une mesure de Radon μ sur $\mathbf{R^n}$ et une application μ-mesurable $\sigma : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^m}$ telle que

1. $|\sigma| = 1 \ \mu - pp$
2. $L(f) = \int_{\mathbf{R^n}} f \cdot \sigma \, d\mu$

pour tout $f \in C_c(\mathbf{R^n}; \mathbf{R^m})$

Pour prouver le théorème, nous introduisons μ mesure sur les ouverts de $\mathbf{R^n}$ et une application $\lambda : C_c^+(\mathbf{R^n}) \to \mathbf{R}$ qui s'avère être l'intégrale de f selon la mesure μ.

Définition 3.2. *On définit μ la mesure de variation, sur tout ouvert $V \subset \mathbf{R}^n$ par*
$$\mu(V) \equiv \sup\left\{L(f)\,|f \in C_c\left(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m\right), |\ f\ |\leq 1, \mathrm{spt}(f) \subset V\right\}$$

Preuve. 1. **μ définit une mesure régulière sur $\mathbf{R^n}$**

On définit μ comme précédemment sur les ouverts de $\mathbf{R^n}$ et pour toute $A \subset \mathbf{R^n}$ on définit
$$\mu(A) \equiv \inf\left\{\mu(V)|A \subset V ouvert\right\}$$
On vérifie que μ est bien une mesure extérieure. On utilise le critère de Catheordory [4]

2. **définition de λ**

Soit $C_c^+\left(\mathbf{R}^n\right) \equiv \left\{f \in C_c\left(\mathbf{R}^n\right) \mid f \geq 0\right\}$, et pour $f \in C_c^+\left(\mathbf{R}^n\right)$, soit
$$\lambda(f) \equiv \sup\left\{|L(g)|\,|g \in C_c\left(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m\right), |\ g\ |\leq f\right\}.$$

[4] *ibid* [2]

3. **Montrons que $\lambda(f)$ est linéaire**

   On a $\lambda(cf) = c\lambda(f)$ pour tout $c \geq 0, f \in C_c^+(\mathbf{R}^n)$ par linéarité de L. Montrons que pour tout $f_1, f_2 \in C_c^+(\mathbf{R}^n), \lambda(f_1 + f_2) = \lambda(f_1) + \lambda(f_2)$. Soit $g_1, g_2 \in C_c(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m)$ avec $|g_1| \leq f_1$ et $|g_2| \leq f_2$, alors $|g_1 + g_2| \leq f_1 + f_2$. Quitte à prendre $-g_1$ et $-g_2$, on peut supposer $L(g_1), L(g_2) \geq 0$. Alors

   $$|L(g_1)| + |L(g_2)| = L(g_1 + g_2) = |L(g_1 + g_2)| \leq \lambda(f_1 + f_2).$$

   En prenant le sup pour g_1 et g_2 avec $g_1, g_2 \in C_c(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m)$ on a

   $$\lambda(f_1) + \lambda(f_2) \leq \lambda(f_1 + f_2)$$

   Pour l'autre inégalité, on se donne $g \in C_c(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m)$, avec $|g| \leq f_1 + f_2$. On définit alors

   $$g_i \equiv \begin{cases} \frac{f_i g}{f_1 + f_2} & \text{si } f_1 + f_2 > 0 \\ 0 & \text{si } f_1 + f_2 = 0 \end{cases}$$

   pour $i = 1, 2$. Alors $g_1, g_2 \in C_c(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m)$ et $g = g_1 + g_2$. De plus, $|g_i| \leq f_i$, $(i = 1, 2)$, de sorte que

   $$|L(g)| \leq |L(g_1)| + |L(g_2)| \leq \lambda(f_1) + \lambda(f_2).$$

   On a donc bien:

   $$\lambda(f_1 + f_2) \leq \lambda(f_1) + \lambda(f_2).$$

4. **Montrons que $\lambda(f) = \int_{\mathbf{R}^n} f\, d\mu$ pour tout $f \in C_c^+(\mathbf{R}^n)$.**

   Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ tels que $t_N \equiv 2\|f\|_{L^\infty}$,$0 < t_i - t_{i-1} < \varepsilon$, et $\mu\left(f^{-1}\{t_i\}\right) = 0$ pour $i = 1, \ldots, N$. Soient $U_j = f^{-1}((t_{j-1}, t_j))$ ouverts et $\mu(U_j) < \infty$.

   La mesure μ est régulière donc il existe K_j compacts tels que $K_j \subset U_j$ et $\mu(U_j - K_j) < \varepsilon/N, j = 1, 2, \ldots, N$. De plus pour tout j il existe $g_j \in C_c(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m)$ avec $|g_j| \leq 1$, spt $(g_j) \subset U_j$, et $|L(g_j)| \geq \mu(U_j) - \varepsilon/N$. ainsi que $h_j \in C_c^+(\mathbf{R}^n)$ tel que spt $(h_j) \subset U_j$, $0 \leq h_j \leq 1$, et $h_j = 1$ sur le compact $K_j \cup \operatorname{spt}(g_j)$. Alors

   $$\lambda(h_j) \geq |L(g_j)| \geq \mu(U_j) - \varepsilon/N\ .$$

   et

   $$\begin{aligned} \lambda(h_j) &= \sup\{|L(g)|\, |g \in C_c(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m), |\, g \,| \leq h_j\} \\ &\leq \sup\{|L(g)|\, |g \in C_c(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m), |\, g \,| \leq 1, \operatorname{spt}(g) \subset U_j\} \\ &= \mu(U_j) \end{aligned}$$

   donc $\mu(U_j) - \varepsilon/N \leq \lambda(h_j) \leq \mu(U_j)$. On définit

   $$A \equiv \left\{ x \mid f(x) \left(1 - \sum_{j=1}^{N} h_j(x) \right) > 0 \right\}$$

On sait que A est ouvert. On calcule alors:

$$\begin{aligned}
\lambda\left(f - f\sum_{j=1}^{N} h_j\right) &= \sup\left\{ |L(g)| \, | g \in C_c\left(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m\right), | \, g \, | \leq f - f\sum_{j=1}^{N} h_j \right\} \\
&\leq \sup\left\{ |L(g)| \, | g \in C_c\left(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m\right), | \, g \, | \leq \|f\|_{L^\infty} \chi_A \right\} \\
&= \|f\|_{L^\infty} \sup\left\{ L(g) \, | g \in C_c\left(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m\right), | \, g \, | \leq \chi_A \right\} \\
&= \|f\|_{L^\infty} \mu(A) \\
&= \|f\|_{L^\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{N} \left(U_j - \{h_j = 1\}\right)\right) \\
&\leq \|f\|_{L^\infty} \sum_{j=1}^{N} \mu\left(U_j - K_j\right) \leq \varepsilon \|f\|_{L^\infty}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\lambda(f) &= \lambda\left(f - f\sum_{j=1}^{N} h_j\right) + \lambda\left(f\sum_{j=1}^{N} h_j\right) \\
&\leq \varepsilon \|f\|_{L\infty} + \sum_{j=1}^{N} \lambda\left(f h_j\right) \qquad . \\
&\leq \varepsilon \|f\|_{L^\infty} + \sum_{j=1}^{N} t_j \mu\left(U_j\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lambda(f) &\geq \sum_{j=1}^{N} \lambda\left(f h_j\right) \\
&\geq \sum_{j=1}^{N} t_{j-1}\left(\mu\left(U_j\right) - \varepsilon/N\right) \\
&\geq \sum_{j=1}^{N} t_{j-1} \mu\left(U_j\right) - t_N \varepsilon
\end{aligned}$$

Enfin, puisque

$$\sum_{j=1}^{N} t_{j-1} \mu\left(U_j\right) \leq \int_{\mathbf{R}^n} f \, d\mu \leq \sum_{j=1}^{N} t_j \mu\left(U_j\right),$$

on a

$$\begin{aligned}
\left|\lambda(f) - \int f \, d\mu\right| &\leq \sum_{j=1}^{N} \left(t_j - t_{j-1}\right) \mu\left(U_j\right) + \varepsilon \|f\|_{L^\infty} + \varepsilon t_N \\
&\leq \varepsilon \mu(\operatorname{spt}(f)) + 3\varepsilon \|f\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

5. **Il existe une fonction μ-mesurable $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ qui vérifie $L(f) = \int_{\mathbf{R^n}} f \cdot \sigma \, d\mu$.**

   On fixe $e \in \mathbf{R}^m$, $|e| = 1$. On définit $\lambda_e(f) \equiv L(fe)$ pour $f \in C_c(\mathbf{R}^n)$. Alors λ_e est linéaire et

$$\begin{aligned} |\lambda_e(f)| &= |L(fe)| \\ &\leq \sup\left\{|L(g)| \, |g \in C_c(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m), |g| \leq |f|\right\} \\ &= \lambda(|f|) = \int_{\mathbf{R}^n} |f| \, d\mu; \end{aligned}$$

   on peut donc étendre λ_e à une application linéaire sur $L^1(\mathbf{R}^n; \mu)$. Donc il existe $\sigma_e \in L^\infty(\mu)$ tel que

$$\lambda_e(f) = \int_{\mathbf{R}^n} f \sigma_e \, d\mu \quad (f \in C_c(\mathbf{R}^n))$$

   Soit $e_1, \ldots, \varepsilon_m$ la base canonique de $\mathbf{R}^m$ et définissons $\sigma \equiv \sum_{j=1}^m \sigma_{e_j} e_j$. Alors si $f \in C_c(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m)$, on a

$$\begin{aligned} L(f) &= \sum_{j=1}^m L\left((f \cdot e_j) e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^m \int (f \cdot e_j) \sigma_{e_j} \, d\mu \\ &= \int f \cdot \sigma \, d\mu. \end{aligned}$$

6. **Montrons que $|\sigma| = 1$ μ-presque partout**

   Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ ouvert, $\mu(U) < \infty$. Par définition et par le point précédent,

$$\mu(U) = \sup\left\{\int f \cdot \sigma \, d\mu \, | f \in C_c(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m), | f | \leq 1, \operatorname{spt}(f) \subset U\right\}. \quad (\star\star)$$

   On choisit maintenant $f_k \in C_c(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m)$ telle que $|f_k| \leq 1, \operatorname{spt}(f_k) \subset U$, et $f_k \cdot \sigma = |\sigma|$$\mu$-presque partout de sorte que

$$\int_U |\sigma| \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int f_k \cdot \sigma \, d\mu \leq \mu(U).$$

   D'autre part, si $f \in C_c(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m)$ avec $|f| \leq 1$ et spt $(f) \subset U$, alors

$$\int f \cdot \sigma \, d\mu \leq \int_U |\sigma| \, d\mu.$$

   Par conséquent $(\star\star)$ implique

$$\mu(U) \leq \int_U |\sigma| \, d\mu.$$

   Ainsi $\mu(U) = \int_U |\sigma| \, d\mu$ pour tout ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$; et ainsi $|\sigma| = 1$ μ- presque partout.

$\square$

4 Théorème de structure des fonctions à variations bornées

Théorème 4.1. *Soit $f \in BV_{\text{loc}}(U)$. Alors il existe μ mesure de Radon sur U et une fonction μ-mesurable $\sigma : U \to \mathbf{R}^n$ telle que*

1. $|\sigma| = 1$ *μ-p.p. et*
2. $\int_U f \operatorname{div} \varphi \, dx = -\int_U \varphi \cdot \sigma \, d\mu$ *pour tout* $\varphi \in C_c^1(U; \mathbf{R}^n)$.

Preuve. La preuve consiste principalement à se ramener aux hypothèses du théorème de représentation de Riesz. On définit donc l'application linéaire

$$L \ : C_c^1(U; \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$$

par

$$L(\varphi) \equiv -\int_U f \ \operatorname{div} \varphi \, dx$$

pour $\varphi \in C_c^1(U; \mathbf{R}^n)$. Puisque $f \in BV_{loc}(U)$, on a

$$\sup \left\{ L(\varphi) \left| \varphi \in C_c^1(V; \mathbf{R}^n), \right| \varphi \mid \leq 1 \right\} \equiv C(V) < \infty$$

pour tout ouvert $V \subset\subset U$, et donc

$$|L(\varphi)| \leq C(V) \|\varphi\|_{L^\infty} \qquad (\star)$$

pour $\varphi \in C_c^1(V; \mathbf{R}^n)$ On fixe $K \subset U$ compact, puis on choisit V ouvert tel que $K \subset V \subset\subset U$. Pour tout $\varphi \in C_c(U; \mathbf{R}^n)$ avec $\operatorname{spt} \varphi \subset K$, on choisit $\varphi_k \in C_c^1(V; \mathbf{R}^n)$ $(k = 1, \ldots)$ de sorte que $\varphi_k \to \varphi$ uniformément sur V. On définit:

$$\bar{L}(\varphi) \equiv \lim_{k \to \infty} L(\varphi_k)$$

selon $(\star)$ cette limite existe et est indépendante de la suite $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ choisie convergeant vers φ. Ainsi L admet un unique prolongement linéaire

$$\bar{L} : C_c(U; \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$$

et

$$\sup\{\bar{L}(\varphi) | \varphi \in C_c(U; \mathbf{R}^n), |\varphi \mid \leq 1, \operatorname{spt} \varphi \subset K\} < \infty$$

pour tout compact $K \subset U$. On peut alors appliquer le théorème 3.1 de représentation de Riesz pour conclure la preuve.

□

Notation. *Soit $f = \chi_E$ avec E un ensemble de périmètre fini dans U, on notera par la suite*

$$\|\partial E\|$$

pour la mesure μ, et

$$\nu_E \equiv -\sigma$$

ainsi le théorème de structure nous donne:

$$\int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_U \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\|$$

5 Frontières

Dans cette section nous nous intéressons à comment définir la frontière de notre ensemble à périmètre localement fini $E \subset \mathbf{R^n}$ adaptée à la formule. Commençons toutesfois avec un résultat classique.

Théorème 5.1 (Changement de coordonnées polaires)**.** *Soit $g : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$ une fonction $\mathcal{L}^n$-mesurable. Alors*

$$\int_{\mathbf{R^n}} g\, d\mathcal{H}^n = \int_0^\infty (\int_{\partial B(r)} g\, d\mathcal{H}^{n-1})\, dr.$$

et de plus

$$\frac{d}{dr}(\int_{B(r)} g\, d\mathcal{H}^n) = \int_{\partial B(r)} g\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Preuve. Si on pose $f(x) = |x|$; alors pour $x \neq 0$ on obtient sa différentielle et son jacobien:

$$D_x f = \frac{x}{|x|},\ J_x f = 1.$$

On peut ainsi effectuer un changement de variable avec $F : (r, u) \mapsto r \cdot u$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R^n}} g(x)\, d\mathcal{H}^n &= \int_{\mathbf{R^n}} g(|x|\frac{x}{|x|})\, d\mathcal{H}^n \\ &= \int_0^\infty (\int_{\partial B(r)} g\, d\mathcal{H}^{n-1})\, dr\end{aligned}$$

□

Maintenant que nous sommes bien équipés, commençons avec quelques lemmes. Le suivant démontre une première approximation du théorème lorsque l'on intersecte notre ensemble avec une boule.

Lemme 5.2. *Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbf{R^n}; \mathbf{R^n})$ alors pour tout $x \in \mathbf{R^n}$,*

$$\int_{E\cap B(x,r)} \text{div } \varphi\, d\mathcal{L}^n = \int_{B(x,r)} \varphi \cdot \nu_E\, d\|\partial E\| + \int_{E\cap \partial B(x,r)} \varphi \cdot \nu\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Pour $\mathcal{L}^1$-presque-partout $r > 0$, où ν est le vecteur normal extérieur de $B(x, r)$. Et ν_E et $d\|\partial E\|$ sont définis dans les notations 4.

Preuve. Prenons, quitte à régulariser, $h \in C^\infty(\mathbf{R^n}, \mathbf{R})$; on a alors:

$$\int_E \text{div}(h\varphi)\, d\mathcal{L}^n = \int_E h \text{ div } \varphi\, d\mathcal{L}^n + \int_E \nabla h \cdot \varphi\, d\mathcal{L}^n.$$

Ainsi via Le théorème 4.1 :

$$\int_{\mathbf{R^n}} h\varphi \cdot \nu_E\, d\|\partial E\| = \int_E h \text{ div } \varphi\, dy + \int_E \nabla h \cdot \varphi\, dy. \tag{3}$$

De plus si pour $\varepsilon > 0$ on définit:

$$g_\varepsilon(s) := \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le s \le r \\ \frac{r-s+\varepsilon}{\varepsilon} & \text{si } r \le s \le r+\varepsilon \\ 0 & \text{si } r+\varepsilon \le s \end{cases}.$$

Et, quitte à passer par des approximations, (3) s'applique aussi pour

$$h_\varepsilon = g_\varepsilon(|y-x|).$$

Or:

$$\nabla h_\varepsilon(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } |y-x| < r \text{ ou } |y-x| > r+\varepsilon \\ -\frac{1}{\varepsilon}\frac{y-x}{|y-x|} & \text{si } r < |y-x| < r+\varepsilon \end{cases}$$

Ce qui donne:

$$\int_{\mathbf{R^n}} h_\varepsilon \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\| = \int_E h_\varepsilon \text{ div } \varphi \, dy - \frac{1}{\varepsilon}\int_{E\cap\{y|r<|y-x|<r+\varepsilon\}} \frac{y-x}{|y-x|}\cdot\varphi \, dy.$$

En utilisant le théorème 5.1 lorsque $\varepsilon \to 0$, on trouve:

$$\int_{\mathbf{R^n}} \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\| = \int_E \text{div } \varphi \, dy - \int_{E\cap\partial B(x,r)} \varphi\cdot\nu \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Pour $\mathcal{L}^1$-presque-partout $r > 0$. □

L'inégalité suivante permet de contrôller sur les mesures d'intersections de notre ensemble avec une boule.

Théorème 5.3 (Inégalités isopérimétriques). *Soit $E \subset \mathbf{R^n}$ un ensemble de périmètre fini (définition 2.8). Alors, il existe $C_1, C_2 > 0$ ne dépendant que de n telles que:*

1. $\mathcal{L}^n(E)^{1-\frac{1}{n}} \le C_1\|\partial E\|(\mathbf{R^n})$ *(Inégalité isopérimètrique).*
2. *Pour toute boule $B(x,r) \subset \mathbf{R^n}$ on a*

   $$\min\{\mathcal{L}^n(B(x,r)\cap E), \mathcal{L}^n(B(x,r)\setminus E)\}^{1-\frac{1}{n}} \le 2C_2\|\partial E\|\left(\overset{o}{B}(x,r)\right)$$

   (Inégalité isopérimètrique relative).

Preuve. Les preuves étant longues, donnons nous plutôt une intuition géométrique des inégalités:

1. Comme on l'a vu précédemment, on aime bien penser à $\|\partial E\|$ comme une mesure de la frontière $\approx \mathcal{H}^{n-1}|_{\partial E}$. Ainsi on peut voir l'inégalité sur un ensemble E de dimension n comme $(\text{vol}(E))^{\frac{1}{n}} \le C_1(\text{surf}(E))^{\frac{1}{n-1}}$. Cela semble plutôt raisonnable car, en première approxiamation $(\text{vol}(E))^{\frac{1}{n}} \approx O(\text{diam}(E))$ et $(\text{surf}(E))^{\frac{1}{n-1}} \approx O(\text{diam}(E))$.

   On a donc bien deux ordres de grandeur comparables. Pourquoi l'inégalité est-elle dans ce sens ?

   On peut se convaincre que dans le cas d'une boule on a égalité et que si on déforme la boule tout en conservant son n-volume on ne fait qu'augmenter sa surface. (Il s'agit d'un théorème très intuitif mais compliqué à démontrer).

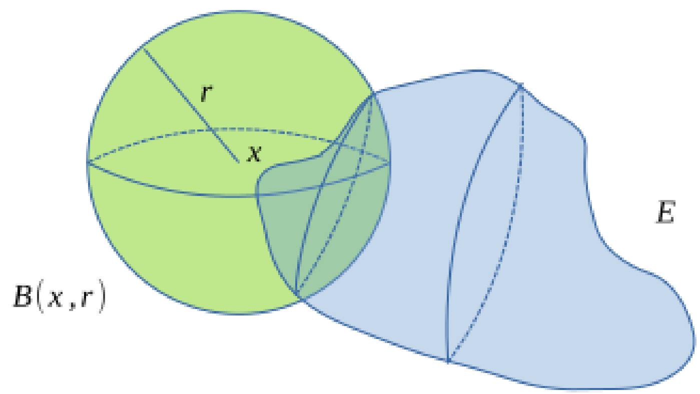


Figure 6: Inégalité isopérimétrique relative en dimension 3.

2. Représentons nous la situation avec le schéma suivant:

   On peut remarquer que le cas extrême a lieu lorsque $\mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E) = \mathcal{L}^n(B(x,r) \setminus E)$ et que $\overset{o}{B}(x,r) \cap \partial E$ est une boule, ce qui nous ramène à l'inégalité précédente.

□

Nous pouvons maintenant donner une nouvelle définition de frontière qui nous approche de celle appropriée au théorème 6.1 de Gauss Green.

Définition 5.4 (Frontière réduite)**.** *Soit $E \subset \mathbf{R^n}$ à périmètre fini. On définit $\partial^* E$ la **frontière réduite** de E. On a $x \in \partial^* E$, si et seulement si*

1. $\|\partial E\|(B(x,r)) > 0$ *pour tout* $r > 0$.
2. *Il existe* $\lim_{r\to 0} \frac{1}{\|\partial E\|(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \nu_E \, d\|\partial E\| = \nu(x)$.
3. $|\nu(x)| = 1$.

On peut donc démontrer quelques propriétés sur le contrôle que l'on a des éléments de $\partial^* E$.

Lemme 5.5. *Il existe des constantes positives A_1, A_2, A_3 ne dépendant que de n telles que:*

1. $\liminf_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r))\cap E}{r^n} > A_1 > 0$.
2. $\liminf_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\setminus E)}{r^n} > A_2 > 0$.
3. $\limsup_{r\to 0} \frac{\|\partial(E\cap B(x,r))\|(\mathbf{R^n})}{r^{n-1}} \leq A_3$.

Preuve. 1. Soit $x \in \partial^* E$. Via le lemme 5.2 appliquée avec la fonction $x \mapsto 1$ et au théorème 4.1 de structure, on a que pour $\mathcal{L}^1$-presque-partout $r > 0$

$$\|\partial(E \cap B(x,r))\|(\mathbf{R^n}) \leq \|\partial E\|(B(x,r)) + \mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial B(x,r)). \tag{4}$$

Maintenant, soit $\varphi \in C_c^1(\mathbf{R^n}, \mathbf{R^n})$ telle que $\varphi = \nu(x) = cst$ sur $B(x,r)$. Et donc via le lemme 5.2

$$\int_{B(x,r)} \nu(x) \cdot \nu_E(y)\, dy = -\int_{E\cap\partial B(x,r)} \nu(x) \cdot \nu_{E\cap\partial B(x,r)}\, d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{5}$$

De plus comme $x \in \partial^* E$, on a:

$$\lim_{r\to 0} \nu(x) \cdot \frac{1}{\|\partial E\|(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \nu_E\, d\|\partial E\| = |\nu|^2 = 1.$$

Donc il existe $r_0(x)$ assez petit tel que pour $\mathcal{L}^1$-presque-partout $r_0(x) > r > 0$, (5) implique:

$$\frac{1}{2}\|\partial E\|(B(x,r)) \leq \mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial B(x,r)). \tag{6}$$

Ce qui nous donne en utilisant (4)

$$\|\partial(E \cap B(x,r))\|(\mathbf{R^n}) \leq 3\mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial B(x,r)). \tag{7}$$

Pour presque tout $0 < r < r_0(x)$.

Si on pose maintenant $g : r \mapsto \mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E)$. Via le théorème 5.1, g est continue et on a pour presque tout $r > 0$:

$$g'(r) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x,r) \cap E).$$

En utilisant l'inégalité isopérimétrique notée théorème 5.3 et (7) on a:

$$\begin{aligned} g(r)^{1-\frac{1}{n}} &= \mathcal{L}^n(B(x,r)\cap E)^{1-\frac{1}{n}} \\ &\leq C_1\|\partial(B(x,r)\cap E)\|(\mathbf{R^n}) \\ &\leq 3C_1\mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x,r)\cap E) \\ &= 3C_1\, g'(r). \end{aligned}$$

Pour presque tout $0 < r < r_0(x)$. Ainsi on obtient:

$$\frac{1}{3C_1} \leq g(r)^{\frac{1}{n}-1}\, g'(r) = n(g^{\frac{1}{n}})'(r).$$

et donc, en intégrant:

$$g^{\frac{1}{n}}(r) \geq \frac{r}{3nC_1} \Leftrightarrow g(r) \geq \frac{r^n}{(3nC_1)^n}.$$

Pour presque tout $0 < r < r_0(x)$, ce qui prouve le point *1*.

2. Comme pour tout $\varphi \in C_c^1(\mathbf{R^n}; \mathbf{R^n})$

$$\int_E \operatorname{div}\varphi\, dx + \int_{\mathbf{R^n}\setminus E} \operatorname{div}\varphi\, dx = \int_{\mathbf{R^n}} \operatorname{div}\varphi\, dx = 0.$$

On obtient:

$$\|\partial E\| = \|\partial(\mathbf{R^n} \setminus E)\| \text{ et } \nu_E = -\nu_{\mathbf{R^n}\setminus E}.$$

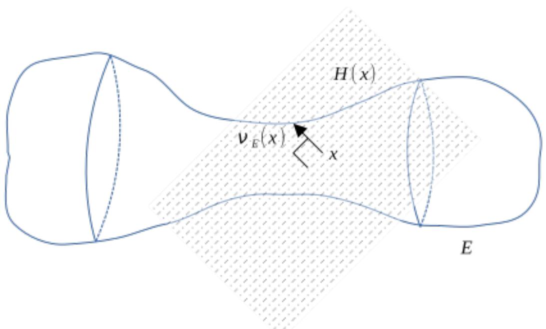
et donc le point 2 se déduit du point 1

3. Via (4) et (6) on a finalement:
$$\|\partial(E\cap B(x,r))(\mathbf{R^n})\leq 3\mathcal{H}^{n-1}(E\cap\partial B(x,r))\leq 3\mathcal{H}^{n-1}(\partial B(0,1))\,r^{n-1}.$$
par homogénéité et stabilité par translation des mesures de Hausdorff 2. Cela prouve le dernier point.

□

Nous allons maintenant justifier que $\partial^* E$ est une frontière assez régulière localement.

Notation. *Pour $E\subset\mathbf{R^n}$ à périmètre fini 2.8 et $x\in\partial^*E$, on définit l'hyperplan $H(x):=\{y\in\mathbf{R^n}|\nu_E(x)\cdot(y-x)=0\}$ et les demi-espaces*
$$\begin{cases}H^+(x):=\{y\in\mathbf{R^n}|\nu_E(x)\cdot(y-x)\geq 0\}\\ H^-(x):=\{y\in\mathbf{R^n}|\nu_E(x)\cdot(y-x)\leq 0\}\end{cases}.$$
De plus, pour $r>0$, on pose $E_r(x):=\{y\in\mathbf{R^n}|r(y-x)+x\in E\}$ et $g_r:y\mapsto\frac{y-x}{r}+x$.



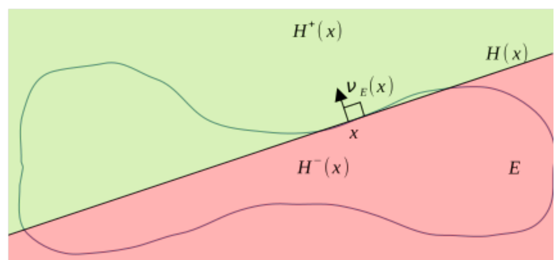


Figure 7: Exemple de $H(x)$ en dimension 3 et coupe latérale du même exemple.

Remarquons que $y\in E\cap B(x,r)\Leftrightarrow g_r(y)\in E_r\cap B(x,1)$ car g_r dilate autour de x d'un facteur $1/r$.

Théorème 5.6 (Explosion homothétique de la frontière réduite)**.** *Pour $x\in\partial^*E$ on a:*
$$\chi_{E_r(x)}\underset{r\to 0}{\longrightarrow}\chi_{H^-(x)}.$$
dans $L^1_{loc}(\mathbf{R^n})$.

Preuve. Donnons une idée générale de la preuve:

1. Quitte à translater, effectuer des rotations et dilater on peut supposer $x=0$ et $\nu_E=e_n=(0,\cdots,0,1)$. Soit $(r_k)_{k\in\mathbf{N}}\to 0$. Il suffit de montrer que toute sous-suite contient une sous-sous-suite $(r_{k_j})_{j\in\mathbf{N}}$ pour laquelle $\chi_{E_{r_{k_j}}}\to\chi_{H^-(0)}$.

2. Soit $L > 0$, notons $D_r := E_r \cap B(0, L)$ et $g_r(y) = \frac{y}{r}$. On a alors, pour tout $\varphi \in C_c^1(\mathbf{R^n}; \mathbf{R^n})$ tel que $|\varphi| \leq 1$:

$$\begin{aligned}\int_{D_r} \operatorname{div} \varphi \, dz &= \frac{1}{r^{n-1}} \int_{E \cap B(0,rL)} \operatorname{div}(\varphi \circ g_r) \, dy \\ &= \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\mathbf{R^n}} (\varphi \circ g_r) \cdot \nu_{E \cap B(0,rL)} \, d\|\partial(E \cap B(0, rL)\| \\ &\leq \frac{\|\partial(E \cap B(0, rL)\|(\mathbf{R^n})}{r^{n-1}} \\ &\leq A_3 < \infty.\end{aligned}$$

Et cela pour tout $r \in]0, 1]$ grâce au *3.* du lemme 5.5. Par conséquent, $\|\partial D_r\| \leq C < \infty$ et donc $\|\chi_{D_r}\|_{BV(\mathbf{R^n})} \leq A_3 < \infty$ pour tout $r \in]0, 1]$. Cela étant indépendant de L, on a: lorsque $L \to \infty$; $\|\chi_{E_r}\|_{BV(\mathbf{R^n})} \leq A_3 < \infty$.

De plus, on peut démontrer (ce qui sort du cadre de notre mémoire) que grâce à la structure de $BV_{loc}(\mathbf{R^n})$ dans $L^1_{loc}(\mathbf{R^n})$. Il existe une sous-suite $(r_{k_j})_{j \in \mathbf{N}}$ et $f \in BV_{loc}(\mathbf{R^n})$ tels que

$$\chi_{E_{r_{k_j}}} \to f.$$

dans $L^1_{loc}(\mathbf{R^n})$. Quitte à re-extraire on peut supposer $\chi_{E_{r_{k_j}}} \to f$, $\mathcal{L}^n$-presque-partout. Ainsi, comme $\mathcal{L}^n(\operatorname{spt}(f) \setminus \{0, 1\}) = 0$, il existe $F \subset \mathbf{R^n}$ à périmètre fini tel que $f = \chi_F$ $\mathcal{L}^n$-presque-partout.

3. Prouvons que $F = H^-(0)$. Premièrement, F étant à périmètre fini, on a, d'après le théorème 4.1 de structure, pour tout $\varphi \in C_c^1(\mathbf{R^n}; \mathbf{R^n})$:

$$\int_F \operatorname{div} \varphi \, dy = \int_{\mathbf{R^n}} \varphi \cdot \nu_F \, d\|\partial F\|. \tag{8}$$

avec ν_F et $\|\partial F\|$ définis comme pour les notations 4.

(a) Montrons que $\nu_F = e_n$ $\|\partial F\|$-presque-partout.
On sait déjà que pour tout $j \in \mathbf{N}$ et pour tout $\varphi \in C_c^1(\mathbf{R^n}; \mathbf{R^n})$ on a:

$$\int_{E_{r_{k_j}}} \operatorname{div} \varphi \, dy = \int_{\mathbf{R^n}} \varphi \cdot \nu_{E_{r_{k_j}}} \, d\|\partial E_{r_{k_j}}\|.$$

et comme $\chi_{E_{r_{k_j}}} \to \chi_F$ dans L^1_{loc}, via l'égalité (8):

$$\int_{\mathbf{R^n}} \varphi \cdot \nu_{E_{r_{k_j}}} \, d\|\partial E_{r_{k_j}}\| \to \int_{\mathbf{R^n}} \varphi \cdot \nu_F \, d\|\partial F\|.$$

et donc $\nu_{E_{r_{k_j}}} \, d\|\partial E_{r_{k_j}}\| \rightharpoonup \nu_F \, d\|\partial F\|$ de manière faible en tant que mesures de Radon.

Or, en s'inspirant des étapes précédentes on peut montrer que pour $\varphi \in C_c^1(\mathbf{R^n}; \mathbf{R^n})$:

$$\int_{\mathbf{R^n}} \varphi \cdot \nu_{E_{r_{k_j}}} \, d\|\partial E_{r_{k_j}}\| = \frac{1}{(r_{k_j})^{n-1}} \int_{\mathbf{R^n}} (\varphi \circ g_{r_{k_j}}) \cdot \nu_E \, d\|\partial E\|.$$

et donc, pour $L > 0$

$$\begin{cases} \|\partial E_{r_{k_j}}\|(B(0,L)) = \frac{1}{(r_{k_j})^{n-1}} \|\partial E\|(B(0,r_{k_j})) \\ \int_{B(0,L)} \nu_{E_{r_{k_j}}} \, d\|\partial E_{r_{k_j}}\| = \frac{1}{(r_{k_j})^{n-1}} \int_{B(0,r_{k_j} L} \nu_E \, d\|\partial E\| \end{cases} . \tag{9}$$

et ainsi, comme $0 \in \partial^* E$

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\|\partial E_{r_{k_j}}\|(B(0,L))} \int_{B(0,L)} \nu_{E_{r_{k_j}}} \, d\|\partial E_{r_{k_j}}\| &= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\|\partial E\|(B(0,L))} \int_{B(0,r_{k_j} L)} \nu_E \, d\|\partial E\| \\ &= \nu_E(0) = e_n. \end{aligned}$$

De plus, par lemme de Fatou on voit que:

$$\begin{aligned} \|\partial F\|(B(0,L)) &\leq \liminf_{j\to\infty} \|\partial E_{r_{k_j}}\|(B(0,L)) \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_{B(0,L)} e_n \cdot \nu_{E_{r_{k_j}}} \, d\|\partial E_{r_{k_j}}\| \\ &= \int_{B(0,L)} e_n \cdot \nu_F \, d\|\partial F\| \\ &\leq \|\partial F\|(B(0,L)). \end{aligned}$$

Où la dernière inégalité est due au fait que $|\nu_F| = 1$, $\|\partial F\|$-presque-partout. On en déduit donc $\nu_F = e_n$, $\|\partial F\|$-presque-partout.

(b) Montrons que F est un demi-espace.
D'après (3a), on sait déjà que pour tout $\varphi \in C_c^1(\mathbf{R^n};\mathbf{R^n})$, $\int_F \operatorname{div}\varphi \, dz = \int_{\mathbf{R^n}} \varphi \cdot e_n d\|\partial F\|$.
On va régulariser χ_F à ε près grâce à une famille régularisante $\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ où

$$\eta(x) := \begin{cases} c\exp(\frac{1}{|x|^2-1}) & si\ |x| < 1 \\ 0 & si\ |x| \geq 1 \end{cases} .$$

et $\int_{\mathbf{R^n}} \eta \, dx = 1$.
On pose $f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * \chi_F \in C^\infty(\mathbf{R^n})$, et donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R^n}} f^\varepsilon \operatorname{div}\varphi \, dz &= \int_F \operatorname{div}(\eta_\varepsilon * \varphi) \, dz \\ &= \int_{\mathbf{R^n}} \eta_\varepsilon * (\varphi \cdot e_n) \, dz \end{aligned}$$

Mais aussi, $\int_{\mathbf{R^n}} f^\varepsilon \operatorname{div}\varphi \, dz = -\int_{\mathbf{R^n}} \nabla f^\varepsilon \cdot \varphi \, dz$ par intégration par parties et compacité du support de φ.
Donc en prenant $\varphi = \eta_{\varepsilon'} * e_i$ on peut en déduire que, lorsque $\varepsilon' \to 0$, $\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} = 0$ pour $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ et $\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_n} \leq 0$.
De plus, comme $f^\varepsilon \to \chi_F$, $\mathcal{L}^n$-presque-partout lorsque $\varepsilon \to 0$, on peut conclure que F et $G = \{x \in \mathbf{R^n} | x_n \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \inf\{y_n | \exists y \in \mathbf{R^{n-1}},\ f^\varepsilon(y, y_n) < 1\}\}$ diffèrent d'un ensemble de $\mathcal{L}^n$-mesure nulle.

Effectivement, f^ε est positif et d'après les conditions que l'on a sur les dérivées de f^ε on peut déduire que pour tout y_n tel qu'il existe $y \in \mathbf{R^{n-1}}$, $f^\varepsilon(y, y_n) = 0$ alors pour tout $z \in \mathbf{R^n}$ tel que $z_n \geq y_n$, $f^\varepsilon(z) = 0$ et donc, en prenant la limite $\varepsilon \to 0$, $\int_{\mathbf{R^n}\setminus G} \chi_F \, dx = 0$. Ce qui nous dit que $F \subset G$ $\mathcal{L}^n$-presque partout.

Par le même raisonement, pour tout y_n tel qu'il existe $y \in \mathbf{R^{n-1}}$, $f^\varepsilon(y, y_n) = 1$ alors pour tout $z \in \mathbf{R^n}$ tel que $z_n \leq y_n$, $f^\varepsilon(z) = 1$ et donc $G \subset F$ $\mathcal{L}^n$-presque partout. Ce qui prouve notre affirmation.

(c) Montrons que $F = H^-(0)$

Cela revient à montrer que $\gamma := \lim_{\varepsilon \to 0} \inf\{y_n | \exists y \in \mathbf{R^{n-1}}, f^\varepsilon(y, y_n) < 1\} = 0$. Si l'on suppose par l'absurde que $\gamma > 0$, alors comme $\chi_{E_{r_{k_j}}} \to \chi_F$ dans $L^1_{loc}(\mathbf{R^n})$, on a:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^n(B(0,\gamma)) = \mathcal{L}^n(B(0,\gamma) \cap F) &= \lim_{j\to\infty} \mathcal{L}^n(B(0,\gamma) \cap E_{r_{k_j}}) \\ &= \lim_{j\to\infty} \frac{\mathcal{L}^n(B(0,\gamma r_{k_j}) \cap E)}{(r_{k_j})^n}.\end{aligned}$$

Ce qui contredit le point *2.* du lemme 5.5.

De la même manière, si $\gamma < 0$ cela contredit le 1. du lemme 5.5.

□

Ce théorème nous permet de calculer quelques limites qui peuvent paraitre intuitives.

Corollaire 5.6.1 (Sur l'explosion homothétique de la frontière réduite)**.** *Soit $x \in \partial^* E$, alors*

1. $\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\cap E \cap H^+(x))}{r^n} = 0.$

2. $\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\setminus E)\cap H^-(x))}{r^n} = 0.$

3. $\lim_{r\to 0} \frac{\|\partial E\|(B(x,r))}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x,r))} = 1.$

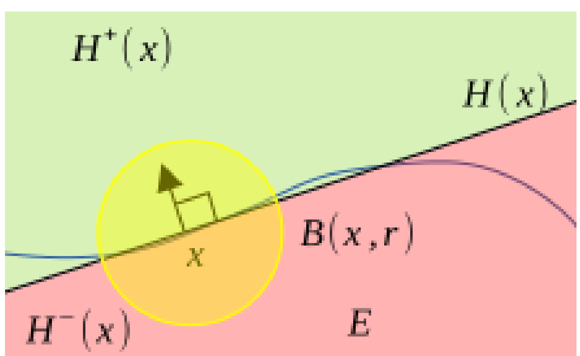


Figure 8: Exemple du corollaire 5.6.1 en dimension 2.

Définition 5.7. *Un vecteur unitaire $\nu_E(x)$ satisfaisant 1. est appelé la **normale extérieure unitaire de Lebesgue**, à E en x.*

Preuve. 1. On a:

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\cap E\cap H^+(x))}{r^n} &= \mathcal{L}^n(B(x,1)\cap E_r\cap H^+(x)) \\ &\underset{r\to 0}{\longrightarrow} \mathcal{L}^n(B(x,1)\cap H^-(x)\cap H^+(x)) = 0.\end{aligned}$$

2. On procède de la même manière.

3. Si on se replace dans le cas $x=0$, alors, d'après l'équation (9) de la preuve du théorème 5.6, on a $\frac{\|\partial E\|(B(0,r))}{r^{n-1}} = \|\partial E_r\|(B(0,1))$. Or, comme $\|\partial H^-(0)\|(\partial B(0,1)) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(0,1)\cap H(0)) = 0$, la troisième étape de la preuve du théorème 5.6 implique que:

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\frac{\|\partial E\|(B(0,r))}{r^{n-1}} &= \|\partial H^-(0)\|(B(0,1)) \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(B(0,1)\cap H(0)) \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(0,1))\end{aligned}$$

□

Le corollaire 5.6.1 nous montre que pour $x\in\partial^*$, $\nu_E(x)$ correspond bien à l'idée qu'on se fait de la normale extérieure unitaire de Lebesgue car localement $H(x) = (\langle\nu_E(x)\rangle + x)^\perp$ se comporte comme l'espace tangent à ∂^*E en x. De plus le *3.* nous montre que localement, $\|\partial E\|$ agit comme on le pensait; de manière similaire à $\mathcal{H}^{n-1}\llcorner\partial E$.

Théorème 5.8 (Théorème de structure des ensembles de périmètre fini)**.** *Soit $E\subset\mathbf{R}^n$ de périmètre fini.*

1. *Alors:*
$$\partial^*E = \cup_{k=1}^{\infty}K_k\cup N,$$
avec $\|\partial E\|(N)=0$ et K_k est un sous-ensemble d'une $\mathcal{C}^1$-hypersurface S_k.

2. *De plus, $\nu_E\mid_{K_k}$ est normale à cette hypersurface S_k, et*

3. $\|\partial E\| = \mathcal{H}^{n-1}\llcorner\partial^*E$

Preuve. Cette preuve vise à se ramener aux conditions d'applications du théorème d'extension de Whitney, que nous choisissons ici d'admettre, et qui peut se comparer à un développement de Taylor:

Théorème 5.9 (Théorème d'extension de Whitney)**.** *Soit $C\subset\mathbf{R}^n$ fermé, soient $f: C\to\mathbf{R}$ et $d: C\to\mathbf{R}^n$ continues. On suppose que pour tout $K\subset$*

$$\sup\left\{\frac{|f(y)-f(x)-d(x)\cdot(y-x)|}{|y-x|}\Big| 0<|y-x|\le\delta, x,y\in K\right\}\underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Alors il existe une fonction $\tilde{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ telle que:

1. $\tilde{f}$ *est* C^1

2. $\tilde{f}|_C = f$ *et* $D\tilde{f}|_C = d$

1. Convergence uniforme

   Nous commencons par ramener la convergence $\|\partial E\|$-presque-partout des deux premières limites du corollaire 5.6.1:

$$\begin{cases} \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\cap E\cap H^+(x))}{r^n} = 0 \\ \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\setminus E)\cap H^-(x))}{r^n} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

   à une convergence uniforme en appliquant le théorème d'Egoroff[5]:

   Théorème 5.10 (Théorème d'Egoroff)**.** *Si on se donne une mesure μ, un ensemble A de mesure finie, et une suite de fonctions convergeant presque partout vers g, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $B \subset A$ tel que $\mu(A - B) < \varepsilon$ et que la suite converge uniformément vers g sur A*

   On obtient alors l'existence de $(F_i)_{i\in\mathbf{N}} \subset E$ disjoints et $\|\partial E\|$-mesurables tels que

$$\begin{cases} \|\partial E\|(\partial^* E - \cup_{i=1}^\infty F_i) = 0, \|\partial E\|(F_i) < \infty, \\ \text{et la convergence dans} (*) \text{est uniforme pour } x \in F_i \; (i = 1, ...) \end{cases}$$

2. Continuité de la normale

   D'autre part, ν_E est $\|\partial E\|$-mesurable donc selon le théorème de Lusin:

   Théorème 5.11 (Théorème de Lusin)**.** *Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbf{R}^n$ et $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une fonction μ-mesurable. Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ un ensemble μ-mesurable et $\mu(A) < \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $K \subset A$ compact tel que*

   (a) $\mu(A - K) < \varepsilon$

   (b) $f|_K$ *est continue.*

   On obtient pour chaque F_i une suite de compacts disjoints $(E_i^j)_{j=1}^\infty \subset F_i$ tels que:

$$\begin{cases} \|\partial E\|(F_i - \cup_{j=1}^\infty E_i^j) = 0 \\ \nu_E|_{E_i^j} \text{est continue} \end{cases}$$

   Les E_i^j une fois réindexés correspondent aux K_k du premier point du théorème, et $N = F_i - \cup_{j=1}^\infty E_i^j$.

3. Application du théorème d'extension de Whitney 5.9

   Grâce à la convergence uniforme $\rho_k(\delta) \equiv \sup\left\{\frac{|\nu_E(x)\cdot(y-x)|}{|y-x|} | 0 < |y-x| \le \delta, x, y \in K_k\right\} \to 0$ quand $\delta \to 0$ (cela découle des limites du corollaire 5.6.1, nous écourtons ici la démonstration).

[5] *ibid* [2]

Nous pouvons désormais appliquer le théorème d'extension de Whitney avec $f = 0$ sur K_k et $d = \nu_E$. Ainsi il existe une fonction C^1 notée $\tilde{f}_k : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ telle que

$$\begin{cases} \tilde{f}_k = 0 & \text{sur } K_k \\ D\tilde{f}_k = \nu_E & \text{sur } K_k \end{cases}$$

Or comme $|\nu_E| = 1$, $\tilde{f}$ est une submersion et $S_k \equiv \tilde{f}^{-1}(0)$ est une sous-variété C^1 de dimension $n-1$ de $\mathbf{R}^n$, avec $K_k \subset S_k$. Cela prouve les points *1.* et *2.*.

4. Afin de prouver le points *3.*, choisissons un borelien $B \subset \partial^* E$. D'après le *3.* du corollaire 5.6.1 on a, quitte à recouvrir B par des boules $(B(x_{(m,n)}, r_n))_{m\in\mathbf{N}}$ de rayon r_n décroissant (avec le théorème de recouvrement de Vitali[6] par exemple):

$$\frac{\|\partial E\|(B)}{\mathcal{H}^{n-1}(B \cap \partial^* E)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m\in\mathbf{N}} \|\partial E\|(B(x_{(m,n)}, r_n))}{\sum_{m\in\mathbf{N}} \mathcal{H}^{n-1}(B(x_{(m,n)}, r_n))} = 1$$

Ce qui nous prouve bien le point voulu.

□

Maintenant que l'on a trouvé la frontière réduite qui a toutes les propriétés que l'on veut pour prouver le théorème de Gauss Green, nous allons la comparer à une autre frontière plus intuitive dans le cadre de la théorie de la mesure.

Définition 5.12 (Frontière de Lebesgue)**.** *Soit $E \subset \mathbf{R^n}$ de périmètre fini et $x \in \mathbf{R^n}$. On dira que x appartient à* ***la frontière de Lebesgue*** *de E, $\partial_* E$ si*

1. $\limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\cap E)}{r^n} > 0$, *et*

2. $\limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\setminus E)}{r^n} > 0$.

Remarquons que cela vient éliminer de la frontière topologique tout ce qui pourrait être vu comme de mesure de Lebesgue nulle. Cela est illustré par la figure 9.

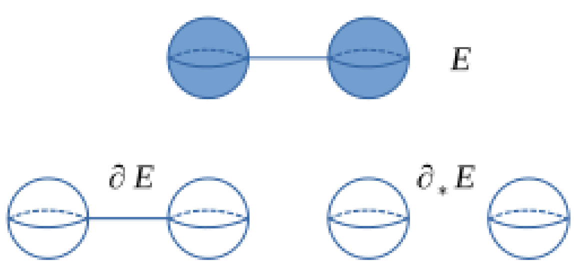


Figure 9: Frontières topologique et de Lebesgue d'une paire d'haltères.

Lemme 5.13. *Pour $E \subset \mathbf{R^n}$ de périmètre fini, on a:*

1. $\partial^* E \subset \partial_* E$, *et*

[6] *ibid* [2]

2. $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$.

Le lemme 5.13 montre que les deux frontières définies ne diffèrent pas de tant et que qu'ainsi, la frontière réduite est bien une frontière de notre ensemble.

Preuve. 1. Le point *1.* découle du lemme 5.5. Effectivement les constantes A_1 et A_2 étant positives, les points *1.* et *2.* et l'inégalité $\limsup \geq \liminf$ nous donnent l'inclusion.

2. Comme l'application $r \mapsto \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\cap E)}{r^n}$ est continue d'après le théorème 5.1; si $x \in \partial_* E$, il existe $\alpha \in]0,1[$ et une suite (r_j) qui converge vers 0 tels que $\frac{\mathcal{L}^n(B(x,r_j)\cap E)}{\mathrm{Vol}(B(x,r_j))} = \alpha$.

   Ainsi $\min\{\mathcal{L}^n(B(x,r_j)\cap E, \mathcal{L}^n(B(x,r_j)\setminus E)\} = \min\{\alpha, 1-\alpha\}\,\mathrm{Vol}(B(x,r_j))$, et donc l'inégalité isopérimètrique du théorème 5.3 implique:

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to 0} \frac{\|\partial E\|(B(x,r))}{r^{n-1}} &\geq \limsup_{r\to 0} \left(\frac{\min\{\mathcal{L}^n(B(x,r_j)\cap E, \mathcal{L}^n(B(x,r_j)\setminus E)\}}{r^n}\right)^{(n-1)/n} /(2C_2) \\ &\geq \limsup_{r\to 0} \left(\frac{\min\{\alpha, 1-\alpha\}\,\mathrm{Vol}(B(x,r))}{r^n}\right)^{(n-1)/n} /(2C_2) > 0\end{aligned}$$

   Donc d'après le théorème 5.8 $\limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^{n-1}(B(x,r)\cap\partial^* E)}{r^{n-1}} > 0$. Or comme $\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E) < \infty$ via la même gymnastique de recouvrement que pour la fin du théorème 5.8 on a pour $\mathcal{H}^{n-1}$-presque tout $x \in \mathbf{R^n} \setminus \partial^* E$

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^{n-1}(B(x,r)\cap\partial^* E)}{r^{n-1}} = 0.$$

   Ainsi, comme $x \in \partial_* E \setminus \partial^* E$ implique $\limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^{n-1}(B(x,r)\cap\partial^* E)}{r^{n-1}} > 0$, on en déduit que $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$.

□

6 Théorème de Gauss Green

Le théorème de Gauss-Green est en fait une conséquence du théorème de structure des enselmble BV. L'essentiel du travail a consisté à identifier à la normale extérieure et à la mesure de Hausdorff sur le bord les deux variables dont l'existence nous étaient donnés par ce théorème. Le théorème de Gauss Green est alors une application de ces résultats.

Théorème 6.1. *Soit $E \subset \mathbf{R}^n$ un ensemble de périmètre fini.*

1. *Alors $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \cap K) < \infty$ pour tout $K \subset \mathbf{R}^n$ compact*

2. *De plus, pour $\mathcal{H}^{n-1}$- presque tout $x \in \partial_* E$, il existe une unique normale unitaire extérieure de Lebesgue telle que*

$$\int_E \mathrm{div}\,\varphi\,dx = \int_{\partial_* E} \varphi\cdot\nu_E\,d\mathcal{H}^{n-1}.\ (\star)$$

pour tout $\varphi \in C_c^1(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$.

Preuve. Par le théorème 4.1 de structure on a

$$\int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_E \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\|$$

Or

$$\|\partial E\|(\mathbf{R}^n \setminus \partial_* E) = 0$$

et, par le théorème 5.8

$$\|\partial E\| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial_* E$$

et on obtient donc ($\star$). □

7 Conclusion

Commençons cette conclusion par quelques remarques:

1. On peut se demander pourquoi on s'est embêtés à généraliser ce théorème alors que le cas pour E une variété à bord et $\varphi \, d\mathcal{H}^{n-1}$ une forme différentielle de dimension $n-1$ est donné par le théorème de Stokes.

   Tout l'intérêt de la version du théorème 6.1 que l'on a démontré, en plus de l'absence de structure de variété, vient du fait qu'il s'agit d'une équivalence. Effectivement si l'on considère E tel que le théorème soit vérifié alors

   $$\begin{aligned}&\sup\left\{\int_E \operatorname{div}\varphi\, dx \,\middle|\, \varphi \in C_c^1(E;\mathbf{R}^n), \left| \varphi \right| \leq 1\right\} = \\ &\sup\left\{\int_{\partial_* E} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{n-1} \,\middle|\, \varphi \in C_c^1(E;\mathbf{R}^n), \left| \varphi \right| \leq 1\right\} \\ &< \infty\end{aligned}$$

   Ce qui caractérise par définition les ensemble à périmètre fini.

2. De plus, outre ses nombreuses applications en physique (où les ensembles ne sont pas toujours très réguliers), ce théorème nous permet d'obtenir des informations globales (sur E tout entier) à partir de seulement sa frontière.

3. On peut aussi le voir comme une généralisation à n-dimension du théorème fondamentale de l'analyse car en dimension 1, $\operatorname{div} \varphi = \varphi'$.

Pour conclure, outre ses applications et sa réciproque mathématiquement satisfaisante, le théorème 6.1 de la divergence fait appel à des outils d'analyse fonctionnelle dont on présuppose parfois l'existence sans nécessairement les définir rigoureusement. Ce mémoire nous a non seulement permis de démontrer proprement le théorème 3.1 de Riesz dans le cadre des fonctions $C_c(\mathbf{R^n}, \mathbf{R^m})$ mais aussi d'introduire la définition 2 des mesures de Hausdorff qui représentent ce qu'on intuitionne comme un volume s-dimensionnel dans un espace de dimension n. Nous avons aussi pu explorer comment définir et redéfinir les bonnes notions mathématiques afin de garder les bonnes intuitions et de renforcer la généralité d'un théorème. Voilà tout ce que nous avons appris, « tout ce que nous savons » [7].

[7] Evariste Galois

A Notations

div	Divergence
$\mathcal{L}^n$	Mesure de Lebesgue de dimension n
$\mathcal{H}^s$	Mesure de Hausdorff de dimension s
spt	Support
diam	Diamètre d'un ensemble
vol	Volume d'un ensemble
surf	Surface d'un ensemble à surface C^1
$BV(U)$	Fonctions à variations bornées de $L^1(U)$
$V \subset\subset U$	V est d'adhérence compacte incluse dans U
$L^1_{loc}(U)$	Fonctions telles que leurs restrictions à $V \subset\subset U$ soit dans $L^1(V)$
χ_E	L'indicatrice de E
$B(x,r)$ et $\partial B(x,r)$	Boule et sphère centrées en x de rayon r
$\\|\partial E\\|$	Mesure du périmètre de E
ν_E	Normale extérieure unitaire de Lebesgue
$D_x f$ et $J_x f$	La différentielle et le jacobien de f en x
∇h	Gradient de h
$\overset{o}{B}(x,r)$	Boule ouverte de centre x et de rayon r
∂E	Frontière topologique de E
∂^*	Frontière réduite de E
$\partial_* E$	Frontière de Lebesgue
η_ε	Famille régularisante
$\mu\|_F$	Restriction de la mesure μ à F
$\mu \llcorner F(G)$	$\mu(F \cap G)$

Bibliographie

[1] Frederick J. Almgren. In: *The American Mathematical Monthly* 96.8 (1989), pp. 753–756. ISSN: 00029890, 19300972. URL: `http://www.jstor.org/stable/2324741` (visited on 06/03/2023).

[2] Lawrence Craig Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. English. 2nd revised ed. Textb. Math. Boca Raton, FL: CRC Press, 2015. ISBN: 978-1-4822-4238-6; 978-1-4822-4240-9.