

Ensembles de Cantor de \mathbb{R}^n

Dorra Hamza et Samuel Kalisz
Encadrant: Samuel Bronstein

Résumé

Ce mémoire est centré sur l'étude des ensembles de Cantor dans les différentes dimensions. On commence par énoncer les propriétés de base de ces ensembles. Puis on montre qu'en dimension 1 et 2, les ensembles de Cantor sont peu diversifiés : ils sont tous conjugués. L'exemple du collier d'Antoine assure l'existence d'une plus grande diversité en dimension 3, ce qui se généralise dans les dimensions supérieures. On introduit alors un lien entre les conjugaisons et les projections des ensembles de Cantor, ce qui ouvre sur une étude en dimension supérieure.

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	L'ensemble triadique de Cantor	3
1.2	Ensembles de Cantor	4
1.3	Problématique	6
2	Les ensembles de Cantor de \mathbb{R}	6
3	Les ensembles de Cantor du plan	7
3.1	Le théorème de Denjoy-Riesz	7
3.1.1	Démarche	7
3.1.2	1 ^{ère} étape : choix du recouvrement de C	8
3.1.3	2 ^{ème} étape : Construction de la suite de lacets	10
3.1.4	Preuve du théorème de Denjoy-Riesz	12
3.1.5	Une amélioration possible des contraintes sur la courbe J	13
3.2	Application pour les ensembles de Cantor de \mathbb{R}^2	14
4	Etude d'un exemple d'ensemble de Cantor en dimension 3 : le collier d'Antoine	14
4.1	Définition	14
4.2	Classe de conjugaison du collier d'Antoine	15
4.3	Application dans la théorie des nœuds	15
5	Projections des ensembles de Cantor	16
5.1	Projections d'ensembles de Cantor de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}	16
5.2	Lien entre projection et conjugaison	17
5.2.1	Cas du collier d'Antoine	17
5.2.2	Autres exemples	18
6	Conclusion et questions ouvertes	20
	Références	21

1 Introduction

1.1 L'ensemble triadique de Cantor

Commençons par étudier l'ensemble triadique de Cantor, historiquement défini par Georg Cantor en 1883, en tant qu'exemple d'ensemble totalement discontinu, ayant "l'apparence" d'un ensemble dénombrable, mais ayant en fait la puissance du continu. Cet ensemble est l'objet de base de ce mémoire. On consacre cette partie à sa définition et ses propriétés de bases.

Définition 1.1. Posons $T_0 = [0, 1]$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = \bigcup_{\substack{I \text{ composante} \\ \text{connexe de } T_n}} F(I)$, où F est définie par :

$$F([a, b]) = \left[a, a + \frac{b-a}{3} \right] \cup \left[a + 2\frac{b-a}{3}, b \right] \quad \forall a < b.$$

On définit alors l'ensemble triadique de Cantor : $\mathcal{T} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$. C'est un compact de \mathbb{R} , comme intersection de compacts.

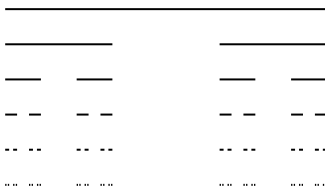


FIGURE 1 – Les premières étapes de la construction du Cantor triadique.

On remarque que \mathcal{T} est l'ensemble des réels de $[0, 1]$ admettant un développement triadique composé uniquement de 0 et de 2 : $\mathcal{T} = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n} \mid (a_n) \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}^*} \right\}$. De plus, si $\mathcal{C}_n = \{I \cap \mathcal{T} \mid I \text{ composante connexe de } T_n\}$, alors $\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ est une base d'ouverts de \mathcal{T} .

Proposition 1.2. L'ensemble \mathcal{T} est homéomorphe à $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit.

Démonstration. On munit $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ de la distance $d(a, b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n - b_n|}{3^n}$. Posons π l'application de \mathcal{T} dans $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ qui à $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n}$ associe la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La fonction π est une bijection entre deux compacts. De plus, on vérifie que pour tout élément $I \cap \mathcal{T} \in \mathcal{C}$, l'ensemble $\pi(I \cap \mathcal{T})$ est un cylindre : π^{-1} est continue. Par conséquent, π est un homéomorphisme. \square

Définition 1.3. Un ensemble est dit totalement discontinu si ses composantes connexes sont des points.

Remarque. L'ensemble \mathcal{T} est totalement discontinu. En effet, toute composante connexe de \mathcal{T} est incluse dans une composante connexe de T_n , dont le diamètre vaut 3^{-n} . Donc le diamètre d'une composante connexe par arcs de \mathcal{T} est inférieur à $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{-n} = 0$: c'est un point.

Remarque. L'ensemble \mathcal{T} est sans point isolé. En effet, soit $x \in \mathcal{T}$. Alors on peut construire une suite injective (x_n) telle que x_n soit dans la même composante connexe de T_n que x , et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

Proposition 1.4. Soit \mathcal{T}' un ensemble défini par : $\mathcal{T}' = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T'_n$, où T'_0 est un compact de \mathbb{R}^n , et $\forall n \in \mathbb{N}$, $T'_{n+1} = \bigcup_{\substack{I \text{ composante} \\ \text{connexe de } T'_n}} F(I)$, où F est une fonction qui à tout compact connexe de \mathbb{R}^n associe un compact de \mathbb{R}^n . Alors \mathcal{T}' est totalement discontinu et sans point isolé si les conditions suivantes sont vérifiées : $F(I) \subset I$ est une réunion disjointe d'au moins deux compacts, et $\sup\{\text{diam}(I) \mid I \text{ composante connexe de } T'_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On va donc utiliser ces propriétés dans le cadre d'une étude plus générale des ensembles compacts totalement discontinus.

1.2 Ensembles de Cantor

Définition 1.5. Un espace métrique X est un ensemble de Cantor s'il est compact, totalement discontinu et sans point isolé.

En particulier, l'ensemble triadique de Cantor vérifie cette définition.

On va avoir plusieurs exemples intéressants d'ensembles de Cantor dans les sections suivantes. Mais pour avoir une idée, quelques exemples faciles d'ensembles de Cantor dans des espaces de dimensions différentes sont construits à partir de la donnée de F comme dans la proposition 1.4.

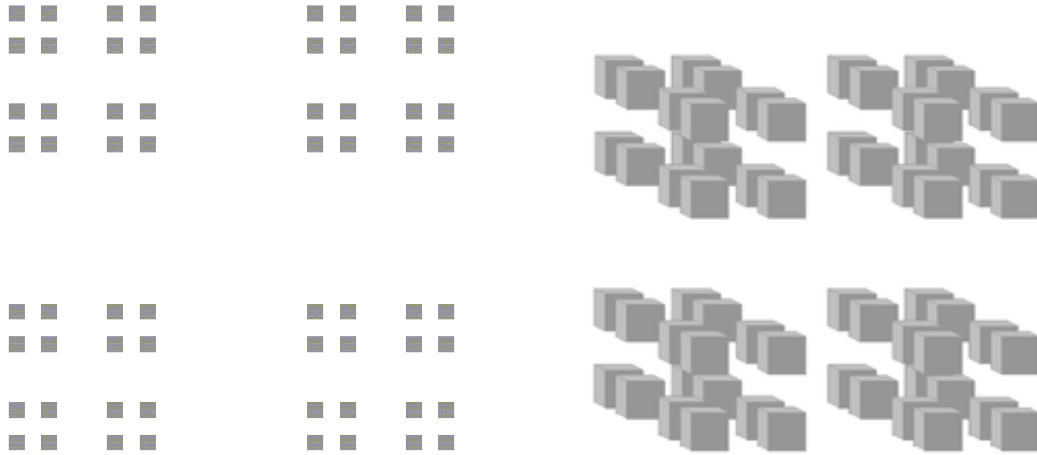


FIGURE 2 – La fonction F envoie un carré sur 4 carrés disjoints aux sommets (à gauche), ou un cube sur 8 cubes disjoints aux angles (à droite)

On verra dans cette partie que le terme "ensemble de Cantor" pour ces ensembles est bien justifié, du fait qu'il n'en existe qu'un seul à homéomorphisme près. Un problème guide de ce mémoire est de comparer des ensembles de Cantor à l'ensemble triadique, dans un sens qu'on définit en section 1.3.

On rappelle d'abord le résultat suivant :

Théorème 1.6 (Théorème des compacts emboîtés). Soit X un espace métrique compact, et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides de X . Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$, et si de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}(F_n) = 0$, alors c'est un singleton.

Démonstration. — Prenons $x_n \in F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (x_n) a une valeur d'adhérence, qui appartient à $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ puisque la suite est décroissante.

— On a : $\forall m \in \mathbb{N}$, $\text{diam}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n) \leq \text{diam}(F_m)$, ce qui donne directement le second point. \square

On a besoin de plusieurs autres résultats intermédiaires pour démontrer le résultat principal.

Proposition 1.7. *L'ensemble des ouverts-fermés d'un espace métrique compact X est dénombrable.*

Démonstration. Puisque X est compact, il possède une base dénombrable d'ouverts \mathcal{B} , donnée par une réunion de $\frac{1}{n}$ -réseaux (un ϵ -réseau étant un recouvrement de X par des boules de rayon ϵ).

Soit G un ouvert-fermé de \mathcal{B} . Puisque G est ouvert, on peut l'écrire $G = \bigcup_{i \in I} B_i$, où les B_i sont des éléments de \mathcal{B} . Mais G est compact, donc on peut supposer I fini. L'ensemble des ouverts-fermés de X s'injecte donc dans l'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathcal{B})$ des parties finies de \mathcal{B} , qui est dénombrable. \square

Proposition 1.8. *Soit X un compact et $p \in X$. Alors l'intersection des ouverts-fermés de X contenant p est une composante connexe de X .*

Démonstration. Notons $\{D_i \mid i \in I\}$ l'ensemble des ouverts-fermés de X contenant p , et posons $C = \bigcap_{i \in I} D_i$. Montrons que C est connexe.

Supposons $C = F_1 \sqcup F_2$, où F_1 et F_2 sont des fermés. Puisque X est compact, c'est un espace normal : il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $F_1 \subset O_1$ et $F_2 \subset O_2$. Alors $C \subset O_1 \cup O_2$. On pose $M = (X - O_1) \cap (X - O_2)$, et on a $M \subset (X - C) = \bigcap_{i \in I} (X - D_i)$. Mais M est compact car fermé dans X , et les $(X - D_i)$ sont ouverts : on peut donc écrire $M \subset \bigcap_{i \in J} (X - D_i)$ avec $J \subset I$ fini. Donc M est inclus dans un ouvert-fermé ne contenant pas p : il existe $i_0 \in I$ tel que $M \cap D_{i_0} = \emptyset$.

Supposons $p \in F_1$. Alors $D_{i_0} \cap O_1 = D_{i_0} \cap (X - O_2)$ est un ouvert-fermé : notons-le D_{i_1} . Alors $C \subset D_{i_1} \subset O_1$ et donc $F_2 = \emptyset$: par conséquent, C est connexe.

Montrons que C est une composante connexe. Notons C' la composante connexe de X contenant p . On a déjà $C \subset C'$. Mais $\forall i \in I$, $C' = (D_i \cap C') \sqcup (C' - D_i)$, donc $C' - D_i = \emptyset$ par connexité de C' , d'où $C' \subset C$. \square

On peut désormais énoncer le résultat principal de la section.

Théorème 1.9. *Tous les ensembles de Cantor sont homéomorphes.*

Démonstration. Soit X un ensemble de Cantor, montrons que X est homéomorphe à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Notons \mathcal{D} l'ensemble des ouverts-fermés non triviaux de X . D'après la proposition 1.7, on peut écrire $\mathcal{D} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{D_n, X - D_n\}$. Il s'agit bien d'une famille infinie, car si elle était finie, la proposition 1.8 impliquerait que les singletons sont des ouverts-fermés, ce qui est faux puisque tout point de X est un point d'accumulation. On définit alors la fonction :

$$f : \begin{array}{l} X \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \\ x \mapsto (\mathbb{1}_{D_n}(x))_{n \in \mathbb{N}} \end{array} .$$

- f est continue. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $f^{-1}(\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}}) = \bigcap_{k=1}^n D_k^{(\varepsilon_k)}$,

où l'on note $D_k^{(0)} = X - D_k$ et $D_k^{(1)} = D_k$.

- f est injective. Soit $x \in X$ et $\varepsilon = f(x)$. $f^{-1}(\varepsilon) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n^{(\varepsilon_n)} = \bigcap_{\substack{D \in \mathcal{D} \\ x \in D}} D$. D'après la proposition

1.8, cet ensemble est une composante connexe, donc il est égal à $\{x\}$.

- f est surjective. Soit $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n^{(\varepsilon_n)} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n=0}^N D_n^{(\varepsilon_n)} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} E_N$ avec $E_N = \bigcap_{n=0}^N D_n^{(\varepsilon_n)}$. La suite (E_N) est une suite décroissante de compacts non vides, donc le théorème 1.6 donne : $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} E_N \neq \emptyset$. Mais en prenant $x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} E_N$, on a bien $f(x) = \varepsilon$. La fonction f est une bijection continue entre deux compacts, donc c'est un homéomorphisme. \square

1.3 Problématique

On constate qu'en terme d'homéomorphisme, les ensembles de Cantor ne présentent aucune diversité : il n'en existe qu'un. Définissons donc ici une notion d'équivalence entre ensembles plus forte que l'homéomorphisme.

Définition 1.10. Deux sous-parties A et B de \mathbb{R}^n sont dites conjuguées lorsqu'il existe un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ tel que $f(A)=B$. La relation de conjugaison est une relation d'équivalence.

Objectif : étudier les classes de conjugaison des ensembles de Cantor.

2 Les ensembles de Cantor de \mathbb{R}

En dimension 1, la diversité des ensembles de Cantor à conjugaison près reste nulle : les ensembles de Cantor de \mathbb{R} sont tous conjugués. Pour le démontrer, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1. Soient X, Y des compacts de \mathbb{R} , et $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme croissant. Alors on peut étendre f en un homéomorphisme $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Démonstration. Notons $S = [\min X, \max X]$ et $S' = [\min Y, \max Y]$. On définit \tilde{f} telle que $\tilde{f}|_X = f$, et pour $x \in S - X$, en posant $a = \max(X \cap]-\infty, x])$ et $b = \min(X \cap [x, +\infty[)$:

$$\tilde{f}(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a)) .$$

Au voisinage de tout point de $S - X$, \tilde{f} est affine donc continue. Montrons que \tilde{f} est continue à gauche en $x \in X$.

1^{er} cas : $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, $x_n < x$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$. Alors $\tilde{f}(x_n) = f(x_n) \rightarrow f(x) = \tilde{f}(x)$.
Puisque \tilde{f} est croissante, elle est donc continue à gauche en x .

2nd cas : $\exists \epsilon > 0$, $]x - \epsilon, x[\cap X = \emptyset$. Alors \tilde{f} est affine sur $]x - \epsilon, x[$.

De même, \tilde{f} est continue à droite en x . Donc \tilde{f} est continue et strictement croissante entre deux segments, donc c'est un homéomorphisme. On peut ensuite la prolonger par une fonction affine sur $\mathbb{R} - S$. \square

Théorème 2.2. Tous les ensembles de Cantor de \mathbb{R} sont conjugués.

Démonstration. On procède en deux étapes.

Étape 1. Soit X un ensemble de Cantor de \mathbb{R} . Construisons un homéomorphisme croissant entre X et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, muni de l'ordre lexicographique.

Posons $I_{\emptyset} = [\min X, \max X]$. On définit par récurrence sur n le segment I_e avec $e \in \{0, 1\}^n$, vérifiant les propriétés suivantes :

— des propriétés pour la commodité de la définition par récurrence :

$$\min I_e \in X ; \max I_e \in X ; I_e \cap X \text{ est non vide et sans point isolé.}$$

— et des propriétés utiles pour construire l'application cherchée :

$$0 < l(I_e) < \left(\frac{2}{3}\right)^n \times l(I_{\emptyset}) ; \forall n \in \mathbb{N}, X \subset \bigsqcup_{e \in \{0,1\}^n} (I_e \cap X) ;$$

$$\forall e \in \{0, 1\}^{n+1}, I_{(e_0, \dots, e_{n-1}, e_n)} \subset I_{(e_0, \dots, e_{n-1})} ; \forall e, e' \in \{0, 1\}^n, e \preceq e' \iff I_e \leq I_{e'} .$$

Définissons alors les I_e .

Supposons, par récurrence, que tous les I_e avec $e \in \{0, 1\}^n$ sont définis. On va alors définir les I_e avec $e \in \{0, 1\}^{n+1}$.

Soit $e \in \{0, 1\}^n$, notons $I_e = [a, b]$. Choisissons $x_e \in [a + \frac{b-a}{3}, a + 2\frac{b-a}{3}]$ tel que $x_e \notin X$. Un tel point x_e existe car X est totalement discontinu. Définissons alors :

$$I_{(e_0, \dots, e_{n-1}, 0)} = [a, \max(X \cap]-\infty, x_e]) \text{ et } I_{(e_0, \dots, e_{n-1}, 1)} = [\min(X \cap [x_e, +\infty[), b]$$

et ces segments sont non vides car a et b sont des points d'accumulation de X .

Par construction, les I_e vérifient bien les propriétés annoncées. Remarquons qu'elles impliquent :

$$I_{(e_0, \dots, e_n)} \cap I_{(e'_0, \dots, e'_{n+m})} \neq \emptyset \iff e_0 = e'_0, \dots, e_n = e'_n. \quad (1)$$

D'après le théorème 1.6 : pour tout $e \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_{(e_0, \dots, e_n)}$ est un singleton. Posons donc la fonction $\varphi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow X$, qui à une suite e associe l'unique $x \in X$ tel que $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_{(e_0, \dots, e_n)}$

φ est surjective. Soit $x \in X$. Alors $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists e^{(N)} = (e_0^{(N)}, \dots, e_N^{(N)})$, $x \in I_{e^{(N)}}$. Mais

d'après (1), on a : $\forall n \leq N, N'$, $e_n^{(N)} = e_n^{(N')} =: e_n$, et alors $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_{(e_0, \dots, e_n)}$.

φ est strictement croissante. Soit $e, e' \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ avec $e \prec e'$. Prenons n le premier indice où $e_n < e'_n$. Alors $I_{(e_0, \dots, e_n)} < I_{(e'_0, \dots, e'_n)}$, et donc $\varphi(e) < \varphi(e')$.

φ est ouverte. Prenons un ouvert de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de la forme $U = \{e\} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $e \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Alors

$$\varphi(U) = I_e \cap X = X \cap \left(\mathbb{R} - \bigcup_{\substack{e' \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \\ e' \neq e}} I_{e'} \right) \text{ est un ouvert de } X.$$

La fonction φ est une bijection ouverte entre deux compacts, donc c'est un homéomorphisme, qui est de plus croissant.

Étape 2. Soient X, Y deux ensembles de Cantor de \mathbb{R} . L'étape 1 donne l'existence d'un homéomorphisme croissant $f : X \rightarrow Y$. D'après le lemme 2.1, on peut étendre f en un homéomorphisme $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. \square

3 Les ensembles de Cantor du plan

Le résultat de la dimension 1 est encore vrai en dimension 2, mais la preuve est plus complexe. Elle a pour argument crucial le théorème de Denjoy-Riesz.

3.1 Le théorème de Denjoy-Riesz

Définition 3.1 (courbe de Jordan). Une courbe de Jordan de \mathbb{R}^n est une image continue injective du cercle dans \mathbb{R}^n . J dans \mathbb{R}^n tel que $C \subseteq J$.

Théorème 3.2 (Denjoy-Riesz). Soit C une sous-partie de \mathbb{R}^2 compacte et totalement discontinue. Alors, il existe une courbe de Jordan J dans \mathbb{R}^2 telle que $C \subset J$.

L'objectif de la partie suivante est de démontrer le résultat suivant, qui est une généralisation du théorème de Denjoy-Riesz.

Théorème 3.3 (Denjoy-Riesz généralisé). Soit $n \geq 2$. Soit C une sous-partie de \mathbb{R}^n compacte et totalement discontinue. Alors, il existe une courbe de Jordan J dans \mathbb{R}^n telle que $C \subset J$

3.1.1 Démarche

L'idée est de commencer par trouver un "bon" recouvrement fini de C de diamètre aussi petit que l'on veut. C'est la première étape.

Ensuite, dans une deuxième étape, on choisit arbitrairement un point de chaque composante du recouvrement et on les inclut dans un premier lacet injectif.

Les sous-parties de C contenues dans chaque composante du recouvrement sont aussi des compacts totalement discontinus. On répète donc l'étape deux pour ces composantes et on relie les lacets résultant pour définir par récurrence une suite de lacets injectifs. Quitte à bien choisir les recouvrement (topologie, diamètre...), on peut garantir la convergence de la suite des lacets définie vers le lacet J cherché.

3.1.2 1^{ère} étape : choix du recouvrement de C

Recouvrement par des ouverts fermés disjoints

Proposition 3.4. Soit C une sous-partie de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, compacte et totalement discontinue. Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $N \geq 1$, C_1, C_2, \dots, C_N des ouverts fermés disjoints de C tels que :

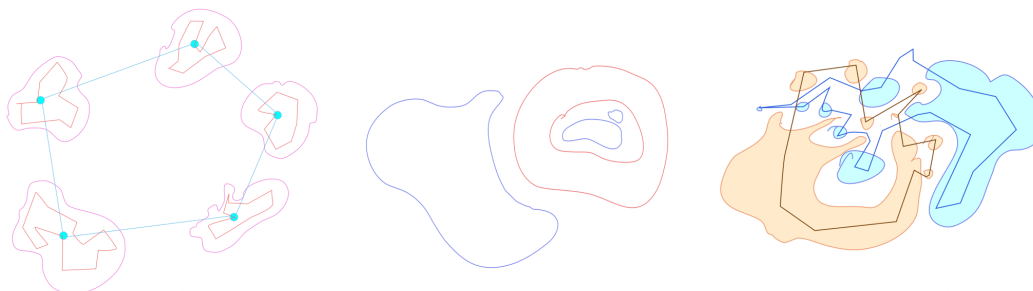
$$C = \bigcup_{i=1}^N C_i .$$

Démonstration. Les propositions 1.7 et 1.8 permettent de montrer que les ouverts fermés de C forment une base de topologie de C . Donc il existe un recouvrement :

$$C \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$$

tel que $\text{diam}(O_i) < \epsilon \forall i \in I$. Par compacité de C , On peut supposer I fini. Supposons $\exists i \neq j$ dans I tels que $O_i \cap O_j \neq \emptyset$. Soit $O' = O_i \cap O_j$, alors O' est ouvert et fermé dans C comme intersection d'ouverts fermés. Son complémentaire est ouvert et fermé aussi. Donc $O_i - O' = O_i \cap O'^c$ est un ouvert fermé, et de même pour j . On a montré qu'on peut raffiner le recouvrement de sorte que ces composantes soient disjointes. \square

Insuffisance de ce premier recouvrement : Avec le recouvrement défini ci-dessus, on peut bien contrôler le diamètre de chaque composante mais on ne peut pas garantir qu'elles ne soient pas trop proches. Ceci pose un problème d'injectivité lors de l'étape de construction de la suite de lacets. Un autre problème qui peut se poser est qu'une composante soit partiellement "à l'intérieur" d'une autre, posant encore un problème d'injectivité. Voici quelques illustrations d'exemples en dimension 2 :



Critères d'un "bon" recouvrement : D'abord il faut que les différentes composantes soient disjointes, fermées et de diamètre aussi petit que l'on veut. Ce qu'on peut déjà bien construire. De plus, on espère aussi remplir les critères suivants :

Connexité par arcs de chaque composante : On veut qu'à chaque étape les lacets à concaténer soient entièrement inclus dans leurs composantes respectives, pour assurer qu'ils ne s'intersectent pas. Pour cela il suffit de choisir des voisinages dont les composantes connexes sont en nombre fini.

Connexité par arcs du complémentaire : Il faut pouvoir connecter les différentes composantes sans les intersecter plus qu'une fois.

Topologie des composantes : Il sera utile de contrôler la topologie des composantes des recouvrements successifs.

Construction d'un "bon" recouvrement de C

On considère $C \subseteq \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$.

Soit $\epsilon > 0$. Commençons par considérer le recouvrement de diamètre ϵ de C déjà défini par la proposition précédente :

$$C = \bigcup_{i=1}^N C_i .$$

Soit $d_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, C_1)$. Soit $\gamma = d(C_1, C - C_1) > 0$ et $\eta = \min(\gamma, \epsilon - \text{diam}(C_1)) > 0$. Il existe une boule B fermée centrée en 0 tel que $C \subseteq B$. Quitte à déformer d_1 pour qu'elle garde les mêmes valeurs à l'intérieur de B et prenne des valeurs négatives assez petites dans le complémentaire de B , on peut supposer que d_1 est intégrable et bornée sur \mathbb{R}^n . On sait donc que le produit de convolution de d_1 par une suite régularisante converge uniformément vers d_1 sur le compact B . On peut ainsi trouver une fonction f_1 de classe \mathcal{C}^∞ vérifiant $\|d_1 - f_1\|_{\infty, B} < \frac{\eta}{10}$.

On a $\forall y \in (\frac{\eta}{5}, \frac{4\eta}{5})$, $f_1^{-1}(\{y\})$ n'intersecte pas C et $f_1^{-1}([0, y]) \cap C = C_1$.

D'après le Théorème de Sard, $\exists y \in (\frac{\eta}{5}, \frac{4\eta}{5})$ tel que $f_1^{-1}(\{y\})$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n .

Notons $F_1 = f_1^{-1}([0, y])$, alors F_1 est fermé et $\text{diam}(F_1) < \epsilon$. Les composantes connexes de l'intérieur de F_1 forment une partition en ouverts de l'intérieur de F_1 . L'ensemble F_1 étant compact, cette partition est finie. Donc F_1 possède un nombre fini de composantes connexes. On peut alors supposer, quitte à raffiner la partition, que F_1 est connexe.

On procède de la même façon pour $i \geq 2$ en remplaçant à l'étape i les C_j avec $j \leq i - 1$ par les espaces F_j déjà construit. On obtient donc un nouveau recouvrement vérifiant des hypothèses plus fortes en terme de topologie et de connexité :

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{N'} F_i .$$

Remarque : Si on veut que le recouvrement soit inclus dans un ouvert quelconque contenant C , il suffit de prendre en compte la distance de C au complémentaire de cet ouvert dans la définition de η .

Remarque : Les ensembles $\{F_i\}_i$ sont alors des variétés à bord compacts et connexes. Le nombre de composantes connexes des bords ∂F_i est alors fini.

Il reste à étudier la connexité de $\mathbb{R}^n - \bigcup_{i=1}^{N'} F_i$.

Notons $A = \mathbb{R}^n - \bigcup_{i=1}^{N'} F_i$ et k le nombre de ses composantes connexes. Alors k est fini. En effet, $\bigcup_{i=1}^{N'} F_i$ étant lisse, il a un nombre fini de composantes connexes de bord, d'où le complémentaire a un nombre fini de composantes connexes aussi.

Montrons alors que tant que $k \geq 2$, on peut diminuer k par au moins 1. Soit $k \geq 2$.

La réunion des F_i étant compacte, elle est incluse dans une boule de diamètre R , donc le complémentaire de la réunion des F_i contient le complémentaire de cette boule. Ainsi, toute composante connexe du complémentaire qui sort de cette boule est la même : il n'y a qu'une composante connexe non bornée de A .

Soit B une composante connexe bornée de A . Puisque A est ouvert dans \mathbb{R}^n , B l'est aussi. Il existe $\delta > 0$ tel que l'ensemble $B_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, B) < \delta\}$ n'intersecte aucune des autres composantes connexes de A . Donc $B_\delta - B \subseteq \bigcup_{i=1}^{N'} F_i$.

Etudions la connexité de $B_\delta - B$.

Soit $y \in B_\delta - B$, alors $\exists x \in B$ tel que $\|x - y\| < \delta$. Soit $y(t) = ty + (1-t)x$, alors $\|y(t) - x\| < t\delta$. D'où $\forall 0 \leq t \leq 1$, $y(t) \in B_\delta$. On montre qu'il existe t_{min} tel que $y(t_{min}) \notin B$ et $\forall t < t_{min}$, $y(t) \in B$. Donc $y(t_{min}) \in \partial \bar{B}$. Mais les frontières de B sont celles des F_i voisins, donc sont en nombre fini. Puisque chaque point de $B_\delta - B$ peut être connecté de façon continue à un élément du bord $\partial \bar{B}$, le nombre de composantes connexes de $B_\delta - B$ est celui des composantes connexes de $\partial \bar{B}$, qui est fini. Soit $\{B_1, \dots, B_\ell\}$ les composantes connexes de $B_\delta - B$. Alors $\forall i \in \{1, \dots, \ell\}$, $\exists j(i) \in \{1, \dots, N'\}$ tel que $B_i \subseteq F_{j(i)}$.

Supposons qu'il existe i tel que $\text{diam}(B_i) > \text{diam}(B)$. Alors $\text{diam}(F_{j(i)}) > \text{diam}(B_i) > \text{diam}(B)$. Et on peut alors remplacer $F_{j(i)}$ par l'union de B_δ et $\{F_{j(i)}\}_{i \in \{1, \dots, \ell\}}$ sans perdre les propriétés du recouvrement choisis.

Il s'agit finalement de vérifier l'existence d'une composante B_i de diamètre plus grand que celui de B .

Puisque B est bornée, il existe alors une seule composante connexe non bornée de B^c . L'intersection de cette composante avec $B_\delta - B$ donne une composante connexe de diamètre $> \text{diam}(B)$.

□

Conclusion : Il existe un recouvrement $(F_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$ de C dont les composantes sont connexes et de diamètres inférieurs à ϵ , tel que le complémentaire de $\bigcup_{i=1}^N F_i$ dans \mathbb{R}^n est connexe.

Remarque : On a défini ce recouvrement de sorte que les F_i et A sont localement connexes ; de plus, ils sont alors tous connexes par arcs.

3.1.3 2^{ème} étape : Construction de la suite de lacets

Lemmes utiles pour la construction des lacets

Définition 3.5. Soit A_1, A_2, \dots, A_k un ensemble de points de \mathbb{R}^n . La ligne brisée $A_1 A_2 \dots A_k$ est la réunion des segments $[A_i, A_{i+1}]$.

Une ligne brisée est dite simple si elle ne s'intersecte pas.

Une ligne brisée A_1, A_2, \dots, A_k est dite fermée si $A_1 = A_k$.

Remarque : toute ligne brisée contient une ligne brisée simple de mêmes extrémités.

Lemme 3.6. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n connexe, alors il est connexe par lignes brisées.

Démonstration du lemme 3.6. Soit U un ouvert connexe de \mathbb{R}^n .

Soit $x \in U$ et $E = \{y \in U \mid \text{il existe une ligne brisée entre } x \text{ et } y \text{ dans } U\}$, soit $r > 0$ tel que $B(y, r) \subseteq U$. Par convexité de $B(y, r)$, pour tout $y' \in B(y, r)$, il existe un segment qui joint y et y' dans $B(y, r)$. Donc la concaténation de ce segment et la ligne brisée entre y et x donne une ligne brisée entre y' et x . E est ouvert.

Par le même raisonnement, on trouve que le complémentaire de E dans U est ouvert. Mais U est connexe donc soit E est vide, soit E^c est vide. Mais $x \in E$, d'où $U = E$.

□

Lemme 3.7. Soit $n \geq 2$, soit $L \subset \mathbb{R}^n$ une ligne brisée simple. Alors $\mathbb{R}^n - L$ est connexe. De plus, si U est un ouvert de \mathbb{R}^n connexe contenant L , alors $U - L$ est connexe.

Démonstration du lemme 3.7. On commence par le cas $n = 2$.

On va construire un voisinage $V \subset U$ de L tel que $V - L$ soit connexe. On pourra alors en déduire que $U - L$ est connexe.

Posons $L = A_1 A_2 \dots A_k$ et $\eta = \frac{1}{2}d(L, \mathbb{R}^2 - U)$. Pour tout $1 \leq i \leq k$, posons :

$$r_i = \frac{1}{2} \min\{d(x, A_i) \mid x \in L - (A_{i-1} A_i A_{i+1})\} \text{ et } r = \min(\{r_i \mid 1 \leq i \leq k\} \cup \{\eta\}) > 0$$

(par convention, on posera $A_i = A_1$ si $i < 1$ et $A_i = A_k$ si $i > k$). Alors les boules $B_i = \bar{B}(A_i, r)$ vérifient : $B_i \subset U$ et $B_i \cap L \subset A_{i-1} A_i A_{i+1}$.

Pour $1 \leq i \leq k - 1$, posons :

$$h_i = \frac{1}{2} \min\{d(x, L - (A_{i-1} A_i A_{i+1} A_{i+2})) \mid x \in A_i A_{i+1}\} \text{ et } h = \min(\{h_i \mid 1 \leq i \leq k - 1\} \cup \{\eta\}) > 0.$$

Alors les cylindres $C_i = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, A_i A_{i+1}) \leq h\}$ vérifient : $C_i \subset U$ et $C_i \cap L \subset A_{i-1} A_i A_{i+1} A_{i+2}$.

On prend alors $V = B_1 \cup C_1 \cup \dots \cup B_{k-1} \cup C_{k-1} \cup B_k$. Les composantes connexes des B_i et C_i formant une chaîne, $V - L$ est connexe.

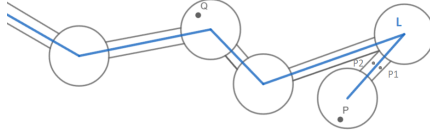


FIGURE 3 – construction du voisinage tubulaire V de L

Ainsi $V - L$ est connexe, d'où $U - L$ est connexe. En particulier, c'est vrai pour $U = \mathbb{R}^2$

Soit $n \geq 2$.

Soit $x \neq y$ deux points de $\mathbb{R}^n - L$. Soit P un plan passant par x et y . Alors l'intersection de P avec L est une réunion finie (potentiellement vide) de points et de lignes brisées disjointes. Soit $P \cap L = \bigcup_{i=1}^N L_i$.

Pour $N = 1$ on se trouve dans le cas $n = 2$ et on a fini. Soit $N \geq 1$ et supposons que $\forall U' = P - \bigcup_{i=1}^N L_i$ avec L_i des points ou des lignes brisées simples de P , U' est connexe. Prenons $U' = P - \bigcup_{i=1}^{N+1} L_i$ avec L_i des points ou des lignes brisées simples de P . Soit $U'' = P - \bigcup_{i=1}^N L_i : U'' - L_{N+1}$ est connexe d'après l'hypothèse de récurrence. D'où U' est connexe. En particulier $P \cap L^c$ est connexe. D'où $\mathbb{R}^n - L$ est connexe.

Dans le cas plus général où U est un ouvert de \mathbb{R}^n avec $n \geq 3$, on ne peut pas garantir que $P \cap U$ est connexe.

De la même façon que pour $n = 2$, on peut construire un voisinage $V \subset U$ de L constitué de cylindres pleins et de boules. On peut donc écrire $V - L = \bigcup_{i=1}^{2k-1} F_i$, avec

$$(F_1, \dots, F_{2k-1}) = (B_1, C_1, B_2, \dots, C_{k-1}, B_k)$$

où les B_i sont des boules privées de deux rayons, et les C_i des cylindres privés de leur axe. Or, en dimension $n \geq 3$, un cylindre plein privé de son axe est connexe, et toute boule privée de deux rayons est connexe. Donc $V - L = \bigcup_{i=1}^{2k-1} F_i$, où les F_i sont connexes et $F_i \cap F_{i+1} \neq \emptyset$. Donc V_L est connexe. Par conséquent, $U - L$ est connexe. \square

Courbe de Jordan passant par un nombre fini de points. Soit $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ un sous-ensemble fini de points de \mathbb{R}^n .

Pour $N = 3$, le triangle passant par les x_i convient.

Soit $N \geq 3$, supposons par récurrence que pour tout ensemble X de N points il existe un lacet continu injectif qui passe par tous les points de X . Supposons de plus que ce lacet est une ligne brisée (vrai pour $N = 3$). Soit maintenant X de cardinal $N + 1$. Il existe une ligne brisée fermée J_0 contenant tous les points de X sauf x_1 (si J_0 contient x_1 on a fini). Soit $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow J_0$. Puisque X est fini, il existe un intervalle ouvert $I \subseteq [0, 1]$ tel que $\gamma_0(I) \cap X = \emptyset$. Alors, $J_0 - \gamma_0(I)$ est toujours une ligne brisée L (mais simple). D'après le lemme 3.7, $\mathbb{R}^n - L$ est alors connexe. Le lemme 3.6 assure ainsi qu'il existe une ligne brisée simple qui joint x_1 et l'une des extrémités de L sans intersecter L . Le même raisonnement joint x_1 à l'autre extrémité.

Remarque : On peut remplacer \mathbb{R}^n par un ouvert connexe U et obtenir une courbe totalement incluse dans U . Il suffit de traiter le cas $N = 3$ comme suit :

On commence par lier x_1 et x_2 par une ligne brisée L_1 . $U - L_1$ est connexe, il existe une ligne brisée $L_2 \subseteq U - L_1$ entre x_3 et x_2 . De même il existe $L_3 \subseteq U - L_1 \cup L_2$ une ligne brisée entre x_3 et x_1 . La concaténation des L_i construit la courbe de Jordan de départ.

Gérer les intersections avec les frontières :

Supposons qu'on a construit un lacet J_0 passant par un point quelconque de chaque F_i (par ordre

des i). Il serait favorable qu'à chaque fois que J_0 passe par un des F_i , la frontière de F_i soit intersectée par J_0 seulement deux fois pour faciliter la preuve de l'injectivité des courbes construites après.

On note $J_0 = \gamma_0([0, 1])$ et on prend t_0 le temps de la première intersection de J_0 et F_1 . Soit t_1 le temps de la dernière intersection avec F_1 avant de passer à F_2 . Par connexité de F_1 on trouve une ligne brisée qui fait la liaison entre $\gamma_0(t_0)$ et $\gamma_0(t_1)$ inclus dans F_1 . Soit N le nombre des composantes du recouvrement et s un entier entre 1 et N (l'indice $N + 1$ signifie 1).

Supposons par récurrence que $\{F_1, \dots, F_{s+1}\}$ sont intersectés en ordre, i.e si $\forall i \in \{1, \dots, s\}$, t_i est le temps de la première intersection de J_0 et F_i alors t_i est une suite croissante. De plus on suppose pour $i \in \{1, \dots, s-1\}$ t'_i le dernier temps de sortie de F_i avant t_{i+1} alors $\gamma_0(t'_i, t_{i+1})$ n'intersecte aucune composante du recouvrement.

On a $t_{s+1} > t_s$ par hypothèse. Soit t'_s le temps de sortie de F_s avant de passer à un autre F_i . il existe une ligne brisée entre $\gamma_0(t'_s)$ et $\gamma_0(t_{s+1})$ dans le complémentaire du recouvrement.

Cette construction assure que J_0 ne passe enfin par chaque F_i qu'une seule fois.

Remarque : Les lemmes démontrés n'assurent pas l'existence d'une telle ligne brisée qui n'intersecte pas les morceaux déjà construits. Cependant le même raisonnement utilisé dans la preuve du lemme 3.7 permet de la démontrer.

Construction de la suite : concaténations des courbes de Jordan

Supposons J_0 construite. On veut maintenant définir J_1 à partir d'un recouvrement plus fin, tout en gardant fixes les arcs du complémentaire du premier recouvrement.

Notons U l'intérieur d'une composante du premier recouvrement. Notons F'_i les composantes du recouvrement plus fin qui sont incluses dans U . Il existe alors une ligne brisée fermée J_1 incluse dans U (d'après la remarque) qui passe par tout les F'_i une seule fois (partie précédente). Soit x_1 et x_2 les seuls points d'intersections de J_0 avec ∂U .

On considère maintenant $A_k A_{k+1}$ un segment de J_1 qui n'intersecte aucun des F'_i . Et on note J' la ligne brisée $J_1 - A_k A_{k+1}$. L'ouvert U privé de J' et de la réunion des F'_i est connexe d'après le lemme 3.7. On peut alors connecter x_1 à A_k et x_2 à A_{k+1} .

Enfin, d'après la partie précédente, on peut encors une fois s'assurer du fait que ce nouveau lacet n'intersecte chacun des F'_i qu'une seule fois.

3.1.4 Preuve du théorème de Denjoy-Riesz

Démonstration. Soit $n \geq 2$. Soit C une sous-partie de \mathbb{R}^n compacte et totalement discontinue. Alors il existe une suite de recouvrements $E_i = \{F_{i,1}, \dots, F_{i,N_i}\}$, $i \geq 1$ vérifiant :

- $\forall i \geq 1$, E_i est constitué de fermés connexes disjoints, dont le bord a un nombre de composantes connexes fini, et de diamètres $< \frac{1}{2^i}$.
- $\forall i \geq 1$, le complémentaire de $\bigcup_{j=1}^{N_i} F_{i,j}$ dans \mathbb{R}^n est connexe.¹
- $\forall i \geq 2$, $\forall j \in \{1, \dots, N_i\}$, $\exists m \in \{1, \dots, N_{i-1}\}$ tel que $F_{i,j} \subsetneq \overset{\circ}{F}_{i-1,m}$

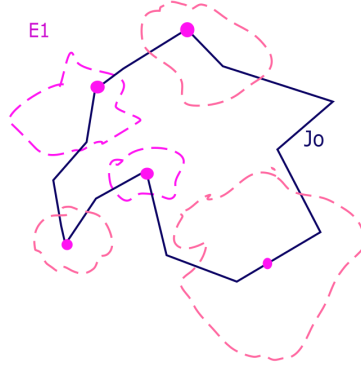
A chaque $F_{i,j}$ on associe un point de son intérieur $x_{i,j}$ quelconque.

On construit une première courbe de Jordan J_0 (On a vu qu'on peut prendre J_0 ligne brisée fermée) qui passe par chaque $F_{1,j}$ une seule fois.

On considère un homéomorphisme $h_1 : \mathbb{S}^1 \longleftrightarrow J_0$ tel que si on divise le cercle en $2N_1$ arcs égaux notés $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2N_1}\}$, les arcs d'ordre pair du cercle sont envoyés sur les arcs en dehors des $F_{1,j}$ et les arcs d'ordre impairs du cercle sont ceux qui passent dedans (voir figure 4).

On construit ensuite J_1 de la façon suivante : Dans chacun des $F_{1,i}$ on a un sous-ensemble de E_2 qui est inclus dedans, par exemple $F_{2,1}, \dots, F_{2,m} \subset F_{1,i}$ pour un certain m . Fixons $i \in [1, N_1]$, et considérons l'ensemble $\{F_{2,j} \mid j \in I_i\}$ des composantes de E_2 incluses dans $F_{1,i}$. Il existe alors une courbe de Jordan incluse dans l'intérieur de $F_{1,i}$, et qui passe par chaque $F_{2,j}$, $j \in I_i$, une seule fois. J_1 est le résultat de la concaténation de ces N_1 courbes avec la partie de J_0 dans le complémentaire de E_1 définie dans le paragraphe précédent. On veut encore une fois subdiviser

1. Ceci est suffisant pour montrer que les bords des $F_{i,j}$ sont connexes.



chacun des arcs d'ordres pairs de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2N_1}\}$ de façon qu'on alterne à chaque fois entre les parties qui sont contenues dans une composante de E_2 et ceux qui ne sont pas (voir figure 5).

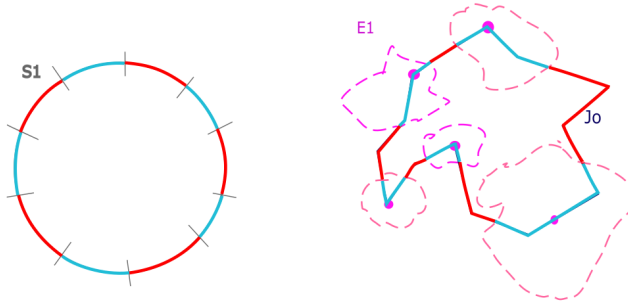


FIGURE 4 –

On construit de la même façon et par récurrence une suite de lacets continus injectifs $\{h_i\}_{i \geq 1}$ vérifiant :

- $\forall i \geq 1, \|h_{i+1} - h_i\|_\infty < \frac{1}{2^i}$
- $\forall i \geq 1, \forall x \in C, d(x, h_i) < \frac{1}{2^i}$

On a alors $\|h_M - h_N\|_\infty < \frac{1}{P} \forall M, N > P$. Par complétude de l'espace des fonctions continues de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^n , $\{h_i\}_{i \geq 1}$ converge uniformément vers une fonction h continue.

Soit $x, y \in \mathbb{S}^1$ tels que $h(x) = h(y)$, $h(x) = \lim_{i \geq 1} h_i(x) = h(y)$ donc il existe une sous suite $h_{\epsilon(i)}(x)$ tel que $\forall i \geq 1, h_{\epsilon(i)}(x) \in \mathring{F}_{\epsilon(i), m}$ pour un certain m tel que $h(y) \in \mathring{F}_{\epsilon(i), m}$, donc $h_{\epsilon(i)}(x) = h_{\epsilon(i)}(y) \forall i \geq 1$. Donc $\|x - y\| < \frac{2\pi}{2^{\epsilon(i)}} \forall i \geq 1$, et $x = y$.

Enfin, C est inclus dans l'image de h , du fait que $d(x, h_i(\mathbb{S}^1)) < \frac{1}{2^i} \forall x \in C, i \geq 0$. L'image de \mathbb{S}^1 par h convient. □

3.1.5 Une amélioration possible des contraintes sur la courbe J

Si on prend $n \geq 3$, on peut espérer montrer le résultat suivant par une construction analogue :

Conjecture 3.8. *Soit C un ensemble de Cantor de \mathbb{R}^n avec $n \geq 3$. Alors il existe une fonction continue injective $f : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ et une courbe de Jordan J contenant C tels que :*

$$J \subset f(\mathbb{S}^{n-1}) .$$

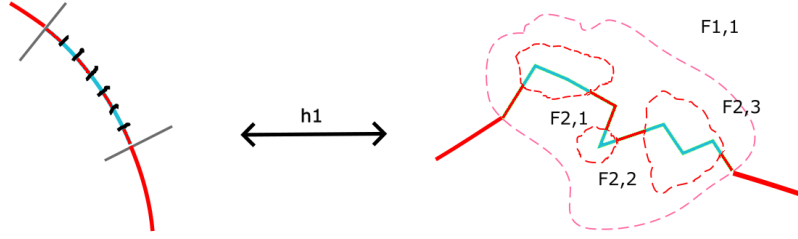


FIGURE 5 –

3.2 Application pour les ensembles de Cantor de \mathbb{R}^2

On admettra le résultat suivant, qu'Edwin E. Moise démontre dans [3].

Théorème 3.9 (Jordan-Schönflies). *Soit J une courbe de Jordan de \mathbb{R}^2 . Alors tout homéomorphisme de J dans \mathbb{R}^2 peut être prolongé en un homéomorphisme $\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$. En particulier, toute courbe de Jordan de \mathbb{R}^2 est conjuguée au cercle \mathbb{S}^1 .*

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 3.10. *Tous les ensembles de Cantor de \mathbb{R}^2 sont conjugués.*

Démonstration. Soit K un ensemble de Cantor de \mathbb{R}^2 . Le théorème de Denjoy-Riesz donne l'existence d'une courbe de Jordan J contenant K . Et d'après le théorème de Schönflies, K est donc conjugué à un ensemble de Cantor $K' \subset \mathbb{S}^1$. Soit $x_0 \in \mathbb{S}^1 - K'$, et c la composante connexe de x_0 dans $\mathbb{S}^1 - K'$. Alors $\mathbb{S}^1 - c$ est homéomorphe à un segment. D'après le théorème 2.2 de conjugaison des ensembles de Cantor en dimension 1, il existe un homéomorphisme $f : (\mathbb{S}^1 - c) \rightarrow [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, avec $0 < \varepsilon < \pi$, envoyant K' sur l'ensemble triadique translaté et dilaté de sorte que ses bornes soient ε et $2\pi - \varepsilon$. L'application $t \mapsto e^{it}$ envoie cet ensemble sur un ensemble de Cantor \mathcal{T}' du cercle. En envoyant de plus continûment c sur $e^{i[2\pi - \varepsilon, \varepsilon]}$, on obtient un homéomorphisme $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tel que $g(K') = \mathcal{T}'$. On pose alors $\tilde{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto |x| \cdot g(\frac{x}{|x|})$, $0 \mapsto 0$. C'est un homéomorphisme, donc tout ensemble de Cantor K est conjugué à \mathcal{T}' . \square

4 Etude d'un exemple d'ensemble de Cantor en dimension 3 : le collier d'Antoine

En dimension 3, tous les ensembles de Cantor ne sont plus conjugués. Dans cette section, on va construire un contre-exemple : le collier d'Antoine.

4.1 Définition

Définition 4.1. *Soit $0 < r < R$. On appelle tore plein toute partie de \mathbb{R}^3 isométrique à la révolution du disque $\bar{D}((R, 0), r) \times \{0\}$ autour de l'axe vect((0, 1, 0)).*

Définition 4.2. *On appelle chaîne toute famille T_1, \dots, T_q de tores pleins disjoints deux à deux et de rayons égaux, tels que : $\forall i, j \in \{1, \dots, q\}$, T_i et T_j sont en entrelacs de Hopf si et seulement si $|i - j| \equiv 1 \pmod{q}$.*

La notion d'entrelacs de Hopf correspond à l'idée intuitive de deux tores "accrochés" comme les maillons d'une chaîne. On en trouvera une définition rigoureuse dans le livre de Dale Rolfsen

[4]. Par abus, dans la suite, lorsqu'on fait référence aux indices des tores d'une chaîne, on les considèrera modulo q ($q + 1 = 1$). Pour tout tore plein T , on peut trouver une chaîne incluse dans T , dont les maillons sont de diamètre arbitrairement petit. L'idée de la construction est d'inclure une chaîne dans chaque maillon d'une chaîne initiale, et de répéter indéfiniment le processus. D'après la proposition 1.4, l'intersection décroissante des ensembles ainsi formés sera un ensemble de Cantor.

Définition 4.3. *On définit d'abord par récurrence : T_0 est un tore plein ; en notant $T_n = \bigcup_{i=1}^{q^n} T_{n,i}$ réunion disjointe de tores pleins, posons $T_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{q^n} C_i$, où C_i est une chaîne incluse dans $T_{n,i}$. Supposons de plus que le diamètre r_n des tores composant T_n est choisi de sorte que $r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Alors $\mathcal{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$ est un collier d'Antoine, et c'est un ensemble de Cantor.*

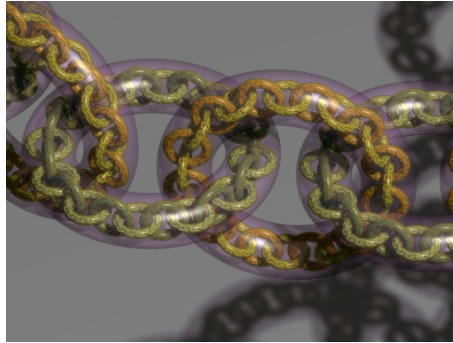


FIGURE 6 – Aperçu de la construction d'un collier d'Antoine

4.2 Classe de conjugaison du collier d'Antoine

Le collier d'Antoine est l'un des exemples les plus classiques montrant que le résultat démontré sur les ensembles de Cantor de dimension 1 et 2 n'est plus vrai en dimension supérieure.

Théorème 4.4. *Un collier d'Antoine n'est pas conjugué à l'ensemble de Cantor standard $\mathcal{T} \times \{0\}^2$ dans \mathbb{R}^3 .*

Démonstration. Si \mathcal{A} était conjugué à $\mathcal{T} \times \{0\}^2$, alors $\mathbb{R} - \mathcal{A}$ serait homéomorphe à $\mathbb{R} - \mathcal{T} \times \{0\}^2$. En particulier, ils auraient le même groupe fondamental. Or le groupe fondamental de $\mathcal{T} \times \{0\}^2$ est trivial.

Soit γ un lacet non homotope à une constante dans $\mathbb{R} - T_0$. C'est donc un lacet dans $\mathbb{R} - \mathcal{A}$. Le théorème 2 de la partie 18 de [3], que l'on admet ici, assure que dans ce cas, γ est un lacet non trivial dans chaque $\mathbb{R} - T_n$. Soit $H : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une homotopie entre γ et une constante. Alors $H(I^2)$ intersecte chaque T_n : soit $x_n \in H(I^2) \cap T_n$. Alors la suite (x_n) admet une valeur d'adhérence x , et $x \in H(I^2) \cap \mathcal{A}$. Donc γ n'est pas homotope à une constante dans $\mathbb{R} - \mathcal{A}$: son groupe fondamental est non-trivial.

Par conséquent, le collier d'Antoine n'est pas conjugué à $\mathcal{T} \times \{0\}^2$. □

4.3 Application dans la théorie des nœuds

L'application de la conjecture 3.8 au collier d'Antoine fournit un exemple d'un nœud sauvage (i.e. non conjugué au nœud trivial) de \mathbb{S}^2 dans \mathbb{R}^3 . En fait, la construction de cet objet est similaire à celle de l'exemple connu de la sphère cornue d'Alexander.

5 Projections des ensembles de Cantor

Cette section s'inspire du résultat mis en évidence par Olga Frolkina dans [2], qui fait le lien entre la nature des projections d'un ensemble de Cantor et la propriété d'être conjugué à l'ensemble triadique. On étudie alors les projections des ensembles de Cantor, en commençant par ceux de \mathbb{R}^2 :

5.1 Projections d'ensembles de Cantor de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}

Dans cette sous-section, on répond à la question : quels sont les sous-ensembles de \mathbb{R} pouvant s'écrire comme la projection sur \mathbb{R} d'un ensemble de Cantor de \mathbb{R}^2 ? Tout d'abord, un tel ensemble doit nécessairement être compact.

On traitera séparément les segments et les ensembles de points isolés.

Notons $p_1 : (x, y) \mapsto x$ la projection canonique de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R} . On rappelle que \mathcal{T} désigne l'ensemble triadique de Cantor, défini en section 1.1.

Lemme 5.1. *Soit E un espace métrique et C un ensemble de Cantor. Alors il y a équivalence entre :*

1. $E \times C$ est un ensemble de Cantor
2. E est compact et totalement discontinu.

Démonstration. — $E \times C$ est compact si et seulement si E est compact, puisque C est compact ;
— $E \times C$ est totalement discontinu si et seulement si E est totalement discontinu, puisque C est totalement discontinu ;
— $E \times C$ est toujours sans point isolé, puisque C est sans point isolé. □

Remarque. Dans la suite, on appliquera ce lemme seulement avec $C = \mathcal{T}$.

Lemme 5.2. *Soit S un segment. Il existe un ensemble de Cantor de \mathbb{R}^2 dont la projection sur \mathbb{R} est S , et étant de plus inclus dans le carré $S \times S$.*

Démonstration. Posons $C_0 = S \times S$ et $C_{n+1} = \bigcap_{\substack{I \text{ composante} \\ \text{connexe de } C_n}} F(I)$, avec :

$$F([a, b] \times [c, d]) = \left[a, \frac{a+b}{2} \right] \times \left[c, c + \frac{d-c}{3} \right] \cup \left[\frac{a+b}{2}, b \right] \times \left[c + 2\frac{d-c}{3}, d \right].$$

On définit alors $K_S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ (voir Figure 7). C'est un ensemble de Cantor inclus dans $S \times S$, et $p_1(K_S) \subset S$.

Soit $x \in S$. On montre par récurrence : $\exists y_n \in S$, $(x, y_n) \in C_n$, et de plus la suite (y_n) converge vers une limite y . Mais alors, puisque les C_n sont fermés, $(x, y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = K_S$: on a donc bien $S = p_1(K_S)$. □

Théorème 5.3. *Soit F un compact de \mathbb{R} . Il existe un ensemble de Cantor K de \mathbb{R}^2 tel que $p_1(K) = F$.*

Démonstration. On décompose $F = \bar{F} \cup (F - \overset{\circ}{F})$.

L'ouvert $\overset{\circ}{F}$ est une réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts, donc \bar{F} est l'adhérence d'une réunion dénombrable disjointe de segments de longueur non nulle : $\bar{F} = \overline{\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} S_n}$. On construit donc les ensembles de Cantor K_{S_n} , $n \in \mathbb{N}$ donnés par le lemme 5.2, et on pose $K_1 = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_{S_n}}$.

Alors K_1 est compact et sans point isolé.

De plus $p_1(K_1) = \overline{p_1(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_{S_n})} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} p_1(K_{S_n})} = \bar{F}$.

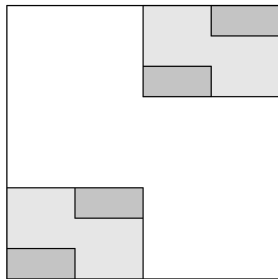


FIGURE 7 – Les 3 premières étapes de la construction de K_S

Soit D une partie connexe de K_1 . Alors $p_1(D)$ est connexe dans \bar{F} : s'il intersecte un S_n , il est inclus dedans. Mais dans ce cas, D est une partie connexe de K_{S_n} , donc c'est un point. Et dans le cas où $p_1(D)$ n'intersecte aucun S_n , c'est encore un point puisque $\bar{F} - \mathring{F}$ est totalement discontinu. Donc K_1 est un ensemble de Cantor.

Le compact $F - \mathring{F}$ est totalement discontinu puisqu'il est d'intérieur vide, et que les parties connexes de \mathbb{R} sont les intervalles. D'après le lemme 5.1, $(F - \mathring{F}) \times \mathcal{T}$ est un ensemble de Cantor.

En prenant K_2 un translaté vertical de $(F - \mathring{F}) \times \mathcal{T}$ de sorte que K_1 et K_2 soient suffisamment éloignés, $K = K_1 \sqcup K_2$ est un ensemble de Cantor, et $p_1(K) = p_1(K_1) \cup p_1(K_2) = F$. \square

Remarque. La décomposition de F en une union $F = A \cup B$, avec A totalement discontinu et B union de segments de longueur non nulle, est un argument essentiel de ce problème. C'est justement ce résultat qui ne se généralise pas dans les dimensions supérieures, empêchant d'y utiliser le même raisonnement.

5.2 Lien entre projection et conjugaison

Le théorème suivant établit un lien entre les projections d'un ensemble de Cantor et sa classe de conjugaison.

Théorème 5.4. *Soit X un ensemble de Cantor dans \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Supposons qu'il existe un plan Π de dimension $\dim \Pi \in \{1, 2, n-2, n-1\}$ tel que la projection de X sur Π soit de dimension 0. Alors X est conjugué à l'ensemble triadique $\mathcal{T} \times \{0\}^{n-1}$.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 6.1 et de l'Assertion 3.3 de l'article d'Olga Frolkina [2].

5.2.1 Cas du collier d'Antoine

Afin de vérifier la cohérence avec le théorème 5.4, étudions les projections du collier d'Antoine. En effet, ce théorème prédit qu'aucune projection du collier d'Antoine sur une droite ou un plan n'est de dimension 0.

Les projections sur une droite se vérifient ainsi : l'entrelacement des tores implique que la projection de T_n est connexe, donc que c'est un segment S_n . Posons $S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$. Alors $p(\mathcal{A}) \subset S$. Soit $t \in S$, et $x_n \in T_n$ tel que $p(x_n) = t$. Alors par compacité de \mathcal{A} , (x_n) a une valeur d'adhérence x et $p(x) = t$. Donc $p(\mathcal{A}) = S$.

De plus, S ne peut pas être réduit à un point. En effet, cela signifierait que \mathcal{A} est inclus dans un plan. D'après le théorème 3.10 montré dans la section 3, il existerait donc un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ envoyant \mathcal{A} sur $\mathcal{T} \times \{0\}$, et donc l'homéomorphisme $(x, y, z) \mapsto (f(x, y), z)$ établirait une conjugaison entre \mathcal{A} et $\mathcal{T} \times \{0\}^2$: contradiction. Cette projection est donc bien unidimensionnelle.

Le cas d'un plan est plus complexe. Soit p une projection sur un plan.

Lemme 5.5. Soit $n \geq 1$ et $1 \leq i \leq q_n$. Alors il existe $x \in \mathcal{A} \cap T_{n,i}$, $x' \in \mathcal{A} \cap T_{n,i+1}$ tels que $p(x) = p(x')$.

Démonstration. Soit $m > n$. Alors $p(T_m \cap T_{n,i})$ et $p(T_m \cap T_{n,i+1})$ s'intersectent, sinon cela contredirait le théorème 2, partie 18 de [3]. On conclut par le théorème 1.6 des compacts emboîtés. \square

Théorème 5.6. La projection $p(\mathcal{A})$ est l'image d'un lacet de \mathbb{R}^2 .

Démonstration. On construit par récurrence une suite (γ_n) de lacets.

Pour la facilité de définition, on notera $[x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{k-1} \rightarrow x_k]_{[a,b]}$ l'arc $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, affine par morceaux selon la subdivision (t_0, \dots, t_k) avec $t_i = a + i \frac{b-a}{k}$, tel que $\phi(t_i) = x_i$.

Pour tout $1 \leq i \leq q_1$, le lemme 5.5 donne l'existence d'un élément $x_i \in p(\mathcal{A} \cap T_{1,i}) \cap p(\mathcal{A} \cap T_{1,i+1})$. On pose alors $\gamma_1 = [x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_q \rightarrow x_1]_{[0,1]}$. On nomme $F_1 = \{t_0, \dots, t_{q_1}\}$ (où $\gamma_1(t_i) = x_i$) l'ensemble des *points fixés* de γ_1 , avec $\gamma_1(F_1) \subset p(\mathcal{A})$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons γ_n construite. Par construction, γ_n est affine par morceaux selon la subdivision (t_0^n, \dots, t_k^n) , où $\{t_0^n, \dots, t_k^n\} = F_n$. Définissons donc γ_{n+1} sur chaque segment $[t_i^n, t_{i+1}^n]$.

Par construction, $\gamma_n(t_i^n)$ et $\gamma_n(t_{i+1}^n)$ appartiennent à un même $p(T_{n,j} \cap \mathcal{A})$. $T_{n,j} \cap T_{n+1}$ est une chaîne (T_1', \dots, T_q') , où l'on peut supposer $\gamma_n(t_i^n) \in T_1'$; notons $\gamma_n(t_{i+1}^n) \in T_p'$. Le lemme donne l'existence de $x_1, \dots, x_q \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_i \in p(\mathcal{A} \cap T_i') \cap p(\mathcal{A} \cap T_{i+1}')$. Posons alors :

$$\gamma_{n+1}|_{[t_i^n, t_{i+1}^n]} = [\gamma_n(t_i^n) \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_q \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{p-1} \rightarrow \gamma_n(t_{i+1}^n)]_{[t_i^n, t_{i+1}^n]}$$

et $F_{n+1,i}$ l'ensemble des points de la subdivision associée. On obtient alors par recollement γ_{n+1} et $F_{n+1} = \bigcup_{i=0}^{k-1} F_{n+1,i}$, qui vérifient :

- $\gamma_{n+1}(F_{n+1}) \subset p(\mathcal{A})$
- $F_{n+1} \subset F_n$
- $\forall i \in \{1, \dots, q_{n+1}\}, \exists t \in F_{n+1}, \gamma_{n+1}(t) \in p(T_{n+1,i})$.

Montrons que la suite (γ_n) converge. Soit $N \in \mathbb{N}$. $\forall m, n \geq N, \|\gamma_n - \gamma_m\| \leq 2r_{N-1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. Donc (γ_n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^2)$ complet, donc elle admet une limite γ .

Puisque l'union croissante $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est dense dans $[0, 1]$, que γ est continue et que $p(\mathcal{A})$ est fermé, on a $\gamma([0, 1]) \subset p(\mathcal{A})$.

Soit $x \in \mathcal{A}$. Alors $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_{n,i_n}$ avec $1 \leq i_n \leq q_n$. Mais :

$$\exists t_n \in [0, 1], \gamma(t_n) = \gamma_n(t_n) \in p(T_{n,i_n}).$$

Par compacité de $[0, 1]$, $\exists t \in [0, 1], \gamma(t) = p(x)$. Donc $\gamma([0, 1]) = p(\mathcal{A})$. \square

Puisque $p(\mathcal{A})$ ne peut pas être un point (l'argument est identique à celui des projections sur une droite), on en conclut que toutes les projections du collier d'Antoine sont connexes et de dimension au moins 1. On trouve des résultats similaires dans la section qu'Olga Frolkina consacre au collier d'Antoine dans [2].

5.2.2 Autres exemples

Dans \mathbb{R}^3 , étudions également le cas de l'ensemble \mathcal{T}^3 . On rappelle que \mathcal{T} est l'ensemble triadique dans \mathbb{R} .

Si l'on choisit un plan généré par deux vecteurs de la base canonique, alors la projection de \mathcal{T}^3 sur ce plan sera \mathcal{T} , qui est de dimension zéro. Le théorème 5.4 prédit donc qu'il est conjugué à $\mathcal{T} \times \{0\}^2$. Or, R. H. Bing énonce dans [1] qu'un ensemble de Cantor de \mathbb{R}^3 est conjugué à l'ensemble triadique si et seulement si on peut le recouvrir par des ensembles de diamètre arbitrairement petit et homéomorphes à des sphères. Cette condition est vérifiée pour \mathcal{T}^3 : les résultats sont cohérents.

Le théorème 5.4 a également les corollaires suivants.

Corollaire 5.7. Soit C un ensemble de Cantor de \mathbb{R}^n . Alors $C \times \{0\}$ est conjugué au Cantor triadique dans \mathbb{R}^{n+1} .

Démonstration. Direct en considérant la projection de $C \times \{0\}$ sur $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. □

Corollaire 5.8. *Soit $C \subset \mathbb{R}^n, C' \subset \mathbb{R}^m$ deux ensembles de Cantor, et supposons que C est conjugué à l'ensemble triadique $\mathcal{T} \times \{0\}^{n-1}$. Alors $C \times C'$ est conjugué à l'ensemble triadique dans \mathbb{R}^{n+m}*

Démonstration. $C \times C'$ est conjugué à $\mathcal{T} \times \{0\}^{n-1} \times C'$. Puis on projette cet ensemble sur $\mathbb{R} \times \{0\}^{n+m-1}$. □

6 Conclusion et questions ouvertes

Dans ce mémoire, on a pu introduire la notion d'ensemble de Cantor et étudier sa diversité selon l'espace dans lequel il s'inscrit. On a vu qu'en dimension 1 et 2, les ensembles de Cantor sont tous équivalents à conjugaison près. On a ensuite essayé de traiter la question de la conjugaison dans les dimensions supérieures en utilisant principalement le résultat énoncé par Olga Frolikina dans son article [2] sur le lien entre conjugaison et projections. Cette étude nous a permis de toucher à plusieurs questions intéressantes de topologie. Dans la section 3, on arrive à trouver un lien entre les ensembles de Cantor dans \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) et les courbes de Jordan de \mathbb{R}^n à travers une généralisation du théorème de Denjoy-Riesz. On en trouve ensuite une application dans la théorie des nœuds (4.3). Dans la section 5, l'étude des projections des ensembles de Cantor de \mathbb{R}^2 permet de concevoir la diversité géométrique de ces ensembles. Enfin la dernière partie facilite bien la vérification de la propriété "être conjugué au Cantor standard", comme on l'a vu avec des exemples.

Naturellement, cette étude nous invite à poser plusieurs questions concernant tous les aspects différents introduits des ensembles de Cantor :

- Est-ce que tout arc/ sphère sauvage contient un ensemble de Cantor non conjugué au Cantor standard ?
- Peut-on trouver des plongements de sphères sauvages dans toutes les dimensions de façon analogue à ce qu'on a fait dans la sous section 4.3 ?
- Quelles sont les projections possibles des ensembles de Cantor en général ? Que se passe-t-il lorsqu'on se restreint au cas des ensembles conjugués au Cantor standard seulement ?

Références

- [1] R. H. Bing. Tame Cantor sets in E^3 . *Pacific Journal of Mathematics*, 1961.
- [2] Olga Frolkina. Cantor sets with high-dimensional projections. *Topology and its Applications*, 275 :107020, apr 2020.
- [3] Edwin E. Moise. *Geometric topology in dimensions 2 and 3*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 47. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [4] D. Rolfsen. *Knots and Links*. AMS Chelsea Publishing Series. AMS Chelsea Pub., 2003.