

Rigidité et non rigidité des surfaces à courbure constante

Mémoire de première année

Anne-Gaëlle Vibert - Quentin Hurez

Sujet proposé par
Paul Laurain

Département de mathématiques et applications
École Normale Supérieure

2023

Table des matières

Introduction	2
1 Surfaces régulières	2
1.1 Généralités	2
1.2 Orientation	5
2 Courbure	6
2.1 Application de Gauss	7
2.2 Courbures d'une surface	9
2.3 Points particuliers	12
3 Théorème - surface à courbure de Gauss constante	15
3.1 Lemmes préliminaires	15
3.2 Théorème	24
4 Théorème - surface à courbure moyenne constante	25
4.1 Résultats préliminaires	25
4.2 Théorème	30
Conclusion	30
Bibliographie	32

Introduction

Ce mémoire a pour objet l'étude des surfaces de \mathbb{R}^3 à courbure constante. Si la notion de courbure s'appréhende bien par son caractère visuel, il est néanmoins plus difficile d'en donner une définition formelle. En effet, une surface est courbée dans toutes les directions. Pour obtenir un seul nombre à partir des courbures dans chaque direction, on est conduit à faire des choix de définition. Ainsi, pour une surface dans \mathbb{R}^3 , deux notions de courbure coexistent : la courbure de Gauss et la courbure moyenne, que nous définirons en section 2 de ce mémoire. Dès lors, il est intéressant d'étudier les différences et les points communs entre ces deux notions. Ici, nous nous consacrerons à l'étude des surfaces à courbure constante, et verrons que sous de bonnes hypothèses, pour les deux notions de courbure, on obtient exactement les sphères.

Dans un premier temps nous nous attacherons à introduire et définir les objets et outils mathématiques liés à la notion de courbure, en sections 1 et 2, en nous appuyant sur le livre [1] de do Carmo. Puis nous étudierons un théorème formulé par Liebmann en 1899 sur les surfaces à courbure de Gauss constante, en section 3 et en utilisant [1] également. Pour finir nous nous concentrerons sur un théorème établi par Hopf en 1951, en section 4, en nous basant sur l'ouvrage [2] de Hopf.

Nous remercions vivement Paul Laurain de nous avoir proposé ce sujet. Il nous a été d'une aide précieuse par sa supervision et son accompagnement dans l'étude et la compréhension des théorèmes étudiés.

1 Surfaces régulières

On définit ici les objets sur lesquels la notion de courbure aura un sens : les surfaces régulières de \mathbb{R}^3 orientables.

1.1 Généralités

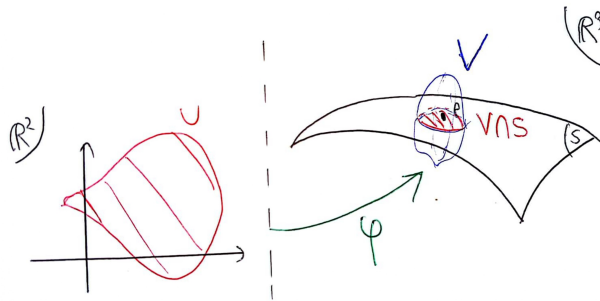
Notation. Dans tout ce mémoire, si $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$) est une fonction différentiable en $a \in \mathbb{R}^p$, pour $1 \leq i \leq p$ on notera $\varphi_{x_i}(a) := \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a) = d_a \varphi(e_i)$ (où (e_1, \dots, e_p) est la base

canonique de \mathbb{R}^p).

Définition 1.1.1. (Surface régulière)

Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^3$ est une **surface régulière** si pour tout $p \in S$ il existe un voisinage V de p dans \mathbb{R}^3 , un ouvert U de \mathbb{R}^2 et une application $\varphi : U \rightarrow V \cap S$ vérifiant :

1. φ est une fonction différentiable C^∞
2. φ est un homéomorphisme, c'est à dire que φ admet un inverse φ^{-1} qui est la restriction d'une fonction continue $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ où W est un ouvert de \mathbb{R}^3 contenant $V \cap S$.
3. Pour tout $q \in U$, $d_q\varphi$ est injective

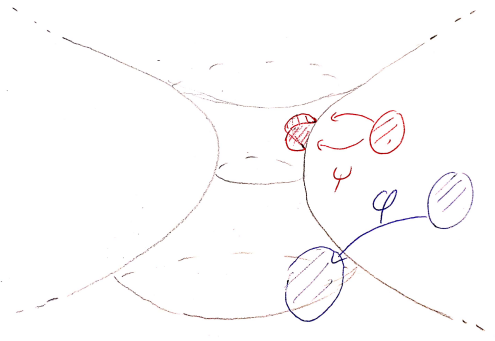
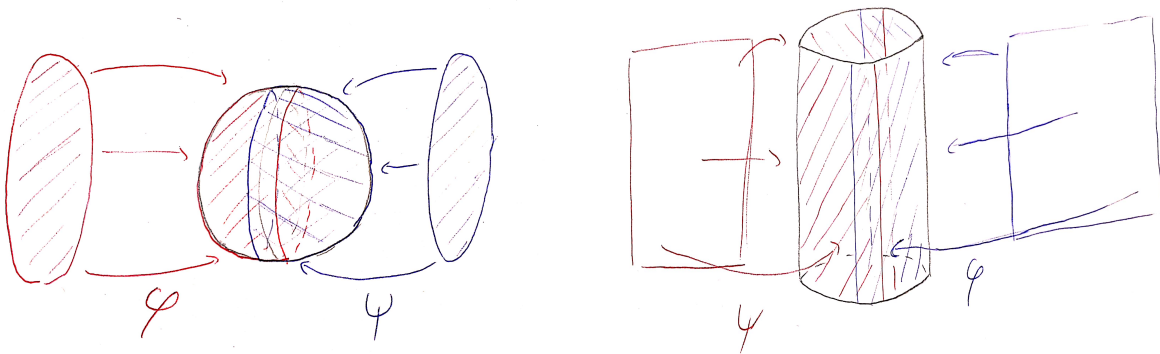


Vocabulaire 1.1.2. Une telle application φ est appelée une carte. Un ensemble de cartes recouvrant la surface S est un atlas de S .

Exemple 1.1.3. (Exemples de surfaces régulières)

Les trois exemples ci-dessous sont des surfaces régulières :

- La sphère $\mathbb{S}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- Le cylindre $x^2 + y^2 = 1$
- Une surface de révolution engendrée par une parabole

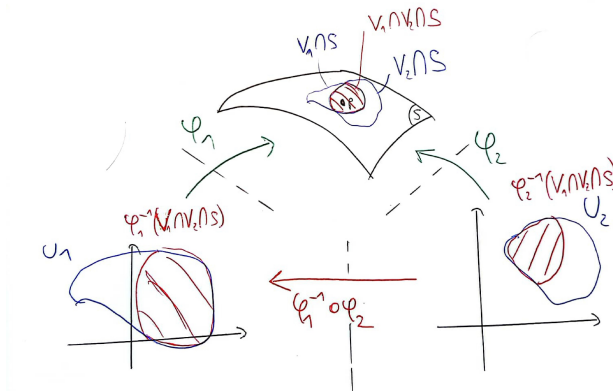


Remarque 1.1.4.

- i En particulier φ est une immersion injective donc c'est un plongement. Donc une surface est une sous-variété de dimension 2 de \mathbb{R}^3 , ce qui est en cohérence avec la terminologie.
- ii Le fait que φ soit un homéomorphisme garantit en particulier l'injectivité, donc qu'il n'y a pas d'auto-intersection. L'injectivité de la différentielle en tout point assure l'existence du plan tangent : pour $p \in S$, le plan tangent est $T_p S = d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(\mathbb{R}^2)$, qui est bien de dimension 2 par le théorème du rang.

Proposition 1.1.5. Soient S une surface régulière et $p \in S$.

Soient $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1 \cap S$ et $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2 \cap S$ deux cartes autour de p . Alors le **changement de cartes** $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : \varphi_2^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap S) \rightarrow \varphi_1^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap S)$ est un difféomorphisme.



1.2 Orientation

Intuitivement, toute surface peut être orientée localement : un voisinage suffisamment petit de $p \in S$ est homéomorphe à \mathbb{R}^2 ; on peut donc lui donner une orientation. Mais rien ne garantit a priori que ces orientations sont compatibles, c'est-à-dire que l'intersection de deux voisinages d'un point p_1 et d'un point p_2 est orientée d'une unique manière. Si l'on arrive à orienter localement la surface de sorte que cette cohérence globale soit respectée, on dira que la surface est orientable. Plus formellement, on définit l'orientation de la manière suivante :

Définition 1.2.1. (Orientation)

Une surface S est dite orientable si l'on peut la recouvrir d'un atlas tel que pour tout point $p \in S$ appartenant à deux cartes φ_1 et φ_2 de cet atlas, le changement de carte associé $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ a un jacobien positif en p . On dit alors que S munie de cet atlas est orientée. S'il n'existe pas de tel atlas, on dit que S est non orientable.

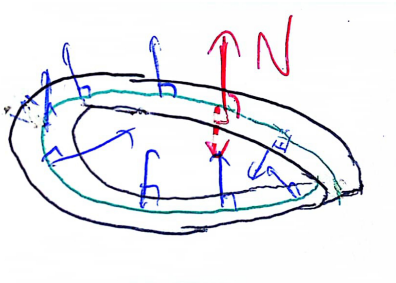
Proposition 1.2.2. Une surface régulière est orientable si et seulement si il existe un champ de vecteurs unitaires et normaux $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ différentiable sur S .

Démonstration. Si la surface est orientable : la section 2.1 montre comment construire un champ de vecteurs normaux unitaires différentiable sur S par l'application de Gauss, en définissant $N(p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}(\varphi^{-1}(p))$ où φ est une carte autour de p .

Réciproquement, s'il existe un champ de vecteurs normaux unitaires $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ différentiable sur S : si φ est une carte en p , alors $e(\varphi, p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}(\varphi^{-1}(p)) \in (T_p S)^\perp$ et $\langle N(p), e(\varphi, p) \rangle = \pm 1$. Or tout est continu ici. Par locale connexité de S (c'est une sous-variété), localement $\langle N(p), e(\varphi, p) \rangle$ est constant. Donc, quitte à changer N en $-N$, localement au voisinage de p , $N(p) = e(\varphi, p)$. En particulier si φ_1, φ_2 sont deux cartes en p : $e(\varphi_1, p) = e(\varphi_2, p)$. Cela signifie que dans $T_p S$, $((\varphi_1)_u(\varphi_1^{-1}(p)), (\varphi_1)_v(\varphi_1^{-1}(p)))$ et $((\varphi_2)_u(\varphi_2^{-1}(p)), (\varphi_2)_v(\varphi_2^{-1}(p)))$ (qui sont des bases par injectivité de la différentielle) ont la même orientation. Donc le difféomorphisme de changement de carte est de jacobien positif, en effet, par la règle de la chaîne, $d_{\varphi_1^{-1}(p)}\varphi_1 = d_{\varphi_2^{-1}(p)}\varphi_2 \circ d_{\varphi_1^{-1}(p)}(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)$. Donc S est orientable. \square

Exemple 1.2.3. La sphère $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ est orientable, en effet en tout $p = (x, y, z)$ de la sphère, $N(p) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un champ de vecteurs normaux unitaires qui est différentiable.

En revanche le ruban de Möbius n'est pas orientable, car s'il l'était et que N était un champ de vecteurs normaux unitaires, en suivant un chemin qui fait le tour du ruban et comme N varie continument, on trouverait $N(p) = -N(p)$, ce qui est impossible car $|N(p)| = 1$.



2 Courbure

Maintenant que nous avons vu ce qu'est une surface régulière orientable, nous allons pouvoir définir des notions de courbure en tout point de cette surface. D'abord, en section 2.1, nous allons introduire l'application de Gauss, qui est une application normale à la surface

en tout point, puis en sections 2.2 et 2.3 nous allons définir les notions de courbure et voir comment elles se relient à l'application de Gauss.

2.1 Application de Gauss

Définition 2.1.1. (Application de Gauss)

Soit S une surface régulière orientable. Pour $p \in S$, on définit :

$$N(p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}(\varphi^{-1}(p)) \quad (1)$$

où φ est une carte autour de p . Ceci définit l'**application de Gauss** $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Proposition 2.1.2. Pour $p \in S$, $N(p)$ ne dépend pas de la carte choisie autour de p , en particulier N est bien définie. De plus, N est différentiable, et même \mathcal{C}^∞ .

Démonstration. D'abord, pour φ une carte, $d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi$ est injective : $(\varphi_u \wedge \varphi_v)(\varphi^{-1}(p)) \neq 0$. De plus, $d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi$ est à valeurs dans T_pS , donc en notant (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 , on a que $\varphi_u(\varphi^{-1}(p)) = d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(e_1)$ et $\varphi_v(\varphi^{-1}(p)) = d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(e_2)$ sont deux vecteurs indépendants de T_pS : c'est une base de T_pS .

En particulier $(\varphi_u \wedge \varphi_v)(\varphi^{-1}(p)) \in (T_pS)^\perp$ qui est une droite, engendrée par un vecteur unitaire fixé e . Alors $\frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}(\varphi^{-1}(p))$ vaut $\pm e$: $N(p)$ est un vecteur unitaire normal à S (c'est-à-dire à T_pS) en p . Il s'agit donc de montrer que le signe (e où $-e$) ne dépend pas de la carte φ choisie. Ceci va venir de l'orientabilité de la surface : on va montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux cartes en p , $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ est un difféomorphisme de jacobien positif. On note :

$$f_1 = (\varphi_1)_u(\varphi_1^{-1}(p)), g_1 = (\varphi_1)_v(\varphi_1^{-1}(p)), f_2 = (\varphi_2)_u(\varphi_2^{-1}(p)), g_2 = (\varphi_2)_v(\varphi_2^{-1}(p))$$

Alors (f_1, f_2) et (g_1, g_2) sont deux bases de T_pS , comme le changement de cartes est de jacobien positif, (f_1, f_2) et (g_1, g_2) ont la même orientation dans T_pS . Dès lors $f_1 \wedge f_2$ et $g_1 \wedge g_2$ sont de même sens dans $(T_pS)^\perp$, et donc en normalisant ils sont égaux, et donc $N(p)$ ne dépend pas de la carte choisie.

Quant à la différentiabilité de N , elle découle du fait que $N(p) = \frac{d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(e_1) \wedge d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(e_2)}{|d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(e_1) \wedge d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(e_2)|}$ est différentiable car φ est \mathcal{C}^∞ □

Remarque 2.1.3. Comme N est un vecteur unitaire : $\langle N, N \rangle = 1$ donc pour $p \in S$, en différentiant, $2 \langle N(p), d_p N \rangle = 0$ et ainsi $\langle N(p), d_p N \rangle = 0$. Donc $\text{Im}(d_p N) \subset T_p S$, c'est-à-dire qu'on peut voir $d_p N$ comme une application $d_p N : T_p S \rightarrow T_p S$. $d_p N$ est donc un endomorphisme de l'espace vectoriel $T_p S$.

Proposition 2.1.4. Pour $p \in S$, $d_p N : T_p S \rightarrow T_p S$ est un endomorphisme symétrique.

Démonstration. Soit $\varphi : U \rightarrow V \cap S$ une carte autour de p , (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 , $f_1 = \varphi_u(\varphi^{-1}(p)) = d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(e_1)$ et $f_2 = \varphi_v(\varphi^{-1}(p)) = d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(e_2)$: (f_1, f_2) est une base de $T_p S$ car $d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi$ est un endomorphisme injectif.

On veut montrer que pour tous $a, b \in T_p S$, $\langle d_p N(a), b \rangle = \langle a, d_p N(b) \rangle$. Par bilinéarité du produit scalaire et linéarité de $d_p N$, il suffit de montrer que $\langle d_p N(f_i), f_j \rangle = \langle f_i, d_p N(f_j) \rangle$ pour $i, j \in \{1, 2\}$. Pour $i = j$, c'est clair par symétrie du produit scalaire. Reste à traiter le cas $i \neq j$. Il suffit de montrer que $\langle d_p N(f_1), f_2 \rangle = \langle f_1, d_p N(f_2) \rangle$.

Pour cela, on voit désormais localement N comme une fonction prenant ses valeurs dans U , par $N(u, v) = N(\varphi(u, v))$. Comme $\varphi_u(\varphi^{-1}(p)), \varphi_v(\varphi^{-1}(p)) \in N(p)^\perp$, on a les relations suivantes : $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$ et $\langle N, \varphi_v \rangle = 0$. En dérivant par rapport à v et u respectivement, on obtient $\langle N_v, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{uv} \rangle = 0$ et $\langle N_u, \varphi_v \rangle + \langle N, \varphi_{vu} \rangle = 0$. Or $\varphi_{vu} = \varphi_{uv}$ (Schwarz). Donc :

$$\langle N_v, \varphi_u \rangle = \langle N_u, \varphi_v \rangle (= - \langle N, \varphi_{uv} \rangle) \quad (2)$$

De plus, si α est une courbe passant par p avec $\alpha(0) = p$ et $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, en exprimant $d_p N(\alpha'(0))$ on a d'une part :

$$\begin{aligned} d_p N(\alpha'(0)) &= d_p N \circ d_0 \alpha(1) = d_0(N \circ \alpha)(1) = (N \circ \alpha)'(0) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N(u(t), v(t)) = N_u(\varphi^{-1}(p))u'(0) + N_v(\varphi^{-1}(p))v'(0) \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} d_p N(\alpha'(0)) &= d_p N(\varphi_u(\varphi^{-1}(p))u'(0) + \varphi_v(\varphi^{-1}(p))v'(0)) \\ &= d_p N(\varphi_u(\varphi^{-1}(p)))u'(0) + d_p N(\varphi_v(\varphi^{-1}(p)))v'(0) . \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tous $u'(0), v'(0) \in \mathbb{R}$, il suit :

$$\begin{cases} d_p N(\varphi_u) = N_u \\ d_p N(\varphi_v) = N_v \end{cases} \quad (3)$$

Dès lors $d_p N(f_1) = N_u(\varphi^{-1}(p))$ et $d_p N(f_2) = N_v(\varphi^{-1}(p))$, ce qui donne en remplaçant dans la relation (2) : $\langle d_p N(f_1), f_2 \rangle = \langle f_1, d_p N(f_2) \rangle$, comme voulu. \square

Remarque 2.1.5. En particulier $d_p N$ est diagonalisable en base orthonormée. On retiendra ce fait pour la partie suivante.

Définition 2.1.6. (Seconde forme fondamentale)

Pour $p \in S$, on définit la **seconde forme fondamentale** par :

$$\Pi_p : u \in T_p S \longmapsto - \langle d_p N(u), u \rangle \in \mathbb{R}$$

C'est une forme quadratique.

2.2 Courbures d'une surface

Pour définir la courbure d'une surface, il s'agit déjà de comprendre ce qu'est la courbure d'une courbe :

Définition 2.2.1. (Courbe régulière)

On dit que $C \subset \mathbb{R}^3$ est une **courbe** si elle est l'image d'une fonction $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe \mathcal{C}^∞ en tout point de I , où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

On dit que la courbe est **régulière** si pour tout $t \in I$, $\alpha'(t) \neq 0$. $\alpha'(t)$ est alors le vecteur tangent à C en $\alpha(t)$.

On dira que la courbe est **paramétrée par la longueur d'arc** s si en tout point $s \in I$, $|\alpha'(s)| = 1$.

Définition 2.2.2. (Courbure d'une courbe régulière) Soit C une courbe régulière paramétrée par $\alpha : s \in I \longmapsto \alpha(s) \in \mathbb{R}^3$ où s est la longueur d'arc. Soit $t \in I$, on appelle **courbure** de C en $\alpha(t)$ la valeur $k(t) := |\alpha''(t)|$.

Lorsqu'une courbe est tracée sur une surface, on peut considérer une nouvelle notion de courbure qui prend en compte la surface environnante. On multiplie la courbure par un facteur qui dépend de l'angle entre la normale à la courbe et la normale à la surface :

Définition 2.2.3. (Courbure normale)

Soit C une courbe régulière sur S passant par $p \in S$. Soit k la courbure de C en p , n le vecteur normal à C en p , et $\cos(\theta) = \langle n, N(p) \rangle$. On appelle **courbure normale** de la courbe C en p la valeur $k_n = k \cos(\theta)$.

Remarque 2.2.4. La courbure normale change de signe si l'on change l'orientation de S .

On va dès lors pouvoir interpréter la seconde forme fondamentale en terme de courbure normale. Soit C une courbe régulière sur une surface S paramétrée par $\alpha(s)$ où s est la longueur d'arc, et telle que $\alpha(0) = p$. On a $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$, donc en dérivant, $\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle = - \langle N(s), \alpha''(s) \rangle$ (avec ici un abus de notation pour la dérivée de N , car on considère uniquement N restreinte à C , $N(s)$ désignant ici $N(\alpha(s))$). Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{II}_p(\alpha'(0)) &= - \langle d_p N(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = - \langle N'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle N(0), \alpha''(0) \rangle = \langle N, kn \rangle(p) = k_n(p) \end{aligned} \tag{4}$$

Ainsi la seconde forme fondamentale évaluée en un vecteur unitaire v de $T_p S$ est égale à la courbure normale d'une courbe passant par p et tangente au vecteur v .

Proposition 2.2.5. Toutes les courbes sur C passant par p qui ont la même droite tangente en p ont la même courbure normale en ce point.

Démonstration. Les calculs (4) donnent le résultat. □

Comme $d_p N$ est un endomorphisme symétrique, on dispose de $\{e_1, e_2\}$ une base orthonormée dans laquelle $d_p N$ est diagonale, et de k_1 et k_2 des réels tels que $d_p N(e_1) = -k_1 e_1$ et $d_p N(e_2) = -k_2 e_2$. Quitte à intervertir e_1 et e_2 , on peut supposer $k_1 \geq k_2$. k_1 et k_2 sont ainsi respectivement le maximum et le minimum de II_p sur le cercle unité de $T_p S$, donc les valeurs maximales et minimales de la courbure normale en p .

Définition 2.2.6. (Courbures principales)

Soit $p \in S$ où S est une surface orientable. Les valeurs extrêmes de la courbure normales (k_1 et

k_2) en p sont appelées **courbures principales** en p . Si $k_1 \neq k_2$, les directions correspondantes e_1 et e_2 sont uniques et sont appelées les **directions principales de courbure** en p .

On définit ci-dessus les deux notions de courbures d'une surface. Ces définitions font intervenir deux points de vue équivalents :

- une définition à partir des courbures principales k_1 et k_2
- une définition à partir de l'endomorphisme $d_p N$

Définition 2.2.7. (Courbure de Gauss)

Soit S une surface orientable et $p \in S$. On appelle **courbure de Gauss** de S en p la valeur :

$$K = \det(d_p N) = k_1 k_2 \tag{5}$$

Définition 2.2.8. (Courbure moyenne)

Soit S une surface orientable et $p \in S$. On appelle **courbure moyenne** de S en p la valeur :

$$H = -\frac{\text{tr}(d_p N)}{2} = \frac{k_1 + k_2}{2} \tag{6}$$

Remarque 2.2.9. La courbure de Gauss ne dépend pas de l'orientation de S , contrairement à la courbure moyenne qui change de signe si l'on change l'orientation.

Proposition 2.2.10. Les fonctions $p \in S \mapsto K(p)$, $p \in S \mapsto H(p)$, $p \in S \mapsto k_1(p)$ et $p \in S \mapsto k_2(p)$ sont continues.

Démonstration. Soit $p \in S$. D'abord K et H sont continues comme composée d'applications continues (relations (5) et (6)) D'ailleurs on obtient que K et H sont différentiables.

De plus, on a :

$$(X - k_1(p))(X - k_2(p)) = X^2 - (k_1(p) + k_2(p))X + k_1(p)k_2(p) = X^2 - 2H(p)X + K(p)$$

Le discriminant réduit est $\Delta' = H(p)^2 - K(p) \geq 0$ (le polynôme a deux racines réelles $k_1(p)$ et $k_2(p)$), et donc les racines sont $H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)}$. Comme $k_1(p) \geq k_2(p)$, on a alors nécessairement :

$$\begin{cases} k_1(p) = H(p) + \sqrt{H(p)^2 - K(p)} \\ k_2(p) = H(p) - \sqrt{H(p)^2 - K(p)} \end{cases} \tag{7}$$

Donc k_1 et k_2 sont continues également par composition. □

2.3 Points particuliers

Définition 2.3.1. (Point elliptique, hyperbolique, parabolique, planaire)

Soit S une surface régulière et $p \in S$. Le point p est dit :

- **elliptique** si $K(p) > 0$
- **hyperbolique** si $K(p) < 0$
- **parabolique** si $K(p) = 0$ et $d_p N \neq 0$ (c'est-à-dire $k_1 = 0$ ou $k_2 = 0$, mais pas les deux à la fois)
- **planaire** si $d_p N = 0$ (c'est-à-dire $k_1 = k_2 = 0$)

Exemple 2.3.2. — Sur une sphère de rayon R : si $\alpha(t)$ est une courbe passant par p , sa projection sur le plan $(N(p), \alpha'(0))$ est une portion de cercle (l'intersection d'une sphère et d'un plan est un cercle), de rayon R (car le plan passe par le centre de la sphère). Alors, quitte à projeter sur le plan et à changer les axes (c'est la seule chose qui compte pour les courbures normales), on suppose que localement (au voisinage de 0), $\alpha(t) = (R \cos\left(\frac{t}{R}\right), R \sin\left(\frac{t}{R}\right), 0)$ ($\alpha(0) = p$) de sorte que $|\alpha'(t)| = 1$ en tout point. Alors $\alpha''(t) = -\frac{1}{R^2}\alpha(t)$ et donc $|\alpha''(0)| = \frac{1}{R}$, et donc les courbures normales valent toutes $\pm\frac{1}{R}$ selon l'orientation choisie (car $\alpha''(0)$ est colinéaire à $\alpha(0)$ et donc à $N(p)$, mais pas forcément de même sens). Comme le signe est le même en toute direction, en particulier $k_1 k_2 = \left(\pm\frac{1}{R}\right)^2$, et donc la courbure de Gauss d'une sphère de rayon R est, en tout point, $K = \frac{1}{R^2} > 0$: sur une sphère, les points sont tous elliptiques, et la sphère est à courbure de Gauss constante.

- Sur une surface de révolution comme celle de l'exemple 1.1.3, les courbures principales correspondent à des courbes normales situées de part et d'autre du plan tangent : les courbures normales sont de signes strictement contraires et donc $K < 0$: ce sont des points hyperboliques.

- Sur un cylindre, une des courbures principales est nulle (selon l'axe du cylindre) et l'autre est non-nulle (elle correspond à un cercle) donc $K = 0$ mais $k_1 \neq 0$ ou $k_2 \neq 0$: sur un cylindre les points sont paraboliques.
- Sur un plan, toutes les courbures normales sont nuls donc les points d'un plan sont planaires.

Définition 2.3.3. (Ombilic)

Soit S une surface régulière, un point $p \in S$ est appelé **ombilic** si $k_1(p) = k_2(p)$, autrement dit si toutes les courbures normales en p sont les mêmes.

La proposition ci-dessous donne une caractérisation de la sphère qui nous sera utile pour démontrer les théorèmes 3.2.1 et 4.2.1.

Proposition 2.3.4. Soit S une surface régulière connexe par arcs. On suppose que tous les points de S sont des ombilics. Alors S est contenue dans un plan ou dans une sphère.

Démonstration. Soit $p \in S$, $\varphi : U \rightarrow V \cap S$ une carte autour de p . Quitte à restreindre U et V , on suppose $V \cap S$ connexe par arcs.

Pour tout $q \in V$, q est un ombilic (par hypothèse) et donc $k_1(q) = k_2(q) =: \lambda(q)$ et donc $d_q N = -\lambda(q) \cdot \text{Id}$. Comme $\lambda = H$ ($H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{2\lambda}{2} = \lambda$), c'est une fonction continue différentiable.

Localement, toute fonction f prenant ses valeurs dans $V \cap S$ peut être vue comme une fonction prenant ses valeurs dans U en considérant $f(u, v) := f(\varphi(u, v))$. En particulier on pourra considérer N et λ comme des fonctions prenant leurs valeurs dans U .

Pour $q \in V$ et $e \in T_q S$, on décompose $e = a\varphi_u(\varphi^{-1}(q)) + b\varphi_v(\varphi^{-1}(q))$, alors en évaluant en e la relation $d_q N = \lambda(q) \cdot \text{Id}$ on obtient $d_q N(e) = \lambda(q)e$ donc :

$$a \cdot N_u(\varphi^{-1}(q)) + b \cdot N_v(\varphi^{-1}(q)) = a\lambda(q)\varphi_u(\varphi^{-1}(q)) + b\lambda(q)\varphi_v(\varphi^{-1}(q))$$

Ceci étant vrai pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on en déduit que $N_u(\varphi^{-1}(q)) = \lambda(q)\varphi_u(\varphi^{-1}(q))$ et $N_v(\varphi^{-1}(q)) = \lambda(q)\varphi_v(\varphi^{-1}(q))$. Donc en tant que fonctions, $N_u = \lambda\varphi_u$ et $N_v = \lambda\varphi_v$ (ici on voit λ comme fonction prenant ses valeurs dans U). Alors comme N et φ sont \mathcal{C}^2 , le lemme de Schwarz s'applique et donc $N_{uv} = N_{vu}$, $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, d'où $\lambda\varphi_{uv} + \lambda_v\varphi_u = \lambda\varphi_{vu} + \lambda_u\varphi_v$ et

finalement $\lambda_u \varphi_v = \lambda_v \varphi_u$. Comme $(\varphi_u(\varphi^{-1}(q)), \varphi_v(\varphi^{-1}(q)))$ est libre pour tout $q \in V$, on a donc $\lambda_u = \lambda_v = 0$, d'où λ est localement constante donc constante ($V \cap S$ connexe par arcs donc connexe).

Donc pour tout $q \in V$, $d_q N = \lambda \text{Id}$. On va montrer que $V \cap S$ est contenu dans un plan ou dans une sphère. On distingue alors deux cas.

Cas 1 : $\lambda = 0$ donc pour tout $q \in V$, $d_q N = 0$, donc N est constant sur V . Or pour $(u, v) \in U$, $\langle \varphi_u(u, v), N \rangle = \langle \varphi_v(u, v), N \rangle$ donc $\langle \varphi(u, v), N \rangle_u = \langle \varphi(u, v), N \rangle_v = 0$: $\langle \varphi(u, v), N \rangle$ est constant, notons c sa valeur. Alors $\langle \varphi(u, v) - cN, N \rangle = 0$, on en déduit $\varphi(u, v) - cN \in N^\perp$ d'où $\varphi(u, v) \in cN + N^\perp$ qui est un plan affine. Donc $V \cap S$ est contenu dans un plan.

Cas 2 : $\lambda \neq 0$, comme $N_u = \lambda \varphi_u$ et $N_v = \lambda \varphi_v$, alors $N(u, v) - \lambda \varphi(u, v)$ est constant : c'est un point $A \in S$. Alors $N(u, v) = \lambda \varphi(u, v) + A$ donc en passant à la norme : $|\lambda \varphi(u, v) + A| = 1$ d'où $\left| \varphi(u, v) - \frac{-A}{\lambda} \right| = \frac{1}{|\lambda|}$: c'est l'équation d'une sphère. Donc $V \cap S$ est contenu dans une sphère.

Ainsi, localement S est contenu dans un plan ou dans une sphère. Il reste à faire le passage au global : soit $p' \in S$ un point, alors par connexité par arcs de S , il existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ un chemin continu tel que $\gamma(0) = p, \gamma(1) = p'$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on dispose d'un voisinage ouvert V_t de $\gamma(t)$ tel que $V_t \cap S$ est contenu dans un plan ou dans une sphère. Alors $[0, 1] \subset \bigcup_{t \in [0, 1]} \gamma^{-1}(V_t \cap S)$. Par continuité de γ , c'est un recouvrement d'ouverts du compact $[0, 1]$, on dispose donc de $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$ tels que $[0, 1] \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} \gamma^{-1}(V_{t_i} \cap S)$. Dès lors $\gamma([0, 1]) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} (V_{t_i} \cap S)$.

Si t_i, t_j sont tels que $W := V_{t_i} \cap V_{t_j} \cap S \neq \emptyset$, alors W est contenu dans la sphère ou le plan associé à t_i mais également dans la sphère ou le plan associé à t_j . Or W est homéomorphe à un ouvert non-vide de \mathbb{R}^2 , mais deux sphères/plans distincts ont une intersection qui est soit-vide, soit un point, soit un cercle, soit une droite. Dans tous les cas, W ne pourrait être homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^2 (on peut le voir en se restreignant à un ouvert connexe de W , or un ouvert de \mathbb{R}^2 auquel on retire un point est encore connexe, ce qui n'est pas le cas pour un sous-ensemble d'une droite, un cercle ou un point).

Donc nécessairement c'est la même sphère ou le même plan pour t_i et t_j . Dès lors, une com-

posante connexe de $\bigcup_{1 \leq i \leq n} (V_{t_i} \cap S)$ est contenue dans une sphère ou un plan. Or γ continu donc $\gamma([0, 1])$ est connexe, il est donc dans une seule composante connexe de l'union, et est donc lui-même contenu dans une sphère ou un plan. Ainsi, p' est dans la même sphère/le même plan que p . Comme p' est arbitraire, S tout entier est contenu dans la sphère ou le plan associé à p , ce qui conclut. \square

3 Théorème - surface à courbure de Gauss constante

L'objet de section est de démontrer que les surfaces compactes et connexes par arcs à courbure de Gauss constante sont les sphères (théorème 3.2.1). La preuve du théorème nécessite de nombreux résultats intermédiaires présentés ci-après. Le lecteur est invité à d'abord lire la preuve du théorème (section 3.2) pour avoir une idée générale des arguments, puis à se référer aux lemmes et propositions utilisés dans la preuve, et énoncés dans la section 3.1.

3.1 Lemmes préliminaires

Remarque 3.1.1. Dans toute cette section, on fixe S une surface régulière orientable, $p \in S$ et $\varphi : U \rightarrow V \cap S$ une carte en p . Pour simplifier, on utilisera abusivement la notation $\psi(q)$ (pour $q \in V \cap S$) pour désigner $\psi(\varphi^{-1}(q))$ où ψ est une fonction prenant ses valeurs dans U . On adoptera également la notation abusive $N(u, v)$ déjà utilisée précédemment.

Pour tout $q \in V \cap S$, la seconde forme fondamentale Π_q étant une forme quadratique, et en utilisant les relations (3), elle s'écrit matriciellement dans la base $(\varphi_u(q), \varphi_v(q))$ comme :

$$\begin{pmatrix} - \langle N_u(q), \varphi_u(q) \rangle & - \langle N_v(q), \varphi_u(q) \rangle \\ - \langle N_u(q), \varphi_v(q) \rangle & - \langle N_v(q), \varphi_v(q) \rangle \end{pmatrix}$$

Or, d'après (2) (et des calculs analogues), on peut poser :

$$\begin{cases} f := - \langle N_u, \varphi_v \rangle = - \langle N_v, \varphi_u \rangle = \langle N, \varphi_{uv} \rangle = \langle N, \varphi_{vu} \rangle \\ e := - \langle N_u, \varphi_u \rangle = \langle N, \varphi_{uu} \rangle \\ g := - \langle N_v, \varphi_v \rangle = \langle N, \varphi_{vv} \rangle \end{cases} \quad (8)$$

Ainsi, la matrice de Π_q est $\begin{pmatrix} e(q) & f(q) \\ f(q) & g(q) \end{pmatrix}$.

On peut également considérer une autre forme quadratique, la **première forme fondamentale** I_q , telle que $I_q(e) = |e|^2 = \langle e, e \rangle$, alors dans la base $(\varphi_u(q), \varphi_v(q))$ la matrice de I_q est $\begin{pmatrix} \langle \varphi_u(q), \varphi_u(q) \rangle & \langle \varphi_u(q), \varphi_v(q) \rangle \\ \langle \varphi_v(q), \varphi_u(q) \rangle & \langle \varphi_v(q), \varphi_v(q) \rangle \end{pmatrix}$. De même, on pose alors :

$$\begin{cases} F := \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle \\ E := \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \\ G := \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \end{cases} \quad (9)$$

Ainsi la matrice de I_q est $\begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix}$.

Lemme 3.1.2. (Équations de Mainardi-Codazzi)

Soit S surface régulière orientable, $p \in S$, $\varphi : U \rightarrow V \cap S$ une carte en p et N l'application de Gauss. On suppose que sur $V \cap S$, $f = F = 0$.

Alors :

$$\begin{cases} e_v = \frac{1}{2} E_v \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \\ g_u = \frac{1}{2} G_u \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \end{cases} \quad (10)$$

Démonstration. Premièrement, en tout point $q \in V \cap S$ on a $(\varphi_u(q), \varphi_v(q), N(q))$ qui est une base de \mathbb{R}^3 , dès lors toute fonction ψ à valeurs dans \mathbb{R}^3 peut s'écrire de façon unique $\psi = \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v + \nu N$ où λ, μ, ν sont des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} .

Ceci permet en particulier d'écrire de façon unique :

$$\begin{cases} \varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_1 N \\ \varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + L_2 N \\ \varphi_{vu} = \Gamma_{21}^1 \varphi_u + \Gamma_{21}^2 \varphi_v + \bar{L}_2 N \\ \varphi_{vv} = \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + L_3 N \end{cases} \quad (11)$$

Ces notations s'appellent les notations de Christoffel. Par le lemme de Schwarz, on déduit $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ et $L_2 = \bar{L}_2$. De plus, comme en tout point, $\varphi_u(q), \varphi_v(q) \in N(q)^\perp$, on a en faisant le produit scalaire de ces 3 lignes (en ne comptant qu'une fois la ligne en double) avec N : $L_1 = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = e$, $L_2 = \bar{L}_2 = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = f = 0$ et $L_3 = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = g$.

De plus, en faisant le produit scalaire de ces 3 lignes avec φ_u on a :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} E_u = \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \Gamma_{11}^1 E \\ \frac{1}{2} E_v = \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \Gamma_{12}^1 E \\ -\frac{1}{2} G_u = F_v - \frac{1}{2} G_u = \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \Gamma_{22}^1 E \end{cases} \quad (12)$$

Et de même en faisant le produit scalaire avec φ_v :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} E_v = F_u - \frac{1}{2} E_v = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \Gamma_{11}^2 G \\ \frac{1}{2} G_u = \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \Gamma_{12}^2 G \\ \frac{1}{2} G_v = \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \Gamma_{22}^2 G \end{cases} \quad (13)$$

En effet par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, ainsi que par le lemme de Schwarz :

$$\begin{aligned} E_u &= 2 \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle, E_v = 2 \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle \\ F_u &= 0 = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle, F_v = 0 = \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle \\ G_u &= 2 \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle, G_v = 2 \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle \end{aligned}$$

Le système d'équations donne alors :

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}, \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E}, \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G} \quad (14)$$

Remarquons que sans la simplification $F = 0$ on aurait ici obtenu trois systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues, tous de déterminant $EG - F^2 \geq 0$ par Cauchy-Schwarz, avec inégalité stricte car φ_u, φ_v ne sont pas colinéaires. Les systèmes se seraient donc résolus de façon explicite, mais avec des calculs plus lourds.

Pour obtenir les équations voulues, il s'agit alors de montrer que $e_v = \Gamma_{12}^1 e - \Gamma_{11}^2 g$ et que $g_u = -\Gamma_{22}^1 e + \Gamma_{12}^2 g$, ce qui en remplaçant nous donnera les équations recherchées.

À ce stade, reprenons le système (11). On a :

$$\begin{cases} \varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + eN \\ \varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v \\ \varphi_{vv} = \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + gN \end{cases} \quad (15)$$

En effet on a fait l'hypothèse $f = 0$. Par le lemme de Schwarz, $(\varphi_{uu})_v = (\varphi_{uv})_u$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} & \Gamma_{11}^1 \varphi_{uv} + (\Gamma_{11}^1)_v \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_{vv} + (\Gamma_{11}^2)_v \varphi_v + e_v N + e N_v \\ &= \Gamma_{12}^1 \varphi_{uu} + (\Gamma_{12}^1)_u \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_{uv} + (\Gamma_{12}^2)_u \varphi_v \end{aligned} \quad (16)$$

Comme $\langle N, \varphi_{uv} \rangle = f = 0$, $\langle N, N_v \rangle = 0$, $\langle N, \varphi_u \rangle = \langle N, \varphi_v \rangle = 0$, en faisant le produit scalaire avec N la relation se réécrit $\Gamma_{11}^1 \langle N, \varphi_{vv} \rangle + e_v = \Gamma_{12}^1 \langle N, \varphi_{uu} \rangle$. Comme $\langle N, \varphi_{uu} \rangle = e$ et $\langle N, \varphi_{vv} \rangle = g$, on en déduit $e_v = \Gamma_{12}^1 e - \Gamma_{11}^2 g$, ce qui est la première relation voulue.

De même, $(\varphi_{uv})_v = (\varphi_{vv})_u$ donne :

$$\begin{aligned} & \Gamma_{12}^1 \varphi_{uv} + (\Gamma_{12}^1)_v \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_{vv} + (\Gamma_{12}^2)_v \varphi_v \\ &= \Gamma_{22}^1 \varphi_{uu} + (\Gamma_{22}^1)_u \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_{uv} + (\Gamma_{22}^2)_u \varphi_v + g_u N + g N_u \end{aligned} \quad (17)$$

Puis en faisant le produit scalaire avec N , $\Gamma_{12}^2 \langle N, \varphi_{vv} \rangle = \Gamma_{22}^1 \langle N, \varphi_{uu} \rangle + g_u$, et enfin $g_u = -\Gamma_{22}^1 e + \Gamma_{12}^2 g$, ce qui est la deuxième relation voulue, et termine la preuve. \square

Remarque 3.1.3. Dans le cas où $F = 0$ mais $f \neq 0$, l'équation $\varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v$ devient $\varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + fN$, on peut alors vérifier, de manière analogue à la démonstration ci-dessus, que les équations de Mainardi-Codazzi prennent la forme :

$$\begin{cases} e_v - f_u = \frac{1}{2}E_v \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \\ g_u - f_v = \frac{1}{2}G_u \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \end{cases} \quad (18)$$

Lemme 3.1.4. Soit S surface régulière orientable, $p \in S$, $\varphi : U \rightarrow V \cap S$ une carte en p et N l'application de Gauss. On suppose que sur $V \cap S$, $f = F = 0$ et que φ_u, φ_v sont des vecteurs propres associés à $-k_1, -k_2$ en tout point.

Alors :

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right] \quad (19)$$

Démonstration. On garde les notations de Christoffel. On a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v &= \frac{E_{vv}\sqrt{EG} - E_v(\sqrt{EG})_v}{EG} \\ &= \frac{E_{vv}}{\sqrt{EG}} - \frac{E_v}{EG} \cdot \frac{(EG)_v}{2\sqrt{EG}} \\ &= \frac{E_{vv}}{\sqrt{EG}} - \frac{E_v}{2EG\sqrt{EG}}(E_vG + EG_v) \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} \left[E_{vv} - \frac{E_v}{2E} - \frac{E_v}{2G}G_v \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} [E_{vv} - \Gamma_{12}^1E_v + \Gamma_{11}^2G_v] \end{aligned}$$

Or $\Gamma_{12}^1E = \frac{1}{2}E_v$ donc $\Gamma_{12}^1E_v = \frac{1}{2}E_{vv} - (\Gamma_{12}^1)_vE$, et de même $\Gamma_{11}^2G_v = -\frac{1}{2}E_{vv} - (\Gamma_{11}^2)_vG$. Il découle :

$$\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v = \frac{1}{\sqrt{EG}} [(\Gamma_{12}^1)_vE - (\Gamma_{11}^2)_vG]$$

De même :

$$\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u = \frac{1}{\sqrt{EG}} [(\Gamma_{12}^2)_uG - (\Gamma_{22}^1)_uE]$$

Finalement, il s'agit de prouver que $K = \frac{1}{2EG} [((\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u)G + ((\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v)]$
 Comme φ_u, φ_v sont des vecteurs propres :

$$e(q) = - \langle d_q N(\varphi_u(q)), \varphi_u(q) \rangle = k_1(q) |\varphi_u(q)|^2 = k_1(q) E(q)$$

Donc :

$$\begin{cases} k_1 = \frac{e}{E} \\ k_2 = \frac{g}{G} \end{cases} \quad (20)$$

Il s'agit alors de montrer que :

$$((\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u)G + ((\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v)E = 2eg$$

En faisant le produit scalaire de (16) avec φ_v , et en utilisant le fait que $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$,
 $\langle N_v, \varphi_u \rangle = f = 0$ et $\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$:

$$\begin{aligned} & \Gamma_{11}^1 \underbrace{\langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle}_{\frac{1}{2}G_u} + \Gamma_{11}^2 \underbrace{\langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle}_{\frac{1}{2}G_v} + (\Gamma_{11}^2)_v \underbrace{\langle \varphi_v, \varphi_v \rangle}_G + e \underbrace{\langle N_v, \varphi_v \rangle}_{-g} \\ &= \Gamma_{12}^1 \underbrace{\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle}_{-\frac{1}{2}E_v (*)} + \Gamma_{12}^1 \underbrace{\langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle}_{\frac{1}{2}G_u} + (\Gamma_{12}^2)_u \underbrace{\langle \varphi_v, \varphi_v \rangle}_G \end{aligned}$$

(*) En effet $\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$ donc en dérivant par rapport à u , $\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = - \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle$.

D'où $G((\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u) = eg + \frac{1}{2}(G_u \Gamma_{12}^2 - G_u \Gamma_{11}^1 - E_v \Gamma_{12}^1 - G_v \Gamma_{11}^2)$.

De en faisant le produit scalaire de (17) avec φ_u , on obtient :

$$E((\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v) = eg + \frac{1}{2}(\Gamma_{12}^1 E_v - \Gamma_{22}^1 E_u - \Gamma_{12}^2 G_u - \Gamma_{22}^2 E_v)$$

Dès lors en sommant :

$$((\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u)G + ((\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v)E = 2eg - \frac{1}{2}(G_u \Gamma_{11}^1 + G_v \Gamma_{11}^2 + E_u \Gamma_{22}^1 + E_v \Gamma_{22}^2)$$

Il s'agit dès lors de montrer $G_u \Gamma_{11}^1 + G_v \Gamma_{11}^2 + E_u \Gamma_{22}^1 + E_v \Gamma_{22}^2 = 0$.

En remplaçant avec les égalités (14), le terme s'annule bien comme voulu, ce qui conclut la preuve de ce lemme. \square

Lemme 3.1.5. Soit S une surface régulière et $p \in S$ tel que

1. La courbure de Gauss en p , $K(p)$, est strictement positive
2. p est à la fois un maximum local de la courbure maximale k_1 et un minimum local de la courbure minimale k_2

Alors p est un ombilic.

Démonstration. Procédons par l'absurde : supposons que p n'est pas un ombilic.

Alors $(k_1 - k_2)(p) \neq 0$. D'après la proposition 2.2.10, $k_1 - k_2$ est continue, donc on dispose d'un voisinage W de p dans \mathbb{R}^3 tel que $k_1 - k_2$ n'a aucun point d'annulation sur $W \cap S$. Ainsi, $W \cap S$ ne contient aucun ombilic. On peut alors choisir une carte $\varphi : U \rightarrow V \cap S$ (avec $V \subset W$) autour de p tel qu'en tout point $q \in V \cap S$, $\varphi_u(q)$ est un vecteur propre de $d_q N$ associé à $-k_1(q)$ et $\varphi_v(q)$ est un vecteur propre associé à $-k_2(q)$.

En effet, comme il n'y a aucun point ombilic, en $q \in W$ les directions propres $e_1(q)$ et $e_2(q)$ sont bien définies et définissent deux champs de vecteurs continus. Soient h_1, h_2 les intégrales premières de ces champs de vecteurs (c'est-à-dire qu'en tout point q , $\langle \overrightarrow{\text{grad}}(h_i), e_i \rangle = 0$). Alors $\psi : q \in W \cap S \mapsto (h_1(q), h_2(q)) \in \mathbb{R}^2$ est un homéomorphisme, et comme (e_1, e_2) est une base orthogonale on peut vérifier que la différentielle est injective en $q \in W$, donc d'après le théorème d'inversion locale, ψ est un difféomorphisme local, et quitte à restreindre W à un ouvert $V \subset W$, son inverse fournit une carte à valeurs dans $V \cap S$. Quitte à changer e_2 en $-e_2$ dans la détermination de h_1 et h_2 , on obtient une carte compatible avec l'orientation.

Alors en $q \in V \cap S$, $(\varphi_u(q), \varphi_v(q))$ engendrent les espaces propres associés à $k_1(q) \neq k_2(q)$, qui sont des droites et ces droites sont orthogonales (par le théorème spectral, puisque $d_q N$ est un endomorphisme symétrique réel). Dès lors, sur $V \cap S$, $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$.

De plus dans ces conditions, pour $q \in V \cap S$:

$$\begin{aligned} f(q) &= - \langle N_u(q), \varphi_v(q) \rangle = - \langle d_q N(\varphi_u(q)), \varphi_v(q) \rangle \\ &= k_1(q) \langle \varphi_u(q), \varphi_v(q) \rangle = k_1(q) F(q) = 0 \end{aligned}$$

Donc $f = F = 0$ sur $V \cap S$. On est donc dans les conditions nécessaires pour avoir les

équations de Mainardi-Codazzi (lemme 3.1.2). De plus, on a les égalités (20).

On peut donc réécrire :

$$\begin{cases} e_v = \frac{1}{2}E_v(k_1 + k_2) \\ g_u = \frac{1}{2}G_u(k_1 + k_2) \end{cases} \quad (21)$$

Comme $e = k_1E$, alors $e_v = (k_1)_vE + k_1E_v$ et donc en remplaçant :

$$(k_1)_vE + k_1E_v = \frac{1}{2}k_1E_v + \frac{1}{2}k_2E_v$$

D'où $(k_1)_vE = \frac{1}{2}E_v(k_2 - k_1)$. De même, :

$$(k_2)_uG = \frac{1}{2}G_u(k_1 - k_2)$$

De plus, le lemme 3.1.4 donne :

$$\begin{aligned} -2EGK &= \sqrt{EG} \left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right] \\ &= \sqrt{EG} \left[\frac{E_{vv}\sqrt{EG} - E_v(\sqrt{EG})_v}{(\sqrt{EG})^2} + \frac{G_{uu}\sqrt{EG} - G_u(\sqrt{EG})_u}{(\sqrt{EG})^2} \right] \\ &= E_{vv} + G_{uu} - \frac{E_v(\sqrt{EG})_v + G_u(\sqrt{EG})_u}{EG} \end{aligned}$$

Pour simplifier, on note $\alpha = -\frac{(\sqrt{EG})_v}{EG}$ et $\beta = -\frac{(\sqrt{EG})_u}{EG}$, ce qui permet d'écrire :

$$-2EGK = E_vv + G_uu + \alpha E_v + \beta G_u$$

Or, les équations de Mainardi-Codazzi donnent $E_v = -\frac{2E(k_1)_v}{k_1 - k_2}$ et $G_u = \frac{2G(k_2)_u}{k_1 - k_2}$. Dès lors

$$E_{vv} = -\frac{2E_v(k_1)_v + 2E(k_1)_{vv}}{k_1 - k_2} + \frac{2E(k_1)_v(k_1 - k_2)_v}{(k_1 - k_2)^2}.$$

$$\text{On a aussi } G_{uu} = \frac{2G_u(k_2)_u + 2G(k_2)_{uu}}{k_1 - k_2} - \frac{2G(k_2)_u(k_1 - k_2)_u}{(k_1 - k_2)^2}.$$

Posons $M = -\frac{2E\alpha}{k_1 - k_2} - \frac{2E_v}{k_1 - k_2} + \frac{2E(k_1 - k_2)_v^2}{(k_1 - k_2)}$ et $N = \frac{2G\beta}{k_1 - k_2} + \frac{2G_u}{k_1 - k_2} - \frac{2G(k_1 - k_2)_u^2}{(k_1 - k_2)}$.

On peut alors réécrire :

$-2EGK = -\frac{2E}{k_1 - k_2}(k_1)_{vv} + \frac{2G}{k_1 - k_2}(k_2)_{uu} + M(k_1)_v + N(k_2)_u$ (notons que tous les calculs sont valides car $k_1 - k_2$ ne s'annule pas).

En p , comme k_1 et k_2 ont chacun un extremum local, $(k_1)_v(p) = (k_2)_u(p) = 0$. En multipliant par $(k_1 - k_2)(p)$ l'équation ci-dessus, on a :

$$-2E \underbrace{(p)}_{>0} \underbrace{G(p)}_{>0} \underbrace{K(p)}_{>0} \underbrace{(k_1 - k_2)(p)}_{>0} = 2 \underbrace{G(p)}_{>0} \underbrace{(k_2)_{uu}(p)}_{\geq 0} - 2 \underbrace{E(p)}_{>0} \underbrace{(k_1)_{vv}(p)}_{\leq 0}$$

En effet, E, G sont des normes au carré de vecteurs non nuls donc sont strictement positives, $K(p) > 0$ par hypothèse, on a $k_1 \geq k_2$ mais comme p n'est pas un ombilic, $k_1(p) > k_2(p)$, et enfin comme $k_1(p)$ est un maximum local, $(k_1)_{vv}(p) \leq 0$ et comme $k_2(p)$ est un minimum local, $(k_2)_{uu}(p) \geq 0$. Dès lors le membre de gauche de l'égalité est strictement négatif alors que le membre de droite est positif ou nul : c'est la contradiction recherchée. L'hypothèse initiale (p n'est pas un ombilic) était absurde, et donc p est bien un ombilic. \square

Lemme 3.1.6. Une surface régulière compacte S a au moins un point elliptique.

Démonstration. S est compacte dans \mathbb{R}^3 , en particulier elle est bornée.

Donc $R := \inf\{r \in \mathbb{R}_+, S \subset B(0, r)\} < +\infty$ est bien défini dans \mathbb{R}_+ .

D'une part $S \subset \bar{B}(0, R)$. En effet, si $x \in S$: pour tout $r > R$, $x \in S \subset B(0, r)$ donc $|x| < r$.

En faisant tendre r vers R , $|x| \leq R$.

D'autre part $S \cap S(0, R) \neq \emptyset$.

En effet, comme R est la borne inférieure, pour tout $0 < r < R$, $S \not\subset B(0, r)$, en particulier pour $r_n := R \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$, on dispose de $x_n \in S$, $|x_n| \geq R \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$. Comme S est compacte, on dispose de $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une extractrice, et $p \in S$, tel que $x_{\varphi(n)} \rightarrow p$. Comme $R \left(1 - \frac{1}{\varphi(n)+2}\right) \leq |x_{\varphi(n)}| \leq R$, par passage à la limite $|x| = R$, donc $p \in S \cap S(0, R)$.

Montrons alors que p est elliptique. Comme $S \subset \bar{B}(0, R)$, alors $S \cap T_p(S(0, R)) = \{p\}$ (s'il y avait un deuxième point commun, $\bar{B}(0, R)$ rencontrerait $T_p(S(0, R))$ en au moins deux points, ce qui est exclu). Donc $T_p(S(0, R))$ est tangent à S en p , et donc S et $S(0, R)$ sont tangentes

en p . Comme $S \subset \bar{B}(0, R)$, alors pour toute courbure normale :

$$k_n^{(S)}(p) \geq k_n^{(S(0,R))}(p) > 0$$

Donc $K(p) > 0$, ce qui conclut (en choisissant l'orientation de la sphère telle que les courbures normales soient positives sur la sphère et l'orientation de la surface compatible avec l'orientation de la sphère). \square

3.2 Théorème

Théorème 3.2.1. (Liebmann, 1899)

Soit S une surface régulière compacte, connexe par arcs, à courbure de Gauss K constante. Alors S est une sphère.

Démonstration. D'après le lemme 3.1.6, il existe un point elliptique $p_0 \in S$.

Donc $K = K(p_0) > 0$: la courbure de Gauss est strictement positive en tout point. De plus, la fonction $p \in S \mapsto k_1(p)$ est continue (proposition 2.2.10) sur un compact donc admet un maximum en $p_1 \in S$. Alors $k_2(p_1) = \frac{K}{k_1(p_1)}$ est un minimum de k_2 . De plus, $K(p_1) = K > 0$ donc d'après le lemme 3.1.5, p_1 est un ombilic : notons $k = k_1(p_1) = k_2(p_1)$.

Alors pour $q \in S$, $k = k_1(p_1) \geq k_1(q) \geq k_2(q) \geq k_2(p_1) = k$: pour tout $q \in S$, on a :

$$k_1(q) = k = k_2(q)$$

Donc tous les points sont des ombilics. D'après la proposition 2.3.4, comme S est connexe par arcs, alors S est contenue dans un plan ou dans une sphère. Comme en tout point $K(p) > 0$, ça ne peut pas être un plan. Donc S est contenue dans une sphère Σ .

On a $S \subset \Sigma$ et $S \neq \emptyset$. Comme S est compacte, S est fermée dans Σ . Mais comme S est une surface régulière, tout point admet un voisinage ouvert dans S donc dans Σ (les cartes sont des homéomorphismes) donc S est ouverte dans Σ .

Par connexité de Σ , on a $S = \Sigma$ donc S est exactement une sphère. \square

Remarque 3.2.2. On a ici utilisé en particulier qu'une surface compacte à courbure de Gauss constante a forcément sa courbure de Gauss strictement positive. Hilbert a lui démontré en

1901 qu'une surface géométrique complète à courbure de Gauss constante négative ne peut pas être immergée de façon isométrique dans \mathbb{R}^3 (voir [1] section 5-11 Theorem p.446).

4 Théorème - surface à courbure moyenne constante

De manière analogue à la section précédente, on cherche dans cette section à montrer que les surfaces à courbure moyenne constante sont des sphères. Le théorème présenté ici (théorème 4.2.1) est énoncé sous des hypothèses plus fortes que celui de la section précédente. La preuve de ce théorème fait intervenir de nouvelles notions, notamment celle d'indice, définies dans la section 4.1. De même que dans la section précédente, la preuve du théorème peut être lue avant les résultats préliminaires pour faciliter la compréhension globale du raisonnement.

4.1 Résultats préliminaires

On admet qu'on peut se placer en **coordonnées conformes**, c'est-à-dire $E = G$ et $F = 0$. Concrètement, cela revient à supposer qu'en tout point, $\varphi_u(p), \varphi_v(p)$ sont orthogonaux ($F = 0$) et de même norme ($E = G$).

En revanche forcer l'hypothèse $E = G$ ne permet plus de supposer la condition $f = 0$. Les équations (5) et (6) donnent

$$K = k_1 k_2 = \det(d_p N) = \frac{eg - f^2}{E^2} \quad (22)$$

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{e + g}{2E} \quad (23)$$

Les équations de Codazzi dans le cas $f \neq 0$ donnent alors par (21) :

$$\left. \begin{aligned} e_v - f_u &= \frac{E_v}{2E}(e + g) = E_v H \\ g_u - f_v &= \frac{E_u}{2E}(e + g) = E_u H \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Comme $EH = \frac{e+g}{2}$, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} E_v H + H E_v &= \frac{e_v}{2} + \frac{g_v}{2} \\ E_u H + H E_u &= \frac{e_u}{2} + \frac{g_u}{2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

On peut donc réécrire les équations de Codazzi de la façon suivante :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{e-g}{2} \right)_u + f_v &= E H_u \\ \left(\frac{e-g}{2} \right)_v - f_u &= -E H_v \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Définition 4.1.1. (Lignes de courbure)

Une **ligne de courbure** de S est une courbe sur S telle que les vecteurs tangents à la courbe en chaque point sont des directions principales de courbures. En chaque point qui n'est pas ombilic, il existe exactement deux lignes de courbures passant par ce point : une associée à la direction principale de courbure de k_1 et une associée à la direction principale de courbure de k_2 .

Proposition 4.1.2. Les lignes de courbure sont données par la relation suivante :

$$-f du^2 + (e-g) dudv + f dv^2 = 0 \quad (27)$$

où du, dv sont les projections sur les coordonnées u et v respectivement.

Démonstration. La matrice de la forme bilinéaire associée à la forme quadratique étant

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}, \text{ on a } \Pi_p = edu^2 + fdudv + fdvdu + gdv^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2.$$

Alors, sur un cercle de $T_p S$ paramétré par $e_\theta = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, on a :

$$\Pi_p(e_\theta) = r^2 e \cos^2(\theta) + 2r^2 f \cos(\theta) \sin(\theta) + gr^2 \sin^2(\theta)$$

Les lignes de courbures correspondent aux directions telles que $\frac{\partial \Pi_p(e_\theta)}{\partial \theta} = 0$ donc :

$$\begin{aligned} 0 &= -2er^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + 2r^2 f(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + 2r^2 g \cos(\theta) \sin(\theta) \\ &= -2(edudv - fdu^2 + fdv^2 - gdudv) \end{aligned}$$

D'où la relation $-fdu^2 + (e - g)dudv + fdv^2 = 0$, comme voulu. \square

Plutôt que de traiter un problème à deux variables réelles u et v , on va se ramener à un problème à une seule variable complexe w . Cela permettra également d'utiliser le fait que les fonctions analytiques sur \mathbb{C} sont les fonctions holomorphes. Soit $w = u + iv$ et $\bar{w} = u - iv$. Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est différentiable, on a

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right) dw + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + i \frac{\partial f}{\partial v} \right) d\bar{w} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \\ 2 \frac{\partial}{\partial \bar{w}} &= \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned} \tag{28}$$

On pose $\Phi(w, \bar{w}) = \frac{e - g}{2} - if$. En multipliant la 2ème équation de (26) par i et en lui ajoutant la 1ère, on obtient

$$\Phi_{\bar{w}} = EH_w \tag{29}$$

Proposition 4.1.3. Les points ombilics de S sont les zéros de Φ .

Démonstration. Cela vient de la relation suivante :

$$\frac{|\Phi|}{E} = \frac{|k_1 - k_2|}{2} \tag{30}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
 \frac{|\Phi|}{E} &= \frac{1}{E} \sqrt{\left(\frac{e-g}{2}\right)^2 + f^2} = \sqrt{\frac{e^2 - 2eg + g^2}{4E^2} + \frac{eg}{E^2} - k_1k_2} \\
 &= \sqrt{\frac{e^2 + 2eg + g^2}{4E^2} - k_1k_2} = \sqrt{\left(\frac{e+g}{2E}\right)^2 - k_1k_2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)^2 - k_1k_2} = \frac{1}{2} \sqrt{(k_1-k_2)^2} = \frac{|k_1-k_2|}{2}
 \end{aligned}$$

□

Lemme 4.1.4. La condition H est constante est équivalente à la condition Φ est une fonction analytique de w .

Démonstration. La condition H est constante équivaut à la condition $H_u = H_v = 0$. Or, d'après l'équation (29) et le fait que $E \neq 0$, ceci équivaut au fait que Φ vérifie les équations de Cauchy-Riemann, donc au fait que Φ soit analytique □

On considère la famille des lignes de courbure associées à k_1 . Elles passent par tout point sauf les ombilics : on dit que les ombilics sont des **singularités**. Si p est une singularité isolée, on souhaite définir un “nombre de tours” autour de p , dénombrant de combien tournent les lignes de courbure autour de p .

On se restreint à un ouvert $V \cap S$ de S tel que p est la seule singularité de $V \cap S$. Quitte à restreindre encore V , il existe une carte $\varphi : U \rightarrow V \cap S$, qui fournit un système de coordonnées locales (u, v) et donc de coordonnées complexes $w = u + iv$.

À tout $q \in V \cap S$, on associe $\mathbb{R}e_1(q)$ la tangente à la ligne de courbure passant par q . Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow V \cap S$ un lacet orienté positivement autour de p , tel que γ ne passe pas par p et γ ne s'auto-intersecte pas (en dehors de $\gamma(0) = \gamma(1)$).

Alors pour tout t , on définit $\mathbb{R}e_1(t) := \mathbb{R}e_1(\gamma(t))$ en choisissant arbitrairement une orientation à $\mathbb{R}e_1(0)$, on définit $e_1(0)$ vecteur unitaire tangent à la ligne de courbure en $\gamma(0)$. Par continuité, ceci fixe une orientation et définit $t \in [0, 1] \rightarrow e_1(t)$ un champ de vecteurs unitaires sur γ , avec $e_1(1) = \pm e_1(0)$.

$e_1(t)$ s'identifie à un champ de vecteurs $\tilde{e}_1(t)$ sur \mathbb{R}^2 autour d'un point en tirant en arrière par la carte φ .

Définition 4.1.5. (Indice)

On définit l'indice j de p une singularité isolée comme étant égal à $\frac{1}{2\pi} (\arg(\tilde{e}_1(1)) - \arg(\tilde{e}_1(0)))$.

On admet que l'indice ne dépend pas du lacet considéré. Pour plus de détails, voir [2], Part Two, Chapter III Section 1.1 pp.107-109

Remarque 4.1.6. Puisque $\mathbb{R}e_1(0) = \mathbb{R}e_1(1)$, alors $e_1(1) = \pm e_1(0)$.

Donc $\arg(\tilde{e}_1(1)) - \arg(\tilde{e}_1(0)) \in \pi\mathbb{Z}$. Cela signifie que l'indice est soit un entier, soit un demi-entier.

On définit de même e_2 à partir des lignes de courbure associées à k_2 . Comme $e_2(p) \perp e_1(p)$ en tout point, on obtient la même définition de l'indice si on considère les lignes de courbure associées à k_2 plutôt que celles associées à k_1 .

Théorème 4.1.7. Soit S une surface, et R une région de cette surface sur laquelle la courbure moyenne est constante. Soit U l'ensemble des points ombilics de R , et $p \in U$. Alors :

- Soit p est un point intérieur de U
- Soit p est un point isolé de U et son indice par rapport aux lignes de courbures est strictement négatif.

Démonstration. Supposons que $p \notin \overset{\circ}{U}$. Alors $\Phi \neq 0$. Comme Φ est analytique, par le principe des zéros isolés, p est un point isolé de U . De plus, on peut écrire $\Phi = c_n w^n + c_{n+1} w^{n+1} + \dots$ avec $n \geq 1$ et $c \neq 0$.

Remarquons alors que $\text{Im}(\Phi \cdot (dw)^2) = 0$ pour dw élément tangent à une ligne de courbure. En effet :

$$\begin{aligned} \text{Im}(\Phi \cdot (dw)^2) &= \text{Im} \left(\left(\frac{e-g}{2} - if \right) (du + idv)^2 \right) \\ &= \text{Im} \left(\left(\frac{e-g}{2} - if \right) (du^2 - dv^2 + 2idudv) \right) \\ &= -f(du^2 - dv^2) + (e-g)dudv = 0 \text{ par (27)} \end{aligned}$$

Alors, comme $\Phi(dw)^2$ ne s'annule pas au voisinage épointé de p , par continuité son argument est constant, égal à $m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. On sait que la variation de $\arg(dw)$ autour de p est $2\pi j$ (dw est tangent à une ligne de courbure). De plus, par le principe de l'argument, la variation de $\arg(\Phi)$ autour de p est son nombre zéros avec multiplicité au voisinage de p , c'est donc n . Ainsi, comme $\arg(\Phi) + 2\arg(dw) = \text{constant}$, il vient $2\pi n + 4\pi j = 0$, donc $j = -\frac{n}{2} < 0$. \square

Théorème 4.1.8. (Poincaré) Si F est un champ de courbes sur S avec un nombre fini de singularités, alors $\sum j = 2 - 2g$ où g est le genre de S .

On admet ce théorème, pour une preuve, voir [2], Part Two, Chapter III Section 2.2 Theorem II, p.113

Corollaire 4.1.9. Si S est une surface de genre 0, alors tout champ sur S admet au moins une singularité, et si le nombre de singularités est fini, au moins l'une d'entre elles a un indice positif.

4.2 Théorème

Théorème 4.2.1. (Hopf, 1951)

Si S est une surface régulière compacte, connexe, de genre 0 (c'est à dire si S est homéomorphe à une sphère) et si S a une courbure moyenne constante, alors S est une sphère.

Démonstration. Soit S comme dans l'énoncé du théorème. Soit U l'ensemble des points ombilics de S . D'après la proposition 2.3.4, il suffit de montrer $U = S$ pour obtenir que S est une sphère. Comme S est de genre 0, d'après le théorème de Poincaré, U est non vide, et si U est fini, U contient au moins un point p_0 d'indice positif. D'après le théorème 4.1.7, p_0 ne peut pas être d'indice positif. On en déduit que U est infini. Comme S est compact, U a un point d'accumulation p . De plus, U est fermé car c'est l'image réciproque d'un fermé ($\{0\}$) par une fonction continue ($k_1 - k_2$). Donc $p \in U$. De plus, d'après le théorème 4.1.7, p est un point intérieur de U . Ainsi $\overset{\circ}{U}$ est non vide, ouvert (par définition de l'intérieur), et fermé (car si $q \in \overline{\overset{\circ}{U}}$, alors comme U est fermé, $q \in U$ et par le théorème 4.1.7, $q \in \overset{\circ}{U}$). Comme S est connexe, on en déduit $U = \overset{\circ}{U} = S$. On conclut grâce à la proposition 2.3.4. \square

Conclusion

En conclusion, nous avons dans ce mémoire utilisé les différentes notions de courbure pour montrer que les surfaces à courbure de Gauss constante sont très rigides, puisqu'il suffit d'avoir les hypothèses de compacité et de connexité par arcs pour conclure que c'est une sphère (Liebmann, 1899).

Les surfaces à courbure moyenne constante sont en revanche moins rigides, car il y a besoin de plus d'hypothèses pour s'assurer de leur caractérisation. Nous avons dans ce mémoire traité le cas où la surface est compacte, connexe homéomorphe à une sphère (Hopf, 1951).

En 1958, Alexandrov a démontré que toute surface plongée dans \mathbb{R}^3 à courbure moyenne constante est une sphère. Mais cela ne se généralise pas. Ainsi en 1984, Wente a construit des tores immergés à courbure moyenne constante (pour ces deux résultats, voir Katsuei Kenmotsu. *Surfaces with constant mean curvature*, volume 221 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.).

Bibliographie

- [1] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J, 1976.
- [2] Heinz Hopf. *Differential geometry in the large*, volume 1000 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.