

# Le Carrousel Brownien Hyperbolique

Octave Mortain et Adrien Patoz  
Encadrants: Laure Dumaz et Nicolas Tholozan

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Géométrie hyperbolique</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Opérateur de Dirac</b>	<b>4</b>
3.1	Limit circle et Limit point . . . . .	5
3.2	Exemple . . . . .	6
3.3	Opérateur auto-adjoint . . . . .	6
3.4	Opérateur inverse . . . . .	7
3.5	Approximation LC . . . . .	9
<b>4</b>	<b>La fonction de phase</b>	<b>9</b>
4.1	EDO . . . . .	10
4.2	Limite de la phase . . . . .	11
4.3	Phase inversée . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Mouvement brownien</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Opérateur de Dirac et carrousel brownien</b>	<b>16</b>
6.1	$\beta$ -ensemble gaussien et processus $\text{Sine}_\beta$ . . . . .	16
6.2	L'opérateur $\text{Sine}_\beta$ . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>20</b>
<b>8</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>21</b>

# 1 Introduction

## Le processus $\text{Sine}_\beta$

Le processus  $\text{Sine}_\beta$  est un processus ponctuel aléatoire (c'est à dire un ensemble discret de points aléatoire) qui apparaît dans deux domaines à priori distincts : l'étude des gaz logarithmiques et celles des matrices aléatoires.

En physique statistique, un gaz logarithmique est un système de  $n$  particule en interaction via un potentiel en  $-\log(\text{distance})$  confinées sur une droite. En faisant tendre  $n$  vers l'infini, les distributions des  $n$ -uplets convergent vers le processus  $\text{Sine}_\beta$ , où  $\beta > 0$  est un paramètre fixé appelé température inverse.

En théorie des matrices aléatoires, on peut construire un ensemble aléatoires de point en considérant le spectre d'une matrice de la forme  $\frac{1}{\sqrt{2}}(A + A^*)$  où  $A$  est une matrice  $n \times n$  dont les coefficients sont des variables aléatoires gaussiennes iid (réelles où complexes). En renormalisant et en faisant tendre  $n$  vers l'infini, les processus ponctuels convergent vers le processus  $\text{Sine}_\beta$ , où  $\beta$  vaut 1 dans le cas réel et 2 dans le cas complexe (et 4 dans le cas des quaternions).

On cherche dans ce mémoire à présenter une construction qui donne le processus  $\text{Sine}_\beta$  comme un spectre et ce pour tout  $\beta > 0$ .

## Opérateur de Dirac

On désigne par opérateur sur un espace de Banach  $E$  une application linéaire définie sur un certain domaine inclus dans  $E$  et à valeurs dans  $E$ . On étudie dans ce mémoire un opérateur de la forme

$$\tau v(t) = R(t) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{dt} \\ \frac{d}{dt} & 0 \end{pmatrix} v(t)$$

où  $t \mapsto R(t)$  est une fonction continue aléatoire de  $[0; T[$  dans les matrices symétriques définies positives. Afin d'étudier son spectre, on construira un espace de Hilbert à l'aide de  $R$  et on définira le domaine de  $\tau$  de sorte que l'opérateur soit auto-adjoint. On s'appuiera largement sur les travaux de Weidmann concernant les opérateurs auto-adjoints dans les espaces de Hilbert pour en déduire des propriétés sur le spectre de notre opérateur, en particulier pour nous assurer que c'est un ensemble discret de points.

## Géométrie hyperbolique et mouvement brownien

On représentera le plan hyperbolique en utilisant les modèles du demi-plan de Poincaré  $\mathbb{H}$  et du disque de Poincaré  $\mathbb{D}$ . Le premier ayant l'avantage de rendre les calculs plus simples en général, c'est lui que l'on utilisera le plus souvent. Le disque à lui l'avantage que son bord (le cercle unité) est plus facile à manipuler que celui du demi-plan ( $\mathbb{R} \cup \infty$ ). On l'utilisera donc dans la partie 4 où l'on s'intéresse à un point mouvant sur le bord du plan hyperbolique.

La géométrie hyperbolique nous servira d'outil pour construire la matrice  $R(t)$  et pour interpréter graphiquement certains résultats. En partant d'un point  $x + iy \in \mathbb{H}$ , on peut en effet construire une matrice symétrique définie positive :

$$R = \frac{1}{2y} X^t X, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Et donc un chemin dans le plan hyperbolique nous fournit une fonction  $t \mapsto R(t)$  continue. Pour choisir ce chemin de manière aléatoire, on utilisera un mouvement brownien hyperbolique de variance  $4/\beta$ , auquel on applique le changement de temps  $-\log(1-t)$ .

Notre objectif est d'arriver au résultat suivant :

**Théorème 1.** *Soit  $\tau$  l'opérateur défini comme précédemment où  $R(t)$  est la représentation positive définie d'un mouvement brownien dans le plan hyperbolique de variance  $4/\beta$  auquel on applique le changement de temps  $-\log(1-t)$ . On munit cet opérateur d'un certain domaine défini en 3.3. Alors le spectre de  $\tau$  est un ensemble discret aléatoire qui suit le processus  $\text{Sine}_\beta$ .*

## 2 Géométrie hyperbolique

Nous allons utiliser deux modèles de géométrie hyperbolique en dimension 2 :

- Le demi-plan de Poincaré, noté  $\mathbb{H}$ , qui est l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C}, \Im z > 0\}$
- Le disque de Poincaré, noté  $\mathbb{D}$ , qui est l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ .

Les frontières sont respectivement  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  pour  $\mathbb{H}$  et  $\{|z| = 1\}$  pour  $\mathbb{D}$ .

Dans les deux modèles, les géodésiques sont les arcs de cercles euclidiens perpendiculaires aux frontières. Les angles sont les angles euclidiens et les distances selon une géodésique sont calculées en intégrant respectivement  $(\Im z)^{-1}$  et  $\frac{1}{1-|z|^2}$ .

Pour  $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 \in \mathbb{H}$ , on a l'expression explicite :

$$d_{\mathbb{H}}(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = \operatorname{arccosh} \left( 1 + \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2y_1 y_2} \right)$$

La correspondance entre ces deux modèles est donné par la transformation de Cayley, qui envoie  $i \mapsto 0$  et  $\infty \mapsto 1$ , où son inverse. Donnée par :

$$U : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}, U^{-1}(\omega) = i \frac{\omega+1}{-\omega+1}$$

Remarquons que cette application s'étend aux frontières par  $U : r \mapsto e^{i2\operatorname{arccot}(r)}$  et  $U^{-1} : e^{i\theta} \mapsto -\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .

Pour  $\xi$  dans la frontière de notre modèle, on définit la *distance horocyclique* :

$$d_\xi(a, b) = \lim_{z \rightarrow \xi} |d(a, z) - d(b, z)|$$

La limite existe et on a une expression explicite dans chacun de nos deux modèles. Dans le cas du demi-plan de Poincaré, on a pour  $\xi = q \in \mathbb{R}$  ou  $\xi = \infty$  :

$$d_q(x + iy, i) = \log \left( \frac{(x-q)^2 + y^2}{(1+q^2)y} \right), d_\infty(x + iy, i) = \log \left( \frac{1}{y} \right)$$

Les isométries de  $\mathbb{H}$  non triviales conservant l'orientation sont classifiées en fonction de leurs points fixes, elles peuvent en avoir un seul dans  $\mathbb{H}$ , un seul dans  $\partial\mathbb{H}$  ou deux dans  $\partial\mathbb{H}$ .

On s'intéresse ici plus particulièrement aux isométries qui ont un unique point fixe dans  $\mathbb{H}$ , qui sont appelées rotations hyperboliques. Dans le modèle du disque, si le point fixe est 0, alors la rotation hyperbolique a la même forme qu'une rotation euclidienne et s'écrit sous la forme  $z \mapsto e^{i\theta} z$ . L'expression générale d'une rotation hyperbolique s'obtient en conjuguant cette rotation par une transformation de Möbius de  $\mathbb{D}$ . Pour se ramener au demi-plan de Poincaré, on conjugue par la transformation de Cayley  $U$  définie plus haut.

On s'intéressera plus précisément à l'évolution d'un point du bord pendant une rotation. On note donc que dans le modèle du disque, pour une rotation à vitesse  $\lambda$  autour de 0, un point de  $\partial\mathbb{D}$  vérifie l'équation différentielle  $z' = i\lambda z$ . Dans le modèle du demi-plan, la rotation autour du point  $x + iy$  à vitesse  $\lambda$  est donnée par :

$$r(t)' = \lambda \frac{y^2 + (r(t) - x)^2}{2y}$$

Pour  $\lambda > 0$ ,  $r(t)$  repart de  $-\infty$  quand elle passe par  $+\infty$ , inversement pour  $\lambda < 0$ . Dans le modèle du disque, un point  $z = e^{i\phi}$  de  $\partial\mathbb{D}$  en rotation à vitesse  $\lambda$  autour de  $\gamma \in \mathbb{D}$  vérifie :

$$\phi' = \lambda \frac{|e^{i\phi} - \gamma|^2}{1 - |\gamma|^2}$$

Pour un point  $x + iy \in \mathbb{H}$ , on pose sa représentation positive définie  $R$  :

$$R = \frac{1}{2y} X^t X \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

On peut donc associer à un chemin  $\gamma$  dans  $\mathbb{H}$  une fonction  $t \mapsto R(t)$ .

### 3 Opérateur de Dirac

On suppose donné dans toute cette section  $T > 0$  et une fonction continue  $R$  de  $[0; T[$  vers les matrices  $2 \times 2$  symétriques, définies positives. On a vu précédemment comment une telle matrice peut être obtenue à partir d'un chemin dans le plan hyperbolique. On considère l'opérateur  $\tau$  agissant sur les fonctions  $[0; T[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  donné par :

$$\tau v(t) = R^{-1}(t) J v'(t) \quad \text{où } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considérera cet opérateur sur un certain domaine de définition que l'on explicite en partie 3.3. Pour l'instant, on peut considérer que  $\tau$  est défini sur toutes les fonctions  $\mathcal{C}^1$  de  $[0; T[$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 2.** Soit  $A$  un opérateur défini sur un domaine  $\text{dom}(A)$  inclus dans un espace de Banach  $E$ . On dit que  $\lambda$  est une valeur spectrale de  $A$  lorsque  $(A - \lambda \text{Id}) : \text{dom}(A) \rightarrow E$  est non inversible. Le spectre de  $A$ , noté  $\text{Sp}(A)$ , est l'ensemble de ses valeurs spectrales.

L'objectif de cette partie est de prouver que le spectre de  $\tau$ , muni d'un domaine approprié, est un ensemble discret de points. Pour étudier le spectre il est naturel d'étudier l'équation suivante :

$$\tau v = \lambda v \quad (\star)$$

**Remarque 3.** Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $a \in \mathbb{C}^2$ ,  $t_0 \in [0; T[$ , il existe une unique solution à  $(\star)$  vérifiant  $v(t_0) = a$ .

La notion de spectre est définie pour les endomorphismes des espaces de Banach, mais de nombreux résultats intéressants sur les opérateurs auto-adjoints dans les espaces de Hilbert nous invitent à considérer notre opérateur dans un espace de Hilbert. On dispose justement de la matrice  $R(t)$  (qui est symétrique définie positive) pour construire le produit scalaire suivant :

$$\langle v, w \rangle_R = \int_0^T v(t)^t R(t) w(t) dt$$

On note  $L_R^2$  l'espace de Hilbert des fonctions  $v : [0; T[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  telles que  $\|v\|_R^2 = \langle v, v \rangle_R$  converge, munies du précédent produit scalaire. On supposera à partir de maintenant qu'il existe une fonction constante  $u_*(t) = u_*$  non nulle qui appartienne à  $L_R^2$ .

On note  $AC$  l'ensemble des fonctions absolument continues sur  $[0; T[$ , c'est à dire l'ensemble des fonctions  $f$  pouvant s'écrire comme  $f(t) = f(0) + \int_0^t g(s) ds$  où  $g$  est intégrable sur tout  $[0; t]$ ,  $t < T$ .

### 3.1 Limit circle et Limit point

En étudiant les solutions de  $(\star)$  dans  $L_R^2$ , on remarque l'émergence de deux cas :

**Proposition 4.** On a l'alternative suivante :

- Si  $\|R\|$  est intégrable, alors toutes les fonctions constantes sont dans  $L_R^2$ . On dit dans ce cas que l'opérateur  $\tau$  est **limit circle** (LC) en  $T$ .
- Si  $\|R\|$  est non intégrable, alors les seules fonctions constantes de  $L_R^2$  sont proportionnelles à  $u_*$ , et tout élément  $v \in L_R^2$  converge vers la droite  $\mathbb{R}u_*$ . On dit dans ce cas que l'opérateur  $\tau$  est **limit point** (LP) en  $T$ .

*Démonstration.* On a l'équivalence entre «  $\|R\|$  intégrable » et « toutes les constantes sont dans  $L_R^2$  » par la définition de la norme d'une matrice. Si ces assertions sont fausses on pose  $u_\times$  non colinéaire à  $u_*$  et on décompose  $v \in L_R^2$  en  $v = v_* u_* + v_\times u_\times$ . Supposons  $v_*$  bornée et montrons que  $v_\times$  tend vers 0. Par l'inégalité triangulaire renversée :

$$\infty > \|v\|_R \geq \|v_* u_*\|_R - \|v_\times u_\times\|_R$$

Or  $\|v_* u_*\|_R < \infty$  car  $v_*$  bornée donc  $\|v_\times u_\times\|_R < \infty$ . Puisque  $u_\times$  n'est pas colinéaire à  $u_*$ , on a  $\int_0^T u_\times^t R(t) u_\times dt = +\infty$ . Donc  $v_\times \xrightarrow[t \rightarrow T]{} 0$  sans quoi l'intégrale ne serait pas finie. On a donc bien prouvé que  $v_\times = o(v_*)$ .  $\square$

**Remarque 5.** Soit  $0 < T_0 < T$ . L'opérateur  $\tau_0$ , restriction de  $\tau$  à  $[0; T_0[$  est LC en  $T_0$ .

**Théorème 6.** Dans le cas LP, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , il existe au plus une solution à  $(\star)$  qui est dans  $L_R^2$ , à une constante scalaire près. Dans le cas LC, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , toutes les solutions sont dans  $L_R^2$ .

La distinction entre ces deux cas sera très importante dans toute l'analyse de l'opérateur. Qualitativement, on comprend que le cas LC sera plus simple car le comportement des solutions y est plus régulier. La remarque 5 nous servira donc pour approcher le cas LP par le cas LC.

### 3.2 Exemple

Étudions le cas où  $R(t)$  est la représentation définie positive d'un point suivant la géodésique  $x = 0$  à vitesse constante (égale à  $4/\beta$ ) et partant de  $i$ .

L'équation de ce point est  $x(t) + iy(t) = ie^{4/\beta t}$ , on a donc :

$$R(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-4/\beta t} & 0 \\ 0 & e^{4/\beta t} \end{pmatrix}$$

Pour se ramener à un temps fini, on fait le changement de temps logarithmique  $-\log(1-t)$  :

$$R(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-t)^{4/\beta} & 0 \\ 0 & (1-t)^{-4/\beta} \end{pmatrix}$$

Si  $0 \leq \beta \leq 4$ , alors  $\|R\|$  n'est pas intégrable en 1, on est donc dans le cas LP.

Dans ce cas, l'opérateur  $\tau$  se réécrit :

$$\tau \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4(1-t)^{-4/\beta} \frac{dy}{dt} \\ 4(1-t)^{4/\beta} \frac{dx}{dt} \end{pmatrix}$$

Donc  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $\tau$  si elle vérifie les équations :

$$\begin{cases} x' &= -\lambda(1-t)^{-4/\beta} y \\ y' &= \lambda(1-t)^{4/\beta} x \end{cases}$$

Heuristiquement, on s'attend à ce que  $x$  tende vers 0 pour que la solution converge, car  $(1-t)^{4/\beta}$  n'est pas intégrable. C'est-à-dire que  $v(t)^t J u_* \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} 0$ .

Si au contraire  $\beta > 4$ , on n'a à priori aucune condition de ce style sur  $x$  et  $y$  (car  $\|R\|$  est intégrable). C'est d'ailleurs exactement ce que le théorème 6 affirme.

### 3.3 Opérateur auto-adjoint

**Définition 7.** Un opérateur  $A$  défini sur un domaine  $\text{dom}(A)$  inclus dans un espace de Hilbert  $H$  est dit auto-adjoint si

- $\forall v, w \in \text{dom}(A), \langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$
- Si  $v \in H$  est tel que  $w \mapsto \langle v, Aw \rangle$  est continue sur  $\text{dom}(A)$  alors  $v \in \text{dom}(A)$ .

On veut montrer que l'opérateur  $\tau$  est auto-adjoint dans  $L_R^2$  afin d'utiliser des résultats énoncés par Weidmann sur les opérateurs auto-adjoints et leurs spectres. Le premier point semble le plus facile à vérifier, on commence donc par calculer la valeur de  $\langle \tau v, w \rangle_R$  en procédant par IPP.

$$\begin{aligned} \langle \tau v, w \rangle_R &= \int_0^T \tau v(t)^t R(t) w(t) dt \\ &= - \int_0^T v'(t)^t J R^{-1}(t) R(t) w(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \tau v, w \rangle_R &= - \int_0^T v'(t)^t Jw(t) dt \\
&= - [v(t)^t Jw(t)]_0^T + \int_0^T v(t)^t Jw'(t) dt \\
&= \langle v, \tau w \rangle_R - [v(t)^t Jw(t)]_0^T
\end{aligned}$$

Pour avoir l'égalité voulue, il suffit donc que  $v^t Jw$  soit nul en 0 et en  $T$ . En écrivant  $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$ , on a :

$$v^t Jw = w_x v_y - v_x w_y$$

Ce qui est nul si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires. On se propose donc de choisir un domaine qui impose que tous les vecteurs soit parallèles entre eux en 0 et en  $T$ . On a déjà vu que dans le cas LP, tous les éléments de  $L_R^2$  sont asymptotiquement parallèles à  $u_*$  en  $T$ , donc il suffit de mettre une condition en 0 :

$$\text{dom}_{LP}(\tau) = \{v \in L_R^2 : v \in AC, \tau v \in L_R^2, v(0)^t J u_0 = 0\}$$

Dans le cas LC au contraire, on choisit une condition en 0 et une autre en  $T$ .

$$\text{dom}_{LC}(\tau) = \left\{ v \in L_R^2 : v \in AC, \tau v \in L_R^2, v(0)^t J u_0 = 0, v(t)^t J u_1 \xrightarrow[t \rightarrow T]{} 0 \right\}$$

Où on a choisi de manière arbitraire des vecteurs  $u_0$  et  $u_1$  non nuls. Dans le cas LP, on notera  $u_1 = u_*$  de sorte que la définition du domaine soit la même dans les deux cas.

On fixe ces domaines pour toute cette partie et la suivante, c'est à dire que l'on fixe  $u_0$  et  $u_1$  non parallèles. Étant donné que la définition du domaine ne dépend que des droites dirigées par  $u_0$  et  $u_1$ , on peut tant qu'à faire prendre  $u_0^t J u_1 = 1$ , ce qu'on supposera à présent.

**Théorème 8.** (Théorème 5.8 dans Weidmann (1987)) *L'opérateur  $\tau$  muni du domaine défini ci-dessus est auto-adjoint.*

### 3.4 Opérateur inverse

**Définition 9.** Soit  $(\varphi_k)$  une base orthonormée de  $L_R^2$ . La norme Hilbert-Schmidt d'un opérateur  $A$  est définie par :

$$\|A\|_{HS}^2 = \sum \|A\varphi_k\|_R^2$$

On dit qu'un opérateur est Hilbert-Schmidt lorsque sa norme Hilbert-Schmidt est finie.

L'objectif de cette partie est d'essayer d'appliquer le théorème suivant :

**Théorème 10.** (Théorème 7.11 dans Weidmann (1987)) *Supposons que  $\tau^{-1}$  existe et est Hilbert-Schmidt. Alors  $\text{Sp}(\tau)$  est un ensemble discret et vérifie  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(\tau)} \lambda^{-2} < \infty$ .*

On veut donc prouver l'existence de  $\tau^{-1}$  et l'exprimer. On peut espérer inverser  $\tau$  car on a choisi nos conditions au bord  $u_0$  et  $u_1$  non parallèles, ce qui implique que les fonctions constantes ne soient pas dans le domaine. Notre opérateur  $\tau$  ne s'annule justement que sur les fonctions constantes, il est donc injectif.

**Théorème 11.** *L'opérateur  $\tau : \text{dom}(\tau) \rightarrow L^2_R$  est inversible et  $\tau^{-1}$  s'écrit :*

$$\tau^{-1}v(x) = \int_0^T \mathcal{K}(x, y)R(y)v(y) \, dy$$

$$\text{avec } \mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} u_0 u_1^t & \text{si } x < y \\ u_1 u_0^t & \text{si } x \geq y \end{cases} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

*Démonstration.* Notons pour l'instant  $\sigma v(x) = \int_0^T \mathcal{K}(x, y)R(y)v(y) \, dy$  et montrons  $\tau\sigma = \text{Id}$ . On a, pour  $v \in L^2_R$  :

$$\sigma v(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x, y)R(y)v(y) \, dy + \int_x^T \mathcal{K}(x, y)R(y)v(y) \, dy$$

donc, en notant  $u_0 = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$  et  $u_1 = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$  on a :

$$\begin{aligned} (\sigma v)'(x) &= (u_1 u_0^t - u_0 u_1^t)R(x)v(x) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a_y b_x - a_x b_y \\ a_x b_y - a_y b_x & 0 \end{pmatrix} R(x)v(x) \\ &= -JR(x)v(x) \end{aligned}$$

car  $a_x b_y - a_y b_x = -u_0^t J u_1 = -1$ . On en déduit donc

$$\tau\sigma v = R^{-1}Jg' = R^{-1}J(-JRv) = v.$$

On peut également vérifier que  $\sigma v$  appartient à  $\text{dom}(\tau)$ . On a en effet que  $\tau\sigma v = v \in L^2_R$ ,  $\sigma v \in AC$  et

$$u_0^t J\sigma v(0) = \int_0^T u_0^t J u_0 u_1^t R(y)v(y) \, dy = 0.$$

(Idem pour montrer que  $u_1^t J\sigma v(T) \xrightarrow{t \rightarrow T} 0$ ) Donc  $\sigma v \in \text{dom}(\tau)$ . Montrons maintenant  $\sigma\tau = \text{Id}$ .

Soit  $v \in \text{dom}(\tau)$

$$\begin{aligned} \sigma\tau v(x) &= \int_0^T \mathcal{K}(x, y)R(y)\tau v(y) \, dy \\ &= \int_0^T \mathcal{K}(x, y)Jv'(y) \, dy \\ &= [u_1 u_0^t Jv(y)]_0^x + [u_0 u_1^t Jv(y)]_x^T \\ &= u_1 u_0^t Jv(x) - \underbrace{u_1 u_0^t Jv(0)}_{=0} + u_0 \underbrace{\lim_{t \rightarrow T} u_1^t Jv(t) - u_0 u_1^t Jv(x)}_{=0} \\ &= (u_1 u_0^t - u_0 u_1^t)Jv(x) \\ &= v(x) \end{aligned}$$

Donc  $\sigma$  est bien l'inverse de  $\tau$ . □

**Remarque 12.**  $\tau^{-1}$  est également symétrique dans  $L^2_R$ .

**Remarque 13.** On a que  $\tau$  est inversible, donc 0 n'est pas une valeur spectrale de  $\tau$ .

On a la formule suivante, pour un opérateur auto adjoint de la forme  $Av(x) = \int_0^T \mathcal{A}(x, y)v(y) dy$  :

$$\|A\|_{HS}^2 = \int_0^T \int_0^T (\text{tr}(\mathcal{A}(x, y)\mathcal{A}(x, y)^t) dy dx$$

On choisit une racine carrée de  $R$ . En appliquant la formule avec  $A = R(x)^{1/2}\mathcal{K}(x, y)R(y)^{1/2}$ , on obtient le résultat suivant :

$$\|\tau^{-1}\|_{HS}^2 = \int_0^T \int_0^T \text{tr}(\mathcal{K}(x, y)R(y)\mathcal{K}(x, y)^t R(x)) dy dx$$

Que l'on peut simplifier en remplaçant  $\mathcal{K}(x, y)$  par son expression et en remarquant que par symétrie, les intégrales dans les cas  $x < y$  et  $x > y$  sont égales.

$$\|\tau^{-1}\|_{HS}^2 = 2 \int_0^T \int_0^x u_0^t R(y)u_0 u_1^t R(x)u_1 dy dx$$

Dans le cas LC, on écrit :

$$\begin{aligned} \|\tau^{-1}\|_{HS}^2 &\leq 2 \int_0^T u_0^t R(y)u_0 dy \int_0^T u_1^t R(x)u_1 dx \\ &\leq 2\|u_0\|_R^2 \|u_1\|_R^2 \end{aligned}$$

Cette quantité est finie et le théorème 10 s'applique donc.

### 3.5 Approximation LC

On a vu que le cas LC est souvent plus simple, et par la remarque 5 on peut restreindre n'importe quel opérateur en un opérateur LC. Considérons donc une suite  $T_n \rightarrow T$  de réels strictement croissante, et notons  $\tau_n$  la restriction de  $\tau$  à  $[0; T_n[$ , qui est donc LC. On la munit du domaine

$$\text{dom}(\tau_n) = \{v \in L_R^2 : v \in AC, \tau v \in L_R^2, v(0)^t J u_0 = 0, v(T_n)^t J u_1 = 0\}.$$

On a appliqué les mêmes conditions aux limites que pour  $\tau$ . On peut remarquer que par l'expression de  $\tau^{-1}$  donnée par le théorème 11, les  $\tau_n^{-1}$  convergent vers  $\tau^{-1}$  pour la norme Hilbert-Schmidt. C'est ce qui fonde le théorème suivant, démontré par Stolz et Weidmann :

**Théorème 14.** (Théorème 1 dans Stolz et Weidmann (1993)) *Supposons que  $\tau^{-1}$  est Hilbert-Schmidt. Alors les valeurs propres de  $\tau$  sont les limites de celles de  $\tau_n$ . En particulier, si  $a < b$  ne sont pas des valeurs propres, alors le nombre de valeurs propres de  $\tau$  dans  $[a; b]$  est la limite du nombre de valeurs propres de  $\tau_n$  dans  $[a; b]$ .*

## 4 La fonction de phase

Au vu de la définition du domaine donnée en 3.3, il est naturel de s'intéresser en particulier à l'orientation des solutions. On peut voir une direction comme un point du bord du plan hyperbolique. On a donc le choix entre les deux modèles :

— Pour un vecteur  $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$  on définit sa phase  $\phi$  par

$$v_x - iv_y = re^{i\phi/2} .$$

On a choisit  $\phi/2$  afin que deux vecteurs soient parallèles si et seulement si leurs phases sont égales modulo  $2\pi$ . Le point  $e^{i\phi} \in \partial\mathbb{D}$  représente la direction de  $v$  sur le bord du disque. On note en particulier  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  les phases de  $u_0$  et  $u_1$  respectivement, de sorte que la condition  $v^t J u_0 = 0$  se réécrit  $\phi = \varphi_0 \pmod{2\pi}$ .

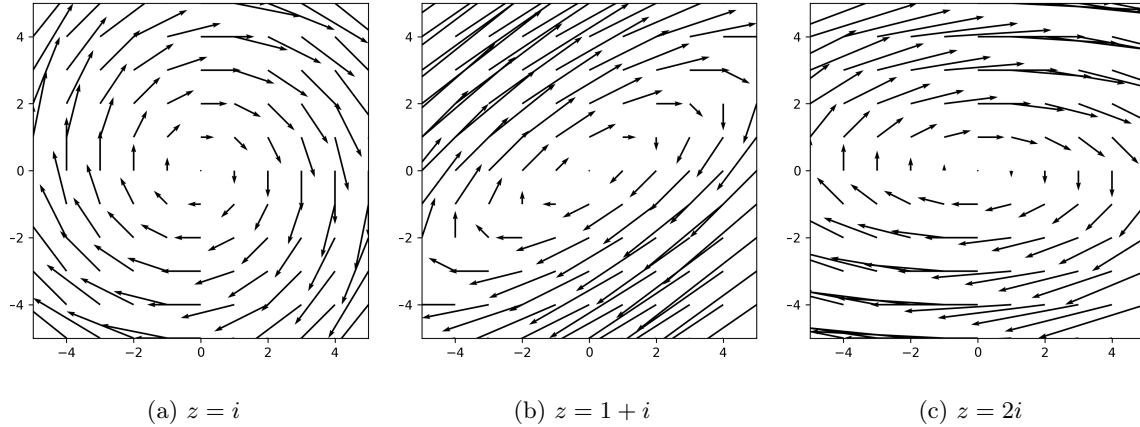
— Pour ce même vecteur  $v$  on note son rapport  $r = \frac{v_x}{v_y} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \partial\mathbb{H}$ . Le rapport  $r$  représente la direction de  $v$  sur le bord du demi plan.

Ces deux grandeurs correspondent bien au même point du bord après transformation de Cayley :  $U(r) = e^{i\phi}$ . On peut passer de l'une à l'autre par  $r = -\cotan(\phi/2)$ . La phase est souvent plus facile à manipuler car elle est toujours finie, contrairement au rapport. L'objectif de cette partie est d'étudier les propriétés de la phase d'une solution à  $(\star)$ , en particulier de l'écrire elle même comme solution d'une EDO et de décrire son lien avec le spectre de  $\tau$ .

## 4.1 EDO

L'équation au vecteurs propres  $(\star)$  se réécrit en une équation différentielle linéaire d'ordre 1 qui dépend de  $R$  :  $v'(t) = -\lambda J R(t)v(t)$ . On a tracé ci dessous les champ de vecteur de l'équation différentielle lorsque  $R$  est la matrice constante associée à un point  $z \in \mathbb{H}$ .

FIGURE 1 – Le champ de vecteur de l'EDO  $v'(t) = -J R v(t)$ , où  $R$  est la représentation symétrique positive définie de  $z$



Notons  $v_\lambda$  la solution à  $(\star)$  avec  $v_\lambda(0) = u_0$ , et notons  $\phi_\lambda$  sa phase. L'équation étant linéaire, on sait que l'on peut en déduire une expression de la forme :

$$\phi'_\lambda(t) = \lambda F(\phi_\lambda(t), t) , \quad \phi_\lambda(0) = \varphi_0$$

où la phase  $\phi_\lambda$  est indépendante du module. Pour trouver une telle expression, on passe par le demi-plan  $\mathbb{H}$ , c'est à dire que l'on étudie  $r$ . On trouve :

$$r'_\lambda = \lambda \frac{y^2 + (r_\lambda - x)^2}{2y}$$

On reconnaît la formule d'un point du bord  $\partial\mathbb{H}$  en rotation autour de  $z = x + iy$  à la vitesse  $\lambda$ . En utilisant la transformation  $U$ , on obtient donc que  $e^{i\phi_\lambda}$  est un point du bord  $\partial\mathbb{D}$  en rotation autour de  $\gamma = U(z) = \frac{z-i}{z+i}$  à la vitesse  $\lambda$  :

$$\phi'_\lambda = \lambda \frac{|e^{i\phi_\lambda} - \gamma|^2}{1 - |\gamma|^2} \quad (**)$$

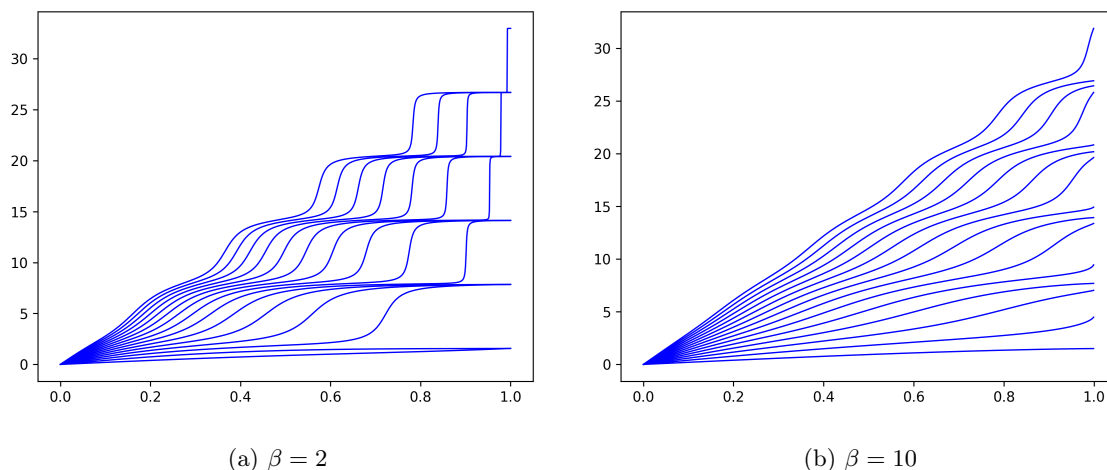
$\phi_\lambda$  est donc la solution à cette équation vérifiant  $\phi_\lambda(0) = \varphi_0$  puisque  $v(0)$  est parallèle à  $u_0$ .

**Remarque 15.** *Il y a plusieurs solutions  $v$  à  $(*)$  avec  $v(0)^t J u_0 = 0$  pour un  $\lambda$  donné, qui sont toutes proportionnelles. Leurs phases sont donc toutes égales à  $\phi_\lambda$ , qui est elle unique pour un  $\lambda$  donné.*

## 4.2 Limite de la phase

Reprenons l'exemple où  $z$  suit une géodésique à vitesse constante  $4/\beta$  et où on fait un changement de temps par  $-\log(1-t)$ , qui nous donne  $z(t) = i(1-t)^{-4/\beta}$ . On peut résoudre numériquement l'équation de la phase pour différentes valeurs de  $\lambda$ .

FIGURE 2 –  $\phi_\lambda(t)$  pour  $\lambda$  allant de 2 à 30. ( $\varphi_0 = 0$ )



On observe alors graphiquement deux comportements différents comme sur la figure ci-dessus. Lorsque  $\beta \leq 4$ , on observe que toutes les solutions semblent converger vers une même valeur modulo  $2\pi$ . Lorsque  $\beta > 4$ , les solutions convergent et leurs limites semblent varier continûment. Ces conditions coïncident avec les conditions pour le cas LP et LC respectivement, on peut donc naturellement arriver au résultat suivant :

**Théorème 16.** *Supposons que  $\tau^{-1}$  est Hilbert-Schmidt. Alors pour tout  $\lambda$ ,  $\phi_\lambda$  converge en  $T$  vers une limite finie  $\phi_\lambda(T)$  vérifiant :*

— Dans le cas LC,  $\lambda \mapsto \phi_\lambda(T)$  est continue et strictement croissante. De plus,

$$\text{Sp}(\tau) = \{\lambda : \phi_\lambda(T) \in \varphi_1 + 2\pi\mathbb{Z}\}$$

— Dans le cas LP,  $\phi_\lambda(T) \in \varphi_1 + 2\pi\mathbb{Z}$  pour tout  $\lambda$  non nul.

*Démonstration.* Pour  $\lambda > 0$ , il est clair par  $(\star\star)$  que  $\phi_\lambda(t)$  est strictement croissante en  $t$ , et donc admet une limite potentiellement infinie en  $T$ . Pour prouver qu'elle est finie, on cherche à contrôler le dénominateur dans  $(\star\star)$ , le reste étant borné par  $8\lambda$ .

$$\frac{1}{1-|\gamma|^2} = \frac{x^2 + (y+1)^2}{4y} = \Theta\left(\frac{1+x^2+y^2}{y}\right)$$

Or on a que  $R = \frac{1}{y} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -x & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$  et donc  $\|R\| = \Theta\left(\frac{1+x^2+y^2}{y}\right)$ . Donc  $\frac{1}{1-|\gamma|^2}$  est intégrable si et seulement si  $\|R\|$  l'est, c'est à dire si et seulement si on est dans le cas LC.

— **Cas LC :** Dans ce cas, on peut écrire

$$\phi_\lambda(T) - \phi_\lambda(t) \leq 4\lambda \int_t^T \frac{1}{1-|\gamma(s)|} ds < \infty$$

Donc  $\phi_\lambda(T)$  est finie et la convergence  $\phi_\lambda(t) \rightarrow \phi_\lambda(T)$  est uniforme en  $\lambda$  sur tout compact, donc  $\lambda \mapsto \phi_\lambda(T)$  est continue.

Pour tout  $t < T$ ,  $\lambda \mapsto \phi_\lambda(t)$  est strictement croissante car par  $(\star\star)$  la dérivée en 0 est croissante de  $\lambda$  et deux solutions ne peuvent pas se recroiser ensuite. Donc par passage à la limite  $\lambda \mapsto \phi_\lambda(T)$  est croissante.

Montrons la stricte croissance : soient par l'absurde  $\lambda_1 < \lambda_2$  tels que  $\phi_{\lambda_1}(T) = \phi_{\lambda_2}(T)$ . Par  $(\star\star)$  on voit que les dérivées admettent des limites en  $T$  est donc les  $\phi_{\lambda_i}$  sont dérivables en  $T$  où elles vérifient toujours l'EDO. Donc  $\phi'_{\lambda_1}(T) < \phi'_{\lambda_2}(T)$  et donc il existe un  $t < T$  tel que  $\phi_{\lambda_1}(t) > \phi_{\lambda_2}(t)$  ce qui est absurde.

La définition du domaine impose que  $\phi_\lambda(T) \in \varphi_1 + 2\pi\mathbb{Z}$  pour que  $v \in \text{dom}(\tau)$ , ce qui nous donne une condition nécessaire pour que  $\lambda$  appartienne au spectre. On montre que cette condition est aussi suffisante :

Soit  $\lambda$  tel que  $\phi_\lambda(T) \in \varphi_1 + 2\pi\mathbb{Z}$ . Soit  $v$  la solution de  $(\star)$  vérifiant  $v(0) = u_0$ . Vérifions que  $v \in \text{dom}(\tau)$ . Comme solution de l'équation différentielle, on a bien  $v \in AC$ . Par le théorème 6, on a aussi  $v \in L_R^2$  et donc  $\tau v = \lambda v \in L_R^2$ . Par construction  $v(0)^t J u_0 = 0$ , et par hypothèse sur  $\phi_\lambda(T)$ , on a bien  $v(t)^t J u_1 \xrightarrow{t \rightarrow T} 0$ . Donc  $v \in \text{dom}(\tau)$ , d'où  $\lambda \in \text{Sp}(\tau)$

— **Cas LP :** On reprend les notations de la partie 3.5. Soit  $\lambda > 0$ .

Par le résultat précédent, comme  $\tau_n$  est LC, on connaît la forme du spectre de  $\tau_n$ . Par le théorème 14, on sait donc exprimer le nombre de valeur spectrales dans un intervalle :

$$\begin{aligned} |\text{Sp}(\tau) \cap [0; \lambda]| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\text{Sp}(\tau_n) \cap [0; \lambda]| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\{\lambda' \in [0; \lambda] : \phi_{\lambda'}(T_n) \in \varphi_1 + 2\pi\mathbb{Z}\}| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\lfloor \frac{\phi_\lambda(T_n) - \varphi_1}{2\pi} \right\rfloor + 1 \end{aligned}$$

Où la dernière égalité découle de la continuité et de la stricte croissance de  $\lambda \mapsto \phi_\lambda(T_n)$ . Par le théorème 10,  $\text{Sp}(\tau) \cap [0; \lambda]$  est fini. Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_\lambda(T_n) = \phi_\lambda(T)$  est finie.

Montrons maintenant que  $\phi_\lambda(T) \in \varphi_1 + 2\pi\mathbb{Z}$ . Posons  $d = |e^{i\varphi_1} - e^{i\phi_\lambda(T)}|/2$  et montrons que  $d = 0$ . Par inégalité triangulaire :

$$|e^{i\alpha} - \gamma(t)| + |\gamma(t) - e^{i\phi_\lambda(t)}| + |e^{i\phi_\lambda(t)} - e^{i\phi_\lambda(T)}| \geq 2d$$

Par convexité de la fonction carré, on a l'inégalité  $x^2 + y^2 + z^2 \geq (x + y + z)^2/3$ . En l'appliquant à l'inégalité précédente on obtient :

$$|e^{i\alpha} - \gamma(t)|^2 + |\gamma(t) - e^{i\phi_\lambda(t)}|^2 + |e^{i\phi_\lambda(t)} - e^{i\phi_\lambda(T)}|^2 \geq \frac{4}{3}d^2$$

Pour  $t$  suffisamment proche de  $T$ , on a  $|e^{i\phi_\lambda(t)} - e^{i\phi_\lambda(T)}| \leq d^2$ , d'où

$$|e^{i\alpha} - \gamma(t)|^2 + |\gamma(t) - e^{i\phi_\lambda(t)}|^2 \geq \frac{1}{3}d^2$$

On multiplie cette inégalité par  $\frac{1}{1-|\gamma|^2}$ , qui est non intégrable dans le cas LP, et on obtient :

$$\underbrace{\frac{|e^{i\alpha} - \gamma(t)|^2}{1 - |\gamma(t)|^2}}_A + \underbrace{\frac{|\gamma(t) - e^{i\phi_\lambda(t)}|^2}{1 - |\gamma(t)|^2}}_B \geq \frac{1}{3} \underbrace{\frac{d^2}{1 - |\gamma(t)|^2}}_{\text{Non intégrable sauf si } d = 0}$$

$A = a^t R(t) a$  avec  $a = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1/2) \\ -\sin(\varphi_1/2) \end{pmatrix}$ , ce qui est intégrable puisque  $a$  est parallèle à  $u_1$ .

$B$  est intégrable par la finitude de  $\phi_\lambda(T)$ .

Donc  $d = 0$ , ie  $\phi_\lambda(T) \in \varphi_1 + 2\pi\mathbb{Z}$

□

On en déduit le corollaire suivant :

**Théorème 17.** *La fonction de comptage de  $\text{Sp}(\tau)$  est la version continue à droite de :  $\lambda \mapsto \text{sign}(\lambda) \cdot |\{t \in ]0, T[ : \phi_\lambda(t) \in \varphi_1 + 2\pi\mathbb{Z}\}|$*

Qualitativement, cela signifie que pour un  $\lambda$  donné, on fait tourner un point du bord à vitesse  $\lambda$  autour de  $\gamma$  et on compte combien de fois on passe par  $\varphi_1$  (négativement si  $\lambda < 0$ ). On a une valeur spectrale à chaque fois que ce nombre augment de 1. On appelle carrousel hyperbolique de chemin  $\gamma$ , de conditions au bord  $u_0$  et  $u_1$  et de vitesse  $\lambda$  ce processus.

*Démonstration.* On traite le cas des  $\lambda > 0$ . Dans le cas LC, on a que  $\lambda \mapsto \varphi_\lambda(T)$  est continue et strictement croissante, et on a une valeur spectrale lorsqu'elle vaut  $\varphi_1$  modulo  $2\pi$ . Donc :

$$|\text{Sp}(\tau) \cap [0; \lambda|] = |\{t \in ]0, T[ : \phi_\lambda(t) \in \varphi_1 + 2\pi\mathbb{Z}\}|$$

Comme dans la dernière preuve, on utilise le théorème 14 pour approcher le cas LP par le cas LC et obtenir le résultat. □

### 4.3 Phase inversée

On a avec le théorème 16 une manière simple et relativement intuitive de décrire le spectre en regardant si la phase se termine au bon endroit. Ce résultat ne fonctionne pas dans le cas LP (puisque la phase vaut toujours  $\varphi_1$  en  $T$ ), mais on peut trouver un résultat analogue en partant de  $T$  au lieu de 0. Bien que plus lourd à énoncer, ce résultat fonctionne également dans le cas LP.

**Théorème 18.** *Supposons que  $\tau^{-1}$  est Hilbert-Schmidt. Il existe une unique solution à l'ODE*

$$\rho'_\lambda = \lambda \frac{|e^{i\rho_\lambda} - \gamma|^2}{1 - |\gamma|^2}, \quad \lim_{t \rightarrow T} \rho_\lambda(t) = \varphi_1$$

qui soit maximale si  $\lambda > 0$ , minimale si  $\lambda < 0$ .

De plus  $\lambda \mapsto \rho_\lambda(t)$  est continue et strictement décroissante pour tout  $t \in [0; T[$  et on a :

$$\text{Sp}(\tau) = \{\lambda : \rho_\lambda(0) \in \varphi_0 + 2\pi\mathbb{Z}\}$$

$\rho_\lambda$  est la fonction de phase inversée de  $\tau$ .

*Démonstration.* Si  $R$  se prolonge par continuité en  $T < \infty$ , on peut directement appliquer Cauchy-Lipschitz et le théorème 16 pour avoir le résultat. Dans ce cas la fonction est même continue sur  $[0; T]$ . Elle est trivialement maximale puisque c'est la seule solution.

Si non, on considère  $T' < T$ . Puisque  $R$  est continue sur  $[0; T']$ , on peut appliquer le résultat sur cet intervalle. Notons  $\rho_{\lambda, T'}$  la fonction de phase inversée de l'opérateur restreint à  $[0; T']$ . Elle vérifie donc :

$$\rho'_{\lambda, T'} = \lambda \frac{|e^{i\rho_{\lambda, T'}} - \gamma|^2}{1 - |\gamma|^2} \text{ sur } [0, T'[ , \quad \rho_{\lambda, T'}(T') = \varphi_1$$

On souhaite construire  $\rho_\lambda$  comme la limite des  $\rho_{\lambda, T'}$  quand  $T' \rightarrow T$ .

Par des arguments analogues à ceux utilisés dans la preuve du théorème 16 (cas LC, pour montrer la croissance), on a que  $T' \mapsto \rho_{\lambda, T'}(t)$  est décroissante, donc

$$\rho_\lambda(t) = \lim_{T' \rightarrow T} \rho_{\lambda, T'}(t)$$

est bien définie et est croissante de  $t$ . On peut montrer que la limite est finie comme en utilisant les mêmes arguments que dans le cas LP (le nombre de valeurs propres dans  $[0; \lambda]$  est fini et peut s'exprimer comme une limite qui serait infinie si  $\rho_{\lambda, T'}(0)$  divergeait).

En passant à la limite dans la forme intégrale de l'équation, on constate que  $\rho_\lambda$  vérifie bien l'EDO. Cette construction garantit aussi la maximalité, en effet si on suppose l'existence d'une solution  $\tilde{\rho}_\lambda$  et de  $t$  tel que  $\tilde{\rho}_\lambda(t) > \rho_\lambda(t)$ , alors il existe  $t < T' < T$  tel que  $\tilde{\rho}_\lambda(t) > \rho_{\lambda, T'}(t)$ . Comme les solutions pour un  $\lambda$  fixé ne se croisent pas on a  $\tilde{\rho}_\lambda(T') > \rho_{\lambda, T'}(T') = \varphi_1$  et donc par croissance  $\lim_{t \rightarrow T} \tilde{\rho}_\lambda(t) > \varphi_1$  ce qui est absurde.

Montrons la continuité de  $\lambda \mapsto \rho_\lambda(t)$  :

- **Cas LC :** On procède comme dans le théorème 16.
- **Cas LP :** Montrons la continuité de  $\lambda \mapsto \rho_\lambda(0)$  (celle de  $\lambda \mapsto \rho_\lambda(t)$  en découle par la continuité du flot). Supposons qu'il existe un  $\lambda_0$  en lequel la fonction  $\lambda \mapsto \rho_\lambda(0)$  soit discontinue. Comme cette fonction est décroissante, on sait qu'elle admet des limites en  $\lambda_0^-$  et  $\lambda_0^+$ , qui sont donc différentes. Soit  $\xi$  tel que  $\rho_{\lambda_0^+}(0) < \xi < \rho_{\lambda_0^-}(0)$ . Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\rho_{\lambda_0 + \varepsilon}(0) < \xi < \rho_{\lambda_0 - \varepsilon}(0)$ .

Comme  $\rho_{\lambda_0+\varepsilon}(0)$  est la limite des  $\rho_{\lambda_0+\varepsilon,T'}(0)$  quand  $T' \rightarrow T$ , il existe  $T'_0 < T$  tel que pour tout  $T' > T'_0$  on ait

$$\rho_{\lambda_0+\varepsilon,T'}(0) < \xi < \rho_{\lambda_0-\varepsilon,T'}(0)$$

Donc si on considère l'opérateur  $\tau_\xi$  égal à  $\tau$  mais muni d'une condition initiale avec  $\varphi_0 = \xi$  (par exemple en prenant  $u_0 = (\cos(\xi/2), -\sin(\xi/2))^t$ ), alors  $\tau_\xi$  restreint à  $[0; T'[$  a une valeur spectrale dans  $[\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$ . Par le théorème 14, c'est aussi le cas pour  $\tau_\xi$ . Or on peut choisir  $\varepsilon$  arbitrairement petit, donc comme le spectre est discret,  $\lambda_0$  est une valeur spectrale de  $\tau_\xi$ . Mais le choix de  $\xi$  était lui aussi arbitraire. On peut donc choisir un  $\xi' \neq \xi$  vérifiant lui aussi les inégalités.  $\lambda$  est alors une valeur spectrale de  $\tau_\xi$  et de  $\tau_{\xi'}$ . On a donc deux solutions de  $\tau v = \lambda_0 v$  avec des conditions initiales différentes. Elles ne sont donc pas proportionnelles, ce qui est absurde par le théorème 6. D'où la continuité.

$\lambda \mapsto \rho_\lambda(t)$  est donc continue et décroissante. Pour montrer la stricte décroissance, on suppose par l'absurde  $\lambda_1 < \lambda_2$  tels que  $\rho_{\lambda_1}(t) = \rho_{\lambda_2}(t)$ . Alors par l'EDO on a  $\rho'_{\lambda_1}(t) < \rho'_{\lambda_2}(t)$  donc pour  $\varepsilon$  suffisamment petit on a  $\rho'_{\lambda_1}(t + \varepsilon) < \rho'_{\lambda_2}(t + \varepsilon)$  ce qui contredit la décroissance. On a que le spectre de la restriction  $\tau'$  de  $\tau$  à  $[0; T'[$  converge vers le spectre de  $\tau$ , et le spectre de  $\tau'$  s'exprime par :

$$\text{Sp}(\tau') = \{\lambda : \rho_{\lambda,T'}(0) \in \varphi_0 + 2\pi\mathbb{Z}\}$$

Or les  $\rho_{\lambda,T'}$  sont continue et strictement décroissantes de  $\lambda$ , et convergent uniformément sur tout compact vers  $\rho_\lambda$  qui est continue et strictement décroissante. Donc l'ensemble ci-dessus converge point par point vers  $\{\lambda : \rho_\lambda(0) \in \varphi_0 + 2\pi\mathbb{Z}\}$ , d'où

$$\text{Sp}(\tau) = \{\lambda : \rho_\lambda(0) \in \varphi_0 + 2\pi\mathbb{Z}\}$$

□

## 5 Mouvement brownien

D'après l'introduction, on peut associer à un chemin  $\gamma$  dans le plan hyperbolique une fonction  $t \mapsto R(t)$ . On présente dans cette partie la construction des chemins auxquels on va s'intéresser.

**Définition 19.** On appelle mouvement brownien (en  $d$  dimension), une famille de variables aléatoires  $(B(t))_{t \in [0, T[}$  à valeur dans  $\mathbb{R}^d$ , définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  telle que :

- $B(0) = 0$  presque sûrement.
- pour tout choix de  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < T$  de  $p$  réels, les variables  $B(t_1) - B(t_0), \dots, B(t_p) - B(t_{p-1})$  sont indépendantes, et pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $B(t_j) - B(t_{j-1})$  est un vecteur gaussien centré de covariance  $\text{Id}(t_j - t_{j-1})$ .
- pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $t \mapsto B(t)(\omega)$  est continue.

On définit grâce au mouvement brownien dans  $\mathbb{C}$  ( $= \mathbb{R}^2$ ) le mouvement brownien hyperbolique (dans le modèle du demi-plan de Poincaré) :

**Définition 20.** Dans le demi-plan de Poincaré, un mouvement brownien hyperbolique est la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$d\mathcal{B} = \Im \mathcal{B} dZ$$

ou  $Z$  est un mouvement brownien complexe, c'est-à-dire que le vecteur  $(\Im Z, \Re Z)^T$  est un mouvement brownien en dimension 2.

**Remarque 21.** :

- En remplaçant  $dZ$  par  $\sigma dZ$ , on obtient un mouvement brownien hyperbolique de variance  $\sigma^2$ .
- Si on se place dans le disque de Poincaré, notre équation différentielle stochastique se réécrit

$$d\tilde{B} = \frac{1}{2} (1 - |\tilde{B}|^2) dZ$$

Ce qui se retrouve en utilisant l'isométrie  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{U}, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ .

En prenant  $\mathcal{B}(0) = i$  (qui est la convention qu'on adoptera à partir de maintenant), l'équation différentielle stochastique de la définition 20 se résout en :

$$\Im \mathcal{B}(t) = e^{\Im Z(t)-t/2}, \quad \Re \mathcal{B}(t) = \int_0^t e^{\Im Z(s)-s/2} d\Re Z(s)$$

## 6 Opérateur de Dirac et carrousel brownien

A un chemin  $x + iy : [0, T[ \rightarrow \mathbb{H}$  et une fonction  $f : [0, T[ \rightarrow ]0, \infty[$ , on associe la matrice  $R(t)$  suivante (qui est la représentation définie positive de  $x + iy$  multipliée par  $f$ ) :

$$R = \frac{f}{y} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -x & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

En rajoutant les conditions aux bords  $u_0$  et  $u_1$ , on construit un opérateur de Dirac  $\tau$  qu'on note  $\text{Dir}(x + iy, u_0, u_1, f)$ . On omettra  $f$  si elle est constante égale à  $\frac{1}{2}$  :  $\text{Dir}(x + iy, u_0, u_1) = \text{Dir}(x + iy, u_0, u_1, \frac{1}{2})$ .

Pour remettre dans leur contexte les prochains théorèmes, on énonce un certain nombre de résultats que l'on ne montrera pas.

Killip et Stoiciu (2009) ont montré que si  $\Lambda_{n,\beta}$  est le processus ponctuel de loi

$$\frac{1}{Z_{n,\beta}} \prod_{1 \leq j < k \leq n} |e^{i\lambda_j} - e^{i\lambda_k}|^\beta$$

Alors  $n\Lambda_{n,\beta}$  converge vers un processus ponctuel. En fait, l'ensemble  $n\Lambda_{n,\beta} + 2\pi n\mathbb{Z}$  peut être obtenu comme spectre d'un opérateur de Dirac. Donc les pas de cette marche aléatoire sont invariants par rotation, indépendants et converge quand  $n$  tend vers l'infini vers un mouvement brownien (à changement de variable près).

Ces résultats nous mènent à penser que la limite de  $n\Lambda_{n,\beta}$  peut être obtenue comme spectre d'un opérateur de Dirac dont le chemin est donné par un mouvement brownien.

### 6.1 $\beta$ -ensemble gaussien et processus $\text{Sine}_\beta$

On appelle matrice gaussienne aléatoire et unitaire une matrice de la forme  $\frac{1}{\sqrt{2}}(A + A^*)$  où  $A$  est une matrice  $n \times n$  dont les coefficients sont des variables aléatoires gaussiennes iid (réelles où complexes). La matrice ainsi construite à  $n$  valeurs propres dont la loi de densité est donnée par :

$$\frac{1}{Z_{n,\beta}} \prod_{1 \leq j < k \leq n} |\lambda_j - \lambda_k|^\beta e^{-\frac{\beta}{4} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \quad (\dagger)$$

où  $\beta = 1$  dans le cas réel, 2 dans le cas complexe (et 4 dans le cas des quaternions). On appelle cette distribution  $\beta$ -ensemble gaussien. A part dans les cas 1, 2 et 4, on ne connaît pas de modèle matriciel pour ces distributions. On peut cependant construire une matrice tridiagonale ayant cette distribution de valeurs propres.

Quand  $n \rightarrow \infty$ , le support de  $\dagger$  est asymptotiquement  $[-2\sqrt{n}, 2\sqrt{n}]$ , plus fortement, si on dilate par  $n^{-\frac{1}{2}}$  il existe presque sûrement une limite (demicercle de Wigner), dont la loi de distribution est  $\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}$ . Pour  $|E| < 2$  un point dans le support de cette limite, en dilatant le  $\beta$ -ensemble autour de  $\sqrt{n}E$  par un facteur  $\sqrt{4-E^2}\sqrt{n}$ , on s'attend à obtenir un processus ponctuel de densité asymptotique  $\frac{1}{2\pi}$ . Ce résultat a été montré pour les cas 1, 2 et 4 par Gaudin, Mehta et Dyson.

Pour le cas général  $\beta$ , on a le résultat suivant :

**Théorème 22.** (*Valkò et Viràg (2009)*) *Pour  $\beta > 0$  et  $|E| < 2$  fixés, soit  $\Lambda_n$  un processus ponctuel de densité  $\dagger$ . Alors  $\sqrt{4-E^2}\sqrt{n}(\Lambda_n - \sqrt{n}E)$  converge en densité vers un processus ponctuel qu'on note  $\text{Sine}_\beta$ .*

Le but du prochain théorème est de montrer que le processus  $\text{Sine}_\beta$  peut être obtenu comme un carrousel hyperbolique provenant d'un mouvement brownien dont l'échelle de temps a été changée. On introduit le changement de temps :

$$v(t) = -\log(1-t)$$

Soit  $\mathcal{B}_t$  un mouvement brownien de variance  $4/\beta$  et  $\eta_0 \in \partial\mathbb{H}$  un point fixé déterministe. On considère le carrousel hyperbolique partant de  $\eta_0$  de chemin  $\mathcal{B}_{v(t)}$ ,  $t \in [0, 1[$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  fixé, soit  $\alpha_\lambda(t)$ , soit  $\alpha_\lambda(t)$  le relèvement continu dans  $\mathbb{R}$  de l'angle entre  $\eta_0, \mathcal{B}_{v(t)}$  et  $r_\lambda(t)$ .

**Théorème 23.** (*Valkò et Viràg (2009)*) *Pour presque tout  $\lambda$ ,  $\alpha_\lambda(1) = \lim_{t \rightarrow 1} \alpha_\lambda(t)$  existe et est dans  $2\pi\mathbb{Z}$ , et la version continue à droite de  $\alpha_\lambda(1)/(2\pi)$  est la fonction de compte du processus  $\text{Sine}_\beta$ .*

## 6.2 L'opérateur $\text{Sine}_\beta$

On construit ici l'opérateur de Dirac  $\mathbf{Sine}_\beta$  dont le spectre est le processus ponctuel  $\text{Sine}_\beta$ .

**Théorème 24.** *Soit  $\beta > 0$  fixé. Soit  $x + iy$  un mouvement brownien hyperbolique de variance  $4/\beta$  partant de  $i$ , soit  $q = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ , on pose  $\tilde{x} = x \circ v$  et  $\tilde{y} = y \circ v$ . L'opérateur :*

$$\mathbf{Sine}_\beta = \text{Dir}(\tilde{x} + i\tilde{y}, \infty, q)$$

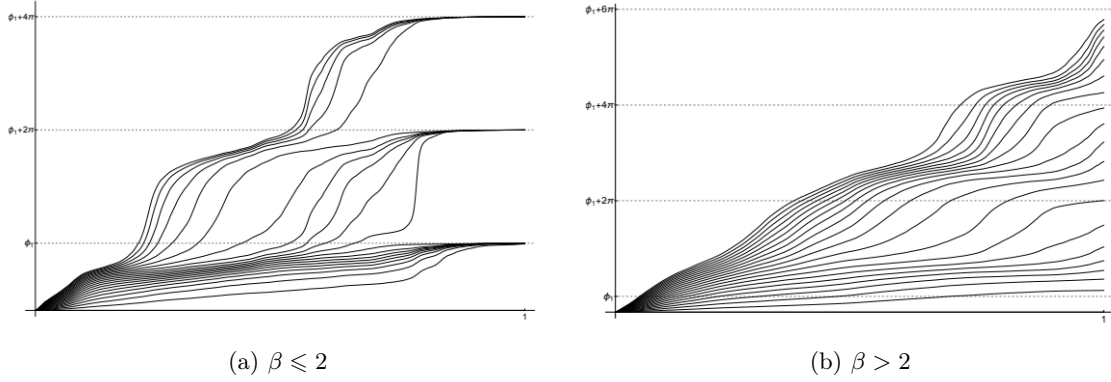
*est auto-adjoint sur le domaine défini en partie 2. Il est LC pour  $\beta > 2$  et LP pour  $\beta \leq 2$ . Son inverse est presque sûrement Hilbert-Schmidt.*

*Démonstration.* On a

$$R = \frac{1}{2\tilde{y}} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{x} \\ -\tilde{x} & \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \end{pmatrix}$$

Donc  $R(t)$  est définie positive pour tout  $t$ , et comme  $\tilde{x} + i\tilde{y}$  est localement borné dans  $\mathbb{H}$ ,  $R$  est mesurable et  $\|R\|$  et  $\|R^{-1}\|$  sont localement bornées sur  $[0, T[$ .

FIGURE 3 – Exemple de fonction de phase de  $\mathbf{Sine}_\beta$  pour différents  $\lambda$ .



Pour être dans le cadre que l'on a fixé il nous reste donc à montrer qu'il existe un vecteur  $u_*$  tel que  $u_* \in L_R^2$ .

On pose  $u_0 = (-1, 0)^t$  et  $u_1 = (1, q^{-1})^t$ , on a :

$$\int_0^1 u_1^t R(s) u_1 ds = \int_0^1 \frac{(q - \tilde{x}(s))^2 + \tilde{y}(s)^2}{2\tilde{y}(s)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-s} \left( \frac{(q - x(s))^2}{y(s)} + y(s) \right) ds$$

D'après la partie précédente sur le mouvement brownien, on peut écrire :

$$y(t) = e^{\sigma W_1(t) - \sigma^2 t/2}, \quad x(t) = \sigma \int_0^t e^{\sigma W_1(s) - \sigma^2 s/2} dW_2$$

où  $W_1$  et  $W_2$  sont des mouvements brownien indépendants de variance 1 et  $\sigma^2 = 4/\beta$ . Le processus  $(q - x(t))$  a la même distribution que  $\sigma W \left( \int_t^\infty e^{\sigma W_1(s) - \sigma^2 s/2} ds \right)$  où  $W$  est un mouvement brownien de variance 1 indépendant de  $W_1$ .

Pour tout  $\delta > 0$ , un mouvement brownien de variance 1 vérifie :

$$\forall t > 1, B(t) \leq Ct^{1/2+\delta}$$

où  $C$  est une constante. Dès lors en réinjectant dans nos expressions pour  $x$  et  $y$ , pour  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C$  telle que presque sûrement :

$$C^{-1} e^{-(\frac{2}{\beta} + \varepsilon)t} \leq y(t) \leq C e^{-(\frac{2}{\beta} - \varepsilon)t}, \quad |q - x(t)| \leq C e^{-(\frac{2}{\beta} - \varepsilon)t}$$

Donc :

$$\int_0^1 u_1^t R(s) u_1 ds \leq \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-s} \left( C^3 e^{-(\frac{2}{\beta} - 3\varepsilon)s} + C e^{-(\frac{2}{\beta} - \varepsilon)s} \right) ds$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit, le terme de droite est fini, donc  $u_1 \in L_R^2$  presque sûrement,  $u_1$  convient comme choix de  $u_*$ .

Pour savoir si on est dans le cas LP où LC, il faut vérifier si  $\int_0^1 u^t R u < \infty$  où non pour un vecteur  $u$  non parallèle à  $u_1$ . On prend  $u = (1, 0)^t$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^t R u &= \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{y}(s)^{-1} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-s} y(s)^{-1} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{2}{\sqrt{\beta}} W_1(s) + (\frac{2}{\beta} - 1)s} ds \end{aligned}$$

qui est presque sûrement fini si  $\beta > 2$  (donc l'opérateur est LC dans ce cas) et presque sûrement infini si  $\beta \leq 2$  (le cas LP).

Reste à montrer que l'inverse de l'opérateur est presque sûrement Hilbert-Schmidt.

Pour ce faire, on doit montrer que l'intégrale du théorème 10 converge. En utilisant les bornes sur  $x$  et  $y$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^t u_0^t R(s) u_0 u_1^t R(t) u_1 ds dt &= \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^t e^{-(s+t)} \frac{1}{y(s)} \left( \frac{(q - x(t))^2}{y(t)} + y(t) \right) ds dt \\ &\leq C_1 \int_0^\infty \int_0^t e^{-(s+t) + (\frac{2}{\beta} + \varepsilon)s - (\frac{2}{\beta} - 3\varepsilon)t} ds dt \end{aligned}$$

qui est fini pour  $\varepsilon > 0$  assez petit. □

Le théorème 24 décrit l'opérateur  $\mathbf{Sine}_\beta$  grâce au mouvement brownien hyperbolique dans le demi plan  $\mathbb{H}$ . En utilisant la transformation de Cayley entre le demi plan et le disque de Poincaré, on décrit un opérateur  $\widetilde{\mathbf{Sine}}_\beta = \tilde{U} \circ \mathbf{Sine}_\beta \circ \tilde{U}^{-1}$ , où  $\tilde{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$  est la matrice de la transformation de Cayley. L'opérateur qu'on obtient ainsi s'écrit :

$$\widetilde{\mathbf{Sine}}_\beta u = \frac{2}{(1 - |b(t)|)^2} \begin{pmatrix} 1 + |b(t)|^2 & 2b(t) \\ 2\bar{b}(t) & 1 + |b(t)|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} u'$$

Avec  $b$  un mouvement brownien de variance  $4/\beta$  dans le disque de Poincaré après changement de variable  $v(t)$ . On note qu'ici,  $u$  est de  $[0, 1[$  dans  $\mathbb{C}^2$ .

Le théorème qui suit donne le lien entre le processus  $\mathbf{Sine}_\beta$  et l'opérateur  $\mathbf{Sine}_\beta$ .

**Théorème 25.** *Pour  $\beta > 0$  fixé, le spectre de l'opérateur  $\mathbf{Sine}_\beta$  a la même distribution que le processus  $\mathbf{Sine}_\beta$ .*

*Démonstration.* Par le théorème 24, le spectre de  $\mathbf{Sine}_\beta$  est presque sûrement un processus ponctuel simple.

On a montré dans la partie sur la fonction de phase que sa fonction de compte est la fonction prolongée par continuité à droite de  $\lambda \mapsto \text{sign}(\lambda) \cdot |\{t \in ]0, 1[ : r_\lambda(t) = q\}|$  où  $r_\lambda(t)$  est le point de  $\partial\mathbb{H}$  qui bouge dans le carrousel décrit par l'EDO :

$$r'_\lambda(t) = \lambda \frac{\tilde{y}(t)^2 + (r_\lambda(t) - \tilde{x}(t))^2}{2\tilde{y}(t)}, \quad r_\lambda(0) = -\infty$$

En reprenant les notations du théorème 23, soit  $\tilde{x} + i\tilde{y} = \mathcal{B}_{v(t)}$  dans le demi plan. L'angle  $\alpha_\lambda$  entre les points  $\infty$ ,  $\mathcal{B}_{v(t)}$  et  $r_\lambda(t)$  vérifie :

$$\cot\left(\frac{\alpha_\lambda(t)}{2}\right) = \frac{\tilde{x}(t) - r_\lambda(t)}{\tilde{y}(t)} \quad (\dagger\dagger)$$

Il suffit donc de montrer que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a presque sûrement :

$$\text{sign}(\lambda) \cdot |\{t \in ]0, 1[ : r_\lambda(t) = q\}| = \frac{\alpha_\lambda(1)}{2\pi}$$

On montre ce résultat pour  $\lambda > 0$  (l'autre cas étant similaire), et on sépare selon si l'opérateur est LP ou LC (c'est-à-dire si  $\beta \leq 2$  ou  $\beta > 2$ ).

Si  $\beta \leq 2$ , **Sine** $_\beta$  est LP donc par le théorème 16,  $\lim_{t \rightarrow 1} r_\lambda(t) = q$ , de plus comme  $\lambda > 0$ ,  $r_\lambda$  est strictement croissante (en  $t$ ) entre les points où elle vaut  $\infty$  et est continue comme fonction dans  $\partial\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ . Donc :

$$|\{t \in ]0, 1[ : r_\lambda(t) = q\}| = |\{t \in ]0, 1[ : r_\lambda(t) = \infty\}|$$

Et par ( $\dagger\dagger$ ),  $r_\lambda(t) = \infty$  si et seulement si  $\alpha_\lambda(t)$  est un multiple de  $2\pi$ . De plus, Valkò et Virág ont montré (2009) que pour  $\beta \leq 2$ ,  $t \mapsto \alpha_\lambda(t)$  converge vers sa limite par au dessus et que  $\alpha_\lambda(t)$  ne peut pas être inférieur à  $2\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) dès lors qu'il atteint cette valeur. Ainsi :

$$\text{sign}(\lambda) \cdot |\{t \in ]0, 1[ : r_\lambda(t) = q\}| = \frac{\alpha_\lambda(1)}{2\pi}$$

Passons maintenant au cas  $\beta < 2$  :

Dans ce cas, l'opérateur est LC donc par le théorème 16,  $r_\lambda(1) = \lim_{t \rightarrow 1} r_\lambda(t)$  existe et la fonction  $\lambda \mapsto r_\lambda(1)$  est continue et strictement croissante. Si  $\lambda$  n'est pas une valeur propre de l'opérateur, alors  $r_\lambda(1)$  n'est pas égal à  $q$ . Si  $r_\lambda(1) < q$ ,  $t \mapsto r_\lambda(t)$  atteint autant de fois  $q$  que  $\infty$ . Par ( $\dagger\dagger$ ),  $\alpha_\lambda(t)$  converge vers un multiple de  $2\pi$  par au dessus, donc le nombre de fois que  $r_\lambda$  atteint  $\infty$  est égal à la limite  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \alpha_\lambda(t)$ .

Si au contraire  $r_\lambda(1) > q$ ,  $t \mapsto r_\lambda(t)$  atteint autant de fois  $q$  que le nombre de fois où elle atteint  $\infty$  plus 1. Mais  $\alpha_\lambda(t)$  converge vers un multiple de  $2\pi$  par en dessous, donc le nombre de fois où  $r_\lambda(t)$  atteint  $\infty$  est  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \alpha_\lambda(t) - 1$ . On a donc bien que :

$$\text{sign}(\lambda) \cdot |\{t \in ]0, 1[ : r_\lambda(t) = q\}| = \frac{\alpha_\lambda(1)}{2\pi}$$

□

## 7 Conclusion

On a construit dans ce mémoire l'opérateur aléatoire **Sine** $_\beta$  dont le spectre est le processus ponctuel **Sine** $_\beta$ , et on en a donné une interprétation graphique par le carrousel hyperbolique. Valkó et Virág présentent comment adapter cette construction pour créer d'autres ensembles aléatoires, par exemple en considérant des marches aléatoires au lieu du mouvement brownien pour obtenir des ensembles circulaires.

## 8 Bibliographie

- Valkó B. and Virág B. (2016) *The Sine $_{\beta}$  operator*
- Valkó B. and Virág B. (2016) *Continuum limits of random matrices and the Brownian carousel*
- Weidmann J. (1987) *Spectral theory of ordinary differential operators*
- Stolz, G. and Weidmann J. (1993) *Approximation of isolated eigenvalues of ordinary differential operators*
- Killip, R. and Stoiciu, M. (2009) *Eigenvalue statistics for CMV matrices : from Poisson to clock via random matrix ensembles*
- Forrester, P. J. (2010) *Log-gases and random matrices, Vol. 34 of London Mathematical Society Monographs Series*
- Anderson, G., Guionnet, A. and Zeitouni, O. (2009) *Introduction to random matrices*
- Franchi, J. and Le Jan, Y. (2012) *Hyperbolic dynamics and Brownian motion*
- Dereudre, D. , Hardy, A. , Leblé, T. and Maïda, M. (2018) *DLR equations and rigidity for the Sine-beta process*