

Propriétés évasives et conjecture de Aanderaa - Karp - Rosenberg

Mémoire de première année

Suzanne Mairesse et Émilie Zheng

Encadré par Vadim Lebovici et Stefan Ludwig

2022 - 2023

Une collection \mathcal{G} de graphes à n sommets est une propriété de graphe si elle est stable par isomorphisme. Celle-ci est dite **monotone** si elle est stable par ajout d'arêtes, et **évasive** si pour toute stratégie d'exploration des arêtes une après l'autre, il existe un graphe dont l'appartenance à \mathcal{G} n'est claire qu'après avoir pris connaissance de toutes les arêtes possibles. Le but de ce mémoire est d'étudier la conjecture de Aanderaa-Karp-Rosenberg :

Toutes les propriétés de graphe monotones sont évasives.

Plus précisément, on étudiera en détail certaines avancées faites sur la conjecture ainsi que les outils topologiques puissants à la base de celles-ci : on exposera la preuve de la conjecture pour les graphes ayant une puissance d'un nombre premier de sommets donnée par Kahn, Saks et Sturtevant ([3]), ainsi que la preuve de Yao ([5]) pour les graphes bipartis.

1 Introduction à la notion d'évasivité

Nous étudions des fonctions $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$. On connaît parfaitement f et on imagine qu'une personne en face de nous possède un n -uplet $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\{0,1\}^n$. On veut déterminer $f(x)$. Pour ce faire, on demande à notre camarade la valeur d'un des x_i jusqu'à ce qu'on ait assez d'information sur son n -uplet pour connaître avec certitude la valeur de $f(x)$. Cela se fait en au plus n requêtes. Supposons maintenant que la personne face à nous est un adversaire dont le but est que nous posions le plus de questions pour déterminer la bonne valeur. Cette fois-ci, il n'a plus de n -uplet fixé mais adapte ses réponses en fonction de nos questions, pour trouver le n -uplet qui nous posera le plus problèmes. Dire qu'une fonction est évasive, c'est dire que notre adversaire pourra toujours s'arranger pour nous obliger à poser n questions.

1.1 Définitions et exemples

La notion d'évasivité étant un peu vague, on peut la définir formellement avec les **arbres de décision**.

Définition 1.1 (Arbre de décision). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ une fonction. On considère un arbre binaire dont les nœuds internes sont étiquetés par des entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'arête allant vers le fils droit est étiquetée par 1 et celle allant vers le fils gauche par 0, et les feuilles sont étiquetées par 0 ou 1. Celui-ci est un arbre de décision de f si il vérifie les propriétés suivantes. Soit $(i_1, \epsilon_1, \dots, i_r, \epsilon_r, \epsilon)$ une branche allant de la racine jusqu'à une feuille de l'arbre, où i_j est l'étiquette du j -ième nœud, ϵ_j l'étiquette de l'arête allant de i_j à i_{j+1} , et ϵ l'étiquette de la feuille, alors chaque valeur i_j , $1 \leq j \leq r$ apparaît au plus une seule fois. De plus, pour tout n -uplet $x = (x_1, \dots, x_n)$ tel que $x_{i_j} = \epsilon_j$, $1 \leq j \leq r$, on a $f(x) = \epsilon$.

Intuitivement, un nœud interne correspond à une requête : pour un nœud étiqueté par i , on demande la valeur prise par x_i . L'étiquette de la branche est la valeur prise par x_i , où i est l'étiquette du nœud duquel sort celle-ci. L'étiquette d'une feuille correspond alors à la valeur de f sur les n -uplets lus sur les branches du chemin de la racine à la feuille.

On remarque qu'un arbre de décision pour $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ est de hauteur au plus n .

Cette définition nous permet de formaliser la définition d'évasivité :

Définition 1.2 (Evasivité). Une fonction $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ est dite évasive si tous ses arbres de décision sont de hauteur exactement n .

Un graphe avec n sommets peut être vu comme un élément de $\{0,1\}^{n(n-1)}$: on numérote les sommets de 1 à n , et on note (i,j) l'arête entre les sommets i et j . Un $n(n-1)$ -uplet $(x_{(1,2)}, \dots, x_{(n-1,n)})$ représente un graphe qui contient exactement les arêtes (i,j) telles que $x_{(i,j)} = 1$. Comme on ne regarde

que des graphes non orientés, on peut en fait se restreindre à un élément de $\{0, 1\}^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Une collection de graphe peut alors être vue comme une fonction $f : \{0, 1\}^{\frac{n(n-1)}{2}} \rightarrow \{0, 1\}$, où $f(g) = 1$ si et seulement si le graphe g est dans la collection.

Définition 1.3 (Propriété de graphe). Soit $f : \{0, 1\}^{\frac{(n-1)n}{2}} \rightarrow \{0, 1\}$. f est une propriété de graphe si :

$$\forall \Pi \in \mathfrak{S}_n, f(x_{(1,2)}, \dots, x_{(n-1,n)}) = f(x_{(\Pi(1),\Pi(2))}, \dots, x_{(\Pi(n-1),\Pi(n))})$$

où \mathfrak{S}_n désigne le groupe symétrique d'indice n (les permutations de n éléments).

Intuitivement, une fonction $f : \{0, 1\}^{\frac{(n-1)n}{2}} \rightarrow \{0, 1\}$ est une propriété de graphe si elle est invariante par permutation des sommets, donc si la numérotation des sommets n'importe pas.

Définition 1.4 (Propriété non triviale). Une propriété de graphe est dite non triviale si elle n'est ni vide ni l'ensemble des graphes à n sommets tout entier.

Définition 1.5 (Propriété monotone). Une propriété de graphe \mathcal{G} est dite monotone si étant donné un graphe $g \in \mathcal{G}$, tout graphe obtenu en rajoutant des arêtes à g est également dans \mathcal{G} .

Donnons quelques exemples pour mieux comprendre ces définitions.

Exemple 1.6 (Une fonction clairement évasive). Une propriété de graphe est : “le graphe est complet”. Cette propriété est clairement évasive, car peu importe l'ordre dans lequel on choisit de demander si les arêtes sont dans le graphe, tant que toutes les questions ne sont pas posées, il suffit de prendre le graphe ayant toutes les arêtes demandées mais pas la dernière, et il est impossible de différencier celui-ci du graphe complet.

Ensuite, regardons une fonction qui est moins évidemment évasive.

Exemple 1.7 (Connexité). La connexité est une propriété évasive. Pour le montrer, on va utiliser l'argument de l'adversaire malicieux. On simule le parcours d'un arbre de décision en imaginant qu'un malin génie répond à nos questions (“est-ce que l'arête (i, j) est dans le graphe ?”), et que celui-ci répondrait de la manière la plus malicieuse possible, c'est-à-dire de manière à toujours laisser le plus de doute possible quand à la valeur de la fonction. Pour l'exemple ici, le génie répond toujours “non” si cette réponse n'assure pas que le graphe est non connexe, et “oui” sinon. Si on connaît la réponse avant d'avoir posé toutes les questions, celle-ci est forcément “oui” car le génie répond de sorte à ce que la réponse ne soit jamais “non” avant la dernière question, donc les arêtes dont on connaît déjà l'existence forment un graphe connexe. Si on appelle (i, j) une des arêtes sur lesquelles aucune question n'avait été posé, il y a un chemin de i à

j dans les arêtes qui sont forcément dans le graphe. En retirant une arête de ce chemin et en ajoutant l'arête (i, j) , le graphe est toujours connexe, donc le génie aurait pu répondre "non" à la question concernant cette arête, ce qui est absurde.

On remarque que les deux propriétés présentées ci-dessus sont monotones. La plupart des propriétés de graphes non triviales auxquelles nous pensons sont évanescentes, nous présentons ci-dessous un exemple de propriété non-évasive :

Exemple 1.8 (Les graphes scorpions). *Un graphe scorpion est un graphe à n sommets avec $n \geq 3$ tel que l'on puisse distinguer trois sommets - la tête, le corps et la queue, les autres sommets sont appelés les pattes - qui respectent les conditions suivantes :*

- La tête a pour unique voisin le corps.
 - Le corps a deux voisins : la tête et la queue.
 - La queue est voisine avec le corps ainsi qu'avec toutes les pattes.
- Le graphe restreint aux pattes est quelconque.*

Nous allons exposer une stratégie pour déterminer si un graphe est scorpion sans avoir à examiner chaque arête. On supposera n assez grand (en pratique, $n > 6$ suffit).

La première étape consiste à choisir un sommet v aléatoirement et regarder tous ses voisins (donc en $n - 1$ requêtes).

- (Cas 1) *Si v n'a aucun voisin, ou est voisin avec tout le monde, le graphe ne peut pas être scorpion, on s'arrête.*
- (Cas 2) *Si v a $n - 2$ voisins, à supposer que le graphe soit scorpion, v devrait être la queue. Il faut alors vérifier que l'unique sommet w qui n'est pas voisin de v n'a qu'un seul voisin u , et que ce voisin u n'est voisin qu'avec v et w . Si c'est bien le cas, le graphe est un graphe scorpion, et sinon non. Dans tous les cas, il existe au moins deux autres sommets dont on n'aura pas eu à vérifier s'ils sont voisins ou non.*
- (Cas 3) *Si v n'a qu'un voisin w , à supposer que le graphe soit scorpion, il peut s'agir soit de la tête, soit d'une patte. On demande alors tous les voisins de ce voisin w .*
 - *Si w a $n - 2$ voisins, alors on est ramené au cas 2, le nombre suffisant de sommets ($n > 6$) nous permettant d'avoir la même conclusion.*
 - *Si w a deux voisins, w ne peut être que le corps tandis que v est la tête. On vérifie alors que u le second voisin de w est bien voisin de tous les sommets mis à part v . Si c'est le cas, il s'agit d'un graphe scorpion, sinon non. Dans tous les cas il existe au moins deux autres sommets dont on n'aura pas eu à vérifier s'ils sont voisins ou non.*
- *Si v a deux voisins, il peut s'agir soit d'une patte soit du corps. Dans les deux cas, l'un des deux voisins devrait être la queue. On vérifie donc tous*

les voisins de ces deux voisins. L'un des deux devrait en avoir $n-2$, sinon le graphe n'est pas scorpion. On est alors ramenés au cas 2, le nombre suffisant de sommets nous permettant d'avoir la même conclusion.

- Si v a au moins trois voisins et au plus $n-3$, il devrait s'agir d'une patte. On rechoisis alors un sommet qui n'est ni v ni un de ses voisins, et on explore tous ses voisins. On continue ainsi nos explorations jusqu'à tomber sur un sommet n'ayant qu'un voisin (toujours en s'interdisant de choisir v , ses voisins, les sommets déjà entièrement explorés, mais on peut cette fois prendre des voisins de sommets déjà explorés si c'est pertinent), ce qui est possible si le graphe est scorpion car la tête ne peut pas être voisine de v , celui-ci étant forcément une patte. On fait alors le cas 3. Si on ne trouve pas de tel sommet, le graphe n'est pas scorpion. Dans tous les cas, il existe au moins deux voisins de v dont on n'a pas eu à vérifier qu'ils étaient voisins.

1.2 La conjecture de Anderaa-Karp-Rosenberg

Tout l'objet de ce mémoire sera d'étudier la conjecture suivante :

Conjecture 1.9 (Conjecture de Anderaa-Karp-Rosenberg (AKR)).
Les propriétés de graphes non triviales et monotones sont des fonctions évatives.

Dans la suite de ce paragraphe, on montrera quelques résultats sur les fonctions prenant un nombre premier de variables.

Un outil fort utile est la fonction μ :

Définition 1.10 (Fonction μ). Soit $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction, on définit

$$\mu(f) = \sum_{x: f(x)=1} (-1)^{|x|}$$

Où $|x|$ est le nombre de 1 dans le n -uplet x .

Définition 1.11 (Fonction faiblement symétrique). Une fonction $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ est dite faiblement symétrique s'il existe Γ un sous-groupe transitif de \mathfrak{S}_n (i.e pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on a $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(i) = j$) tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\gamma(1)}, \dots, x_{\gamma(n)})$.

Lemme 1.12. Soit $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$. Si $\mu(f) \neq 0$, alors f est évative.

Démonstration. Montrons le par récurrence sur n :

Si $n = 1$, $\mu(f) = f(0) - f(1)$. Si $\mu(f) \neq 0$, alors f n'est pas constante donc est évative.

Supposons la propriété vraie pour $n - 1$ et prenons $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ telle que $\mu(f) \neq 0$. Alors, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\mu(f) = \sum_x (-1)^{|x|} f(x) = \sum_{x, x_i=1} (-1)^{|x|} f(x) + \sum_{x, x_i=0} (-1)^{|x|} f(x)$$

Pour $\epsilon \in \{0, 1\}$, posons

$$f_{|x_i=\epsilon} : \begin{array}{ccc} \{0, 1\}^{n-1} & \longrightarrow & \{0, 1\} \\ (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_{i-1}, \epsilon, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{array}$$

Avec ces notations,

$$\mu(f) = \mu(f_{|x_i=0}) - \mu(f_{|x_i=1})$$

Et comme $\mu(f) \neq 0$, on a $\mu(f_{|x_i=0}) \neq \mu(f_{|x_i=1})$ donc au moins l'une de ces deux valeurs — disons $\mu(f_{|x_i=0})$ — est différente de 0. Ainsi, par hypothèse de récurrence, $f_{|x_i=0}$ est évasive.

Considérons maintenant A un arbre de décision de f dont la racine est indexée par x_i . Alors, le fils gauche de cet arbre est un arbre de décision de $f_{|x_i=0}$, donc est de profondeur maximale. Ainsi, A est de profondeur maximale. Le résultat précédant étant vrai pour tout $1 \leq i \leq n$, tous les arbres de décision de f sont de profondeur maximale, donc f est évasive. \square

Ce lemme nous permet de montrer le joli résultat suivant :

Théorème 1.13. *Soit n un nombre premier et $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction faiblement symétrique. On note 0^n le n -uplet de 0, et 1^n le n -uplet de 1. On suppose que $f(0^n) \neq f(1^n)$. Alors, la fonction f est évasive.*

Démonstration. On va montrer que $\mu(f) \neq 0$.

Comme f est faiblement symétrique, on a Γ un sous-groupe transitif de \mathfrak{S}_n qui laisse f invariante. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $U_i = \{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma(1) = i \}$. Par transitivité de Γ , on a $\gamma_i \in \Gamma$ tel que $\gamma_i(1) = i$. Ainsi,

$$\Phi_i : \begin{array}{ccc} U_1 & \longrightarrow & U_i \\ \sigma & \longmapsto & \gamma_i \circ \sigma \end{array}$$

est une bijection entre U_1 et U_i . Tous les U_k , $1 \leq k \leq n$ ont donc le même cardinal, donc n divise $|\Gamma|$. Comme n est premier, le théorème de Cauchy assure que Γ possède un élément d'ordre n , qui est forcément un cycle contenant tous les éléments. Notons c ce cycle.

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$, la stabilité de f par Γ nous assure que $f(x) = f(x_c)$, où $x_c = (x_{c(1)}, \dots, x_{c(n)})$. On note $\langle c \rangle$ le sous-groupe de \mathfrak{S}_n engendré par c . En considérant l'action de $\langle c \rangle$ sur $\{0, 1\}^n$ donnée par $c \cdot x = (x_{c(1)}, \dots, x_{c(n)}) = x_c$, on peut partitionner $\{0, 1\}^n$ selon les orbites de l'action du groupe $\langle c \rangle$ sur $\{0, 1\}^n$. Alors toute classe ne contenant pas 0^n ou 1^n est de cardinal strictement supérieur à 1. En effet, soit (x_1, \dots, x_n) un représentant d'une telle classe, il existe $1 < i \leq n$ tel que $x_i \neq x_1$, et donc comme il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $c^k(i) = 1$,

$c^k(x_1, \dots, x_n) \neq (x_1, \dots, x_n)$. Dès lors, n étant premier, une classe de cette partition est de cardinal divisant celui de $\langle c \rangle$, donc de cardinal n s'il ne s'agit pas de la classe de 0^n ou 1^n (qui sont elles de cardinal 1). Ainsi, comme f est constante sur les classes d'équivalence, et que le nombre de coordonnées égales à 1 est constant sur les classes d'équivalence, on a finalement

$$\mu(f) \equiv f(0^n) + (-1)^n f(1^n) \not\equiv 0 \pmod{n}$$

car $f(0^n) \neq f(1^n)$. Ainsi, on a $\mu(f) \neq 0$, donc f est évasive. \square

On veut généraliser le résultat à n égal à une puissance d'un nombre premier. Pour cela, on utilise le lemme suivant :

Lemme 1.14. *Si Γ est un sous-groupe transitif de \mathfrak{S}_n , alors il existe Γ' un p -sylow de Γ qui est aussi transitif.*

Démonstration. Soit Γ' un p -Sylow de Γ . On note p^k son cardinal. On regarde l'action naturelle de Γ et Γ' sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ et on note Stab_1 le stabilisateur de 1 dans Γ , et Stab'_1 le stabilisateur de 1 dans Γ' . Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera $v_p(n)$ la valuation p -adique de n , soit la plus grande puissance de p divisant n .

Comme Γ est transitif, on a que $n = \frac{\text{Card}(\Gamma)}{\text{Card}(\text{Stab}_1)}$ = cardinal de l'orbite de 1 sous l'action de Γ . On note m le cardinal de l'orbite de 1 sous l'action de Γ' .

De plus, par la définition d'un p -sylow, $v_p(\text{Card}(\Gamma)) = v_p(\text{Card}(\Gamma'))$. Comme Stab'_1 est un sous-groupe de Stab_1 , on a par le théorème de Lagrange que $v_p(\text{Card}(\text{Stab}'_1)) \leq v_p(\text{Card}(\text{Stab}_1))$. On en déduit alors :

$$v_p\left(\frac{\text{Card}(\Gamma')}{\text{Card}(\text{Stab}'_1)}\right) = v_p(\text{Card}(\Gamma')) - v_p(\text{Card}(\text{Stab}'_1)) \geq v_p\left(\frac{\text{Card}(\Gamma)}{\text{Card}(\text{Stab}_1)}\right)$$

Donc $m \geq n$, mais on a aussi $m \leq n$, donc $m = n$, ce qui montre que Γ' est transitif. \square

Théorème 1.15 (Généralisation). *Le résultat précédent reste vrai si n est une puissance d'un nombre premier.*

Démonstration. On suppose désormais que $n = p^\alpha$ est une puissance de p premier. Avec le Lemme 1.14, on peut calquer la preuve précédente et conclure la preuve du théorème 1.11. En effet, on sait qu'il existe un sous-groupe transitif Γ de \mathfrak{S}_n qui laisse f invariante. Par l'équation aux classes, $n = p^\alpha$ divise son cardinal. Par le lemme, Γ admet un sous-groupe Γ' transitif et de cardinal une puissance de p plus grande que n . Toutes les orbites de l'action de Γ' seront alors d'un cardinal qui divise $\text{Card}(\Gamma')$ et > 1 par les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 1.10, donc p divise les cardinaux de toutes les orbites sauf celles de 0^n et 1^n . On conclut de la même manière que dans le théorème 1.10. \square

2 Complexes simpliciaux et fonctions monotones

Bien que les objets considérés dans la conjecture soient combinatoires, la combinatoire ne nous permet pas d'aller assez loin. Nous allons montrer que l'étude des outils topologiques que sont les complexes simpliciaux s'avère particulièrement fructueuse. En substance, on va associer un complexe simplicial à chaque propriété de graphe monotone. Dans cette partie, nous verrons comment relier la topologie de ces espaces à la notion d'évasivité. Nous verrons en particulier le théorème de Kahn-Saks-Sturtevant, qui nous servira ensuite dans une dernière partie pour traiter des cas particuliers de la conjecture d'Aanderaa-Karp-Rosenberg.

2.1 Définitions

Nous introduisons et nous familiarisons avec les complexes simpliciaux. Ces derniers peuvent être vus de deux manières différentes : comme un objet combinatoire abstrait, ou comme une réalisation géométrique. Les deux notions sont complémentaires.

Définition 2.1. Soit $n \geq 1$ un entier. Un ensemble E de $n + 1$ points de \mathbb{R}^n est affinement indépendant si les vecteurs $(x_0 - x_{n+1}, \dots, x_n - x_{n+1})$ forment une famille libre.

Il est équivalent de dire que pour tout $e \in E$, on a $e \notin \text{Aff}(E \setminus \{e\})$ où $\text{Aff}(x_1, \dots, x_k) = \{x \mid x = \sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_i x_i \text{ et } \sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_i = 1\}$.

Pour $n = 0$, tout singleton est un ensemble affinement indépendant.

On appelle simplexe de dimension n l'enveloppe convexe de $n + 1$ points affinement indépendants de \mathbb{R}^n .

Définition 2.2 (Complexe simplicial abstrait). Un complexe simplicial abstrait \mathcal{K} est une collection finie non vide d'ensembles telle que : pour tout $X \in \mathcal{K}$, si $Y \subseteq X$, alors $Y \in \mathcal{K}$.

On appellera aussi simplexes les éléments de \mathcal{K} .

Les singletons de \mathcal{K} sont appelés sommets de \mathcal{K} , et leur ensemble est noté $V(\mathcal{K})$.

Notons que la finitude de \mathcal{K} implique la finitude de chacun des ensembles contenus dans \mathcal{K} , ainsi que la finitude de $V(\mathcal{K})$.

À cet objet abstrait, on peut associer une réalisation géométrique dans $\mathbb{R}^{|V(\mathcal{K})|-1}$.

Définition 2.3 (Réalisation géométrique). Pour \mathcal{K} un complexe simplicial abstrait ayant $n = \text{Card}(V(\mathcal{K}))$ sommets, on associe aux sommets de \mathcal{K} des vecteurs de \mathbb{R}^{n-1} affinement indépendants.

Pour un sommet x , on note \hat{x} le vecteur de \mathbb{R}^{n-1} associé.

A un ensemble $S = \{x_1, \dots, x_k\} \in \mathcal{K}$, on lui associe $\hat{S} = \text{Conv}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k)$, où si $X \subseteq \mathbb{R}^n$, la notation $\text{Conv}(X)$ représente l'enveloppe convexe des points de X .

Pour une collection d'ensembles $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$, on pose $\widehat{\mathcal{K}}' = \bigcup_{S \in \mathcal{K}'} \widehat{S}$.

Remarque 2.4. Pour un complexe simplicial \mathcal{K} , il y a une infinité de réalisations géométriques possibles, mais celles-ci sont toutes homéomorphes. Par la suite, on désignera par $\widehat{\mathcal{K}}$ une représentation quelconque de \mathcal{K} sans se soucier des vecteurs choisis.

Remarque 2.5. Soit \mathcal{K} un complexe simplicial et p un point de $\widehat{\mathcal{K}}$. Alors p s'écrit de manière unique comme barycentre des vecteurs associés aux sommets de \mathcal{K} , i. e. il existe une unique famille de réels positifs indexés par $v \in V(\mathcal{K})$ telle que :

$$p = \sum_{v \in V(\mathcal{K})} \lambda_v \cdot \widehat{v}, \text{ et } \sum_{v \in V(\mathcal{K})} \lambda_v = 1$$

On peut alors considérer l'ensemble $\Delta_p = \{v \in V(\mathcal{K}) ; \lambda_v > 0\}$ des sommets de \mathcal{K} apparaissant réellement dans l'écriture de p . C'est un simplexe de \mathcal{K} , et c'est le plus petit simplexe tel que $p \in \widehat{\Delta_p}$. On l'appelle aussi le support de p .

On va maintenant définir deux notions qui nous seront utiles par la suite.

Définition 2.6 ($\mathcal{K} \setminus v$ et \mathcal{K}/v). Soient \mathcal{K} un complexe simplicial, $v \in V(\mathcal{K})$. On note :

$$\mathcal{K} \setminus v = \{S \in \mathcal{K} \mid v \notin S\}$$

$$\mathcal{K}/v = \{S \in \mathcal{K} \mid v \notin S \text{ et } S \cup \{v\} \in \mathcal{K}\}$$

Ce sont également des complexes simpliciaux. \mathcal{K}/v est aussi appelé le lien de v dans \mathcal{K} .

2.2 Complexes contractiles

Nous travaillons ici sur la notion d'espace contractile, qui sera au coeur de nos preuves plus tard.

Définition 2.7 (Contractile). Un espace topologique X est dit contractile s'il est homotopiquement équivalent à un point, c'est-à-dire s'il existe $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ continue, et $x \in X$ tels que

$$\begin{cases} H|_{X \times \{0\}} = id_X \\ H|_{X \times \{1\}} = c_x \end{cases}$$

où $c_x : [0, 1] \rightarrow X$ est la fonction constante égale à x .

Par abus de notation, on dira qu'un complexe simplicial \mathcal{K} est contractile si une de ses réalisations géométriques est contractile.

Un espace est donc contractile s'il peut se déformer continûment sur un point. Par exemple, le plan \mathbb{R}^2 est contractile, en considérant $H : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $H(x, t) = (1 - t)x$.

Exemple 2.8. *Regardons ce qui se passe dans le cas des complexes simpliciaux dont les simplexes contiennent au plus deux sommets. Un tel complexe simplicial \mathcal{K} peut être vu comme un graphe $G_{\mathcal{K}}$ dont les sommets sont $V(\mathcal{K})$, et l'arête (a, b) est dans le graphe si et seulement si le simplexe $\{a, b\} \in \mathcal{K}$. Tout d'abord, il est évident qu'un ensemble contractile est connexe par arcs. Ainsi, pour que \mathcal{K} soit contractile, il faut que $G_{\mathcal{K}}$ soit un graphe connexe. Ensuite, si $G_{\mathcal{K}}$ contient un cycle, \mathcal{K} ne peut pas être contractile.*

Il ne reste que les graphes connexes sans cycle à traiter. Un tel graphe est un arbre, et les arbres sont contractiles : il suffit de faire remonter les feuilles le long de leur branche, et de recommencer ce processus jusqu'à n'avoir plus qu'un point ou un segment, évidemment contractile.

Ainsi, les complexes simpliciaux dont les simplexes contiennent au plus deux sommets sont contractiles si et seulement si ce sont des arbres.

Nous allons introduire quelques notions ainsi qu'un lemme de topologie algébriques qui nous serviront ensuite à démontrer un lemme central dans la preuve du théorème de Kahn-Saks-Sturtevant.

Définition 2.9 (Rétraction, rétract par déformation). *Soit X un espace topologique, et A un sous-espace de X . On dit que A est un rétract par déformation de X s'il existe une application continue $\Phi : X \times [0, 1] \rightarrow X$ appelée rétraction par déformation telle que :*

- Pour tout x dans X , $\Phi(x, 0) = x$ et $\Phi(x, 1) \in A$.
- Pour tout a dans A , pour tout t dans $[0, 1]$, $\Phi(a, t) = a$.

Définition 2.10 (Cône). *Soit X un espace topologique. Le cône de X est l'espace quotient $X \times [0, 1] / X \times \{0\}$ du produit de l'espace X et de l'intervalle $[0, 1]$, où on identifie $X \times \{0\}$ à un point. On munit cet espace de la topologie quotient. On appelle sommet du cône le point $X \times \{0\}$.*

Lemme 2.11. *Soit X un espace topologique et C son cône. Alors, $X \times \{1\}$ est un rétract par déformation du cône C si et seulement si X est contractile.*

Démonstration. On notera pour simplifier X pour parler de $X \times \{1\}$ la base du cône. On note également π la projection de $X \times [0, 1]$ sur C . Par définition de la topologie quotient, π est continue. Nous allons commencer par montrer que si X est un rétract par déformation de son cône C , alors X est contractile. Cela nous donnera l'idée de la rétraction par déformation à construire dans l'autre sens.

Soit Φ une rétraction par déformation de C sur X . Notons s le sommet du cône. On pose $p_0 = \Phi(s, 1) \in X$. Alors, X se contracte sur p_0 . En effet, regardons l'application

$$H : \begin{array}{ccc} X \times [0, 1] & \longrightarrow & X \\ (p, t) & \longmapsto & \Phi(\pi(p, 1 - t), 1). \end{array}$$

La continuité de H est assurée par celles de Φ et de π . Comme Φ est une rétraction par déformation de C sur X , pour tout point x du cône, $\Phi(x, 1) \in X$. Ainsi, H est bien définie continue de $X \times [0, 1]$ sur X .

Soit p un point de X . Alors, $H(p, 0) = \Phi(p, 1) = p$. Puis, $H(p, 1) = \Phi(s, 1) = p_0$. Donc H est une homotopie de l'identité sur un point. Ainsi, X est bien contractile.

Nous allons maintenant montrer l'autre sens. Nous nous donnons H une homotopie déformant continûment la fonction constante c_{p_0} en la fonction identité id_X . Ainsi, pour tout $x \in X$, $H(x, 0) = p_0$ et $H(x, 1) = x$. Nous allons construire une rétraction Φ du cône sur X en nous inspirant du paragraphe précédent. L'idée est qu'une fois la rétraction terminée, on puisse retrouver H . Autrement dit, on veut que pour $\pi(p, t) \in C$, $\Phi(\pi(p, t), 1) = H(p, t)$. Pour ce faire, on va aplatiser le cône petit à petit, de manière à ce qu'au temps t , tous les points de $\pi(X \times [t, 1])$ du bas du cône n'aient pas bougé, et tous les points de $\pi(X \times [0, t])$ du haut du cône soient sur $\pi(X \times \{t\})$ la tranche du cône de coordonnée t . On définit Φ ainsi :

$$\begin{aligned} \Phi : C \times [0, 1] &\longrightarrow C \\ (\pi(p, t), x) &\longmapsto \begin{cases} \pi(H(p, \frac{t}{x}), x) & \text{si } x \geq t \\ \pi(p, t) & \text{si } x < t. \end{cases} \end{aligned}$$

Cette application est bien continue : la continuité de H et de π nous assure la continuité sur $E^+ = \{(\pi(p, t), x) \mid x \geq t\}$ et sur $E^- = \{(\pi(p, t), x) \mid x < t\}$. Enfin, la fonction est continue en $x = t$: $\pi(H(p, \frac{t}{t}), t) = \pi(H(p, 1), t) = \pi(p, t)$.

Vérifions enfin que Φ est une rétraction par déformation de C sur X : on sait déjà qu'elle est continue. Soit $x = \pi(p, t)$ un point de C , on a $\Phi(\pi(p, t), 0) = \pi(p, t)$ car $t \geq 0$. Puis, $\Phi(x, 1) = \pi(H(p, t), 1) \in X$. \square

Nous pouvons à présent démontrer le lemme qui nous servira pour la preuve du théorème de Kahn-Saks-Sturtevant.

Lemme 2.12. *Soit \mathcal{K} un complexe simplicial. S'il existe $v \in V(\mathcal{K})$ tel que $\mathcal{K} \setminus v$ et \mathcal{K}/v sont contractiles, alors \mathcal{K} est contractile.*

Démonstration. On suppose qu'il existe $v \in V(\mathcal{K})$ tel que $\mathcal{K} \setminus v$ et \mathcal{K}/v sont contractiles. On note $\mathcal{C} = \{X \in \mathcal{K} \mid v \in X \text{ ou } X \cup v \in \mathcal{K}\}$. Alors on a : $\widehat{\mathcal{K}} = \widehat{\mathcal{C}} \cup \widehat{\mathcal{K} \setminus v}$.

Pour montrer que $\widehat{\mathcal{K}}$ est contractile, on va d'abord rétracter $\widehat{\mathcal{C}}$ sur $\widehat{\mathcal{K}/v}$ par déformation. Comme $\widehat{\mathcal{K}/v} \subseteq \widehat{\mathcal{K} \setminus v}$, on pourra ensuite déformer $\widehat{\mathcal{K} \setminus v}$ sur un point et cela contractera tout $\widehat{\mathcal{K}}$ sur un point.

Montrons que $\widehat{\mathcal{C}}$ est en fait le cône de $\widehat{\mathcal{K}/v}$. Alors, comme $\widehat{\mathcal{K}/v}$ est contractile, on pourra bien rétracter $\widehat{\mathcal{C}}$ sur $\widehat{\mathcal{K}/v}$ par déformation.

On veut construire un homéomorphisme f entre $\widehat{\mathcal{C}}$ et C le cône de $\widehat{\mathcal{K}/v}$. Soit p un point de $\widehat{\mathcal{C}}$. On distingue trois cas :

- $p = \widehat{v}$. Alors, on pose $f(p) = s$ le sommet du cône C .

- $p \in \widehat{\mathcal{K}/v}$. Alors, on pose $f(p) = \pi(p, 1)$.
- Sinon, notons Δ_p le plus petit simplexe de \mathcal{K} auquel il appartient. Celui-ci contient forcément v . On peut alors écrire

$$p = \sum_{x \in \Delta_p} \lambda_x \cdot \hat{x}, \text{ avec } \sum_{x \in \Delta_p} \lambda_x = 1.$$

Comme $p \neq \hat{v}$ et $p \notin \widehat{\mathcal{K}/v}$, on sait que $1 > \lambda_v > 0$, on peut donc poser

$$\lambda_p = 1 - \lambda_v \neq 0 \text{ et } p' = \frac{1}{\lambda_p} \cdot \sum_{x \in \Delta_p \setminus \{v\}} \lambda_x \cdot \hat{x}.$$

Alors, $p' \in \widehat{\mathcal{K}/v}$. On pose donc $f(p) = \pi(p', \lambda_p)$.

Ainsi, $\widehat{\mathcal{C}}$ est le cône de $\widehat{\mathcal{K}/v}$. On rétracte donc $\widehat{\mathcal{C}}$ sur $\widehat{\mathcal{K}/v}$ à l'aide d'une rétraction par déformation Φ .

Comme $\widehat{\mathcal{K}/v}$ est contractile, on a une homotopie Ψ qui contracte cet ensemble en un point p_1 . On peut à présent concaténer Φ avec Ψ (comme on concaténerait des chemins), et on obtient que $\widehat{\mathcal{K}}$ est contractile. \square

2.3 Complexe simplicial associé à une fonction monotone

Ici, nous allons enfin établir le lien entre les propriétés de graphes et les complexes simpliciaux.

Définition 2.13 (Complexe associé à une fonction monotone). Soit $f : \{0, 1\}^k \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction monotone qui n'est pas la fonction constante égale à 1.

On note \mathcal{K}_f le complexe simplicial suivant :

$$\mathcal{K}_f = \{S \subseteq \llbracket 1; k \rrbracket \mid f(\mathbb{1}_S) = 0\}$$

où $\mathbb{1}_S$ est le n -uplet $(x_1, \dots, x_k) \in \{0, 1\}^n$ tel que $x_i = 1$ si et seulement si $i \in S$.

\mathcal{K}_f est le complexe simplicial associé à f . \mathcal{K}_f est bien un complexe simplicial : si $S \subseteq \mathcal{K}_f$, et si $S' \subseteq S$, alors $S' \subseteq \mathcal{K}_f$ car f est monotone.

On retrouve alors les notions définies dans le paragraphe précédent. En effet, on remarque que :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{f|_{x_i=0}} &= \{S \subseteq \llbracket 1; n \rrbracket \setminus i \mid f(\mathbb{1}_S) = 0\} \\ &= \{S \in \mathcal{K} \mid i \notin S\} \\ &= \mathcal{K}_f \setminus i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{f|_{x_i=1}} &= \{S \subseteq \llbracket 1; n \rrbracket \setminus i \mid f(\mathbb{1}_{S \cup \{i\}}) = 0\} \\ &= \{S \in \mathcal{K} \mid i \notin S \text{ et } S \cup \{i\} \in \mathcal{K}\} \\ &= \mathcal{K}_f / i \end{aligned}$$

Dans la suite, pour une fonction f , on notera $f \equiv x$ si f est la fonction constante égale à x .

Théorème 2.14 (Kahn-Saks-Sturtevant). *Soit $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction monotone. On suppose $f \not\equiv 1$ et non évasive. Alors \mathcal{K}_f est contractile.*

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur n .

Supposons $n = 1$. La fonction $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ est non égale à 1 et non évasive : c'est forcément la fonction 0. Alors $\mathcal{K}_f = \{\emptyset, \{1\}\}$ est contractile (sa réalisation géométrique est juste un point).

Supposons $n > 1$. Si f était non évasive, il existerait un arbre de décision de f qui est de hauteur $h < n$. Si i est l'étiquette du premier nœud, les sous-arbres ayant pour racine ses fils gauche et droit respectivement sont de hauteur inférieure à $h - 1$, donc strictement inférieure à $n - 1$. Mais par définition d'un arbre de décision, ces sous-arbres sont exactement des arbres de décision pour $f_0 = f|_{x_i=0}$ et $f_1 = f|_{x_i=1}$ selon si l'étiquette de la branche qui mène au sous-arbre est 0 ou 1 respectivement. Les fonctions f_0 et f_1 restent monotones, et sont non évasives car elles admettent un arbre de décision de hauteur strictement plus petite que $n - 1$. Ainsi si $f_0 \not\equiv 1$ et $f_1 \not\equiv 1$, par hypothèse de récurrence, $\mathcal{K}_f \setminus i$ et \mathcal{K}_f / i sont contractiles. Par le lemme 2.7, le complexe simplicial \mathcal{K}_f est aussi contractile, ce qui conclut.

Dans le cas où $f_0 \equiv 1$, alors par monotonie de f , on a $f_1 \equiv 1$ également, ce qui contredit le fait que $f \not\equiv 1$.

Dans le cas où $f_1 \equiv 1$, alors comme $f \not\equiv 1$, alors $f_0 \not\equiv 1$ et est non évasive. Par hypothèse de récurrence, \mathcal{K}_{f_0} est contractile. Mais on a en fait $\mathcal{K}_f = \mathcal{K}_{f_0}$. En effet, pour $S \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i\}$ tel que $f_0(\mathbb{1}_S) = 0$, comme f_0 est la fonction f où on fixe la valeur de x_i à 0, on a aussi $f(\mathbb{1}_S) = 0$. De plus, pour $S \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $i \in S$, on a $f(\mathbb{1}_S) = 1$ car on a supposé que $f_1 \equiv 1$. Donc $\mathcal{K}_{f_0} = \{S \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i\} \mid f_0(\mathbb{1}_S) = 0\} = \{S \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid f(\mathbb{1}_S) = 0\} = \mathcal{K}_f$, donc \mathcal{K}_f est contractile, ce qui termine la récurrence.

Remarque 2.15. *Comme vu en partie 1, une propriété de graphes à n sommets \mathcal{P} peut être vue comme une fonction $f : \{0, 1\}^{\frac{n(n-1)}{2}} \rightarrow \{0, 1\}$. Si la propriété est monotone, la fonction f l'est également. Comme les propriétés de graphes qui nous intéressent sont celles qui sont monotones, on peut définir le complexe simplicial associé, et le théorème de Kahn-Saks-Sturtevant s'applique aussi.*

3 Points fixes et évasivité

Avec les résultats établis dans les parties précédentes, nous allons pouvoir montrer la conjecture d'Aanderaa-Karp-Rosenberg dans le cas des graphes bipartis (Yao, [5]) et des graphes avec un nombre égal à une puissance d'un premier de sommets.

3.1 Points fixes d'une application simpliciale

Dans ce paragraphe, on travaille sur des applications naturelles d'un complexe simplicial dans un autre appelées applications simpliciales. Nous caractériserons les points fixes de telles applications. Les points fixes seront au centre des cas particuliers de la conjecture que nous étudierons ensuite.

Définition 3.1 (Application simpliciale). *Soient \mathcal{K} et \mathcal{K}' des complexes simpliciaux abstraits. Une application simpliciale est une fonction $\phi : V(\mathcal{K}) \rightarrow V(\mathcal{K}')$ qui envoie les simplexes de \mathcal{K} sur ceux de \mathcal{K}' : si S est un simplexe de \mathcal{K} , alors $\phi(S)$ est un simplexe de \mathcal{K}' .*

On l'étend naturellement en $\widehat{\phi} : \widehat{\mathcal{K}} \rightarrow \widehat{\mathcal{K}'}$ par linéarité :

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}|_{V(\mathcal{K})} &= \phi \\ \widehat{\phi}(\sum_{v \in V(\mathcal{K})} \alpha_v \widehat{v}) &= \sum_{v \in V(\mathcal{K})} \alpha_v \widehat{\phi(v)}\end{aligned}$$

Dans la suite de cette partie, ϕ désignera une application simpliciale de $V(\mathcal{K})$ dans lui-même.

Supposons que ϕ est bijective. On s'intéresse aux points fixes de $\widehat{\phi}$. On note $\text{Fix}(\widehat{\phi})$ l'ensemble des points fixes de $\widehat{\phi}$. $\widehat{\phi}$ se décompose en cycles à supports disjoints, qu'on note c_1, \dots, c_n . On notera H_i le support du cycle c_i . Les H_i sont les orbites de l'action naturelle du sous-groupe de $\mathfrak{S}_{V(\mathcal{K})}$ engendré par ϕ sur $V(\mathcal{K})$.

On suppose maintenant de plus que les H_i sont ordonnés de telle sorte que les $t \leq n$ premières orbites sont des simplexes de \mathcal{K} , et on note $w_i = \sum_{v \in H_i} \frac{1}{\text{Card}(H_i)} \widehat{v}$ les centres de gravité des sommets de \widehat{H}_i . On remarque alors que $\phi(H_i) = H_i$, et que les w_i sont des points fixes de $\widehat{\phi}$. Naturellement, si pour $s \leq t$ et $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq t$, on a $H_{i_1} \cup \dots \cup H_{i_s} \in \mathcal{K}$, alors les points dans l'enveloppe convexe des w_{i_1}, \dots, w_{i_s} seront aussi des points fixes de $\widehat{\phi}$. En fait, on va montrer que tous les points fixes de $\widehat{\phi}$ seront de cette forme là.

Lemme 3.2. *Pour tout $x \in \text{Fix}(\widehat{\phi})$, on a $\phi(\Delta_x) = \Delta_x$, où Δ_x désigne le support de x .*

Démonstration. L'égalité $\widehat{\phi}(x) = x$ nous donne :

$$\sum_{v \in \Delta_x} \alpha_v \widehat{v} = \sum_{v \in \Delta_x} \alpha_v \widehat{\phi(v)}$$

On déduit de l'unicité de l'écriture de x comme combinaison linéaire des sommets de \mathcal{K} que pour tout $v \in \Delta_x$, on a $\phi(v) \in \Delta_x$. Ainsi, on a $\phi(\Delta_x) \subseteq \Delta_x$ et par bijectivité de ϕ , on a forcément $\phi(\Delta_x) = \Delta_x$. \square

Proposition 3.3 (Points fixes de $\widehat{\phi}$). *On rappelle certaines notations. Pour $1 \leq i \leq n$, on note H_i les orbites de l'action de ϕ , et w_i les centres de gravité des H_i . Pour $1 \leq i \leq t$, on a $H_i \in \mathcal{K}$. On note $\text{Fix}(\widehat{\phi})$ l'ensemble des points fixes de $\widehat{\phi}$. Avec ces notations, on a :*

$$\text{Fix}(\widehat{\phi}) = \widehat{H}$$

où $H = \{\{i_1, \dots, i_s\} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq t, H_{i_1} \cup \dots \cup H_{i_s} \in \mathcal{K}\}$
et la réalisation géométrique de H associe chaque sommet $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ à w_i .

Démonstration. Les H_i sont des ensembles disjoints de points affinement indépendants donc les vecteurs (w_1, \dots, w_t) sont affinement indépendants. Ainsi, on respecte la définition d'une réalisation géométrique, et on s'assure qu'on a toujours l'unicité de l'écriture d'un point.

On a déjà montré que $\widehat{H} \subseteq \text{Fix}(\widehat{\phi})$. Pour l'autre inclusion, prenons $x \in \text{Fix}(\widehat{\phi})$. On note Δ_x le support de x , on sait que $\Delta_x \in (K)$. On a : $x = \sum_{v \in \Delta_x} \alpha_v \widehat{v}$ avec pour tout $v \in \Delta_x$, $\alpha_v > 0$.

Par le Lemme 3.2, on a $\phi(\Delta_x) = \Delta_x$, donc si on note \mathfrak{S}_{Δ_x} le groupe des permutations des points de Δ_x , on a $\phi|_{\Delta_x} \in \mathfrak{S}_{\Delta_x}$. On note c'_1, \dots, c'_l les cycles qui composent $\phi|_{\Delta_x}$. On note H'_i le support de c'_i et w'_i le centre de gravité de H'_i .

L'égalité $\sum_{v \in \Delta_x} \alpha_v \widehat{v} = \sum_{v \in \Delta_x} \alpha_v \widehat{\phi(\widehat{v})}$ et l'unicité de l'écriture de x comme combinaison linéaire des sommets de \mathcal{K} nous donne aussi pour tout $v \in \Delta_x$ que $\alpha_v = \alpha_{\phi(v)}$. On regroupe les coefficients selon l'orbite H'_i dans laquelle ils sont. En notant β_i le coefficient commun à l'orbite H'_i , on obtient :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{v \in \Delta_x} \alpha_v \widehat{v} \\ &= \sum_{i=1}^l \beta_i \sum_{v \in H'_i} \widehat{v} \\ &= \sum_{i=1}^l \beta_i \text{Card}(H'_i) w'_i \end{aligned}$$

Donc $x \in \text{Conv}(w'_i, 1 \leq i \leq l)$. En remarquant que les $H'_i \subseteq \Delta_x$, comme Δ_x est un simplexe, les H'_i sont aussi des simplexes. De plus, ce sont des orbites de $\phi|_{\Delta_x}$, donc de ϕ car Δ_x est laissé stable par ϕ . Or les t premiers H_i sont exactement les orbites de ϕ qui sont aussi des simplexes, donc pour tout $i \in \llbracket 1; l \rrbracket$, il existe $j \in \llbracket 1; t \rrbracket$ tel que $H'_i = H_j$, ce qui conclut la démonstration. \square

3.2 Théorèmes sur les points fixes

Dans cette sous-partie, on va énoncer les puissants théorèmes sur les points fixes qu'on appliquera concrètement à notre sujet dans la sous-partie suivante. Ceux-ci ne seront pas démontrés.

Définition 3.4 (Caractéristique d'Euler). *Soit \mathcal{K} un complexe simplicial. Sa caractéristique d'Euler, notée $\chi(\mathcal{K})$, est le nombre relatif donné par la formule suivante :*

$$\chi(\mathcal{K}) = \sum_{x \in \mathcal{K}; x \neq \emptyset} (-1)^{|x|-1}$$

Remarque 3.5. *La caractéristique d'Euler est invariante par homotopie. En particulier, la caractéristique d'Euler d'un complexe simplicial contractile est égale à celle d'un point, à savoir 1.*

Théorème 3.6 (Indice de Hopf). *Soit \mathcal{K} un complexe simplicial contractile, ψ une application simpliciale de \mathcal{K} sur lui-même, et \mathcal{H} le complexe simplicial de ses points fixes. Alors, la caractéristique d'Euler de \mathcal{H} est $\chi(\mathcal{H}) = 1$.*

Théorème 3.7 (Théorème du point fixe de Lefschetz). *Soit \mathcal{K} un complexe simplicial contractile, et $f : \widehat{\mathcal{K}} \rightarrow \widehat{\mathcal{K}}$ une application simpliciale. Alors, f a un point fixe.*

Regardons ce qui se passe sur les complexes simpliciaux ne contenant que des simplexes de dimension 1 (vus géométriquement comme des segments) ou 0 (vus comme des points). Comme dit plus haut, ces complexes simpliciaux peuvent être vus comme des graphes.

Exemple 3.8. *Soit \mathcal{K} un complexe simplicial contractile ne contenant que des simplexes de dimension au plus 1. Nous avons vu précédemment que ce complexe peut être vu comme un graphe, et que ce graphe est forcément un arbre. Soit f une application simpliciale sur \mathcal{K} . Soit v un sommet du graphe. Alors, $f(v)$ est un sommet de même arité. En particulier, si v est une feuille, $f(v)$ est également une feuille. Ainsi, les feuilles sont envoyées sur elles-même, et l'arbre élagué (l'arbre auquel on a retiré les feuilles, ainsi que les arêtes ayant une feuille pour extrémité) est envoyé sur lui-même. La restriction de f à l'arbre élagué est encore une application simpliciale sur ce nouveau complexe, on peut donc recommencer. On continue d'élaguer notre arbre jusqu'à arriver à un point ou un segment. Si c'est un point, il s'agit d'un point fixe. Si c'est un segment, soit les extrémités sont des points fixes de f , soit elles sont échangées par f , auquel cas le centre du segment est un point fixe. Comme annoncé par le théorème de Lefschetz, notre application a un point fixe que l'on peut déterminer rapidement.*

3.3 Application aux fonctions et propriétés de graphes évanescentes

Pour prouver des théorèmes d'évasivité, nous procéderons de la manière suivante : on se donne une fonction f monotone non triviale, que l'on supposera non évanescente. Par le théorème de Kahn-Saks-Sturtevant, son complexe simplicial associé sera alors contractile. Si on exhibe une application simpliciale intéressante, le théorème de Lefschetz nous assurera que celle-ci possède un point fixe. L'étude du complexe simplicial des points fixes nous permettra alors de conclure. Nous commencerons par un exemple de fonction monotone, puis nous montrerons la conjecture AKR pour les graphes bipartis et les graphes dont le nombre de sommets est une puissance première.

Lemme 3.9. *Soit n un entier non nul et $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction monotone non triviale. On suppose f invariante par permutation cyclique des entrées : $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_2, \dots, x_n, x_1)$. Alors f est évanescente.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que f est non évative. Soit ϕ un cycle $(1 \ 2 \ \dots \ n)$ d'ordre n . Ce cycle induit une action de groupe naturelle sur $\{0, 1\}^n$, et f est par hypothèse constante sur les orbites de cette action. Ainsi, pour tout $S \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $f(\mathbb{1}_S) = f(\mathbb{1}_{\phi(S)})$. En particulier, si S est dans \mathcal{K}_f , alors $\phi(S)$ est également dans \mathcal{K}_f . Cela nous dit que ϕ est simpliciale sur \mathcal{K}_f , on note $\hat{\phi}$ la fonction étendue sur tout le complexe simplicial.

Comme on a supposé f non évative, le théorème de Kahn-Saks-Sturtevant nous dit que \mathcal{K}_f est contractile. Le théorème de Lefschetz nous donne l'existence d'un point fixe x de $\hat{\phi}$. Par la Proposition 3.3, il existe une orbite O de l'action naturelle de $\hat{\phi}$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $O \in \mathcal{K}_f$. Comme ϕ est transitif, sa seule orbite est $\llbracket 1, n \rrbracket \in \mathcal{K}_f$, donc $f(1, \dots, 1) = 0$ et par monotonie, on obtient que f est la fonction triviale nulle. \square

Nous allons maintenant nous intéresser aux graphes bipartis.

Définition 3.10 (Graphe biparti). *Un graphe est dit biparti si on peut partitionner ses sommets en deux ensembles U et V tels que deux sommets du même ensemble ne soient jamais voisins. Lorsque l'on travaille spécifiquement sur les graphes bipartis, les notions de propriété de graphe, de monotonie et d'évasivité sont légèrement différentes : on s'intéresse aux propriétés des graphes bipartis à sommets $U \times V$, où n et m sont les cardinaux respectifs de U et V . La collection de graphes doit être stable par action de $\mathfrak{S}_U \times \mathfrak{S}_V$. Naturellement, pour la monotonie et l'évasivité, on ne considère que les arêtes de $U \times V$. Il y a donc au plus $n \cdot m$ requêtes possibles, et la propriété est évative si tous les arbres de décision de la propriété sont de hauteur $n \cdot m$. Cela revient à considérer une fonction $f : \{0, 1\}^{U \times V} \rightarrow \{0, 1\}$ associée à une propriété de graphe biparti.*

Théorème 3.11 (Yao [5]). *Une propriété non triviale monotone de graphe biparti est évative.*

Démonstration. Soient U, V deux ensembles de tailles respectives n et m non nuls, P une propriété monotone non triviale de graphe biparti à sommets $U \times V$, et $f : \{0, 1\}^{U \times V} \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction associée à la propriété P . On suppose f non évative.

Soit ϕ qui permute cycliquement tous les éléments de V et laisse U fixé. Comme pour le lemme précédent, c'est une application simpliciale sur \mathcal{K}_f . On a supposé f non évative, donc par le théorème de Kahn-Saks-Sturtevant, \mathcal{K}_f est contractile. Puis, le théorème de Lefschetz nous dit que ϕ a un point fixe.

On note \mathcal{H}_ϕ le complexe simplicial donné par la Proposition 3.3. Les sommets de \mathcal{H}_ϕ sont les orbites de l'action naturelle de ϕ sur $V(\mathcal{K}_f)$. Considérons un sommet de \mathcal{K}_f correspondant à une arête (u, v) , son orbite est exactement $\{u\} \times V$. On peut donc identifier \mathcal{H}_ϕ à un complexe simplicial de sommets de U . De plus, $S \subseteq U$ est dans \mathcal{H}_ϕ si est seulement si $S \times V \in \mathcal{K}_f$ (proposition 3.2), i.e, si $f(\mathbb{1}_{S \times V}) = 0$.

Soit $1 \leq r \leq n$ et $S \subseteq U$ de cardinal r qui est dans \mathcal{H}_ϕ . Comme P est une propriété de graphe, en permutant les sommets de U , on voit que pour n'importe quel sous-ensemble S' de U de cardinal r , S' est dans \mathcal{H}_ϕ . Puis, ce dernier étant

un complexe simplicial, il existe $1 \leq r_0 \leq n$ tel que tout $S \subseteq U$ est dans \mathcal{H}_ϕ si et seulement si il est de cardinal inférieur ou égal à r_0 . On peut maintenant calculer la caractéristique d'Euler du complexe :

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{H}_\phi) &= \sum_{k=1}^{r_0} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{r_0} (-1)^{k+1} \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) \\ &= \binom{n-1}{0} + (-1)^{r_0+1} \binom{n-1}{r_0} \\ &= 1 + (-1)^{r_0+1} \binom{n-1}{r_0}\end{aligned}$$

Or, par le théorème de l'index de Hopf, $\chi(\mathcal{H}_\phi) = 1$, donc $(-1)^{r_0+1} \binom{n-1}{r_0} = 0$, donc $r_0 = n$. Ainsi, U est dans \mathcal{H}_ϕ donc $f(\mathbb{1}_{U \times V}) = 0$, donc f est triviale par monotonie, absurde. \square

Nous allons maintenant montrer la conjecture AKR pour les graphes dont le nombre de sommets est une puissance première. Pour cela nous aurons besoin de quelques notions de corps fini, ainsi que du théorème suivant qui ne sera pas démontré.

Théorème 3.12. *Soit p un nombre premier, \mathcal{K} un complexe simplicial contractile, Γ un groupe d'applications simpliciales de \mathcal{K} sur lui-même. Supposons que l'on a Γ_1 un sous-groupe distingué de Γ de cardinal p^k tel que le quotient Γ/Γ_1 soit cyclique. Alors, on a un point $x \in \widehat{\mathcal{K}}$ qui est fixe pour toutes les applications γ dans Γ .*

Construisons à présent le corps \mathbb{F}_{p^n} , pour p premier et n naturel positif.

Théorème 3.13. *Pour tout n entier naturel non nul et p premier, il existe une unique corps fini de cardinal p^n . On le note \mathbb{F}_{p^n} .*

Démonstration. Pour $n = 1$, il s'agit du corps \mathbb{F}_p . Sinon, c'est le corps de décomposition du polynôme $P = X^{p^n} - X$, où P est un polynôme de $\mathbb{F}_p[X]$. Celui-ci a bien p^n éléments : $P' = -1$ est premier avec P donc P a p^n racines distinctes. Ces racines forment un corps : $1_{\mathbb{F}_p}$ est une racine, et elles sont stables par somme, produit, et inverse (pour les racines non nulles). En effet, on remarque que $(x + y)^{p^n} = x^{p^n} + y^{p^n}$ (par récurrence par exemple, en observant que p divise $\binom{p}{k}$ pour $1 \leq k \leq p - 1$). \square

Théorème 3.14. *Pour tout entier $n \geq 1$ et p premier, le groupe multiplicatif de \mathbb{F}_{p^n} est cyclique.*

Démonstration. Par le théorème de Lagrange, tout élément de $\mathbb{F}_{p^n}^*$ est d'ordre divisant $p^n - 1$. Soit $x \in \mathbb{F}_{p^n}$ d'ordre m . Alors, le groupe $\langle x \rangle$ engendré par x est d'ordre m , et ne contient que des racines de $X^m - 1$. Or, ce polynôme est à coefficients dans le corps \mathbb{F}_{p^n} , donc contient au plus m racines dans \mathbb{F}_{p^n} . Ainsi, les éléments de $\mathbb{F}_{p^n}^*$ dont l'ordre divise m sont exactement les éléments de $\langle x \rangle$. Ce groupe étant cyclique, il y a $\varphi(m)$ éléments de $\mathbb{F}_{p^n}^*$ d'ordre m , où φ est l'indicatrice d'Euler.

Ainsi, si on note O_m l'ensemble des éléments de $\mathbb{F}_{p^n}^*$ d'ordre m , alors O_m est de cardinal 0 ou $\varphi(m)$. Supposons qu'on a un diviseur m_0 de $p^k - 1$ tel que O_{m_0} soit vide. Alors, comme $\mathbb{F}_{p^n}^*$ s'écrit comme l'union disjointe des O_m ,

$$|\mathbb{F}_{p^n}^*| < \sum_{m|p^k-1} \varphi(m) = p^k - 1, \text{ absurde.}$$

Donc pour tout m divisant $p^k - 1$, on a un élément de $\mathbb{F}_{p^n}^*$ d'ordre m . En particulier, $\mathbb{F}_{p^n}^*$ a un élément d'ordre $p^n - 1$, donc est cyclique. \square

On peut à présent prouver le résultat de Kahn-Saks-Sturtevant.

Théorème 3.15 (Kahn, Saks et Sturtevant [3]). *Soit P une propriété monotone non triviale de graphe à p^n sommets, avec p un nombre premier. Alors, la propriété P est évasive.*

Démonstration. Soit P une propriété monotone non triviale de graphes à p^n sommets, f la fonction associée, et \mathcal{K}_f le complexe simplicial associé. Supposons par l'absurde que f n'est pas évasive.

On voit le graphe comme le groupe \mathbb{F}_{p^n} car on veut considérer des applications simpliciales particulières définies à l'aide de bijection de \mathbb{F}_{p^n} dans \mathbb{F}_{p^n} .

On pose $\Gamma = \{x \mapsto ax + b \mid a \in \mathbb{F}_{p^n}^*, b \in \mathbb{F}_{p^n}\}$. C'est un groupe de fonctions de \mathbb{F}_{p^n} sur lui-même. On considère son sous-groupe $\Gamma_1 = \{x \mapsto x + b \mid b \in \mathbb{F}_{p^n}\}$. Ce groupe est de cardinal p^n , distingué dans Γ et $\Gamma/\Gamma_1 = \{x \mapsto ax \mid a \in \mathbb{F}_{p^n}^*\}$. Ce groupe quotient est isomorphe à $\mathbb{F}_{p^n}^*$, qui est cyclique. Ici, on associe bijectivement les p^n sommets aux éléments de \mathbb{F}_{p^n} . Les arêtes sont donc des sous-ensembles de \mathbb{F}_{p^n} à deux éléments.

On étend les fonctions de Γ aux sommets de \mathcal{K}_f (cela se fait naturellement car les sommets de \mathcal{K}_f sont les sous-ensembles à deux éléments de \mathbb{F}_{p^n} , et les fonctions de Γ sont injectives), et f étant une propriété de graphe, ce sont des applications simpliciales. Comme f n'est pas évasive, \mathcal{K}_f est contractile et par le Théorème 3.12, on a $x \in \mathcal{K}_f$ qui est un point fixe commun à toutes les applications de Γ . Par le Lemme 3.2, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(\Delta_x) = \Delta_x$. Or, le groupe Γ est 2-transitif : pour tous couples (a, b) , (c, d) de sommets du graphe avec $a \neq b$ et $c \neq d$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $(\gamma(a), \gamma(b)) = (c, d)$. Ainsi, Δ_x contient l'ensemble des arêtes, donc la propriété est vide. \square

4 Bibliographie

Références

- [1] *Algebraic Topology*. A. Hatcher, 2001.
- [2] *Elements of Algebraic Topology*. Massachusetts Institute of Technology. James R. Munkres.
- [3] Jeff KAHN, Michael SAKS et Dean STURTEVANT. « A topological approach to evasiveness ». In : *Combinatorica* 4.4 (déc. 1984), p. 297-306. ISSN : 1439-6912. DOI : 10.1007/BF02579140. URL : <https://doi.org/10.1007/BF02579140>.
- [4] Laszlo LOVASZ et Neal E. YOUNG. *Lecture Notes on Evasiveness of Graph Properties*. 2002. arXiv : [cs/0205031](https://arxiv.org/abs/cs/0205031) [cs.CC].
- [5] Andrew Chi-Chih YAO. « Monotone Bipartite Graph Properties are Evasive ». In : *SIAM Journal on Computing* 17.3 (1988), p. 517-520. DOI : 10.1137/0217031. eprint : <https://doi.org/10.1137/0217031>. URL : <https://doi.org/10.1137/0217031>.