$\mathcal{D}$-Modules sur la Droite Projective et Représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Alizon Matthias, Mallet-Burgues Louis

4 juin 2023

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, on présente un cas particulier du *théorème de localisation de Beilinson-Bernstein*, qui s'inscrit dans la théorie géométrique des représentations. On relie certaines représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ à des objets géométriques sur la droite projective complexe ${\mathbb{P}^1}_{\mathbb{C}}$: les *$\mathcal{D}$-modules*. Ces objets permettent une approche algébrique des opérateurs et des équations différentiel(le)s. On s'appuie principalement sur les notes de cours de Braverman, Chtumova, Etingof et Yang [8] pour les propriétés des $\mathcal{D}$-modules et sur les notes de Keller [5] pour ce qui est des algèbres de Lie et du théorème de localisation. Les annexes présentent, sans tout démontrer, les bases de géométrie algébrique utilisées dans ce mémoire, avec notamment la notion importante de *module quasi-cohérent sur un schéma* (définition 6.33). On renvoie plusieurs fois au livre de Harshtorne [3] et à The Stacks Project [7] pour les détails à ce sujet.

On commence par présenter un point de vue algébrique sur la droite projective dans la section 1. On construit le schéma $\mathbb{P}^1$, ce qui nous permet de faire le lien entre les fonctions polynomiales sur un ouvert de $\mathbb{P}^1$ et les fonctions polynomiales homogènes sur le plan affine $\mathbb{A}^2$. La théorie de Beilinson-Bernstein s'applique plus généralement à des variétés de drapeaux, mais le cas de $\mathbb{P}^1$ est plus simple à traiter d'un point de vue géométrique. En effet $\mathbb{P}^1$ est recouvert par deux ouverts affines U_X et U_Y : ceux-ci correspondent en coordonnées projectives $[X : Y]$ aux lieux de non-annulation de X et Y respectivement. On définit également une classe de faisceaux importante sur $\mathbb{P}^1$: les faisceaux dits *"tordus"*, notés $\mathcal{O}(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, qui serviront dans la suite pour des calculs de sections globales.

Ensuite, on construit le cadre différentiel algébrique sur $\mathbb{P}^1$ dans la section 3 en suivant [8]. On introduit les *opérateurs différentiels* sur $\mathbb{P}^1$ qui forment un faisceau d'algèbres noté $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$. Ce faisceau est construit comme le recollement de l'algèbre des opérateurs différentiels sur chaque ouvert affine U_X et U_Y. Dans ce cadre, un opérateur différentiel est linéaire et polynomial : par exemple $\partial_x^2 + 2y^3\partial_x\partial_y$ est un opérateur différentiel sur le plan $\mathbb{A}^2$. Un *$\mathcal{D}$-module* sur $\mathbb{P}^1$ est défini comme un module quasi-cohérent sur avec une action du faisceau des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$. Historiquement, ces objets ont été introduits pour utiliser des méthodes algébriques sur des questions d'équations aux dérivées partielles linéaires.

La droite projective complexe n'est pas *affine*, il faut au moins deux ouverts affines pour la recouvrir. En conséquence, un faisceau de modules quasi-cohérent sur $\mathbb{P}^1$ n'est en général pas entièrement déterminé par ses sections globales. En revanche, c'est le cas pour les $\mathcal{D}$-modules. Plus formellement, on définit dans la section 4 la notion suivante, présentée dans [8] :

Définition. *Un schéma S sur* $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ *muni d'un faisceau d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_S$ est dit $\mathcal{D}$-affine si le foncteur des sections globales Γ réalise une équivalence de catégories entre les $\mathcal{D}$-modules sur S et les modules à gauche sur l'anneau des sections globales du faisceau $\mathcal{D}_S$.*

On utilise cette définition seulement dans le cas de $\mathbb{P}^1$, où le faisceau d'opérateurs différentiels est $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ et on ne s'attarde pas sur la notion générale de $\mathcal{D}$-module sur un schéma quelconque. On montre alors le théorème 4.1 :

Théorème. *La droite projective complexe $\mathbb{P}^1$ est $\mathcal{D}$-affine.*

De manière informelle, cela signifie que la donnée d'un $\mathcal{D}$-module sur $\mathbb{P}^1$ équivaut à la donnée d'un module sur l'algèbre des opérateurs différentiels globaux. Pour prouver ce théorème, on utilise un résultat de théorie des catégories (voir 4.3) selon lequel une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ qui possède un *générateur projectif P* et qui vérifie certaines hypothèses supplémentaires est équivalente à la catégorie des $\operatorname{Hom}(P,P)$-modules à gauche. La preuve de ce théorème, tiré du livre de Freyd [2], est reportée en annexe (voir 7). On l'applique à la catégorie des $\mathcal{D}$-modules sur $\mathbb{P}^1$, avec $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ qui joue le rôle de générateur projectif.

Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}, \bullet)$ étant isomorphe au *foncteur des sections globales* Γ, il s'agit en fait de montrer d'une part que Γ est un foncteur *exact* et d'autre part que $\Gamma(M) = 0 \implies M = 0$ pour M un $\mathcal{D}$-module sur $\mathbb{P}^1$.
Pour montrer l'exactitude du foncteur Γ, on commence par en donner une expression différente : si M est un $\mathcal{D}$-module sur $\mathbb{P}^1$, on identifie ses sections globales au noyau de l'opérateur $\mathcal{E} = X\partial_X + Y\partial_Y$ agissant sur le tiré en arrière de M par la surjection canonique $\pi : \mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Cette identification utilise les faisceaux tordus introduits dans la section 3. À l'aide de cette réécriture du foncteur Γ, l'exactitude se ramène à l'étude des $\mathcal{D}$-modules sur le plan $\mathbb{A}^2$ qui sont *supportés* sur le point 0 et aux valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{E}$ sur ces modules-ci. L'idée globale de la preuve est tirée de [8].

Dans la section 5, on fait le lien entre *l'algèbre de Lie* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1)$ des opérateurs globaux sur $\mathbb{P}^1$, en suivant les notes de Keller [5]. On utilise la notion d'*algèbre universelle enveloppante* :

Définition. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$. Il existe une algèbre associative complexe $U(\mathfrak{g})$ munie d'un morphisme d'algèbres de Lie $j : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Lie}(U(\mathfrak{g}))$ de $\mathfrak{g}$ vers l'algèbre de Lie associée à $U(\mathfrak{g})$ (dont le crochet est $[a,b] = ab - ba$), unique à (unique) isomorphisme près, telle que pour toute algèbre associative complexe A et tout morphisme d'algèbres de Lie $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Lie}(A)$ de $\mathfrak{g}$ vers l'algèbre de Lie associée à A, il existe un unique morphisme d'algèbres associatives :*

$$\widetilde{f} : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$$

tel que le triangle $j, f, \widetilde{f}$ commute. On dit que $U(\mathfrak{g})$ est l'algèbre universelle enveloppante de $\mathfrak{g}$.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{P}^1$ par homographies et induit une action de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, le faisceau des fonctions polynomiales sur $\mathbb{P}^1$. On peut alors associer à tout élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ un opérateur différentiel global sur $\mathbb{P}^1$, ce qui permet de voir l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1)$ comme un certain quotient de $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. Pour montrer que le morphisme $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1)$ induit par l'action est surjectif et pour calculer son noyau, on se ramène aux *gradués* de ces anneaux filtrés, qui ont l'avantage d'être commutatifs.
La présentation de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1)$ comme quotient de $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ permet d'identifier la catégorie des représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sur lesquels l'élément central $\Delta = H^2 + 2EF + 2FE$ agit trivialement à la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1)$-modules à gauche, et donc à la catégorie des $\mathcal{D}$-modules sur $\mathbb{P}^1$ puisque $\mathbb{P}^1$ est $\mathcal{D}$-affine.
On conclut en donnant des exemples.

On remercie notre encadrant Arnaud Eteve pour la supervision de ce mémoire et pour les mercredi après-midi passés à faire de la géométrie algébrique.

1 La droite projective en géométrie algébrique

1.1 Construction de $\mathbb{P}^1$ et de la surjection $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^1$

On commence par construire la droite projective complexe $\mathbb{P}^1$ comme un schéma au dessus de $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ muni d'une surjection $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^1$.

Définition 1.1. On définit $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (noté ensuite $\mathbb{P}^1$) comme $\mathrm{Proj}\,\mathbb{C}[X,Y]$, où $\mathbb{C}[X,Y]$ est gradué par le degré. On trouvera une construction précise en annexe, dans la section 6.10 : "Construction Proj". Il est ainsi recouvert par les deux ouverts affines $U_X = D_+(X)$ et $U_Y = D_+(Y)$ tous deux isomorphes à $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[T]$ via $T \mapsto Y/X$ et $T \mapsto X/Y$ respectivement. En particulier, la proposition 6.21 de l'annexe 1 permet d'écrire $\mathbb{P}^1$ comme la colimite dans la catégorie des schémas du diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[X/Y, Y/X] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[X/Y] \\ \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[Y/X] & \end{tikzcd}$$

où on sous-entend que $X/Y \times Y/X = 1$. Puisque $\mathbb{C}[X,Y]_0 = \mathbb{C}$, on a que $\mathbb{P}^1$ est un schéma au-dessus de $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$.

On va à présent construire un morphisme de schémas $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Ici $\mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[X,Y]$ et $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ est le sous-schéma ouvert $D(0,0)$.

Définition 1.2. On définit une action de $\mathbb{C}^\times$ sur $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$: soit $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, on a un morphisme $\mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$ de multiplication par λ induit par le morphisme $\mathbb{C}[X,Y] \longrightarrow \mathbb{C}[X,Y]$ qui envoie X sur λX et Y sur λY. Ce morphisme se restreint et corestreint en un morphisme $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{m_\lambda} \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$. Pour $z \in \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ *vu comme un certain idéal de* $\mathbb{C}[X,Y]$, on note $\lambda * z$ l'image de z par ce morphisme, autrement dit :

$$\lambda * z = \{f \in \mathbb{C}[X,Y] \mid f(\lambda X, \lambda Y) \in z\}$$

Enfin, pour $z \in \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$, on définit le *cône* de z par :

$$C(z) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}^\times} \lambda * z$$

Lemme 1.3. On a la description alternative suivante de $C(z)$:

$$C(z) = \{f \in \mathbb{C}[X,Y] \mid \forall k \geq 0 \ f_k \in z\}$$

De plus, $C(z)$ est un élément de $\operatorname{Proj}\mathbb{C}[X,Y]$ et l'application ensembliste $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{C} \mathbb{P}^1$ est *continue*.

Démonstration. L'inclusion de droite à gauche est claire. Ensuite, soit $f \in C(z)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, on a :

$$z \ni f(\lambda X, \lambda Y) = \sum_{i \geq 0} \lambda^i f_i(X,Y)$$

où f_i est la composante homogène de degré i de f. Soit $k \geq 0$ tel que pour tout $i < k$ on ait $f_i \in z$. Alors en faisant la différence on obtient :

$$\sum_{i \geq k} \lambda^i f_i(X,Y) \in z$$

En divisant par λ^k et en prenant $\lambda = 0$, on a $f_k(X,Y) \in z$.

Il en découle directement que $C(z)$ est homogène, et si deux éléments homogènes f et g de degrés p et q vérifient $fg \in C(z)$, alors $fg \in z$ en prenant la composante de degré $p+q$ et puisque z est premier, $f \in C(z)$ ou $g \in C(z)$. Ainsi $C(z)$ est un idéal premier homogène, et il ne contient pas $\bigoplus_{k \geq 1} \mathbb{C}[X,Y]_k = (X,Y)$ car $z \neq (X,Y)$.

Voyons la continuité : soit $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ homogène de degré strictement positif, on a :

$$C^{-1}(D_+(f)) = D(f) = D(f) \cap \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$$

qui est bien un ouvert de $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$. $\square$

Enfin, on construit un morphisme de schémas (voir 6.19 pour cette notion) $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1$ en prenant comme application continue sous-jacente l'application C et comme morphisme de faisceaux défini sur un ouvert de base $D_+(f)$ pour f homogène de degré strictement positif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D_+(f)) & \longrightarrow & \pi_\star\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}\right)(D_+(f)) \\
\| & & \| \\
\mathbb{C}[X,Y,1/f]_0 & \longrightarrow & \mathbb{C}[X,Y,1/f]
\end{array}$$

et on vérifie sans problème la naturalité vis-à-vis des restrictions et la localité sur les fibres, c'est à dire le fait que $\mathbb{C}[X,Y]_{(z)} \longrightarrow \mathbb{C}[X,Y]_z$ est un morphisme d'anneaux locaux pour tout $z \in \mathbb{P}^1$.

Proposition 1.4. Par construction, $\mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ ensemblistement puisqu'un idéal premier homogène qui ne contient pas (X,Y) est un idéal premier différent de (X,Y). L'inclusion (ensembliste) $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{i} \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ est alors une section continue de π. En particulier π est *ouverte*.

Démonstration. Si $z \in \mathbb{P}^1$, on a clairement $\pi(z) = z$ puisque z est homogène : $\pi \circ i = \mathrm{id}$. Ensuite, pour tout ouvert de base $D(f)$ de $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ avec $f \in (X,Y)$, on a $i^{-1}(D(f)) = \pi(D(f)) = \bigcup_{k\geq 0} D_+(f_k)$ qui est un ouvert de $\mathbb{P}^1$. En effet, si $\pi(z) \in \pi(D(f))$, on a $f \notin z$ donc il existe $k \geq 0$ tel que $f_k \notin z$, et en particulier $\pi(z) \in D_+(f_k)$. Réciproquement, si $w \in D_+(f_k)$, alors $f_k \notin w$ donc $f \notin w$ puisque w est homogène, et donc $w = \pi(w) \in \pi(D(f))$. □

1.2 Constructions d'objets par recollement sur $\mathbb{P}^1$

Le fait que $\mathbb{P}^1$ soit le recollement des schémas ouverts $U_X = D_+(X)$ et $U_Y = D_+(Y)$ permet de construire par recollement des $\mathcal{O}_X$-algèbres et $\mathcal{O}_X$-modules. On note $U_{XY} = U_X \cap U_Y = D_+(XY)$ pour alléger les notations.
Notons $i_X : U_X \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ (resp. i_Y) les immersions ouvertes associées au recouvrement de $\mathbb{P}^1$.

Cela se traduit par la proposition suivante :

Proposition 1.5 (Recollement d'objets sur $\mathbb{P}^1$)**.** *Soit M_X(resp. M_Y, M_{XY}) un $\mathcal{O}_{U_X}$(resp. $\mathcal{O}_{U_Y}, \mathcal{O}_{U_{XY}}$)-module et deux isomorphimes de $\mathcal{O}_{U_{XY}}$-modules*

$$M_X|_{U_{XY}} \longrightarrow M_{X,Y} \longleftarrow M_Y|_{U_{XY}}$$

Alors, il existe à isomorphisme canonique près un unique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module M et des isomorphismes

$$M|_{U_X} \longrightarrow M_X$$

$$M|_{U_Y} \longrightarrow M_Y$$

tels que les isomorphismes restreints induisent un diagramme commutatif (toutes les flèches sont des isomorphismes) :

$$\begin{tikzcd} M|_{U_{XY}} \arrow[r] \arrow[d] & M_X|_{U_{XY}} \arrow[d] \\ M_Y|_{U_{XY}} \arrow[r] & M_{XY} \end{tikzcd}$$

La proposition tient toujours si on remplace M_X, M_Y, M_{XY} par des algèbres quasi-cohérentes sur $\mathbb{P}^1$, ou par des faisceaux de groupes abéliens ou d'anneaux.

Démonstration. On a un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-modules :

$$i_{X,\star}(M_X) \xrightarrow{r} i_{X,Y,\star}(M_{X|U_{XY}})$$

obtenu par restriction : on envoie $s \in M_X(U \cap X)$ sur $s_{|U_{XY}}$. En appliquant le foncteur $i_{X,Y,\star}$ au morphisme de recollement $M_{X|U_{XY}} \longrightarrow M_{X,Y}$ on a une seconde flèche :

$$i_{X,\star(M_X)} \xrightarrow{r} i_{X,Y,\star}(M_{X|U_{XY}}) \longrightarrow i_{X,Y,\star}M_{X,Y}$$

De la même manière on a des flèches :

$$i_{Y,\star(M_Y)} \xrightarrow{r'} i_{X,Y,\star}(M_{Y|U_{XY}}) \longrightarrow i_{X,Y,\star}M_{X,Y}$$

On construit alors M comme la limite du diagramme de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-modules construit avec les composées précédentes :

$$i_{X,\star}M_X \longrightarrow i_{XY,\star}M_{XY} \longleftarrow i_{Y,\star}M_Y$$

La projection $M \longrightarrow i_{X,\star}M_X$ induit un morphisme de $\mathcal{O}_{U_X}$-modules :

$$M_{|U_X} \longrightarrow (i_{X,\star}M_X)_{|U_X} = M_X \quad (\star)$$

Puisque les petites limites de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-modules sont calculées ouvert par ouvert, sur chaque ouvert V contenu dans U_X on a :

$$M_{U_X}(V) = M(V) = \lim\left(M_X(V) \longrightarrow M_{XY}(V \cap U_Y) \longleftarrow M_Y(V \cap U_Y)\right)$$

donc $(\star)$ est un isomorphisme sur les sections au-dessus de V car le tiré en arrière d'un isomorphisme est encore un isomorphisme. Donc $(\star)$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{U_X}$-modules. On a donc, par symétrie entre X et Y, deux isomorphismes $M_{|U_X} \longrightarrow M_X$ et $M_{|U_Y} \longrightarrow M_Y$. Le diagramme annoncé commute clairement.

Réciproquement, si on se donne un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module N et des isomorphismes $N_{|U_X} \longrightarrow M_X$ et $N_{|U_Y} \longrightarrow M_Y$ qui induisent un diagramme commutatif comme dans l'énoncé, alors N est nécessairement la limite de $i_{X,\star}M_X \longrightarrow i_{XY,\star}M_{XY} \longleftarrow i_{Y,\star}M_Y$ car c'est le cas sur chaque ouvert contenu dans U_X ou dans U_Y, et ces ouverts forment une base d'ouverts de $\mathbb{P}^1$. On a donc bien unicité à isomorphisme canonique près. □

Remarque 1.6. Dans les notations de la proposition précédente, si M_X et M_Y sont quasi-cohérents, alors M est quasi-cohérent sur $\mathbb{P}^1$ d'après la proposition 6.36. Dans ce cas, les données de recollement proviennent simplement de deux isomorphismes de $\mathbb{C}[X/Y, Y/X]$-modules : $M_X[X/Y] \longrightarrow M_{X,Y} \longleftarrow M_Y[Y/X]$ en confondant module et module quasi-cohérent associé dans les notations. De plus, le module du milieu peut être supprimé de la donnée : ce qui compte, c'est le *changement de carte* $M_X[X/Y] \longleftrightarrow M_Y[Y/X]$.

1.3 Sections globales des faisceaux $\mathcal{O}(n)$

Soit M un $\mathbb{C}[X,Y]$-module $\mathbb{Z}$-gradué. Il lui est associé un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module quasi-cohérent $\widetilde{M}$ dont la construction précise est donnée en annexe dans le paragraphe sur la construction Proj (définition 6.66). Pour $n \in \mathbb{Z}$, la notation $M(n)$ désigne le $\mathbb{C}[X,Y]$-module $\mathbb{Z}$-gradué dont on a modifié la graduation de la façon suivante :

$$M(n)_k = M_{n+k}$$

Théorème 1.7. Soit M un $\mathbb{C}[X,Y]$-module $\mathbb{Z}$-gradué *sans torsion*. On a un isomorphisme canonique de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués :

$$M \cong \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(\mathbb{P}^1, \widetilde{M(n)})$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les sections globales de $\mathcal{O}(n) = \widetilde{\mathbb{C}[X,Y]}(n)$ sur $\mathbb{P}^1$ sont données par :

$$\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n)) = \mathbb{C}[X,Y]_n$$

qui est nul si $n < 0$. Pour $n = 0$, on obtient que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ n'a que des sections globales constantes.

Démonstration. Par la propriété de faisceau on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathbb{P}^1, \widetilde{M(n)}) &= \Gamma(U_X, \widetilde{M(n)}) \times_{\Gamma(U_{XY}, \widetilde{M(n)})} \Gamma(U_Y, \widetilde{M(n)}) \\ &= M[1/X]_{0+n} \times_{M[1/X, 1/Y]_{0+n}} M[1/Y]_{0+n} \\ &= M[1/X]_n \cap M[1/Y]_n\end{aligned}$$

en plongeant tout dans le localisé $M \otimes_{\mathbb{C}[X,Y]} \mathbb{C}(X,Y)$, les morphismes de localisation étant injectifs puisque M est sans torsion. Cette intersection est simplement M_n, comme souhaité. □

Remarque 1.8. L'hypothèse *sans torsion* est importante : en prenant $M = \mathbb{C}[X,Y]/(X^3,Y^3)$ muni de la graduation quotient, on a $\Gamma(U_X, \widetilde{M(1)}) = \Gamma(U_Y, \widetilde{M(1)}) = 0$ donc $\Gamma(\mathbb{P}^1, \widetilde{M(1)}) = 0$, tandis que M_1 n'est pas nul.

Remarque 1.9. On en déduit que $\mathbb{P}^1$ n'est pas un schéma affine puisque $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}$ et $\mathbb{P}^1$ n'est pas isomorphe au spectre de $\mathbb{C}$.

Les faisceaux $\mathcal{O}(n)$ à isomorphisme près forment une structure de groupe pour le produit tensoriel, les inverses étant donnés par les faisceaux duaux.

Proposition 1.10. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. On a des isomorphismes canoniques de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-modules :

$$\mathcal{O}(m) \otimes O(n) \cong \mathcal{O}(m+n)$$

et

$$\mathcal{O}(n)^\vee \cong \mathcal{O}(-n)$$

où de dual $\mathcal{O}(n)^\vee$ est un dual au sens des $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-modules, c'est à dire le faisceau $\mathcal{H}om(\mathcal{O}(n), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ (voir définition 6.32).

Démonstration. On a une application $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U)$-bilinéaire de multiplication :

$$A[1/f]_m \times A[1/f]_n \longrightarrow A[1/f]_{n+m}$$

qui est naturelle vis-à-vis des morphismes de restrictions d'ouverts de base, et induit donc un morphisme de faisceaux d'ensembles $\mathcal{O}(m) \times \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{O}(m+n)$ bilinéaire sur chaque ouvert. Par propriété universelle du produit tensoriel de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-modules, on a donc un morphisme :

$$\mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{O}(m+n)$$

Montrons que c'est un isomorphisme sur les fibres. Soit $z \in \mathbb{P}^1$, on peut supposer $z \in D_+(X)$ sans perte de généralité. On a :

$$(\mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{O}(n))_z \cong \mathcal{O}(m)_z \otimes_{A_{(z)}} \mathcal{O}(n)_z \cong (S_z^{-1}A)_m \otimes_{(S_z^{-1}A)_0} (S_z^{-1}A)_n$$

avec $S_z^{-1} = \{f \in A \mid f \text{ homogène}, \ f \notin z\}$.

Ensuite, on a un morphisme de multiplication $(S_z^{-1}A)_m \otimes_{(S_z^{-1}A)_0} (S_z^{-1}A)_n \longrightarrow (S_z^{-1}A)_{m+n}$. Il est bijectif : soit $g/h \in S_z^{-1}A$ homogène de degré $m+n$. On a :

$$g/h = (X^{-n}(g/h)) \times X^n$$

qui est bien un produit d'un élément de $(S_z^{-1}A)_m$ par un élément de $(S_z^{-1}A)_n$ puisque X est inversible dans $S_z^{-1}A$. Cette construction définit bien un inverse au morphisme de multiplication : en effet, on a déjà vérifié un sens, et il reste à voir que pour un tenseur $f/g \otimes h/k$ avec f/g de degré m et h/k de degré n on a :

$$X^{-n} fh/(gk) \otimes_{(S_z^{-1}A)_0} X^n = f/g \otimes_{(S_z^{-1}A)_0} X^{-n}h/kX^n = f/g \otimes h/k$$

car $X^{-n}h/k$ est un élément de $(S_z^{-1}A)_0$. On a donc :

$$(S_z^{-1}A)_m \otimes_{(S_z^{-1}A)_0} (S_z^{-1}A)_n \cong (S_z^{-1}A)_{m+n}$$

avec un isomorphisme qui provient du morphisme $\mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{O}(m+n)$, ce qui conclut.

Montrons $\mathcal{O}(n)^\vee \cong \mathcal{O}(-n)$: soit $U = D_+(f)$ un ouvert de base *contenu dans* U_X. On a :

$$\mathcal{O}(n)^\vee(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1|U}}(\mathcal{O}(n)_{|U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1|U}).$$

Soit $V = D_+(g)$ un ouvert de base contenu dans $D_+(f)$. On a un morphisme canonique :

$$\mathcal{O}(-n)(V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(V)}(\mathcal{O}(n)(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(V))$$

induit par la multiplication $A[1/g]_{-n} \otimes A[1/g]_n \longrightarrow A[1/g]_0$. Ce morphisme est un *isomorphisme* de réciproque $\alpha \mapsto \alpha(X^n)/X^n$ qui a du sens car $D_+(g) \subseteq D_+(f) \subseteq U_X$. Ainsi la donnée d'un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1|U}$-modules de $\mathcal{O}(n)_{|U}$ vers $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1|U}$ équivaut à la donnée, pour chaque ouvert de base $V \subseteq U$, d'un élément de $\mathcal{O}(-n)(V)$ de manière compatible aux restrictions, autrement dit cela revient à la donnée d'un élément de $\mathcal{O}(-n)(U)$. On a donc :

$$\mathcal{O}(-n)_{|U_X} \cong \mathcal{O}(n)^{\vee}_{|U_X}$$

et de même pour U_Y. Par propriété de faisceau et naturalité des isomorphismes construits, on a donc $\mathcal{O}(-n) \cong O(n)^{\vee}$.

□

Remarque 1.11. Par la correspondance entre fibrés vectoriels et modules quasi-cohérents localement libres (voir 6.63), les modules $\mathcal{O}(n)$ correspondent à des fibrés de rang 1 sur $\mathbb{P}^1$. Par exemple, $\mathcal{O}(-1)$ correspond au fibré tautologique sur $\mathbb{P}^1$, et les autres s'obtiennent en prenant des produits tensoriels et des duaux.

2 $\mathcal{D}$-modules sur une variété affine lisse

On introduit la notion d'opérateurs différentiel, de fibré tangent et cotangent sur les variétés affines lisses.

Définition 2.1. *Une variété affine lisse de dimension n est un schéma affine $X = \operatorname{Spec} R$ au dessus de $\mathbb{C}$ tel que le R-module des différentielles $\Omega^1_{R/\mathbb{C}}$ est projectif de type fini.*

Dans toute cette section, on fixe $X = \operatorname{Spec} R$ une telle variété.

2.1 Fibré cotangent à un schéma affine, champ de vecteurs

Définition 2.2 (Fibré tangent et cotangent)**.** *Le fibré cotangent $\mathcal{T}^\star X$ est le schéma affine* $\operatorname{Spec}(\mathrm{Sym}_R(\Omega^1_{R/\mathbb{C}}{}^{\vee}))$ *muni de la projection*

$$q : \mathcal{T}^\star X \longrightarrow X$$

associée au morphisme canonique de R-algèbres de R vers $\mathrm{Sym}_R(\Omega^1_{R/\mathbb{C}}{}^{\vee})$.
De manière analogue , on définit le fibré tangent comme le schéma affine

$$\mathcal{T} X = \operatorname{Spec}(\mathrm{Sym}_R(\Omega^1_{R/\mathbb{C}}))$$

muni de la projection $p : \mathcal{T} X \longrightarrow X$ associé au morphisme canonique de R-algèbres de R vers $\mathrm{Sym}_R(\Omega^1_{R/\mathbb{C}})$.

Proposition 2.3. *Soit U un ouvert affine de X, on des isomorphismes canoniques de schémas affines au-dessus du schéma U :*

$$q^{-1}(U) \cong \mathcal{T}^\star(U)$$

et

$$p^{-1}(U) \cong \mathcal{T}(U)$$

Démonstration. En effet, traitons d'abord le cas $U = D(f)$ pour un certain élément $f \in R$. Alors, on a :

$$p^{-1}(U) = p^{-1}(D(f)) = D(f)$$

Où f est vu comme un élément de la R-algèbre symétrique $\mathrm{Sym}_R\,\Omega^1_{R/\mathbb{C}}$. Ainsi

$$p^{-1}(U) = \operatorname{Spec}\mathrm{Sym}_R \Omega^1_{R/\mathbb{C}\,f} = \operatorname{Spec}\mathrm{Sym}_{R_f}(\Omega^1{}_{R/\mathbb{C}} \otimes_R R_f) = \mathrm{Sym}(R_f)(\Omega^1{}_{R_f/\mathbb{C}})$$

□

Définition 2.4 (Champs de vecteur et 1-formes)**.** *Une* 1*-forme sur* X *est une section globale de* $\mathcal{T}^\star X$*, et un champ de vecteur sur* X *est une section globale de* $\mathcal{T}X$*.*

L'ensemble des champs de vecteurs (resp. des 1-formes) est doté d'une structure naturelle de R-module. En effet, les champs de vecteurs sur X correspondent aux morphismes de R-algèbres

$$\mathrm{Sym}_R(\Omega^1_{R/\mathbb{C}}) \to R$$

C'est-à-dire (propriété universelle de Sym_R) aux éléments de

$$\mathrm{Hom}_R(\Omega^1_{R/\mathbb{C}}, R) = {\Omega^1_{R/\mathbb{C}}}^\vee = \mathrm{Der}_\mathbb{C}(R,R)$$

On peut donc penser aux champs de vecteurs sur X comme des dérivations $\mathbb{C}$-linéaires sur R, de la même manière que les champs de vecteurs sur une variété lisse X modelée sur $\mathbb{R}^n$ correspondent aux dérivations $\mathbb{R}$-linéaires sur $\mathcal{C}^\infty(X)$. Si v est un champ de vecteurs sur X, on note d_v la dérivation associée. Si $f \in R$ et $v \in \mathscr{V}(X) = {\Omega^1_{R/\mathbb{C}}}^\vee$, on a par définition :

$$d_v(f) = v(df)$$

De même, une 1-forme sur X correspond à un élément du bidual de $\Omega^1_{R/\mathbb{C}}$, qui s'identifie canoniquement à $\Omega^1_{R/\mathbb{C}}$ car ce dernier est un R-module projectif de type fini.

Définition 2.5 (Crochet de Lie de deux champs de vecteurs)**.** *Soit* v, w *deux champs de vecteurs sur* X*, alors il existe un unique champ de vecteur* $[v,w]$ *sur* X *tel que* $d_{[v,w]} = d_v d_w - d_w d_v$ *appelé crochet de Lie de* v *et* w*.*

2.2 Opérateurs différentiels sur un schéma affine

Dans cette section, on définit l'algèbre non commmutative des opérateurs différentiels sur X, notée $\mathcal{D}(X)$. Cette algèbre est naturellement filtrée, et son gradué s'identifie canoniquement aux fonctions régulières sur le fibré cotangent à X.

Définition 2.6. *On définit récursivement* $\mathcal{D}(X)$ *(ou* $\mathcal{D}(R)$*),* R*-algèbre des opérateurs différentiels sur* X *:*

$$\begin{array}{rrcl} & \mathcal{D}_0(X) & = & \mathrm{Hom}_R(R,R) \cong R \\ \forall n \geq 0 & \mathcal{D}_{n+1}(X) & = & \{L \in \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(R,R) \mid \forall r \in R\ [L,r] \in \mathcal{D}_n(X)\} \end{array}$$

Les $\mathcal{D}_n(X)$ définissent une filtration naturelle de $\mathcal{D}(X)$. En effet, si $L \in \mathcal{D}_n$ et $L' \in \mathcal{D}_m$, on a $[LS, r] = L[S,r] + [L,r]S$ et ainsi par récurrence sur m et n on a $LS \in \mathcal{D}_{n+m}$). On définit l'ordre de $L \in \mathcal{D}(X)$ est le plus petit n tel que $L \in \mathcal{D}_n(X)$. On définit alors le faisceau $\mathcal{D}_X$ des opérateurs différentiels sur X sur la base des ouverts élémentaires par :

$$\forall f \in R, \mathcal{D}_X(D(f)) = \mathcal{D}(R_f)$$

Les flêches de restrictions $\mathcal{D}(D(g)) \to \mathcal{D}(D(f))$ sont définies par le lemme suivant :

Lemme 2.7. *Soit* L *un opérateur différentiel sur* X *d'ordre* n*, alors il existe un unique opérateur différentiel* L_f *d'ordre* $\leq n$ *sur* $D(f)$ *tel que* $L(r)|_{D(f)} = L_f(r|_{D(f)})$ *pour* r *dans* R*.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n.
<u>Cas $n = 0$</u> : Un opérateur d'ordre 0 sur X (resp $D(f)$) est une homothétie de rapport $\lambda \in R$ (resp. R_f). Ainsi, $r|_{D(f)}$ est l'unique homothétie de R_f qui convient.
<u>Pas récurrence</u> : Fixons L un opérateur d'ordre $n+1$. On procède par analyse-synthèse. Soit L_f un opérateur satisfaisant les conditions. On a pour $r \in R$,

$$[L_f, f](r) = [L, f](r)$$

Donc, par unicité au rang n,

$$[L_f, f] = [L, f]_f =: B$$

En particulier, pour $x \in R_f$,

$$L_f(x) = f^{-1} L_f(fx) + f^{-1} B(x)(1)$$

Et, en réitérant, on a pour tout $m \geq 1$:

$$L_f(x) = \sum_{k=1}^{m} f^{-k} B(f^{k-1}x) + f^{-m} L_f(f^m x)$$

Or, à x fixé, et pour m suffisament grand, $f^m x \in R$ et

$$L_f(f^m x) = L(f^m x)$$

Donc, L_f est determiné de manière unique. Passons à la synthèse. Soit $x \in R_f$. La suite des

$$\sum_{k=1}^{m} f^{-k} B(f^{k-1}x) + f^{-m} L(f^m x)$$

est bien définie pour m suffisament grand et est constante, on note $L_f(x)$ sa valeur. La fonction L_f est une application $\mathbb{C}$-linéaire de R_f dans R_f car B, L le sont (passage à la limite simple). Enfin, L_f et L coïncident sur R (dans ce cas on peut choisir $m = 0$), et pour $r \in R$,

$$[L_f, r] = [L, r]_f \in \mathcal{D}_n(D(f))$$

donc $L_f \in \mathcal{D}_{n+1}(D(f))$, ce qui conclut la preuve par récurrence.

□

Proposition 2.8. *Pour chaque ouvert $D(f)$ de X,*

$$\mathcal{D}(R) \otimes_R R_f \cong \mathcal{D}(R_f)$$

et par conséquent, $\mathcal{D}_X$ est quasi-cohérent en tant que $\mathcal{O}_X$-module à gauche.

Démonstration. La flèche R-linéaire de restriction (compatible avec les filtrations naturelles sur $\mathcal{D}(R)$ et $\mathcal{D}(R_f)$)

$$\mathcal{D}(R) \longrightarrow \mathcal{D}(R_f)$$

induit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ par localisation un morphisme R_f-linéaire :

$$\mathcal{D}_n(R) \otimes_R R_f \longrightarrow \mathcal{D}_n(R_f)$$

On montre par récurrence sur n que celui-ci est un isomorphisme de R_f-modules. Pour $n = 0$, c'est l'identité. Supposons la propriété vraie au rang n. D'une part, pour $r \in R$,

$$[L, r]_f = [L_f, r] = 0$$

Donc par hypothèse de récurrence, $[L, r] = 0$. De l'autre, on a dans R_f,

$$L(1) = L_f(1) = 0$$

Donc il existe $m \geq 0$ tel que dans R,

$$f^m L(1) = 0$$

Ainsi, pour $r \in R$,

$$f^m L(r) = f^m r L(1) + [L, r](1) = r f^m L(1) = 0$$

Donc, dans $\mathcal{D}_n(R) \otimes R_f$,

$$L = f^{-m} f^m L = 0$$

Donc, la n-ème flèche est injective.

Ensuite la surjectivité. Soit L d'ordre $n+1$, on dispose par hypothèse de récurrence et définition de R_f de $m \geq 0$ tel que $f^m L(1) \in R$ d'une part, et de l'autre :

$$\forall i \in \{1, \ldots, a\}, \quad ,(f^m[L, x_i])(R) \subset R$$

Alors, si $y \in R$ est tel que $f^m L(y) \in R$, on a pour $1 \leq j \leq a$,

$$f^m L(x_j y) = f^m[L, x_j](y) + x_j f^m L(y) \in R$$

Comme par ailleurs les x_j engendrent R et $f^m L(1) \in R$, on a $f^m L(R) \subset R$. Ainsi, $L' = f^m L$ définit un opérateur d'ordre n sur R, et $L' \otimes f^{-m}$ est envoyé sur L par ($\star$). $\square$

Si $U \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte, on pose $\mathcal{D}_U = \mathcal{D}_X|_U$. $\mathcal{D}_U$ est alors un $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U$-module quasi-cohérent, et la définition est consistante si U est un ouvert affine.

On a un lien fort entre champs de vecteurs et opérateurs différentiels sur X.

Proposition 2.9. *Un champ de vecteur non nul sur X est un opérateur différentiel d'ordre* 1.

Démonstration. En effet, pour $r, f \in R$, et v un champ de vecteur, on a le calcul

$$[d_v, r](f) = d_v(rf) - rd_r(f) = v(d(rf)) - rv(d(f)) = v(dr)f$$

Donc,

$$[d_v, r] = v(dr) = d_v(r) \in \mathcal{D}_0(R)$$

et $d_v \in \mathcal{D}_1(R)$. Et de plus, d_v n'est pas une homotéthie, sinon on aurait pour tout $r \in R$, $d_v(r) = rd_v(1) = 0$, soit $d_v = 0$ et donc $v = 0$, ce qui n'est pas. $\square$

On peut donc considérer la sous-algèbre de $\mathcal{D}(X)$ engendrée par les homothéties de rapport $r \in R$ et les dérivations d_v, $v \in {\Omega^1}^\vee_{R/\mathbb{C}}$. Ces éléments donnent la structure de l'algèbre $\mathcal{D}(X)$ via les deux théorèmes suivants.

Théorème 2.10. *Muni de la filtration naturelle donnée par les $\mathcal{D}_n(X)$, on a*

$$\mathrm{gr}(\mathcal{D}(X)) \cong \Gamma(\mathcal{T}^\star X, \mathcal{O}_{\mathcal{T}^\star X})$$

Théorème 2.11. *L'algèbre $\mathcal{D}(X)$ est isomorphe à la R-algèbre engendrée par R et les symboles d_v pour $v \in \mathscr{V}(X)$, avec les relations, pour $v, w \in \mathscr{V}(X)$ et $f \in R$:*

$$\begin{aligned} d_{[v,w]} &= [d_v, d_w] \\ [d_v, f] &= d_v(f) \\ d_{fv} &= f d_v \end{aligned}$$

Traitons le cas $X = \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]) = \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, le seul dont on a besoin dans notre cadre.

Alors, $\Omega^1_{R/\mathbb{C}}$ est libre de rang n sur R, engendré par les 1-formes $dx_1, \cdots, dx_n$. Ainsi, le R-module des champs de vecteurs sur $\mathbb{A}^n$ est aussi libre de rang n sur R, engendré par les champs de vecteurs (ou dérivations) $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}$, base duale de $dx_1, \cdots, dx_n$. Alors on retrouve bien les théorèmes 2.10, 2.11, qui prennent la forme suivante :

Théorème 2.12. *D'une part, pour $d \geq 0$, $\mathcal{D}_d(R)$ est engendrée par $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, et les opérateurs*

$$\prod_{j=1}^{n} \partial_{x_i}^{i_j} = \frac{\partial^m}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}} \qquad m = i_1 + \cdots + i_n \leq d$$

De l'autre, pour la filtration précédente sur $\mathcal{D}(X)$,

$$\mathrm{gr}(\mathcal{D}(X)) \cong \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, \partial_{x_1}, \cdots, \partial_{x_n}] = \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]}(\mathbb{C}[\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}])$$

3 $\mathcal{D}$-modules sur $\mathbb{P}^1$

L'objectif de cette section est de définir le faisceau d'algèbres $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ des opérateurs différentiels sur $\mathbb{P}^1$ et la notion de $\mathcal{D}$-module sur $\mathbb{P}^1$. On rappelle que $\mathbb{P}^1$ est recouvert par les ouverts affines U_X et U_Y. Dans toute la section on identifie U_X (resp. U_Y, U_{XY}) avec $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[t]$ (resp. $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[t^{-1}]$, $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[t,t^{-1}]$).

3.1 Fibré tangent et cotangent sur $\mathbb{P}^1$

On construit le faisceau $\Omega^1_{\mathbb{P}^1/\mathbb{A}^1}$ des formes différentielles sur $\mathbb{P}^1$ par recollement de $\Omega^1_{U_X/\mathbb{A}^1}$ et $\Omega^1_{U_Y/\mathbb{A}^1}$ de la manière suivante :
Sous les identifications

$$\Omega^1_{U_X/\mathbb{A}^1} = \widetilde{\mathbb{C}[t]dt} \qquad \Omega^1_{U_Y/\mathbb{A}^1} = \widetilde{\mathbb{C}[u]du} \qquad \Omega^1_{U_{XY}/\mathbb{A}^1} = \widetilde{\mathbb{C}[t,t^{-1}]dt}$$

on recolle via l'isomorphisme

$$\Omega^1_{U_X/\mathbb{A}^1}|_{D_+(X,Y)} \longrightarrow \Omega^1_{U_Y/\mathbb{A}^1}|_{D_+(X,Y)}$$

induit par $t \mapsto u^{-1}$.

Définition 3.1. *Les deux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-modules $\Omega^1_{\mathbb{P}^1/\mathbb{A}^1}$ et ${\Omega^1_{\mathbb{P}^1/\mathbb{A}^1}}^\vee$ étant localement libres de rang 1, on peut canoniquement leur associer les fibrés en droite au-dessus de $\mathbb{P}^1$ dont la construction est décrite plus précisément dans le paragraphe 6.9.*

$$\mathcal{T}\mathbb{P}^1 = \operatorname{Spec}\operatorname{Sym}_{\mathbb{P}^1}\Omega^1_{\mathbb{P}^1/\mathbb{A}^1}$$

$$\mathcal{T}^\star\mathbb{P}^1 = \operatorname{Spec}\operatorname{Sym}_{\mathbb{P}^1}{\Omega^1}^\vee_{\mathbb{P}^1/\mathbb{A}^1}$$

Ces fibrés sont appelés respectivement fibré tangent et cotangent à $\mathbb{P}^1$.

Définition 3.2. *On appelle champ de vecteurs(resp. forme différentielle) sur U une section de $\mathcal{T}\mathbb{P}^1$ (resp.$\mathcal{T}^\star\mathbb{P}^1$) sur cet ouvert. C'est-à-dire un élément de $\Gamma(\mathscr{S}(\mathcal{T}^\star\mathbb{P}^1), U)$ avec les notations présentées dans l'annexe 6.9 sur les fibrés vectoriels.*

Remarque 3.3. *Le faisceau des sections du cotangent s'identifie au faisceau des formes différentiels sur $\mathbb{P}^1$, et le faisceau des sections du tangent au faisceau des champs de vecteurs sur $\mathbb{P}^1$, que l'on note $\mathscr{V}_{\mathbb{P}^1}$.*

Proposition 3.4. *Le faisceau $\mathscr{V}_{\mathbb{P}^1}$ s'identifie au faisceau des dérivations de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ vers $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. On peut ainsi définir le crochet de Lie de deux champs de vecteurs sur un ouvert U de $\mathbb{P}^1$*

Démonstration. En effet, pour un ouvert affine $U = \operatorname{Spec} A$ de $\mathbb{P}^1$ on a :

$$\Gamma(\mathscr{V}_{\mathbb{P}^1}, U) = \Gamma(\mathscr{V}_U, U) = {\Omega^1_{A/\mathbb{C}}}^\vee = \operatorname{Hom}_A(\Omega^1_{A/\mathbb{C}}, A) = \operatorname{Der}_{\mathbb{C}}(A,A)$$

La première égalité découlant de l'analogue pour $\mathbb{P}^1$ de la proposition 2.3. □

3.2 Opérateurs différentiels sur $\mathbb{P}^1$

On définit ici la notion d'opérateur différentiel sur $\mathbb{P}^1$. On s'appuie sur la notion d'opérateur différentiel développée dans la section précédente pour les variétés affines lisses.

Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ est défini par recollement de $\mathcal{D}_{U_X}$ et $\mathcal{D}_{U_Y}$ selon $\mathcal{D}_{U_{XY}}$, le résultat étant un faisceau d'anneaux (non commutatifs) filtrés, muni d'une structure de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module à gauche et à droite.

Spécifions les données de recollement. Sous les identifications faites, on a (les algèbres sont non commutatives) :

$$\mathcal{D}_{U_X} = \widetilde{\mathbb{C}[t, \partial_t]} \qquad \mathcal{D}_{U_Y} = \widetilde{\mathbb{C}[u, \partial_u]}$$

et le changement de carte est spécifié par le changement de cartes :

$$\partial_u \mapsto -t^{-2} \partial_t$$

On dispose ainsi par la proposition 1.5 du faisceau des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ sur $\mathbb{P}^1$, et d'isomorphismes

$$\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}|_{U_X} \cong \mathcal{D}_{U_X} \quad \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}|_{U_Y} \cong \mathcal{D}_{U_Y}$$

compatibles avec le recollement sur U_{XY}.

Définition 3.5 (Gradué d'un faisceau d'anneaux filtrés)**.** *Soit $\mathcal{F}$ est un faisceau d'anneaux filtrés (au sens où les restrictions sont des morphismes d'anneaux filtrés) sur un espace topologique X. Posons, pour U ouvert de X, $(\mathcal{F}_n(U))_{n\geq 0}$ la filtration associée. Alors, les $\mathcal{F}_n(U)$ définissent des préfaisceaux d'anneaux sur X, de même que*

$$\mathrm{gr}^{pre}(\mathcal{F})(U) := \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{F}_n(U) / \mathcal{F}_{n-1}(U)$$

les flêches de restrictions étant induites par celles (compatibles avec les filtrations) sur $\mathcal{F}$. On définit l'anneau gradué $\mathrm{gr}(\mathcal{F})$ comme le faisceau d'anneaux associé au préfaisceau $\mathrm{gr}^{pre}(\mathcal{F})$.

Proposition 3.6. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau d'anneaux filtrés sur X et $U \subset X$ ouvert. Alors, on a un isomorphisme canonique de faisceaux d'anneaux*

$$\mathrm{gr}(\mathcal{F})|_U \cong \mathrm{gr}(\mathcal{F}|_U)$$

Démonstration. On a

$$\mathrm{gr}^{pre}(\mathcal{F})|_U = \mathrm{gr}^{pre}(\mathcal{F}|_U)$$

et on conclut en appliquant $\widehat{\cdot}$ et la proposition 6.3. □

Remarque 3.7. *La proposition précédente montre que l'on aurait aussi pu construire $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ par recollement des gradués sur U_X et U_Y selon U_{XY}.*

Définition 3.8. *On définit $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1})$ le gradué associé à la filtration naturelle sur $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$.*

On a le corollaire immédiat de la proposition 3.6 :

Corollaire 3.9. *Comme $\mathrm{gr}(U_X)$ et $\mathrm{gr}(U_Y)$ sont des faisceaux d'anneaux commutatifs d'après le théorème 2.10, $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1})$ est aussi un faisceau d'anneaux commutatifs. De plus, le premier terme de la filtration de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ est $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, donc $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1})$ a une structure naturelle de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-algèbre commutative.*

On peut même décrire le gradué de $\mathbb{P}^1$ comme le faisceau des fonctions régulières sur le fibré cotangent.

Théorème 3.10. *On un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-algèbres :*

$$\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}) \cong p_\star \mathcal{O}_{\mathcal{T}^\star \mathbb{P}^1}$$

où p est la projection associé au fibré cotangent.

Démonstration. On a :

$$\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1})|_{U_X} \cong \mathrm{gr}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}|_{U_X}) \cong \mathrm{gr}(\mathcal{D}_{U_X})$$

De plus, $p^{-1}(U_X) \cong \mathcal{T}^\star U_X$, et p restreinte à $p^{-1}(U_X)$ s'identifie via l'homéomorphisme précédent à la projection $p_X : \mathcal{T}^\star U_X \to U_X$. Par conséquent,

$$p_\star \mathcal{O}_{\mathcal{T}^\star \mathbb{P}^1}|_{U_X} \cong p_{X\star} \mathcal{O}_{\mathcal{T}^\star U_X}$$

Or, on sait que l'on a :

$$\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{U_X}) = \widetilde{\mathbb{C}[x,\partial_x]} \cong p_\star \mathcal{O}_{\mathcal{T}^\star U_X}$$

Ainsi, par les isomorphismes (1) et (2), on a un isomorphisme induit

$$\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1})|_{U_X} \cong p_\star \mathcal{O}_{\mathcal{T}^\star \mathbb{P}^1}|_{U_X}$$

On a le même raisonnement pour U_Y, et les morphismes coïncident sur U_{XY}. En effet, sur U_X le morphisme est induit par l'identité de $\mathbb{C}[x,\partial_x]$. Sur U_Y, c'est l'identité de $\mathbb{C}[x^{-1},\partial_{x^{-1}}]$, et les deux se restreignent par localisation en l'identité de $\mathbb{C}[x,x^{-1},\partial_x]$.

On a donc un unique morphisme de faisceaux :

$$\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}) \to p_\star \mathcal{O}_{\mathcal{T}^\star \mathbb{P}^1}$$

qui coïncide avec les morphismes précédents par restriction à U_X ou U_Y. Le morphisme est localement un isomorphisme, donc est un isomorphisme. □

Le théorème suivant décrit la structure de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ en tant que faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres :

Théorème 3.11. *On a un isomorphisme de faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres graduées (et de $\mathcal{O}_X$-modules) :*

$$\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1} \cong T_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, \mathscr{V}_{\mathbb{P}^1}; \mathcal{R})$$

Où le membre de droite désigne le faisceau associé au préfaisceau qui à U associe l'algèbre tensorielle sur les mots $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U)$,$\mathscr{V}_{\mathbb{P}^1}(U)$, avec les relations $\mathcal{R}$ suivantes pour $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U)$ et $\partial \in \mathscr{V}_{\mathbb{P}^1})(U)$:

$$\begin{aligned} f \otimes \partial &= f\partial \\ f \otimes \partial - \partial \otimes f &= \partial(f) \\ \partial \otimes \partial' - \partial' \otimes \partial &= [\partial, \partial'] \end{aligned}$$

Démonstration. Notons $\mathcal{A}$ l'algèbre de droite. Les relations $\mathcal{R}$ sont satisfaites pour des sections locales de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ sur U_X et U_Y, donc sur tout ouvert de $\mathbb{P}^1$, et on a par propriété universelle de l'algèbre tensorielle, un morphisme

$$\mathcal{A} \to \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$$

Comme les champs de vecteurs sont d'ordre 1 et les homotéthies d'ordre 0, ce morphisme respecte les graduations naturelles sur $\mathcal{A}$ et sur $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$, et le morphisme entre les gradués est le morphisme entre $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1})$ et $p_\star \mathcal{O}_{\mathcal{T}^\star \mathbb{P}^1}$ qui est un isomorphisme par le théorème 3.10. □

3.3 $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-modules

Définition 3.12. Un $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module M à gauche est un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module *quasi-cohérent* tel que pour chaque U ouvert de $\mathbb{P}^1$, $M(U)$ est muni d'une structure de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(U)$-module à gauche compatible avec la structure de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U)$-module, telle que pour toute inclusion $V \subseteq U$, tout $L \in \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(U)$ et tout $m \in M(U)$ on ait :

$$(Lm)_{|V} = L_{|V} m_{|V}.$$

Un morphisme entre $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-modules est un morphisme entre les $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-modules sous-jacents qui soit $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(U)$ linéaire sur chaque ouvert U.

On dispose ainsi de la catégorie $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ - Mod^ℓ. C'est naturellement une catégorie abélienne et le foncteur d'inclusion $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1} - \mathrm{Mod}^\ell \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} - \mathrm{Mod}^\ell$ est exact.

Comme corollaire du théorème 3.2, on peut reformuler la notion de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ en termes d'action des champs de vecteurs sur un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module quasi-cohérent.

Corollaire 3.13. *Soit M un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module quasi-cohérent et un morphisme de faisceaux :*

$$\mathscr{V}_{\mathbb{P}^1} \times M \longrightarrow M$$

qui à des sections locales ∂, m associe $\partial \cdot m$. Alors, il existe une unique structure de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module sur M qui prolonge l'action des champs de vecteurs sur M si et seulement si on a les relations $\mathcal{R}$, c'est à dire pour chaque sections locales $\partial, \partial', f, m$ des faisceaux respectifs,

$$\begin{aligned} (f \otimes \partial)m &= (f\partial)m \\ (f \otimes \partial - \partial \otimes f)m &= (\partial(f))m \\ (\partial \otimes \partial' - \partial' \otimes \partial)m &= [\partial, \partial']m \end{aligned}$$

et si de plus celle-ci est $\mathbb{C}$-linéaire et compatible avec l'action de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, au sens où

$$\partial(fm) = (\partial(f))m$$

Remarque 3.14. Les $\mathcal{D}$-modules sont reliés à l'étude des équations différentielles linéaires. Par exemple, sur $\mathbb{A}^2$, le $\mathcal{D}$-module $M = \mathcal{D}_{\mathbb{A}^2}/((\partial_x^2 + \partial_y^2 - g))$ avec $g \in \mathbb{C}[X, Y]$ est relié aux solutions de l'équation aux dérivées partielles $\Delta f = g$ de la façon suivante. Considérons un $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^2}$-module E où l'on cherche les solutions de notre équation, typiquement $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}$. Alors les morphismes de $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^2}$-modules $M \longrightarrow E$ de $\mathcal{D}$-modules s'identifient aux solutions de l'équation $\Delta f = g$. Comme expliqué dans [8], c'est une des raisons historiques de l'introduction des $\mathcal{D}$-modules. On y trouvera d'ailleurs des applications de cette idée avec la notion de polynome de Bernstein-Sato, qui permet notamment une démonstration du théorème de Malgrange-Ehrenpreis sur l'existence de solutions fondamentales à des équations aux dérivées partielles.

4 $\mathbb{P}^1$ est $\mathcal{D}$-affine

Il existe une notion plus générale de $\mathcal{D}$-modules sur des schémas au dessus de $\mathbb{C}$ autres que $\mathbb{P}^1$, et si X est un schéma (intègre de type fini sur $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$) dont on peut définir le faisceau d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_X$ de manière raisonnable (on ne cherche pas à préciser cette notion générale ici), on dit que X est *$\mathcal{D}$-affine* si le foncteur des sections globales :

$$\mathcal{D}_X - \mathrm{Mod} \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_X) - \mathrm{Mod}^{\ell}$$

est une équivalence de catégories, où $\mathcal{D}_X - \mathrm{Mod}$ est la catégorie des $\mathcal{D}$-modules sur X, c'est à dire des $\mathcal{D}_X$-modules quasi-cohérents. Ici la notation $^{\ell}$ désigne la catégorie des modules à gauche.
Le cas qui nous intéresse est celui de $\mathbb{P}^1$ et on va prouver le théorème suivant.

Théorème 4.1. *La droite projective complexe* $\mathbb{P}^1$ est $\mathcal{D}$-affine, c'est à dire que le foncteur :

$$\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1} - \mathrm{Mod} \xrightarrow{\Gamma} \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}) - \mathrm{Mod}^{\ell}$$

des sections globales est une équivalence de catégories.

4.1 Réduction du problème

On commence par formuler une proposition qui nous servira dans la discussion qui va suivre :

Proposition 4.2. Le morphisme de schémas $\pi : \mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow$ préserve la quasi-cohérence par image inverse (et directe). On renvoie à l'annexe pour la notion d'image directe et inverse de modules (paragraphe 6.7).

Démonstration. Il suffit de montrer que π vérifie les hypothèses du corollaire 6.51, c'est à dire qu'il existe un recouvrement du schéma d'arrivée par des ouverts affines d'image réciproque affine. C'est le cas pour puisque $\mathbb{P}^1 = U_X \cup U_Y$ et $\pi^{-1}(U_X) = D(X)$ et $\pi^{-1}(U_Y) = D(Y)$ sont des ouverts affines de $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$. □

Un outil important dans la preuve du théorème 4.1 est le théorème général suivant :

Théorème 4.3. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne localement petite avec toutes les petites colimites. On suppose que $\mathcal{A}$ possède un *générateur projectif*, c'est à dire un objet projectif P tel que, pour tout X objet de $\mathcal{A}$ tel que $\mathrm{Hom}(P,X) = 0$, on ait $X = 0$. On suppose aussi que $\mathrm{Hom}(P,\bullet)$ préserve les petites colimites. Alors, en notant $\Lambda = \mathrm{Hom}(P,P)$, le foncteur additif $\mathcal{A} \longrightarrow \Lambda - \mathrm{Mod}^r$ qui à X associe $\mathrm{Hom}(P,X)$ est une équivalence de catégories (ici $\Lambda - \mathrm{Mod}^r$ désigne la catégorie des Λ-modules à droite).

On en trouvera une preuve dans l'annexe, à la section 7.

Proposition 4.4. *Le foncteur* $\Gamma(\mathbb{P}^1,\cdot) : \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1} - \mathrm{Mod} \to \mathrm{Set}$ *est représenté par* $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$*, i.e on a une bijection naturelle en* M

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}-\mathrm{Mod}}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1},M) \cong \Gamma(\mathbb{P}^1,M)$$

Démonstration. En effet, on a des flèches bien définies, naturelles en M :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}-\mathrm{Mod}}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1},M) & \leftrightarrows & \Gamma(\mathbb{P}^1,M) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(\mathbb{P}^1)(1) \\ r \in \Gamma(U,\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}) \mapsto r\cdot s|_U & \longleftarrow & s \end{array}$$

et inverses l'une de l'autre. En effet, d'une part pour s section globale de M,

$$1 \cdot s|_{\mathbb{P}^1} = 1 \cdot s = s$$

et d'autre part, si φ est un morphisme de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ vers M $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-linéaire, on a pour r section de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ sur U :

$$\varphi(r) = \varphi(r1|_U) = r\varphi(1|_U) = r \cdot \varphi(1)|_U$$

□

De plus l'isomorphisme précédent induit un isomorphisme d'anneaux (en notant $\mathcal{D}(\mathbb{P}^1)$ l'anneau des sections globales de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$) :

$$\Lambda = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}-\mathrm{Mod}}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1},\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}) \cong \mathcal{D}(\mathbb{P}^1)^{\mathrm{op}}$$

En effet, id est envoyé sur 1 et si $\varphi,\psi : \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ sont deux morphismes on a :

$$(\varphi\circ\psi)(1) = \varphi(\mathbb{P}^1)(\psi(\mathbb{P}^1)(1)) = \psi(\mathbb{P}^1)(1)\varphi(\mathbb{P}^1)(1)$$

Ainsi, les catégories $\Lambda - \mathrm{Mod}^r$ et $\mathcal{D}(\mathbb{P}^1) - \mathrm{Mod}^\ell$ sont canoniquement isomorphes, et on en déduit la proposition suivante :

Proposition 4.5. *Sous l'identification des deux anneaux et catégories, le foncteur des sections globales*

$$\Gamma(\mathbb{P}^1,\cdot) : \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1} - \mathrm{Mod}^\ell \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{P}^1) - \mathrm{Mod}^\ell$$

s'identifie au foncteur

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1},\cdot) : \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1} - \mathrm{Mod}^\ell \longrightarrow \Lambda - \mathrm{Mod}^r$$

Démonstration. Soit M un $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module. Alors, $\Gamma(\mathbb{P}^1,M)$ est doté d'une structure naturelle de $\mathcal{D}(\mathbb{P}^1)$-module à gauche, et de Λ-module à droite. Il s'agit de montrer que la structure de Λ-module à droite sur $\Gamma(\mathbb{P}^1,M)$ coïncide avec la structure de Λ-module à droite induite par restriction des scalaires via l'isomorphisme :

$$\Lambda \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{P}^1)1.$$

On note $\cdot$ et $\cdot_{res}$ les deux actions. Le résultat découle alors du calcul suivant, pour $L \in \Lambda$ et $m \in \Gamma(\mathbb{P}^1,M)$:

$$L\cdot m \quad = \quad L(\mathbb{P}^1)(m) = L(\mathbb{P}^1)\cdot m = L\cdot_{res} m$$

Ce qui conclut la preuve.

□

On va donc appliquer le théorème 4.3. Pour cela on a d'abord besoin du résultat suivant :

Proposition 4.6. Le foncteur Γ préserve les petits coproduits.

Démonstration. Cela découle de la quasi-compacité de $\mathbb{P}^1$ et de la proposition 6.47. La quasi-compacité de $\mathbb{P}^1$ vient du fait qu'il admet un recouvrement par un nombre fini d'ouverts affines, eux-même quasi-compacts. □

Corollaire 4.7. *Par le théorème de prolongement appliqué à $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$, pour montrer que $\mathbb{P}^1$ est $\mathcal{D}$-affine il suffit de montrer que Γ est exact et que $\Gamma(\mathbb{P}^1, M) \neq 0$ pour M un $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module non nul.*

Démonstration. En effet, si Γ est exact et préserve les petits coproduits, alors Γ préserve toutes les petites colimites et on a tous les arguments pour appliquer le théorème 4.3. □

Tout $\mathcal{D}(\mathbb{P}^1)$-module est naturellement un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1)$-module, c'est-à-dire un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et le foncteur Γ est exact si et seulement si le foncteur

$$\Gamma^{\mathrm{ev}} : \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1} - \mathrm{Mod}^{\ell} \longrightarrow \mathbb{C} - \mathrm{Ev}$$

obtenu par composition avec le foncteur oubli, est exact.

Il s'agit donc d'exprimer de manière plus commode le foncteur Γ^{ev}. Pour cela, on va avoir besoin de généraliser la notion d'image réciproque et directe aux $\mathcal{D}$-modules.

4.2 Image directe d'un $\mathcal{D}$-module par j

On veut construire un foncteur image directe $j_\star$ sur les $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$-modules à partir du foncteur $j_\star$ déjà défini sur les $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$-modules. Vérifions d'abord que $j_\star$ preserve la quasi-cohérence. On va pour cela avoir besoin du lemme d'algèbre commutative suivant :

Lemme 4.8. *Soit A un anneau commutative, M, M', N trois A-modules,$f \in A$, et deux flèches $\psi : M \to N$, $\varphi : M' \to N$. Alors, on a un isomorphisme canonique de $A[f^{-1}]$-modules :*

$$(M \times_N M')[f^{-1}] \to M[f^{-1}] \times_{N[f^{-1}]} M'[f^{-1}]$$

où le produit fibré est effectué sur les deux flèches φ, ψ à gauche, et les flèches induites par fonctiorialité entre les localisés à droite.

Démonstration. On a une flèche canonique :

$$\Phi : (M \times_N M')[f^{-1}] \to M[f^{-1}] \times_{N[f^{-1}]} M'[f^{-1}]$$

qui a $f^{-n}(m, m')$ associe $(f^{-n}m, f^{-n}m')$, et il s'agit de montrer sa bijectivité.
Injectivité : Soit $f^{-n}(m, m')$ envoyé sur 0. Alors, on a dispose d'un entier $p > 0$ tel que dans N,

$$f^p m = f^p m' = 0$$

De sorte que :

$$f^{-n}(m, m') = f^{-n-p}(f^p m, f^p m') = 0$$

D'où l'injectivité de Φ.
Surjectivité : Soit $(mf^{-a}, m'f^{-b})$ un élément du produit fibré. On a par définition :

$$f^{-a}\varphi(m) = f^{-b}\psi(m') \quad \text{dans } N[f^{-1}].$$

Ainsi, on dispose de $p > 0$ tel que :

$$\varphi(f^{b+p}m) = f^{b+p}\varphi(m) = f^{a+p}\psi(m') = \psi(f^{a+p}m') \quad \text{dans } N.$$

Donc $(f^{b+p}m, f^{a+p}m')$ appartient à $M \times_N M'$. Dès lors, on peut écrire :

$$(f^{-a}m, f^{-b}m') = (f^{-p-a-b}f^{b+p}m, f^{-p-a-b}f^{a+p}m') = \Phi(f^{-p-a-b}(mf^{b+p}, m'f^{a+p}))$$

et Φ est surjective.

$\square$

Proposition 4.9. *Soit M un $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$-module quasi-cohérent. Alors, l'image directe de M par j est un module quasi-cohérent sur $\mathbb{A}^2$.*

Démonstration. Notons M_X, M_Y, M_{XY} les modules respectifs $M(D(X)), M(D(Y))$ et $M(D(XY))$. Il s'agit de vérifier, pour $f \in \mathbb{C}[X,Y]$, que :

$$\Gamma(j_\star M, D(f)) = \Gamma(j_\star M, \mathbb{A}^2)\left[f^{-1}\right]$$

Or, on a :

$$\Gamma(j_\star M, D(f)) = \Gamma(M, D(f) \cap D(X,Y)) = \Gamma(M, D(fX, fY)) = M(D(fX)) \times_{M(D(fXY))} M(D(fY)).$$

Comme M est quasi-cohérent sur $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$, et car $D(X)$ est un ouvert affine de $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$, on a en tant que $\mathbb{C}[X,Y,X^{-1},f^{-1}]$-module :

$$\begin{aligned}
\Gamma(M, D(fX)) &= \Gamma(M, D(fX) \cap D(X)) \\
&= M_X\,[(Xf)^{-1}] \\
&= M_X \otimes_{\mathbb{C}[X,Y]} \mathbb{C}[X,Y,X^{-1},f^{-1}] \\
&= M_X \otimes_{\mathbb{C}[X,Y]} \mathbb{C}[X,Y,X^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[X,Y]} \mathbb{C}[X,Y,f^{-1}] \\
&= M_X \otimes_{\mathbb{C}[X,Y]} \mathbb{C}[X,Y,f^{-1}] \quad \text{car } M_X \text{ est un } \mathbb{C}[X,Y,X^{-1}]-\text{module.} \\
&= M_X\left[f^{-1}\right].
\end{aligned}$$

On peut faire le même calcul pour M_Y et M_{XY}, de sorte que l'on se ramène à montrer que :

$$M_X \times_{M_{XY}} M_Y\left[f^{-1}\right] = M_X\left[f^{-1}\right] \times_{M_{XY}[f^{-1}]} M_Y\left[f^{-1}\right].$$

On applique alors le lemme 4.8 pour conclure. $\square$

On peut ainsi définir le foncteur $j_\star$ sur les $\mathcal{D}$-modules :

Définition 4.10 (Foncteur $j_\star$). *Soit $j : \mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ l'inclusion. On a un foncteur, appelé foncteur image directe :*

$$j_\star : \mathcal{D}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}} - \mathrm{Mod}^\ell \quad \to \quad \mathcal{D}_{\mathbb{A}^2} - \mathrm{Mod}^\ell$$

qui à un $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$-module M associe le module $j_\star M$, quasi-cohérent d'après la proposition 4.9, avec l'action suivante des opérateurs différentiels sur un ouvert U :
Si $L \in \mathcal{D}_{\mathbb{A}^2}(U)$, $m \in \Gamma(j_\star M, U)$,

$$L \cdot m = L|_{U \cap \mathbb{A}^2\setminus\{0\}} \cdot m \quad (\star).$$

Le $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^2}$-module $j_\star M$ est donc l'image directe du $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$-module M, avec la structure additionnelle de $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^2}$-module donnée par $(\star)$. L'action de $j_\star$ sur les flèches est inchangée.

4.3 Image réciproque d'un $\mathcal{D}$-module par π

On dispose aussi de la projection canonique :

$$\pi : \mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1$$

et on aimerait définir un foncteur :

$$\pi^\star : \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1} - \mathrm{Mod}^\ell \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}} - \mathrm{Mod}^\ell$$

qui serait compatible avec la définition du foncteur $\pi_\star$ défini sur les $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-modules.

Il s'agit donc, pour M un $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1} - \mathrm{Mod}^\ell$ module, de mettre une structure naturelle de $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$-module sur le $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$-module :

$$\pi^\star M = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} \pi^{-1} M$$

Pour cela, il suffit de spécifier une action des champs de vecteurs sur $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ sur $\pi^\star M$, qui soit $\mathbb{C}$-linéaire et qui vérifie les relations usuelles $\mathcal{R}$.

Dans toute la suite, U désigne un des deux ouverts affines U_X, U_Y de $\mathbb{P}^1$ et f, g, ∂ désignent respectivement des sections de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}, \pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ et $\mathscr{V}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$ sur $\pi^{-1}(U)$ (égal à $D(X)$ ou $D(Y)$) et m est une section de M sur U.
D'abord, π induit un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$-module :

$$\pi_\star : \mathscr{V}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} \pi^\star \mathscr{V}_{\mathbb{P}^1} = \pi^\star(\mathscr{V}_{\mathbb{P}^1})$$

En effet, par définition de π on a un morphisme :

$$\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$$

qui s'écrit

$$t \longmapsto \frac{Y}{X}$$

sur l'ouvert $D(X)$. Ce dernier morphsime induit une flèche $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}(D(X))$ linéaire :

$$\pi^\star(\Omega^1_{\mathbb{P}^1/\mathbb{C}})(D(X)) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}(D(X)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U_X)} \Omega^1_{\mathbb{P}^1/\mathbb{C}}(U_X) \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}/\mathbb{C}}(D(X))$$

Qui s'écrit :

$$dt \longmapsto d\left(\frac{Y}{X}\right) = X^{-1}dY + X^{-2}Y dX.$$

Enfin, par dualité on obtient un morphisme :

$$\mathscr{V}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}(D(X)) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}(D(X)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U_X)} \mathscr{V}_{\mathbb{P}^1}(U_X) = \pi^\star(\mathscr{V}_{\mathbb{P}^1})(D(X))$$

qui s'écrit explicitement :

$$\partial_X \longmapsto X^{-2}Y\partial_t \qquad \partial_Y \longmapsto X^{-1}\partial_t.$$

On procède de la même manière sur les ouverts $D(Y)$, $D(X) \cap D(Y)$. Les morphismes construits étant compatibles aux restrictions, on a un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$-modules :

$$\pi_\star : \mathscr{V}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} \pi^{-1}\mathscr{V}_{\mathbb{P}^1} = \pi^\star(\mathscr{V}_{\mathbb{P}^1})$$

D'autre part, la structure de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ module sur M fournit un morphisme de faisceaux :

$$\begin{array}{ccc} \pi^\star\mathscr{V}_{\mathbb{P}^1} \times \pi^\star M & \longrightarrow & \pi^\star M \\ f \otimes \partial, m & \longmapsto & (f \otimes \partial) \cdot m := f \otimes \partial m \end{array} .$$

Ce dernier est bien défini car on a l'identité :

$$fg \otimes \partial m = f \otimes g\partial m$$

Proposition 4.11. *Pour toute section L de $\pi^\star \mathscr{V}_{\mathbb{P}^1}$ sur U, on a :*

$$L(gm) = gL(m) + L(g)\cdot m$$

où $L(g)$ est vu comme élément de $\pi^\star\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} \pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$, qui agit naturellement sur le $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$-module $\pi^\star M$.

Démonstration. Cela découle du calcul

$$(f\otimes\partial)(gm) = f\otimes\partial gm = g(f\otimes\partial)m + (f\otimes\partial(g)m) = g(f\otimes\partial)m + ((f\otimes\partial)(g))m$$

pour f,g,m,∂ sections sur U des faisceaux respectifs. □

De même, $\mathscr{V}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$ agit naturellement sur le $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$-module $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$. Ainsi, on peut définir une action des champs de vecteurs :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{V}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}} \times \pi^\star M & \longrightarrow & \pi^\star M \\ \partial, f\otimes m & \longmapsto & \partial f\otimes m + f\cdot\pi_\star(\partial)(m) \end{array}$$

Lemme 4.12. *On a la relation suivante :*

$$\partial(fg)\otimes m + f\cdot\pi_\star(\partial)m = \partial f\otimes gm + f\otimes\pi_\star(\partial)(gm)$$

Démonstration. On calcule :

$$\begin{array}{rcl} \partial(fg)\otimes m + f\cdot\pi_\star(\partial)m & = & (f\partial g + g\partial f)\otimes m + f\cdot\pi_\star(\partial)m \\ & = & f\cdot\partial(g)\otimes m + \partial(f)g\otimes m + fg\cdot\pi_\star(\partial)m \\ & = & f\otimes\partial(g)m + \partial f\otimes gm + f\cdot g\pi_\star(\partial)m \\ & = & \partial f\otimes gm + f\otimes(\partial(g)m + \pi_\star(\partial)m) \\ & = & \partial f\otimes gm + f\otimes\pi_\star(\partial)(gm) \end{array}$$

□

Théorème 4.13. *L'action de $\mathscr{V}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$ ainsi définie sur $\pi^\star M$ est $\mathbb{C}$-linéaire, et vérifie les relations $\mathcal{R}$. Elle induit donc une unique structure de $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$-module sur $\pi^\star M$ qui étend l'action des champs de vecteur.*

Démonstration. Cela découle des calculs suivants :

1. Comme les opérateurs ∂ sont $\mathbb{C}$-linéaires on a pour λ complexe :

$$\partial(\lambda(f\otimes m)) = \partial(\lambda f)\otimes m + \lambda f\otimes\pi_\star(\partial)m = \lambda(\partial(f)\otimes m + \lambda f\otimes\pi_\star(\partial)m) = \lambda\partial(f\otimes m)$$

2. Puisque $\pi_\star$ est $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$-linéaire :

$$(h\partial)(f\otimes m) = ((h\partial)f)\otimes m + f\pi_\star(h\partial)m) = h(\partial(f\otimes m)) + fh\pi_\star(\partial)(m) = h(\partial(f\otimes m))$$

.

3. On a :

$$\begin{array}{rcl} h(\partial(f\otimes m)) - \partial(h(f\otimes m)) & = & h\partial f\otimes m + hf\cdot\pi_\star(\partial)(m) - \partial(hf)\otimes m - hf\otimes\pi_\star(\partial)(m) \\ & = & f\partial(h)\otimes m \\ & = & \partial(h)(f\otimes m) \end{array}$$

4. Montrons que

$$\partial(\partial'(f\otimes m)) - \partial'(\partial(f\otimes m)) = [\partial,\partial'](f\otimes m) \quad (\star)$$

Sans perte de généralité, on peut supposer $U = U_X = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[t]$ et $\partial = \partial_X, \partial' = \partial_Y$, de sorte que l'identité $(\star)$ découle du calcul suivant :

$$\begin{array}{rcl} \partial_Y(\partial_X(f\otimes m)) - \partial_X(\partial_Y(f\otimes m)) & = & \partial_Y(\partial_X f\otimes m + f\pi_\star(\partial_X)m) - \partial_X(\partial_Y f\otimes m + f\pi_\star(\partial_Y)m) \\ & = & \partial_Y(\partial_X f m - fYX^{-2}\partial_t m) - \partial_X((\partial_Y f)m + fX^{-1}\partial_t m) \\ & = & (\partial_X f X^{-1} - \partial_Y(fYX^{-2}) - \partial_X(fX^{-1}) + \partial_Y f X^{-2}Y)\partial_t m + (fX^{-3}Y - fX^{-3}Y)\partial_t^2 m \\ & = & 0 \end{array}$$

D'autre part,on a aussi $[\partial_Y, \partial_X](f\otimes m) = 0$, d'où l'identité $(\star)$.

□

4.4 Expression de Γ^{ev}

Définition 4.14. *Soit L un opérateur différentiel sur $\mathbb{A}^2$. On a un foncteur :*

$$\begin{array}{rcccl} L^{\text{inv}} & : & \mathcal{D}(\mathbb{A}^2) - \text{Mod}^\ell & \longrightarrow & \mathbb{C} - \text{Ev} \\ & & M & \longmapsto & M^L = \text{Ker}(L : M \mapsto M) \end{array}$$

où L est vue comme un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire du $\mathbb{C}$-espace vectoriel sous-jacent au $\mathbb{C}[X,Y]$-module M. Tout application $\mathcal{D}(\mathbb{A}^2)$-linéaire f entre $\mathcal{D}(\mathbb{A}^2)$-modules induit par restriction et corestriction une application $\mathbb{C}$-linéaire

$$f^L : M^L \longrightarrow N^L$$

Car si $x \in M^L$, on a

$$Lf(x) = f(Lx) = f(0) = 0$$

donc $f(x) \in N^L$, et l'application induite est clairement $\mathbb{C}$-linéaire.

Théorème 4.15. *Soit M un $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module. On a un isomorphisme naturel en M :*

$$\Gamma^{\text{ev}}(\mathbb{P}^1, M) \cong \Gamma(\mathbb{A}^2, j_\star(\pi^\star(M)))^{\mathcal{E}}$$

où $\mathcal{E}$ désigne le champ de vecteur $x\partial_x + y\partial_y$.

Avant de passer à la preuve proprement dite, on a besoin de quelques lemmes utiles pour le calcul :

Lemme 4.16. *On a un isomorphisme de faisceau de $\pi_\star\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$-modules :*

$$\pi_\star\pi^\star M \cong \pi_\star(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} M$$

naturel en M.

Démonstration. Remarquons d'abord que :

$$\text{Hom}_{\pi_\star\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}}(\pi_\star(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} M, \pi_\star\pi^\star M) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(M, \pi_\star\pi^\star M) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}}(\pi^\star M, \pi^\star M)$$

via les différentes adjonctions. En remontant l'identité de $\pi^\star M$ on obtient donc un morphisme naturel de $\pi_\star\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$-modules (en particulier de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-modules) :

$$\pi_\star(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} M \longrightarrow \pi_\star\pi^\star M$$

Par quasi-cohérence, il suffit de vérifier que c'est un isomorphisme au niveau des sections sur U_X et U_Y. Or :

$$\left(\pi_\star(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} M\right)(U_X) = \mathbb{C}[X,Y,1/X] \otimes_{\mathbb{C}[Y/X]} M(U_X)$$

par quasi-cohérence de M et par la proposition 6.46. Ensuite :

$$(\pi_\star\pi^\star M)(U_X) = (\pi^\star M)(D(X)) = M(U_X) \otimes_{\mathbb{C}[Y/X]} \mathbb{C}[X,Y,1/X]$$

car le $\pi^\star$ d'un module quasi-cohérent sur un ouvert affine correspond à une extension des scalaires ; on utilise ici la propriété 6.46 implicitement. De même pour $D(Y)$. Avec cette identification, le morphisme construit est bien l'identité. □

Lemme 4.17. *En tant que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module,*

$$\pi_\star\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}} \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}(n).$$

Démonstration. Pour $U = D_+(f)$ un ouvert standard de $\mathbb{P}^1$, avec f homogène non constant, l'inclusion $\mathbb{C}[X,Y,1/f]_n \longrightarrow \mathbb{C}[X,Y,1/f]$ est un morphisme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U)$-linéaire $\mathcal{O}(n)(U) \longrightarrow \pi_\star\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}(U)$, qui est naturel vis à vis des restrictions d'ouverts standards. On a donc un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module $\mathcal{O}(n) \longrightarrow \pi_\star\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$. On en déduit un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}(n) \longrightarrow \pi_\star\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}$ qui est clairement un isomorphisme sur les fibres (pour $x \in \mathbb{P}^1$, c'est le morphisme $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(S_{(x)}^{-1})\mathbb{C}[X,Y]_n \xrightarrow{\sim} S_{(x)}^{-1}(\mathbb{C}[X,Y])$ donc un isomorphisme. □

On prouve maintenant le théorème 4.15.

Démonstration. Soit M un $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module. On a :

$$\begin{array}{rcll}
\Gamma(\mathbb{A}^2, j_\star(\pi^\star(M))) & = & \Gamma(\mathbb{A}^2\setminus\{0\}, \pi^\star(M)) & \\
& = & \Gamma(\mathbb{P}^1, \pi_\star(\pi^\star(M))) & \\
& \cong & \Gamma\left(\mathbb{P}^1, \pi_\star\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} M\right) & \text{Par le lemme 4.16} \\
& \cong & \Gamma\left(\mathbb{P}^1, \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}(n)\right) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} M\right) & \text{Par le lemme 4.17} \\
& = & \Gamma\left(\mathbb{P}^1, \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{O}(n) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} M)\right) & \\
& = & \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} M) & \text{Par la proposition 6.47}
\end{array}$$

et l'isomorphisme obtenu

$$\Gamma(\mathbb{A}^2, j_\star(\pi^\star(M))) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} M) \quad (\star)$$

est naturel en M car les isomorphismes utilisés le sont.

Montrons désormais que pour $n \in \mathbb{Z}$, sous l'identification précédente,

$$\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} M) = \Gamma(\mathbb{A}^2, j_\star\pi^\star(M))^{\mathcal{E}-n}$$

Comme on a une décomposition en somme directe $(\star)$, il suffit de montrer que $\mathcal{E}$ agit comme une homothétie de rapport n sur $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} M)$:

Montrons d'abord que $\pi_\star\mathcal{E} = 0$. Dans la carte U_X, l'opérateur $\pi_\star\mathcal{E}$ est nul : en effet, soit $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U_X)$, f est un polynôme en $t = Y/X$, et on a :

$$(X\partial_X + Y\partial_Y)(f) = -Xf'(t)Y/X^2 + Yf'(t)/X = 0$$

Par affinité de U_X, la nullité de $(\pi_\star\mathcal{E})_{|U_X}$ équivaut au fait qu'il agisse comme 0. On raisonne de la même façon dans l'autre carte, et par la propriété de faisceau on a donc $\pi_\star\mathcal{E} = 0$. Soit maintenant $f \otimes m \in \Gamma(U_X, \mathcal{O}(n) \otimes M)$ (ces éléments génèrent $\Gamma(U_X, \mathcal{O}(n) \otimes M)$ par la propriété 6.46). On a :

$$(\pi_\star\mathcal{E})(f \otimes m) = \mathcal{E}(f) \otimes m + f \cdot \pi_\star(\mathcal{E})(m) = \mathcal{E}(f) \otimes m = nf \otimes m$$

car on vérifie immédiatement que $X\partial_X + Y\partial_Y$ agit comme $n\,\mathrm{id}$ sur les polynômes homogènes de degré n (avec éventuellement des dénominateurs en X). Sur la carte U_Y le raisonnement est le même et donc par la propriété de faisceau c'est aussi vrai sur les sections globales : $\mathcal{E}$ agit comme une homothétie de rapport n sur $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n) \otimes M)$.

□

Corollaire 4.18. *Pour résumer, à un isomorphisme de foncteur près, on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}-\mathrm{Mod}^\ell \arrow[r, "\pi^\star"] \arrow[d, equal] & \mathcal{D}_{\mathbb{A}^2\setminus\{0\}}-\mathrm{Mod}^\ell \arrow[r, "j_\star"] & \mathcal{D}_{\mathbb{A}^2}-\mathrm{Mod}^\ell \arrow[r, "\Gamma"] & \mathcal{D}(\mathbb{A}^2)-\mathrm{Mod}^\ell \arrow[r, "\mathcal{E}^{\mathrm{inv}}"] & \mathbb{C}-\mathrm{Ev} \arrow[d, equal] \\
\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}-\mathrm{Mod}^\ell \arrow[rr, "\Gamma"] & & \mathcal{D}(\mathbb{P}^1)-\mathrm{Mod}^\ell \arrow[rr, "oubli"] & & \mathbb{C}-\mathrm{Ev}
\end{tikzcd}$$

4.5 $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^2}$-modules supportés sur 0

On fixe M un $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^2}$-module. Par définition, M est un $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}$-module quasi-cohérent, notons encore M le $\mathbb{C}[X,Y]$-module sous-jacent. Soit $\mathcal{E}$ le champ de vecteurs $x\partial_x + y\partial_y$, brave dérivation. L'opérateur $\mathcal{E}$ agit $\mathbb{C}$-linéairement sur M. Notons $E_\lambda(\mathcal{E})$ l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lemme 4.19. *On a :*

$$\forall n, m \geq 0 \quad x^n y^m E_\lambda(\mathcal{E}) \subset E_{\lambda+n+m}(\mathcal{E})$$

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $n = 1, m = 0$. Soit $m \in E_\lambda(\mathcal{E})$. On a :

$$\mathcal{E}(xm) = (x\partial_x + y\partial_y)xm = (x^2\partial_x + x + xy\partial_y)m = x\mathcal{E}m + xm = (\lambda+1)xm$$

Donc $xm \in E_{\lambda+1}(\mathcal{E})$. □

Théorème 4.20. *Si M est supporté sur* 0, *alors les valeurs propres de $\mathcal{E}$ sur M sont entières et strictement négatives.*

Démonstration. On a $0 = V(X,Y)$, donc si M est supporté sur 0, tout polynôme non nul agit de manière localement nilpotente sur M.

Fixons $m \in M$ un vecteur propre de $\mathcal{E}$ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme x et y agissent de manière localement nilpotente, il existe $a \geq 0$ maximal tel que $x^a m \neq 0$, puis b maximal tel que $y^b x^a m \neq 0$, et $d = a + b \geq 0$ On a :

$$y^b x^a m \in E_{\lambda+d}$$

Ainsi,

$$(\lambda+d)y^b x^a m = \mathcal{E}(y^b x^a m) = (x\partial_x + y\partial_y)(y^b x^a m) = (\partial_x x + \partial_y y - 2)(y^b x^a m) = -2y^b x^a m$$

Mais, $y^b x^a m \neq 0$, donc,

$$\lambda = -d - 2$$

Ce qui conclut la preuve.

□

4.6 Exactitude de Γ

Proposition 4.21. Le foncteur $M \mapsto \Gamma(\mathbb{A}^2, j_\star\pi^\star M)^{\mathcal{E}}$ est exact. En particulier, par le corollaire 4.18, le foncteur $\Gamma(\mathbb{P}^1, \bullet)$ est exact sur les $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-modules.

Démonstration. Soit $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-modules. Le foncteur $\pi^\star$ est un adjoint à gauche donc exact à droite. Il est aussi exact à gauche : le morphisme $M_1(U_X) \longrightarrow M_2(U_X)$ est injectif car Γ est exact à gauche, et $\pi^\star M_1(D(X)) \longrightarrow \pi^\star M_2(D(X))$ est injectif par tensorisation par le $\mathbb{C}[Y/X]$-module *plat* $\mathbb{C}[X, Y, 1/X]$. Ainsi, en localisant en tout $z \in D(X)$, on tensorise encore par un module plat donc $(\pi^\star M_1)_z \longrightarrow (\pi^\star M_2)_z$ est injective. On raisonne de la même façon pour $z \in D(Y)$, et donc la suite :

$$0 \longrightarrow \pi^\star M_1 \longrightarrow \pi^\star M_2 \longrightarrow \pi^\star M_3 \longrightarrow 0$$

est exacte. Ensuite, $j_\star$ est un adjoint à droite donc est exact à gauche, et ainsi on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow j_\star\pi^\star M_1 \longrightarrow j_\star\pi^\star M_2 \longrightarrow j_\star\pi^\star M_3 \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

où L est le conoyau de $j_\star\pi^\star M_2 \longrightarrow j_\star\pi^\star M_3$. Remarquons que pour tout $z \in \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(j_\star\pi^\star M_2)_z \arrow[r] \arrow[d, equal] & (j_\star\pi^\star M_3)_z \arrow[d, equal] & \\
(\pi^\star M_2)_z \arrow[r] & (\pi^\star M_3)_z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

puisque z est dans le sous-schéma ouvert $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ de $\mathbb{A}^2$. Ainsi $L_z = 0$ et donc L est un $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^2}$-module *supporté sur* 0.
Ainsi, par le théorème 4.20 les valeurs propres de $\mathcal{E}$ sur $\Gamma(\mathbb{A}^2, L)$ sont *strictement négatives*. Par exactitude de Γ sur les modules quasi-cohérents ($\mathbb{A}^2$ étant affine), on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathbb{A}^2, j_\star\pi^\star M_1) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{A}^2, j_\star\pi^\star M_2) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{A}^2, j_\star\pi^\star M_3) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{A}^2, L) \longrightarrow 0$$

Ensuite, $\mathcal{E}$ est diagonalisable sur les trois premiers termes de la suite exacte donc aussi sur le dernier, et prendre les espaces propres de $\mathcal{E}$ sur des $\mathbb{C}[X, Y]$-modules sur lesquels il est diagonalisable est exact, donc on a un suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathbb{A}^2, j_\star\pi^\star M_1)^{\mathcal{E}} \longrightarrow \Gamma(\mathbb{A}^2, j_\star\pi^\star M_2)^{\mathcal{E}} \longrightarrow \Gamma(\mathbb{A}^2, j_\star\pi^\star M_3)^{\mathcal{E}} \longrightarrow \Gamma(\mathbb{A}^2, L)^{\mathcal{E}} \longrightarrow 0$$

et le dernier terme est nul car les valeurs propres de $\mathcal{E}$ sur $\Gamma(\mathbb{A}^2, L)$ sont strictement négatives. Ceci conclut la preuve.

□

4.7 Si $M \neq 0$, alors $\Gamma(\mathbb{P}^1, M) \neq 0$

Soit M un $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module non nul. On veut voir que $\Gamma(\mathbb{P}^1, M) \neq 0$.

Lemme 4.22. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $\Gamma(\mathbb{P}^1, M \otimes \mathcal{O}(n)) \neq 0$.

Démonstration. En effet, on a $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n) \otimes M) = \Gamma(\mathbb{A}^2, j_\star\pi^\star(M))^{\mathcal{E}-n}$. Supposons le contraire. On a donc :

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(\mathbb{P}^1, M \otimes \mathcal{O}(n)) = 0$$

et donc $\Gamma(\mathbb{A}^2, j_\star\pi^\star M) = 0$ puisque c'est le même module. Or $j_\star\pi^\star M$ est *quasi-cohérent* donc $j_\star\pi^\star M = 0$, et donc en restreignant à $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ on obtient $\pi^\star M = 0$. En particulier :

$$\begin{aligned}
0 &= \Gamma(D(X), \pi^\star M) \\
&= \Gamma(D(X), (\pi^\star M)_{|D(X)}) \\
\\
&= \Gamma(D(X), \pi^0_{|U_X}(M_{|U_X}) \quad \text{par la proposition 6.50} \\
&= \Gamma(U_X, M_{|U_X}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U_X)} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(D(X)) \quad \text{par quasi-cohérence de } M
\end{aligned}$$

Or $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(D(X)) = \mathbb{C}[X, Y, 1/X]$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U_X) = \mathbb{C}[Y/X]$ donc $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(D(X))$ est libre donc fidèlement plat en tant que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U_X)$-module (en effet, $\mathbb{C}[X, Y, 1/X] = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}[Y/X]X^n$). On a donc $\Gamma(U_X, M) = 0$. De même avec l'autre carte : $\Gamma(U_Y, M) = 0$. En partculier pour tout $x \in \mathbb{P}^1 = U_X \cup U_Y$ on a $M_x = 0$ par quasi-cohérence car c'est une localisation d'un anneau nul. C'est absurde car $M \neq 0$ par hypothèse. ☐

Proposition 4.23. On a $\Gamma(\mathbb{P}^1, M) \neq 0$.

Démonstration. Donnons nous un n minimal en valeur absolue tel que $\Gamma(\mathbb{P}^1, M \otimes \mathcal{O}(n)) \neq 0$, dont l'existence est assurée par le lemme précédent. On a donc $\Gamma(\mathbb{A}^2, j_\star\pi^\star M)^{\mathcal{E}-n} \neq 0$. Prenons donc m une section globale non nulle de $j_\star\pi^\star M$ telle que $\mathcal{E}m = nm$. On a :

$$\mathcal{E}(\partial_x m) = x\partial_x\partial_x m + y\partial_y\partial_x m = \partial_x x\partial_x m - \partial_x m + \partial_x y\partial_y m = \partial_x \mathcal{E}m - \partial_x m = (n-1)\partial_x m$$

donc $\partial_x m$ est associé à la valeur propre $n-1$. De même $\partial_y m$ est associé à la valeur propre $n-1$. Ainsi, si $n > 0$, ou bien l'un des $\partial_x m$ ou $\partial_y m$ est non nul auquel cas on a trouvé un élément non nul de $\Gamma(\mathbb{P}^1, M \otimes \mathcal{O}(n-1))$ et cela contredit la minimalité de n, ou bien les deux sont nuls et donc $\mathcal{E}m = 0$ et m étant non nul on a résolu le problème. Si $n < 0$, on utilise xm et ym qui font monter d'une valeur propre. Si xm et ym sont tous les deux nuls, alors $m_{|D(X)} = 0$ et $m_{|D(Y)} = 0$. On a alors $m_{|\mathbb{A}^2\setminus\{0\}} = 0$ car les deux ouverts $D(X)$ et $D(Y)$ recouvrent $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$, et donc $m = 0$ car $\Gamma(\mathbb{A}^2, j_\star\pi^\star M) = \Gamma(\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}, \pi^\star M) = \Gamma(\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}, j_\star\pi^\star M)$. ☐

Ceci conclut la preuve du théorème 4.1 sur la $\mathcal{D}$-affinité de $\mathbb{P}^1$.

5 Localisation de Beilinson-Bernstein pour $\mathbb{P}^1$

5.1 Lien entre $\mathcal{D}(\mathbb{A}^2)$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$

On considère la $\mathbb{C}[X, Y]$-algèbre (à gauche) $\mathcal{D}(\mathbb{A}^2)$ engendrée par $X, Y, \partial_X, \partial_Y$ que l'on gradue de la façon suivante : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, un opérateur L est dit *homogène de degré* k si pour tout $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ homogène, $L(f)$ est homogène de degré $k + \deg(f)$. On note $\mathcal{D}_k$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des opérateurs homogènes de degré k, dont une base est donnée par les $\underline{X}^\alpha\underline{\partial}^\beta$ avec α et β deux multiindices vérifiant $|\alpha| - \left|\beta\right| = k$. Cela définit une graduation d'algèbre et on dispose donc d'une algèbre quasi-cohérente sur $\mathbb{P}^1$ définie par $\widetilde{\mathcal{D}(\mathbb{A}^2)}$. Concrètement, sur un ouvert standard $D_+(f)$, l'algèbre $\Gamma(D_+(f), \widetilde{\mathcal{D}(\mathbb{A}^2)})$ est l'algèbre des opérateurs homogènes de degré 0 en $X, Y, 1/f$.

Proposition 5.1. On dispose d'une morphisme *surjectif* d'algèbres quasi-cohérentes sur $\mathbb{P}^1$:

$$\widetilde{\mathcal{D}(\mathbb{A}^2)} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow 0$$

Ainsi, à un opérateur de degré 0 sur $\mathbb{A}^2$ (avec potentiellement des dénominateurs) on pourra associer canoniquement un opérateur (local) sur $\mathbb{P}^1$. De plus, ce morphisme envoie $X\partial_Y$ sur ∂_t, et Y/X sur t dans la carte U_X avec $t = Y/X$. En notant également $u = X/Y$, il envoie aussi $Y\partial_X$ sur $\partial_u = -t^2\partial_t$. Notons que le champ de vecteurs $X\partial_X + Y\partial_Y$ est envoyé sur 0 donc ce n'est pas injectif.

Démonstration. Soit $U = D_+(f)$ un ouvert standard de $\mathbb{P}^1$, et soit $L \in \Gamma(D_+(f), \widetilde{\mathcal{D}(\mathbb{A}^2)})$. Pour tout $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U)$, i.e. g un polynôme homogène en X et Y de degré 0 avec éventuellement des dénominateurs en f^k, on a naturellement une action de L sur g et $L(g)$ est encore dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U)$ car L est de degré 0. Cela définit bien un opérateur sur $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(U)$.
Ensuite, dans la carte U_X, on calcule :

$$X\partial_Y(f(Y/X)) = f'(Y/X)$$

donc $X\partial_Y$ est envoyé sur l'opérateur ∂_t et Y/X est clairement envoyé sur l'opérateur t.
Ainsi le morphisme $\widetilde{\mathcal{D}(\mathbb{A}^2)} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ est surjectif sur la carte U_X et sur tout $D_+(f) \subseteq U_X$, et idem pour la carte U_Y, il est donc surjectif. □

5.2 L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Commençons par quelques rappels sur la notion d'algèbre de Lie.

Définition 5.2. Une *algèbre de Lie complexe* $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un espace vectoriel complexe $\mathfrak{g}$ muni d'un *crochet* $[\bullet,\bullet] : \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ antisymétrique et qui vérifie la relation de Jacobi : pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$ on a :

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

Étant donnée une algèbre associative complexe A, on lui associe une algèbre de Lie complexe $\mathrm{Lie}(A)$ dont l'espace sous-jacent est A et dont le crochet est défini par $[x,y] = xy - yx$, qui vérifie bien l'antisymétrie et la relation de Jacobi.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Une *représentation* de $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un espace vectoriel complexe V et d'un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathrm{L}(V))$. Autrement dit c'est la donnée d'une action $\mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$ que l'on note $x \cdot v$ pour $x \in \mathfrak{g}$ et $v \in V$, qui vérifie :

$$[x,y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$$

pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$ et $v \in V$. La représentation V est dite *irréductible* si il existe exactement deux sous-espaces de V stables par l'action de }.
Un sous-espace $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ stable par $[x,\bullet]$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ est appelé un *idéal* de $\mathfrak{g}$. De plus, $\mathfrak{g}$ est dite *simple* si son crochet n'est pas identiquement nul et si ses seuls idéaux sont 0 et $\mathfrak{g}$.

Si G est un groupe de Lie complexe, on peut identifier son espace tangent en l'identité à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs G-équivariants sur G, appelée *algèbre de Lie du groupe G*. On pourra se référer au livre de Humphreys [4] pour les détails.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ s'identifie à l'algèbre de Lie des matrices de $M_2(\mathbb{C})$ de trace nulle, et elle est engendrée linéairement par les éléments suivants :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a les relations $[E,F] = H$, $[H,E] = 2E$ et $[H,F] = -2F$.

Proposition 5.3. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est simple.

Démonstration. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal non nul de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Il suffit de montrer que $E \in \mathfrak{a}$, ou $F \in \mathfrak{a}$ ou $H \in \mathfrak{a}$ puisque chacun d'entre eux engendre l'idéal $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Prenons $aE + bF + cH \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$. En appliquant $\mathrm{ad}\, E$ on a $bH - 2cE \in \mathfrak{a}$. Si $b \neq 0$ on applique $\mathrm{ad}\, E$ et on obtient $H \in \mathfrak{a}$. Si $c \neq 0$ on applique $\mathrm{ad}\, H$ et on a $E \in \mathfrak{a}$. Enfin, si $b = c = 0$ et $a \neq 0$, alors $aE \in \mathfrak{a}$ donc $E \in \mathfrak{a}$. □

Définition 5.4. (Algèbre universelle enveloppante) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$. On appelle *algèbre universelle enveloppante* de $\mathfrak{g}$, notée $U(\mathfrak{g})$, l'objet initial de la catégorie des $\mathbb{C}$-algèbres associatives A munies d'un morphisme f d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Lie}(A)$. Dans cette catégorie, un morphisme $(A, f) \longrightarrow (B, g)$ est un morphisme d'algèbres associatives $u : A \longrightarrow B$ qui fait commuter le triangle u, f, g.
Autrement, dit, U définit un foncteur adjoint à gauche du foncteur :

$$\mathrm{Lie} : \mathbb{C} - \text{Algèbres Associatives} \longrightarrow \mathbb{C} - \text{Algèbres de Lie}$$

Lemme 5.5. Un tel objet initial existe et est donné par le quotient de l'algèbre tensorielle $T_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ par l'idéal bilatère engendré par les $a \otimes b - b \otimes a - [a, b]$ pour tous $a, b \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. Notons I l'idéal bilatère en question. On a un morphisme d'algèbres de Lie $i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Lie}(T(\mathfrak{g})/I)$ défini par $x \mapsto x$. Il s'agit bien d'un morphisme d'algèbres de Lie puisque l'obstruction à être un morphisme d'algèbres de Lie tombe dans l'idéal I. Ensuite, étant donné un morphisme d'algèbres de Lie $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Lie}(A)$ avec A une algèbre associative, on a un morphisme d'algèbres associatives :

$$T(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$$

par propriété universelle de T. Ce morphisme est nul sur I car f est un morphisme d'algèbres de Lie, et on a donc un morphisme :

$$u : T(\mathfrak{g})/I \longrightarrow A$$

qui fait commuter le triangle u, i, f. Un tel morphisme est unique par propriété universelle de T. $\square$

Proposition 5.6. La catégorie des représentations complexes de $\mathfrak{g}$ est équivalente à la catégorie des $U(\mathfrak{g})$-modules à gauche.

Démonstration. Une représentation de $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Lie}\,\mathrm{L}(V)$ pour V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et par propriété universelle de l'algèbre universelle enveloppante, une telle donnée équivaut à la donnée d'un morphisme d'algèbres associatives $U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{L}(V)$, autrement dit à la donnée d'une structure de $U(\mathfrak{g})$-module à gauche sur V. De plus, si V et W sont deux $U(\mathfrak{g})$-modules, un morphisme $V \longrightarrow W$ de $U(\mathfrak{g})$-modules est la même donnée qu'un morphisme de représentations entre V et W.
Ceci étant dit, il est facile de vérifier que cette correspondance donne bien une équivalence de catégories. $\square$

5.3 Action de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$

L'action du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1$ par homographies induit une action de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sur les fonctions sur $\mathbb{P}^1$. Concrètement, si $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U)$ et $a \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, on peut poser (au moins sur les points complexes) :

$$a(f)(z) = \frac{d}{ds}_{|s=0} f(e^{sa} \cdot z)$$

En voyant f comme un élément de $\mathbb{C}[X, Y, 1/g]_0$ avec $U = D_+(g)$, et z un point complexe de U comme $\pi(z_0)$ avec $z_0 \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, cela s'écrit :

$$a(f)(z_0) = df_{z_0}(a \cdot z_0)$$

Notons que ça ne dépend pas du représentant de z puisque $df_{\lambda z_0} = \frac{1}{\lambda} df_{z_0}$ car f est homogène de degré 0. Tout calcul fait, E agit comme l'opérateur $Y\partial_X$ et donc comme $\partial_u = -t^2\partial_t$, F agit comme l'opérateur $X\partial_Y$ donc comme ∂_t, et H agit comme $Y\partial_Y - X\partial_X$ c'est à dire $2t\partial_t = -2u\partial_u$. Ce sont des opérateurs globaux sur $\mathbb{P}^1$ (puisque quand on les change de carte ils restent bien définis), et donc puisque E, F et H engendrent linéairement $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ on a un morphisme d'algèbres de Lie qui se factorise par $\widetilde{\mathcal{D}(\mathbb{A}^2)}(\mathbb{P}^1)$:

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}(\mathbb{A}^2)}(\mathbb{P}^1) \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1)$$

Définition 5.7. Par propriété universelle de $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, ce morphisme induit un morphisme d'algèbres associatives que l'on note Φ :

$$\Phi : U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1).$$

Ce morphisme est caractérisé par :

$$\begin{aligned}\Phi(E) &= -t^2\partial_t = \partial_u\\ \Phi(F) &= \partial_t = -u^2\partial_u\\ \Phi(H) &= 2t\partial_t = -2u\partial_u\end{aligned}$$

5.4 Propriétés du morphisme Φ

Dans ce paragraphe, on cherche à montrer que Φ est surjectif et à calculer son noyau. Il s'avère très difficile de travailler avec des algèbres non commutatives, donc on va se ramener à un problème d'algèbre commutative en passant aux gradués.
Pour cela, on admet le théorème suivant, dont le lecteur pourra trouver une preuve dans le chapitre 5 du livre de Humphreys [4].

Théorème 5.8. (Poincaré-Birkhoff-Witt pour $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$) La famille $(E^iF^jH^k)_{i,j,k\geq 0}$ est une base de $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$.

Une conséquence intéressante est :

Proposition 5.9. On peut définir une filtration $F^nU(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ sur $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, avec $F^nU(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ engendré par les $E^iF^jH^k$ avec $i+j+k \leq n$. C'est une filtration d'anneau et le gradué $\operatorname{gr} U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre commutative $\mathbb{C}[E,F,H]$ en tant qu'algèbre graduée.

Remarquons que Φ préserve les filtrations. On peut alors étudier le morphisme induit :

$$\operatorname{gr}\Phi : \operatorname{gr} U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \longrightarrow \operatorname{gr}\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1)$$

pour comprendre Φ.

Notation 5.10. Pour alléger les notations, on pose :

$$\mathbb{C}[\mathcal{T}^\star\mathbb{P}^1] = \mathcal{O}_{\mathcal{T}^\star\mathbb{P}^1}(\mathcal{T}^\star\mathbb{P}^1)$$

qui est l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathcal{T}^\star\mathbb{P}^1$.

Par le théorème 3.10, on a un isomorphisme canonique d'algèbres graduées :

$$\operatorname{gr}\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{C}[\mathcal{T}^\star\mathbb{P}^1]$$

Sous ces identifications, le morphisme $\operatorname{gr}\Phi$ devient :

$$\begin{tikzcd} \operatorname{gr} U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \arrow[r, "\operatorname{gr}\Phi"] \arrow[d, equal] & \operatorname{gr}\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) \arrow[d, equal] \\ \mathbb{C}[E,F,H] \arrow[r, "\operatorname{gr}\Phi"'] & \mathbb{C}[\mathcal{T}^\star\mathbb{P}^1] \end{tikzcd}$$

On va à présent décrire l'algèbre $\mathbb{C}[\mathcal{T}^\star\mathbb{P}^1]$. Pour cela, on utilise le fait que $\mathcal{T}^\star\mathbb{P}^1$ est un schéma sur $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ recouvert par les ouverts affines $V_X = p^{-1}(U_X)$ et $V_Y = p^{-1}(U_Y)$ avec p la projection $\mathcal{T}^\star\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Les ouverts V_X et V_Y correspondent à la schématisation des plans vectoriels $V_X(\mathbb{C})$ et $V_Y(\mathbb{C})$ (voir théorème 6.24). On a $V_X = \mathcal{T}^\star U_X$ et $V_Y = \mathcal{T}^\star U_Y$ et ainsi $V_X(\mathbb{C}) = \mathbb{C}e_t \oplus \mathbb{C}dt$ et $V_Y(\mathbb{C}) = \mathbb{C}e_u \oplus \mathbb{C}du$. Ici e_t et e_u sont les vecteurs directeurs canoniques de $U_X(\mathbb{C})$ et $U_Y(\mathbb{C})$ respectivement. Ainsi, le changement de carte dans ces coordonnées est donné par :

$$te_t + q\,dt \mapsto \frac{1}{t}e_u - t^2q\,du$$

autrement dit $(t,q) \mapsto (1/t, -t^2q)$. Ces remarques permettent la description suivante de $\mathbb{C}[\mathcal{T}^\star\mathbb{P}^1]$:

Proposition 5.11. L'algèbre $\mathbb{C}[\mathcal{T}^\star\mathbb{P}^1]$ a une base (en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel) donnée par les $t^i\partial_t^j$ avec $i \le 2j$.

Démonstration. D'abord, notons que $\mathbb{C}[V_X] = \mathbb{C}[t, \partial_t]$ où (t, ∂_t) est la base duale de (e_t, dt) et $\mathbb{C}[V_Y] = \mathbb{C}[u, \partial_u]$. On peut plonger ces deux algèbres dans $\mathbb{C}(t, \partial_t)$ de sorte que, par propriété de faisceau :

$$\mathbb{C}[\mathcal{T}^\star\mathbb{P}^1] = \mathbb{C}[V_X] \times_{\mathbb{C}[V_{XY}]} \mathbb{C}[V_Y] = \mathbb{C}[V_X] \cap \mathbb{C}[V_Y]$$

en plongeant dans $\mathbb{C}(t, \partial_t)$ et en identifiant u avec $1/t$ et ∂_u avec $-t^2\partial_t$.
Soit maintenant $L = \sum_{i,j} a_{ij} t^i \partial_t^j \in \mathbb{C}[V_X]$. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour avoir $L \in \mathbb{C}[V_Y]$. On réécrit L dans l'autre carte :

$$L = \sum_{i,j} a_{ij} u^{-i} (-u^2\partial_u)^j = \sum_{i,j} (-1)^j a_{ij} u^{2j-i} \partial_u^j$$

Ainsi L est un élément de $\mathbb{C}[V_Y]$ si et seulement si pour tous i, j vérifiant $2j - i < 0$, on a $a_{i,j} = 0$. Autrement dit les éléments de $\mathbb{C}[V_X] \cap \mathbb{C}[V_Y]$ s'écrivent de manière unique comme $\displaystyle\sum_{0 \le i \le 2j} a_{ij} t^i \partial_t^j$ avec $a_{ij} \in \mathbb{C}$. L'unicité vient du fait que la famille des $(t^i\partial_t^j)$ est libre dans $\mathbb{C}[V_X]$. □

Corollaire 5.12. Le morphisme $\operatorname{gr}\Phi$ est surjectif de noyau $(4EF + H^2)$.

Démonstration. Surjectivité : Il s'agit de montrer que $t^i\partial_t^j$ avec $0 \le i \le 2j$ est dans l'image. Pour cela, on écrit $i = 2k + r$ avec $r \in \{0, 1\}$, et on observe :

$$t^i\partial_t^j = (t^2\partial_t)^k (t\partial_t)^r \partial_t^{j-k-r}$$

et $j - k - r \ge 0$ car $i \le 2j$: en effet, $2j - 2k - 2r = 2j - i - r$ et ou bien $r = 0$ et $2j - i \ge 0$, ou bien $r = 1$ et $i < 2j$ donc on a aussi $2j - i - r \ge 0$. Or E est envoyé sur $-t^2\partial_t$, F sur ∂_t et H sur $2t\partial_t$ donc $\partial_t, t\partial_t$ et $t^2\partial_t$ sont bien dans l'image.
Noyau : Soit $f(E, F, H)$ un élément de $\mathbb{C}[E, F, H]$. On a :

$$\operatorname{gr}\Phi(f) = f(-t^2\partial_t, \partial_t, 2t\partial_t)$$

donc f est dans le noyau si et seulement si $f(-t^2\partial_t, \partial_t, 2t\partial_t) = 0$. Ainsi $4EF + H^2$ est dans le noyau puisque $4(-t^2\partial_t)\partial_t + (2t\partial_t)^2 = 0$. Maintenant, si f est dans le noyau, quitte à faire une division euclidienne par $4EF + H^2$ qui est unitaire en H, on peut supposer que f a un degré relatif à H strictement inférieur à 2. On écrit $f = Hg(E, F) + h(E, F)$ de sorte que :

$$0 = 2t\partial_t g(-t^2\partial_t, \partial_t) + h(-t^2\partial_t, \partial_t)$$

Le degré en t est impair sur le premier terme et pair sur le second sauf si g est nul, donc $g = 0$ et encore en regardant le degré en t on a $h = 0$. On a donc $f = 0$. □

Ainsi, on comprend très bien l'application $\operatorname{gr}\Phi$. On utilise alors le lemme d'algèbre suivant pour obtenir des informations sur Φ :

Lemme 5.13. Soient $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ un *complexe* de trois groupes abéliens filtrés (les morphismes préservent les filtrations). Si la suite induite $0 \to \operatorname{gr} A \to \operatorname{gr} B \to \operatorname{gr} C \to 0$ est exacte, alors la suite $0 \to A \to B \to C \to 0$ l'est aussi.

Démonstration. Notons $A \xrightarrow{f} B$ et $B \xrightarrow{g} C$ les deux morphismes, et F_nA, F_nB et F_nC les filtrations.
On suppose $0 \to \operatorname{gr} A \to \operatorname{gr} B \to \operatorname{gr} C \to 0$ exacte. Montrons que f est injective : soit $x \in F_kA$ tel que $f(x) = 0$, alors $\operatorname{gr} f([x]_{F_k/F_{k-1}}) = 0$ donc $[x]_{F_k/F_{k-1}} = 0$ et $x \in F_{k-1}$ et par récurrence on obtient $x = 0$ (le cas $k = 0$ vient

du fait que $\mathrm{gr}^0 A = F_0 A$).
Ensuite, soit $b \in \operatorname{Ker} g$, avec $b \in F_k B$. Par exactitude de la suite graduée, $[b]_{F_k/F_{k-1}}$ est dans l'image de $\mathrm{gr}\, f$, autrement dit il existe $a \in F_k A$ vérifiant $f(a) - b \in F_{k-1} B$. On écrit $b = f(a) + b'$ avec $b' \in F_{k-1} B$. On a $0 = g(b) = g(b')$ car $g \circ f = 0$ par hypothèse, et par récurrence on peut supposer $b' \in \operatorname{Im} f$, ce qui conclut. Le cas $k = 0$ est immédiat.
Enfin, g est surjective : soit $c \in F_k C$. Par surjectivité de $\mathrm{gr}\, g$, on peut écrire $c = g(b) + c'$ avec $b \in F_k B$ et $c' \in F_{k-1} C$, et on conclut encore une fois par récurrence, le cas $k = 0$ étant immédiat. □

Définition 5.14. On note $\Delta = H^2 + 2EF + 2FE$, qui est un élément de $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$.

Corollaire 5.15. Φ est surjective de noyau $((\Delta))$, l'idéal bilatère généré par Δ. En conclusion :

$$\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) \cong \frac{U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))}{((\Delta))}$$

Démonstration. Notons $\Delta = H^2 + 2EF + 2FE$ de sorte que $\mathrm{gr}((\Delta)) = (H^2 + 4EF)$. On a donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{gr}((\Delta)) \longrightarrow \mathrm{gr}\, U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathrm{gr}\, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) \longrightarrow 0$$

Ensuite, un calcul simple montre que $((\Delta)) \subseteq \operatorname{Ker} \Phi$, ce qui assure que la suite :

$$0 \longrightarrow ((\Delta)) \longrightarrow U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) \longrightarrow 0$$

est un complexe. Par le lemme 5.13, elle est donc exacte.

□

5.5 Le théorème de localisation

Par ce qui précède, on déduit une équivalence de catégories :

$$\begin{array}{c} \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\Delta - \mathrm{Mod}^\ell \\ {\scriptstyle \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) \otimes_{U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))} \bullet} \downarrow \uparrow {\scriptstyle \mathrm{res}} \\ \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) - \mathrm{Mod}^\ell \end{array}$$

en notant $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\Delta - \mathrm{Mod}^\ell$ la catégorie des représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sur lesquelles Δ agit trivialement (cette catégorie est équivalente à $\frac{U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))}{((\Delta))} - \mathrm{Mod}^\ell$ par la proposition 5.6). En ajoutant à cela la $\mathcal{D}$-affinité de $\mathbb{P}^1$ on déduit le théorème suivant :

Théorème 5.16. (Localisation de Beilinson Bernstein) La catégorie des représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sur lesquelles Δ agit trivialement est équivalente à la catégorie des $\mathcal{D}$-modules sur $\mathbb{P}^1$.

5.6 Exemples

On va regarder quelles représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ on obtient par le théorème de localisation. D'abord, traitons le cas le plus simple : le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ correspond à la *représentation triviale* de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.
En effet, on a $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \mathbb{C}$ via le paragraphe 1.3, et l'action de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}$ est l'action triviale puisque ∂_t, $t\partial_t$ et $t^2\partial_t$ agissent trivialement sur les constantes.

Présentons maintenant un exemple plus intéressant : le cas des distributions de Dirac en l'infini.

Définition 5.17. On note ∞ le point complexe de coordonnées projectives $[1:0]$, de sorte que $\infty \in U_X$ et a pour coordonnées $t=0$ dans cette carte. On va définir le $\mathcal{D}$-module sur $\mathbb{P}^1$ des Dirac en ∞, noté δ_∞. Sur un ouvert W de $\mathbb{P}^1$ qui contient ∞, on pose $\delta_\infty(W) = \mathbb{C}[\partial_t]\delta$, qui est une notation formelle pour un $\mathbb{C}[\partial_t]$-module libre de rang 1. Sur un ouvert W qui ne contient pas ∞, on pose $\delta_\infty(W) = 0$.
Il reste à le munir d'une structure de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module.
D'abord, δ_∞ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module avec l'action :

$$t\cdot(\partial_t^k\delta) = -k\partial_t^{k-1}\delta$$

sur un ouvert de U_X contenant ∞, et l'action triviale ailleurs (ici $k\partial_t^{k-1}$ est nul si $k=0$).
Ensuite, on définit l'action de ∂_t sur un tel ouvert par :

$$\partial_t\cdot\partial_t^k\delta = \partial_t^{k+1}\delta$$

Remarque 5.18. Ces relations sont bien vérifiées par la distribution de Dirac en l'infini.

Proposition 5.19. Le faisceau δ_∞ ainsi construit est un $\mathcal{D}$-module sur $\mathbb{P}^1$.

Démonstration. D'abord δ_∞ est quasi-cohérent : cette propriété se vérifie localement, et δ_∞ est nul sur la carte U_Y tandis que sur U_X on a :

$$\delta_{\infty|U_X} = \widetilde{\mathbb{C}[\partial_t]}\delta$$

muni de la structure de $\mathbb{C}[t]$-module décrite plus haut. En effet, soit $W = D(f)$ un ouvert de $U_X = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[t]$. Si $\infty \in W$, alors l'endomorphisme de multiplication par f est déjà inversible sur $\mathbb{C}[\partial_t]\delta$: en effet on peut écrire à un scalaire près $f = 1+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_dt^d$ de sorte que f agit sur $\mathbb{C}[\partial_t]\delta = \bigoplus_{k\geq 0}\partial_t^k\delta$ via une matrice infinie triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, qui est donc inversible. Ainsi $\mathbb{C}[\partial_t]\delta[1/f] = \mathbb{C}[\partial_t]\delta$ comme souhaité.
Ensuite, si $\infty \notin W$, alors $f = tg(t)$ avec $g\in\mathbb{C}[t]$ et la multiplication par f est *localement nilpotente* sur $\mathbb{C}[\partial_t]\delta$ donc $\mathbb{C}[\partial_t]\delta[1/f] = 0$.
Ensuite on vérifie facilement que les actions données définissent bien une structure de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module. ☐

Proposition 5.20. Les sections globales de δ_∞ sont données par :

$$\Gamma(\mathbb{P}^1,\delta_\infty) = \mathbb{C}[\partial_t]\delta$$

avec la même action que celle décrite plus haut de $\Gamma(\mathbb{P}^1,\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1})$.

Démonstration. Cela vient directement de la propriété de faisceau : $\Gamma(\mathbb{P}^1,\delta_\infty)$ est le produit fibré de $\{0\}$ et $\mathbb{C}[\partial_t]\delta$ au dessus de $\{0\}$. ☐

Théorème 5.21. La représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ associée, notée V_∞ dans la suite, est irréductible et de dimension infinie.

Démonstration. Commençons par décrire la l'action de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sur $V_\infty = \mathbb{C}[\partial_t]\delta$. On a :

$$E\cdot(\partial_t^k\delta) = -t^2\partial_t^{k+1}\delta = -(k+1)k\partial_t^{k-1}\delta$$
$$F\cdot(\partial_t^k\delta) = \partial_t^{k+1}\delta$$
$$H\cdot(\partial_t^k\delta) = 2t\partial_t^{k+1}\delta = -2(k+1)\partial_t^k\delta$$

Notons alors $V_k = \mathbb{C}\cdot\partial_t^k\delta$ de sorte que $V_\infty = \bigoplus_{k\geq 0}V_k$ est une décomposition de V_∞ en droites propres pour H. On peut représenter ça de la façon suivante :

$$V_0 \underset{E}{\overset{F}{\rightleftarrows}} V_1 \underset{E}{\overset{F}{\rightleftarrows}} V_2 \underset{E}{\overset{F}{\rightleftarrows}} V_3 \underset{E}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \dots$$

où H agit par multiplication par $-2(k+1)$ sur V_k. Il s'en suit que V_∞ est irréductible. En effet, soit W une sous-représentation non nulle. Il existe un élément $w \in W \setminus \{0\}$ de la forme :

$$w = \partial_t^k \delta + w'$$

avec $w' \in V_0 \oplus \cdots \oplus V_{k-1}$. En appliquant E k fois, on obtient :

$$E^k w \in V_0 \setminus \{0\}.$$

En effet, $E^k w' = 0$ et $E^k \partial_t^k \delta \neq 0$ au vu de l'expression de E. Or W est stable par E donc $W \cap V_0$ n'est pas réduit à 0, or V_0 est une droite donc :

$$V_0 \subseteq W$$

En appliquant F plusieurs fois on a alors $V = W$.

$\square$

Remarque 5.22. On peut obtenir d'autres représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ en utilisant d'autres faisceaux d'opérateurs différentiels sur $\mathbb{P}^1$, dits "tordus" (twisted en anglais). On trouvera une discussion plus générale sur ce sujet dans [5]. La théorie de Beilinson Bernstein s'applique d'ailleurs à d'autres algèbres de Lie en remplaçant $\mathbb{P}^1$ par une variété de drapeaux, et encore une fois cette théorie est présentée dans [5].

6 Annexe 1 : Quelques notions de géométrie algébrique

On présente les outils de géométrie algébrique qui sont utilisés dans le mémoire. Il ne s'agit pas de tout démontrer, on renvoie par exemple au livre de Harshtorne ([3]) pour les détails des preuves.

6.1 Faisceaux

Soit X un espace topologique, et $\mathcal{C}$ une catégorie qui a toutes les petites limites (en pratique la catégorie des ensembles Set ou la catégorie des groupes abéliens Ab). On note $\mathrm{Opn}(X)$ la catégorie dont les objets sont les ouverts de X et l'ensemble des flèches entre deux ouverts U et V est un ensemble à un élément si U est inclus dans V et l'ensemble vide sinon. Un *préfaisceau* sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$ est un foncteur contravariant de $\mathrm{Opn}(X)$ vers $\mathcal{C}$. Un morphisme de préfaisceaux est simplement une transformation naturelle, et ainsi on a une catégorie $\mathrm{PreSh}(X,\mathcal{C})$ des préfaisceaux sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$. Un préfaisceau $\mathcal{F}$ est un *faisceau* s'il vérifie la condtion de recollement suivante : pour toute collection d'ouverts (U_i) de X recouvrant un ouvert U de X, le diagramme :

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_{ij}) \tag{1}$$

est un égaliseur. Ici U_{ij} désigne $U_i \cap U_i$, la flèche $\mathcal{F}U \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ est la restriction aux $\mathcal{F}(U_i)$ et les deux denières flèches sont les restrictions depuis respectivement U_i et U_j. Pour une catégorie telle que Ab ou Set, cette condition se reformule ainsi : pour toute famille $(s_i) \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ telle que pour tout i,j on ait $s_i \equiv_{U_{ij}} s_j$ (autrement dit, la restriction de s_i à U_{ij} est égale à la restriction de s_j à U_{ij}, il existe une unique section $s \in \mathcal{F}(U)$ vérifiant, pour tout i :

$$s_{|U_i} = s_i.$$

La sous-catégorie pleine de $\mathrm{PreSh}(X,\mathcal{C})$ constituée des faisceaux sera notée $\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C})$.

Définition 6.1. Soit $\mathcal{P}$ un préfaisceau sur X à valeurs dans Ab, et soit $x \in X$. On définit la *fibre* de $\mathcal{P}$ en x comme la limite inductive suivante :

$$\mathcal{P}_x = \varinjlim P(U)$$

où la limite inductive porte sur les ouverts contenant x ordonnés par inclusion. Cette limite inductive est la même que celle calculée dans la catégorie des ensembles, autrement dit la donnée d'un élément $s \in \mathcal{P}_x$ est la donnée d'un ouvert U contenant x et d'une section $f \in \mathcal{P}(U)$ modulo la relation d'équivalence qui identifie U,f et V,g si $f_{|U\cap V} = g_{|U\cap V}$.

À tout préfaisceau à valeurs dans Ab sur X, on peut associer un faisceau :

Théorème 6.2. On dispose d'une paire de foncteurs adjoints :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{PreSh}(X,\mathrm{Ab}) \arrow[d, shift right, "\widehat{\bullet}"'] \\ \mathrm{Sh}(X,\mathrm{Ab}) \arrow[u, shift right, "i"'] \end{tikzcd}$$

L'adjoint à gauche associe à un préfaisceau $\mathcal{P}$ son *faisceautisé* $\widehat{\mathcal{P}}$ et i est l'inclusion de la catégorie des faisceaux dans la catégorie des préfaisceaux.

On pourra trouver deux constructions du faisceautisé dans le chapitre 2 de [6] (qui utilise la notion d'espace étalé) et dans le chapitre 2 de [3]. Un point important est que l'unité de cette adjonction fournit un morphisme canonique $\mathcal{P} \longrightarrow \widehat{\mathcal{P}}$ qui induit des isomorphismes sur les *fibres* (stalks en anglais).
La faisceautisation commute à la restriction :

Proposition 6.3. *Si U est un ouvert de X, et $\mathcal{F}$ un préfaisceau, on a un isomorphisme canonique*

$$\widehat{\mathcal{F}|_U} \cong \widehat{\mathcal{F}}|_U.$$

Démonstration. Par restriction du morphsime canonique de $\mathcal{F}$ vers $\widehat{\mathcal{F}}$, on a un unique morphisme :

$$\mathcal{F}|_U \to \widehat{\mathcal{F}}|_U.$$

D'où par propriété universelle, un unique morphisme

$$\widehat{\mathcal{F}|_U} \to \widehat{\mathcal{F}}|_U$$

qui fait commuter le diagramme associé. Celui-ci induit des isomorphismes sur chaque fibre, c'est donc un isomorphisme lui-même. □

Proposition 6.4. *Dans la catégorie* $\mathcal{C} = \mathrm{PreSh}(X, \mathrm{Ab})$, *les petites limites et les petites colimites existent et sont calculées ouvert par ouvert, i.e si $F : I \longrightarrow \mathcal{C}$ est un diagramme, on a naturellement un foncteur $G : I \times \mathrm{Opn}(X)^{op} \longrightarrow$* Ab, *donc une famille $F_U : I \longrightarrow$* Ab *de foncteurs où U varie dans les ouverts de X, et*

$$\forall U \in \mathrm{Opn}(X) \quad (\lim F)(U) = \lim F_U$$

de même pour la colimite.

Comme le foncteur oubli de la structure de faisceau est adjoint à droite du foncteur faisceautisation, il conserve les limites, et on a :

Corollaire 6.5. *Dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens, les petites limites existent et sont calculées ouverts par ouverts.*

On a donc une définition naturelle de noyau et d'image d'un morphisme de préfaisceau, définies ouvert par ouvert,

Définition 6.6. *Soient M, N deux préfaisceaux de groupes abéliens, et $M \xrightarrow{f} N$ un morphisme.*

$$\forall U \in \mathrm{Opn}(X) \quad \ker^{pre}(f)(U) = \ker(f(U)) \quad \mathrm{im}^{pre}(f)(U) = \mathrm{Im}(f(U))$$

Définition 6.7. *Dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens, si $f : M \to N$ est un morphisme de faisceau,*

$$\ker f = \ker^{pre} f \quad \mathrm{im}\, f = \widehat{\mathrm{im}^{pre} f}$$

On a un monomorphisme canonique $\mathrm{im}\, f \hookrightarrow N$ obtenu par la propriété universelle du faisceauisé appliquée au morphisme $\mathrm{im}^{pre} f \hookrightarrow N$. On peut donc voir $\mathrm{im}\, f$ comme un sous-faisceau de N. De même, $\ker f$ est naturellement un sous-faisceau de M. Ainsi, on peut définir la notion de suite exacte de faisceaux :

Définition 6.8. *La suite*

$$\mathcal{F}' \xrightarrow[\varphi]{} \mathcal{F} \xrightarrow[\psi]{} \mathcal{F}$$

est dite exacte si $\mathrm{im}\, \varphi = \ker \psi$ (vus en tant que sous-faisceaux de $\mathcal{F}$).

Alors, l'exactitude est une propriété qui peut-être testée localement :

Proposition 6.9. *La suite courte*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

de faisceaux de groupes abéliens sur X est exacte si et seulement si la suite courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}''_x \longrightarrow 0$$

est exacte quelque soit $x \in X$.

Bien souvent, on se contentera de définir un faisceau sur une base d'ouverts : soit $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X, on appelle *faisceau sur* $\mathcal{B}$ tout foncteur contravariant $\mathcal{F}$ de la catégorie des éléments de $\mathcal{B}$ et des inclusions entre ceux-ci vers $\mathcal{C}$ qui vérifie que pour tout ouvert $U \in \mathcal{B}$ et tout recouvrement de U par des ouverts $U_i \in \mathcal{B}$, on ait la condition de recollement, i.e. le diagramme (1) est un égaliseur. Les morphismes entre de tels faisceaux sont les transformations naturelles, et on a a ainsi une catégorie $\mathrm{Sh}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ des faisceaux sur $\mathcal{B}$. On dispose du théorème suivant, qui justifie le fait de construire un faisceau sur une base d'ouverts :

Théorème 6.10. Les catégories $\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C})$ et $\mathrm{Sh}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ sont canoniquement équivalentes.

On trouvera une preuve de ce théorème dans [6] (chapitre 2, section 1, théorème 3).

Étant donnée une application continue $X \xrightarrow{f} Y$ entre deux espaces topologiques, on peut transporter les faisceaux entre X et Y :

Définition 6.11. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X et $\mathcal{G}$ un faisceau de groupes abéliens sur Y. On pose :

$$f_\star\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}U)$$

pour U un ouvert de Y. Pour $V \subseteq U$ on définit la restriction $f_\star\mathcal{F}(U) \longrightarrow f_\star\mathcal{F}(V)$ par la restriction $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) \longrightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ venant de l'inclusion $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$. On vérifie sans difficulté que $f_\star\mathcal{F}$ est un faisceau de groupes abéliens sur Y et que $f_\star$ définit un foncteur de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X vers la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur Y. Ce foncteur est appelé "image directe".
Réciproquement, on définit le faisceau $f^{-1}\mathcal{G}$ (tiré en arrière de $\mathcal{G}$) comme le faisceautisé du préfaisceau défini par : $f^{-1,\mathrm{pre}}\mathcal{G}(U) = \varinjlim \mathcal{G}(W)$ où la limite inductive porte sur les ouverts W contenant $f(U)$. Encore une fois, f^{-1} définit un foncteur de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur Y vers la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X.

Proposition 6.12. Les foncteurs f^{-1} et $f_\star$ sont adjoints, autrement dit pour $\mathcal{F}$ un faisceau sur X et $\mathcal{G}$ un faisceau sur Y on a une bijection :

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G},\mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_\star\mathcal{F})$$

naturellement en $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$.

Démonstration. On donne l'idée de la preuve. D'abord, par propriété universelle de la faisceautisation, $\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G},\mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}(f^{-1,\mathrm{pre}}\mathcal{G},\mathcal{F})$ naturellement en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Ensuite, étant donné un morphisme de préfaisceaux $u : f^{-1,\mathrm{pre}}\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$, et U un ouvert de Y, on a $U \supseteq f(f^{-1}(U))$ donc un morphisme $\mathcal{G}(U) \longrightarrow f^{-1,\mathrm{pre}}\mathcal{G}(f^{-1}(U))$, et en composant avec $u(f^{-1}(U))$ on obtient un morphisme :

$$\mathcal{G}(U) \longrightarrow f^{-1,\mathrm{pre}}\mathcal{G}(f^{-1}(U)) \xrightarrow{u(f^{-1}(U))} \mathcal{F}(f^{-1}(U)) = f_\star\mathcal{F}(U)$$

dont on vérifie sans peine la naturalité. Ainsi à un morphisme $u : f^{-1,\mathrm{pre}}\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ on peut associer un morphisme $\bar{u} : \mathcal{G} \longrightarrow f_\star\mathcal{F}$, et cette association est naturelle en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.
Soit maintenant $v : \mathcal{G} \longrightarrow f_\star\mathcal{F}$ un morphisme de faisceaux. Soit U un ouvert de X. Pour tout ouvert W contenant $f(U)$, on a un morphisme :

$$\mathcal{G}(W) \xrightarrow{v(W)} \mathcal{F}(f^{-1}(W))$$

et $f^{-1}(W) \supseteq U$, donc on peut composer avec la restriction et obtenir un morphisme :

$$\mathcal{G}(W) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

On vérifie alors que cette donnée définit un cocône au dessus de $\mathcal{F}(U)$ et définit donc un morphisme :

$$\varinjlim \mathcal{G}(W) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

où la limite inductive porte sur les W contenant $f(U)$. On a donc construit un morphisme $f^{-1,\mathrm{pre}}\mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ qui est naturel vis à vis des restrictions d'ouverts de X. On a ainsi un morphisme $\bar{v} : f^{-1,\mathrm{pre}}\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$. Il reste à vérifier que $\bar{\bar{u}} = u$ et $\bar{\bar{v}} = v$, détails que l'on ne traite pas ici. □

6.2 Espaces localement annelés

Dans toute la suite de cette annexe, les anneaux seront considérés commutatifs et unitaires.

Définition 6.13. Soient A et B deux anneaux locaux et $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux. On dit que f est un *morphisme d'anneaux locaux* si l'image par f de l'idéal maximal de A est contenue dans l'idéal maximal de B. Dans ce cas, f induit un morphisme de corps au niveau des corps résiduels.

Définition 6.14. Un *espace annelé* est la donnée d'un espace topologique X et d'un faisceau d'anneaux commutatifs $\mathcal{O}_X$ sur X. Si de plus, pour tout $x \in X$, la fibre de $\mathcal{O}_X$ en x est un anneau local, on dit que X est un *espace localement annelé*. On note alors la fibre $\mathcal{O}_{X,x}$ et $k(x)$ le corps résiduel associé.

Si X et Y sont deux espaces localement annelés, un *morphisme d'espaces localement annelés* $X \xrightarrow{f} Y$ est la donnée d'une application continue f sur les espaces topologiques sous-jacents et d'un morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^\sharp} f_\star\mathcal{O}_X$ (ou $f^{-1}\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$ de manière équivalente, par adjonction) tel que pour tout $x \in X$ la composée :

$$\mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow (f_\star\mathcal{O}_X)_{f(x)} \xrightarrow{\theta} \mathcal{O}_{X,x}$$

est un morphisme d'anneaux locaux. La première flèche est induite par $f^\sharp$ et la seconde est l'unique morphisme θ tel que pour tout U ouvert contenant $f(x)$, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} (f_\star\mathcal{O}_X)(U) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \arrow[d] \\ (f_\star\mathcal{O}_X)_{f(x)} \arrow[r, "\theta"'] & \mathcal{O}_{X,x} \end{tikzcd}$$

commute.

6.3 Schémas affines

Soit A un anneau. On veut munir l'espace topologique $X = \operatorname{Spec} A$ d'une structure d'espace localement annelé. Pour tout $f \in A$, on pose $\mathcal{O}_X(D(f)) = A[1/f]$. Lorsque $D(f) \subseteq D(g)$, on a $f \in \sqrt{(g)}$ donc il existe un unique morphisme de A-algèbres $A[1/g] \longrightarrow A[1/f]$: c'est le morphisme de restriction $\mathcal{O}(D(g)) \longrightarrow \mathcal{O}(D(f))$. Il est clair que cela définit un préfaisceau sur la base d'ouverts $\mathcal{B} = \{D(f) \mid f \in A\}$.

Lemme 6.15. L'espace topologique X est *quasi-compact*.

Démonstration. Soit $(U_s)_{s\in S}$ un recouvrement de X par des ouverts. Chaque U_s est de la forme $D(I_s)$ avec I_s un idéal de A. La condition :

$$X = \bigcup_s U_s$$

se traduit algébriquement par :

$$\sum_s I_s = A$$

par le théorème de Krull sur l'existence d'idéaux maximaux. On peut alors écrire $1 = \sum_{j\in J} x_j$ avec $J \subseteq S$ fini et $x_j \in I_j$, et on a donc :

$$X = \bigcup_{j\in J} U_J$$

ce qui montre que X est quasi-compact. □

Proposition 6.16. Le préfaisceau $\mathcal{O}_X$ est un faisceau sur $\mathcal{B}$, et s'étend donc canoniquement en un faisceau sur X, appelé *faisceau structural* de $\operatorname{Spec} A$.

Démonstration. Commençons par traiter le cas d'un *recouvrement fini d'ouverts de* $\mathcal{B}$ de tout l'espace X : soient $f_i \in A$ vérifiant :

$$\bigcup_{i=1}^{n} D(f_i) = X \tag{2}$$

On se donne $(g_i/f_i^{r_i}) \in \prod_i A[1/f_i]$ une famille compatible aux intersections, au sens où pour tous i, j, les sections $g_i/f_i^{r_i}$ et $g_j/f_j^{r_j}$ restreintes à $D(f_i) \cap D(f_j)$ sont égales (dans l'anneau $A[1/f_i f_j]$). On peut supposer $r_i = 1$ quitte à remplacer f_i par $f_i^{r_i}$ sans changer $D(f_i)$. Par compatibilité aux intersections il existe $N_{ij} \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(g_i f_j - g_j f_i)(f_i f_j)^{N_i} = 0.$$

En prenant $N = \sup N_{ij}$, on a donc pour tous i, j :

$$(f_i f_j)^N g_i f_j = (f_i f_j)^N g_j f_i.$$

La condition de recouvrement (2), et le fait que $D(f_i) = D(f_i^{N+1})$ se traduit algébriquement par :

$$A = \sum_{i=1}^{n} A f_i^{N+1}$$

et il existe donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in A$ tels que $1 = \sum \lambda_i f_i^{N+1}$. On pose alors $s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i^N g_i$ et on vérifie que s se restreint bien à g_j/f_j sur l'ouvert $D(f_j)$, puisque :

$$f_j^{N+1} s = \sum_i \lambda_i (f_i f_j)^N g_i f_j = \sum_i \lambda_i (f_i f_j)^N g_j f_i = \left(\sum_i \lambda_i f_i^{N+1} \right) f_j^N g_j = f_j^N g_j$$

Donc dans l'anneau $A[1/f_j]$:

$$s \equiv \frac{g_j}{f_j}$$

Il existe donc un recollement, qui est *unique* puisque si s' est un autre recollement des g_i/f_i, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout i : $(s-s')f_i^K = 0$ et en prenant une partition de l'unité $1 = \sum \mu_i f_i^K$, on a $s-s' = \sum \mu_i f_i^K (s-s') = 0$.

Ensuite, si $(D(f_i))_{i\in I}$ est un recouvrement non nécessairement fini de X et si l'on se donne des sections $s_i \in A[1/f_i]$, X étant quasi-compact (lemme 6.15), il existe $J \subseteq I$ fini tel que $\bigcup_{j\in J} D(f_j) = X$. D'après l'étude du cas précédent il existe donc un unique s qui prolonge tous les s_j pour $j \in J$. Il reste à voir que s prolonge aussi les s_i pour $i \in I$. Pour cela, si $i \in I$, alors $J \cup \{i\}$ est fini donc il existe un prolongement s' de tous les s_j pour $j \in J \cup \{i\}$, et par unicité $s' = s$ donc s prolonge aussi s_i.

Enfin, il reste à traiter le cas du recouvrement d'un ouvert $D(f)$ de $\mathcal{B}$ par des ouverts $D(f_i)$ de $\mathcal{B}$. Pour cela, il suffit d'appliquer ce qui précède à l'anneau $A[1/f]$ dont le spectre est homéomorphe à $D(f)$.

□

Le faisceau structural sur $X = \operatorname{Spec} A$ fait de X un espace localement annelé, la fibre en $x \in X$ étant le localisé A_x.

Tout morphisme d'anneaux $A \xrightarrow{\varphi} B$ induit un morphisme d'espaces localement annelés $\operatorname{Spec} B \xrightarrow{\varphi^\star} \operatorname{Spec} A$, et $(\varphi^\star)^\sharp(D(a))$, pour $f \in A$, étend le morphisme φ. La construction du spectre d'un anneau constitue donc un foncteur contravariant de la catégorie des anneaux vers la catégories des espaces localement annelés.

Définition 6.17. On appelle *schéma affine* un espace localement annelé isomorphe à $\operatorname{Spec} A$ pour un anneau A. On note AffSch la catégorie des schémas affines (les morphismes sont les morphismes d'espaces localement annelés).

Théorème 6.18. On note Γ le foncteur contravariant qui à un espace localement annelé X associe l'anneau des sections globales du faisceau structural $\mathcal{O}_X$.
Les foncteurs Spec et Γ sont adjoints l'un de l'autre :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{LRS} \arrow[d, shift right, "\Gamma"'] \\ \mathrm{CRing}^{\mathrm{op}} \arrow[u, shift right, "\mathrm{Spec}"'] \end{tikzcd}$$

où LRS est la catégorie des espaces localement annelés. Autrement dit on a un isomorphisme naturel en A un anneau commutatif et X un espace localement annelé : $\mathrm{Hom}(X, \mathrm{Spec}\, A) \cong \mathrm{Hom}(A, \Gamma X)$. De plus, cette adjonction se restreint en une équivalence de catégories :

$$\mathrm{Ring}^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{AffSch}.$$

En particulier, si K est un anneau, on a aussi une équivalence de catégories entre les K-algèbres et les schémas affines au-dessus de $\mathrm{Spec}\, K$.

Démonstration. Soit $A \xrightarrow{\varphi} B$ un morphisme d'anneau. Précisons la construction de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A} \xrightarrow{\varphi^{\star\sharp}} (\varphi^\star)_\star \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, B}$. Il suffit de le construire sur les ouverts de base $D(f)$ pour $f \in A$. On a :

$$(\varphi^\star)_\star \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, B}(D(f)) = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, B}((\varphi^\star)^{-1}(D(f))) = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, B}(D(\varphi(f))) = B[1/\varphi(f)].$$

On prend donc la flèche canonique $A[1/f] \longrightarrow B[1/\varphi(f)]$ qui prolonge φ. Il est clair que $\varphi^{\star\sharp}$ est un morphisme de faisceaux. Il reste à voir que pour chaque $x \in \mathrm{Spec}\, B$, la composée canonique $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A, \varphi^\star(x)} \longrightarrow (\varphi^\star)_\star \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, B} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, B, x}$ est un morphisme d'anneaux locaux. Cette composée est le morphisme :

$$A_{\varphi^\star(x)} \longrightarrow B_x$$

qui prolonge φ : c'est effectivement un morphisme d'anneau local. Ainsi Spec est bien un foncteur $\mathrm{Ring}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{AffSch}$.

Ensuite, à un espace localement annelé X on peut associer l'anneau $\Gamma(X) = \mathcal{O}_X(X)$ des sections globales de X. À un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ d'espaces localement annelés, on associe le morphisme d'anneau $f^\sharp(Y)$.

Voyons l'adjonction : un morphisme $X \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ induit, en appliquant Γ un morphisme $\Gamma X \longleftarrow \Gamma\, \mathrm{Spec}\, A \cong A$ où le dernier isomorphisme est naturel en A. Réciproquement, étant donné un morphisme d'anneau $A \xrightarrow{\varphi} \Gamma X$, on obtient un morphisme $\mathrm{Spec}\, \Gamma X \xrightarrow{\varphi^\star} \mathrm{Spec}\, A$. De plus, on dispose d'un morphisme naturel en X (unité) :

$$X \xrightarrow{\eta} \mathrm{Spec}\, \Gamma X$$

qui à $x \in X$ associe le noyau de l'évaluation $\Gamma X \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ où $\mathfrak{m}_x$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$. Le morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, \Gamma X} \xrightarrow{\eta^\sharp} \eta_\star \mathcal{O}_X$ est défini sur un ouvert standard $D(f)$ par le morphisme $\Gamma X[1/f] \longrightarrow \mathcal{O}_X(\eta^{-1}(D(f))))$ qui étend le morphisme de restriction $\Gamma X \longrightarrow \mathcal{O}_X(\eta^{-1}(D(f)))$ et est bien défini car la restriction de f à $V = \eta^{-1}(D(f))$ est *inversible* :
en effet, pour tout $x \in V$, on a $f \notin \eta(x)$, i.e. $f_x \notin \mathfrak{m}_x$. Autrement dit f_x est inversible dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. Il existe alors $U_x \ni x$ un ouvert de V, $f_{(x)} \in \mathcal{O}_X(U_x)$ qui induit f_x et $g_{(x)} \in \mathcal{O}_X(U_x)$ qui induit l'inverse de f_x dans $\mathcal{O}_{X,x}$. On a $(f_{(x)} g_{(x)})_x = 1_{\mathcal{O}_{X,x}}$ donc, quitte à rétrécir U_x, on peut supposer que $f_{(x)} g_{(x)} = 1$. Vérifions la condition de recollement pour les $g_{(x)}$: soient $x, y \in V$, les restrictions de $g_{(x)}$ et de $g_{(y)}$ à $U_x \cap U_y$ coïncident car elles sont toutes deux des inverses de $f_{|U_x \cap U_y}$. Il existe donc un unique $g \in \mathcal{O}_X(V)$ tel que pour tout $x \in X$ on ait $g_{|U_x} = g_{(x)}$ et en particulier $g_x f_x = 1$ et par injectivité de $\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \prod_{x \in V} \mathcal{O}_{X,x}$, on a $f_{|V}\, g = 1$.

La naturalité de $\eta^\sharp$ vis à vis des restrictions ne pose pas de problème. De plus, pour tout $x \in X$, la composée $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\Gamma X, \eta(x)} \longrightarrow (\eta_\star \mathcal{O}_X)_{\eta(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est le morphisme $\Gamma X_{\eta(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ qui étend le morphisme "germe" $\Gamma X \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$, c'est bien un morphisme d'anneaux locaux par définition de $\eta(x)$.
Ainsi, le morphisme $A \xrightarrow{\varphi} \Gamma X$ induit le morphisme $\varphi^\star \circ \eta$:

$$X \longrightarrow \operatorname{Spec} A$$

Ces constructions sont naturelles, il reste à voir qu'elles sont *inverses l'une de l'autre* : soit $X \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} A$ un morphisme d'espaces localement annelés. On veut $f = f^\sharp(\operatorname{Spec} A)^\star \circ \eta$, autrement dit, il s'agit de montrer que pour tout $x \in X$ on a $f(x) = \{\lambda \in A \mid f^\sharp(\lambda)_x \in \mathfrak{m}_x\}$ (et que les morphismes de faisceaux coïncident, mais ce n'est pas dur), en identifiant A et $\Gamma \operatorname{Spec} A$. Or f est un morphisme d'espace localement annelé donc la composée $A_{f(x)} \longrightarrow (f_\star \mathcal{O}_X)_{f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est un morphisme d'anneaux locaux. Ceci couplé au fait que $f(x)$ est l'image réciproque de l'idéal maximal de $A_{f(x)}$ par le morphisme local donne bien l'égalité recherchée.
Enfin, si $A \xrightarrow{\varphi} \Gamma X$ est un morphisme d'anneau, on veut vérifier que le morphisme $A \longrightarrow \Gamma X \longrightarrow \Gamma X$ induit par $X \xrightarrow{\eta} \operatorname{Spec}\Gamma X \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ coïncide avec φ. Or la première flèche est φ et la seconde est l'identitié de ΓX.
Résumons : on a établi que Spec et Γ sont adjoints.

En restreignant Γ à AffSch, on obtient une paire de foncteurs qui donnent une équivalence de catégories, puisqu'on a, naturellement en A : $\Gamma(\operatorname{Spec} A) = A[1/1] = A$, et pour un schéma affine S :

$$\operatorname{Spec}\Gamma(S) \cong S$$

naturellement en S puisque S est isomorphe au spectre d'un anneau. $\square$

6.4 Schémas

Définition 6.19. Soit X un espace localement annelé et $U \subseteq X$ un ouvert. On dit que U est un ouvert *affine* si il est isomorphe comme espace annelé (avec la structure induite) à un schéma affine.
On dit que X est un schéma s'il est recouvert par des ouverts affines. La catégorie des schémas est la sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces localement annelés dont les objets sont les schémas, c'est à dire qu'un morphisme de schémas est est un morphisme d'espaces localement annelés entre deux schémas (voir 6.14).

Remarque 6.20. Notons qu'un ouvert U d'un schéma affine $\operatorname{Spec} A$ n'est pas nécessairement un schéma affine : par exemple $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[X,Y] \setminus \{(X,Y)\}$ n'est pas affine. En revanche, U est toujours un schéma car les $D(f)$ forment une base d'ouverts affines de A donc on peut recouvrir U avec de tels ouverts. Il s'en suit qu'un ouvert d'un schéma est un schéma, et il n'y a qu'une manière raisonnable de voir l'inclusion comme un morphisme de schémas.

On mentionne le fait suivant qui pourra s'avérer utile pour construire des morphismes de schémas : il suffit de les construire sur un recouvrement affine.

Proposition 6.21. Soit S un schéma et (U_i) un recouvrement d'ouverts de S. Alors le diagramme :

$$\coprod_{i,j} U_{ij} \rightrightarrows \coprod_i U_i \longrightarrow S$$

est un coégaliseur dans la catégorie des schémas.

Démonstration. Le diagramme est bien un coégaliseur sur les espaces topologiques sous-jacents. Ainsi, si T est un schéma et si l'on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\coprod_{i,j} U_{ij} \rightrightarrows \coprod_i U_i \xrightarrow{f} T$$

il existe une unique application continue $S \xrightarrow{h} T$. De plus, pour tout ouvert U de T, ce diagramme induit le suivant dans la catégorie des anneaux :

$$\mathcal{O}_T(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{\coprod U_i}(f^{-1}(U)) = \prod_i \mathcal{O}_S(U_i \cap h^{-1}(U)) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{O}_S(U_{ij} \cap h^{-1}(U))$$

Or, par la propriété de faisceau on sait que :

$$\mathcal{O}_S(h^{-1}(U)) = \lim \ \prod_i \mathcal{O}_S(U_i \cap h^{-1}(U)) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{O}_S(U_{ij} \cap h^{-1}(U))$$

On en déduit un unique morphisme $\mathcal{O}_T(U) \xrightarrow{h_U^\sharp} \mathcal{O}_S(h^{-1}(U))$ qui fait commuter les bons diagrammes, et on vérifie sans peine que $h^\sharp : \mathcal{O}_T \longrightarrow h_\star \mathcal{O}_S$ est un morphisme d'espaces localement annelés. L'unicité du morphisme de schémas $S \longrightarrow T$ (qui fait commuter le diagramme voulu) ainsi construit est claire. □

Définition 6.22. Soit S un schéma au-dessus de $\operatorname{Spec} K$ avec K un corps, et soit $x \in S$. On note $k(x)$ le corps résiduel de l'anneau local $\mathcal{O}_{S,x}$. C'est naturellement une extension de K, et on dit que x est rationnel si $k(x) = K$. On note $S(K)$ l'ensemble des points rationnels (ou K-rationnels) de S. Un morphisme de schémas au-dessus de $\operatorname{Spec} K$, $S \longrightarrow T$, envoie les points rationnels de S dans les points rationnels de T. On a donc un foncteur de la catégorie des schémas au-dessus de $\operatorname{Spec} K$ vers la catégorie des ensembles.

Proposition 6.23. Le foncteur des points rationnels est représentable :

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} K}(\operatorname{Spec} K, S) \cong S(K)$$

naturellement en S.

Démonstration. La donnée d'un morphisme de schémas $\operatorname{Spec} K \xrightarrow{p} S$ au-dessus de $\operatorname{Spec} K$ équivaut à la donnée d'un point $x \in S$ qui correspond à l'image de l'unique point de $\operatorname{Spec} K$, et qui vérifie une condition supplémentaire imposée par le morphisme structural $\mathcal{O}_S \xrightarrow{p^\sharp} p_\star(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K})$: $p_\star(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K})$ est le faisceau "gratte-ciel" en x valant K, et donc la donnée de ce morphisme équivaut à la donnée d'un morphisme $\mathcal{O}_{S,x} \longrightarrow K$ de K-algèbres puisque p est un morphisme au-dessus de $\operatorname{Spec} K$, et ce morphisme est nécessairement surjectif car c'est un morphisme de K-algèbres, et son noyau est l'unique idéal maximal de $\mathcal{O}_{S,x}$; autrement dit l'existence d'un tel morphisme équivaut à dire que $k(x) = K$, i.e. que x est rationnel. La naturalité est immédiate à vérifier. □

Pour comprendre le lien avec la géométrie algébrique d'avant le vingtième siècle, on a l'énoncé suivant :

Théorème 6.24. On considère K un corps *algébriquement clos* et Var_K la catégorie des lieux d'annulation d'applications polynomiales entre K-espaces vectoriels de dimension finie. Les morphismes sont donnés par les applications polynomiales entre ces lieux de zéros. On a alors un foncteur de "schématisation" :

$$\mathrm{Var}_K \longrightarrow \mathrm{Sch}/\operatorname{Spec} K$$

dont la composition avec le foncteur des K-points donne le foncteur d'oubli $\mathrm{Var}_K \longrightarrow \mathrm{Set}$. Le foncteur de schématisation est pleinement fidèle et induit une équivalence de catégories entre Var_K et la catégorie pleine des schémas affines (au-dessus de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ de la forme $\operatorname{Spec} R$ avec R une $\mathbb{C}$-algèbre de type finie.

Démonstration. Explicitons le foncteur de "schématisation" : soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $Z = f^{-1}(0)$ le lieu d'annulation d'une application polynomiale $E \longrightarrow F$ avec F un autre K-espace vectoriel de dimension finie. On associe à Z le schéma affine au-dessus de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ suivant :

$$Z^{\mathrm{sch}} = \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}_K E^\star)/I$$

où I est l'idéal des fonctions polynomiales de E dans K qui s'annulent sur Z. Ensuite, voyons la fonctorialité : si $g : E \longrightarrow E'$ est polynomiale, et $g(Z) \subseteq Z'$ avec $Z = f^{-1}(0)$ et $Z' = f'^{-1}(0)$, alors on peut définir un morphisme de schéma $Z^{\mathrm{sch}} \longrightarrow Z'^{\mathrm{sch}}$ donné par un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres :

$$(\operatorname{Sym} E'^{\star})/I' \longrightarrow (\operatorname{Sym} E^{\star})/I$$

avec des notations évidentes. Cela correspond à un morphisme $\operatorname{Sym} E'^{\star} \longrightarrow \operatorname{Sym} E^{\star}$ qui envoie I' dans I, et par dualité (puisque E et E' sont de dimension finie), cela correspond à une application polynomiale $u : E \longrightarrow E'$ telle que pour tout $s \in I'$ on ait $s \circ u \in I$. g vérifie bien cette condition puisque $g(Z) \subseteq Z'$. De plus, la réciproque est vraie : si une fonction polynomiale $u : E \longrightarrow E'$ vérifie cette condition, alors $u(Z) \subseteq Z'$ par le Nullstellensatz, K étant algébriquement clos : ceci assure la pleine fidélité du foncteur de schématisation. Le reste du théorème est clair. □

Définition 6.25. Soit K un corps et S un schéma au-dessus de $\operatorname{Spec} K$. Les éléments de $\mathcal{O}_S(S)$ sont appelés "fonctions régulières" sur S.

Proposition 6.26. On a une bijection naturelle entre les fonctions régulières sur S et les morphismes $S \longrightarrow \mathbb{A}^1$ au-dessus de $\operatorname{Spec} K$.

Démonstration. Un morphisme $S \longrightarrow \mathbb{A}^1$ au-dessus de $\operatorname{Spec} K$ est la donnée d'un morphisme de K-algèbres $K[X] \longrightarrow \mathcal{O}_S(S)$, c'est à dire d'un élément de $\mathcal{O}_S(S)$. □

6.5 $\mathcal{O}_X$-modules, propriétés d'exactitude

Définition 6.27 ($\mathcal{O}_X$-module)**.** *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. Une structure de $\mathcal{O}_X$-module sur M un faisceau de groupes abéliens sur X est la donnée en chaque ouvert U de X d'une structure de $\mathcal{O}_X(U)$-module sur $M(U)$ compatible aux restrictions, c'est-à-dire, pour $U \subset V$ ouverts :*

$$\forall a \in \mathcal{O}_X(V) \quad \forall m \in M(V) \quad (a \cdot m)|_U = a|_U \cdot m|_U$$

Définition 6.28. *Un morphisme $f : M \to N$ de $\mathcal{O}_X$-modules est un morphisme entre les faisceaux de groupes abéliens sous-jacents tel que $f(U)$ soit $\mathcal{O}_X(U)$-linéaire pour tout U ouvert de X.*

Proposition 6.29. La catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules est une catégorie abélienne, et les noyaux et images correspondent aux noyaux et images dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X. De plus, cette catégorie a toutes les petites colimites, et celles-ci correspondent aux colimites dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens.

On trouvera une preuve de cet énoncé dans The Stacks Project [7, Tag 01AF].

Définition 6.30. On peut définir le produit tensoriel de deux $\mathcal{O}_X$-modules M et N comme le faisceautisé du préfaisceau $M \otimes^{\mathrm{pre}} N$ qui donne simplement le produit tensoriel ouvert par ouvert :

$$M \otimes^{\mathrm{pre}} N(U) = M(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} N(U)$$

Le produit tensoriel de M et N est noté $M \otimes_{\mathcal{O}_X} N$ pour souligner le fait que c'est un produit tensoriel au dessus de $\mathcal{O}_X$. Le produit tensoriel vérifie une propriété universelle analogue à celle du produit tensoriel des modules sur un anneau commutatif : étant donné un morphisme de faisceaux d'ensembles $M \times N \longrightarrow P$ sur X, avec M, N et P des $\mathcal{O}_X$-modules, qui est bilinéaire sur chaque ouvert, il existe un unique morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $M \otimes_{\mathcal{O}_X} N \longrightarrow P$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d] \arrow[dr] & \\ M \otimes_{\mathcal{O}_X} N \arrow[r] & P \end{tikzcd}$$

où le morphisme $M \times N \longrightarrow M \otimes N$ se construit d'abord vers le préfaisceau $M \otimes^{\mathrm{pre}} N$ par $(m, n) \mapsto m \otimes n$. On renvoie vers The Stacks Project [7, Tag 01CA] pour les détails.

Proposition 6.31. Le produit tensoriel commute à la restriction : pour M, N des $\mathcal{O}_X$-modules et $U \subseteq X$ un ouvert, on a un isomorphisme canonique (naturel en M et N) :

$$(M \otimes_{\mathcal{O}_X} N)_{|U} \cong M_{|U} \otimes_{\mathcal{O}_U} N_{|U}$$

Démonstration. On note $\otimes^{\mathrm{pre}}$ le produit tensoriel sur les préfaisceaux, c'est à dire celui qui est calculé ouvert par ouvert. On a clairement $(M \otimes^{\mathrm{pre}} N)_{|U} \cong M_{|U} \otimes^{\mathrm{pre}} N_{|U}$. Par conséquent, puisque la faisceautisation commute à la restriction (propriété 6.3) on obtient le résultat annoncé. □

Définition 6.32. Soient M et N deux $\mathcal{O}_X$-modules. On définit un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(M,N)$ de la façon suivante :

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(M,N)(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X|U}-\mathrm{Mod}}(M_{|U}, N_{|U}).$$

Notons qu'il n'y a pas besoin de faisceautiser car c'est déjà un faisceau. On définit également le dual de M, noté $M^\vee$ comme :

$$M^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(M, \mathcal{O}_X).$$

6.6 Modules quasi-cohérents

Définition 6.33. Soit M un module sur un anneau A et $X = \operatorname{Spec} A$. On définit un $\mathcal{O}_X$-module associé à M, noté $\widetilde{M}$ de la façon suivante : pour tout ouvert de base $U = D(f)$, on pose $\widetilde{M}(U) = M[1/f]$. Pour toute inclusion $D(f) \subseteq D(g)$, le morphisme $A[1/g] \longrightarrow A[1/f]$ induit par tensorisation avec M un morphisme de restriction $\widetilde{M}(D(g)) \longrightarrow \widetilde{M}(D(f))$. Un $\mathcal{O}_X$-module sur X est dit *quasi-cohérent* si il est isomorphe à un certain $\widetilde{M}$.

Lemme 6.34. Un $\mathcal{O}_X$-module M sur $X = \operatorname{Spec} A$ est quasi-cohérent si et seulement si, pour tout ouvert affine U de X, la restriction $M_{|U}$ est un $\mathcal{O}_U$-module quasi-cohérent.

Démonstration. Supposons M quasi-cohérent. On peut écrire $M = \widetilde{N}$ avec N un A-module. Soit $U = \operatorname{Spec} B$ un ouvert affine de X. On a donc $B = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ et donc on a un morphisme :

$$A \xrightarrow{r} B$$

de restriction, et on peut voir B comme une A-algèbre. On va alors montrer que $M_{|U}$ est isomorphe à $\widetilde{N \otimes_A B}$. On a un morphisme $N \otimes_A B \longrightarrow M(U)$ car $M(U)$ est un B-module, qui induit un morphisme :

$$\widetilde{N \otimes_A B} \longrightarrow M_{|U}$$

de $\mathcal{O}_U$-modules. En effet, pour $D(f) \subseteq U$ un ouvert standard, c'est le morphisme naturel $(N \otimes_A B)[1/r(f)] \longrightarrow N[1/f]$. Ce morphisme induit un isomorphisme sur les fibres : en effet, pour tout $x \in U$ on a

$$\widetilde{N \otimes_A B}_x = (N \otimes_A B) \otimes_B B_x \cong N \otimes_A A_x = M_{|U,x}$$

Le fait que $(N \otimes_A B) \otimes_B B_x \cong N \otimes_A A_x$ se démontre de la façon suivante : déjà on a $A_x \cong B_x$ via le morphisme r puisque $x \in U$, et ensuite pour P un A_x-module on a naturellement en P :

$$\mathrm{Hom}_{A_x}((N \otimes_A B) \otimes_B B_x, P) \cong \mathrm{Hom}_B(N \otimes_A B, P) \cong \mathrm{Hom}_A(N, P) \cong \mathrm{Hom}_{A_x}(N \otimes_A A_x, P)$$

puisque $A_x = B_x$. On utilise le lemme de Yoneda pour conclure. La réciproque est claire en prenant $U = X$. □

Définition 6.35. Sur X un schéma quelconque, un $\mathcal{O}_X$-module M est dit *quasi-cohérent* si pour tout ouvert affine U, $M_{|U}$ est quasi-cohérent. D'après le lemme précédent, cette définition coïncide avec la précédente dans le cas où X est affine.

La quasi-cohérence est une notion locale :

Proposition 6.36. Soit X un schéma et M un $\mathcal{O}_X$-module. M est quasi-cohérent si et seulement si, pour tout $x \in X$, il existe un ouvert U contenant x tel que $M_{|U}$ est quasi-cohérent.

Démonstration. Le sens direct est clair. Pour l'autre sens, supposons la deuxième condition vérifiée et soit $V = \operatorname{Spec} A$ un ouvert affine de X. Par hypothèse il existe un recouvrement de V par des ouverts standards $U_i = D(f_i)$ tels que $M_{|U_i} = \widetilde{M(U_i)}$ (quitte à restreindre les ouverts où M est quasi-cohérent). Soit $D(g)$ un ouvert standard de V. Par la propriété de faisceau on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow M(V) \longrightarrow \prod_i M(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j} M(U_i \cap U_j)$$

Par platitude de $A[1/g]$ sur A, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow M(V)[1/g] \longrightarrow \prod_i M(U_i)[1/g] \longrightarrow \prod_{i,j} M(U_i \cap U_j)[1/g]$$

Par quasi-cohérence sur les U_i et sur les $U_{ij} = D(f_i f_j)$, cette suite exacte est isomorphe à une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \widetilde{M(V)}(D(g)) \longrightarrow \prod_i M(U_i \cap D(g)) \longrightarrow \prod_{i,j} M(U_i \cap U_j \cap D(g))$$

donc, encore par la propriété de faisceau, le morphisme canonique $\widetilde{M(V)}(D(g) \longrightarrow M_{|V}(D(g))$ est un isomorphisme. On en déduit que $\widetilde{M(V)} \longrightarrow M_{|V}$ est un isomorphisme et M est donc quasi-cohérent.

□

On admet le résultat suivant, démontré dans The Stacks Project [7, Tag 01LA].

Proposition 6.37. La catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents est une sous-catégorie abélienne de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules.

Définition 6.38 (Support d'un $\mathcal{O}_X$-module)**.** *Soit X un schéma et N un $\mathcal{O}_X$-module. On définit*

$$\operatorname{Supp}(N) = \{x \in X | N_x \neq 0\}$$

où N_x désigne la fibre de N en x.

Si X est affine et $N = \widetilde{M}$ est quasi-cohérent, alors pour $x \in X$, on a $N_x \cong M_x$, où M_x est le localisé de M en x, on retrouve la notion de support d'algèbre commutative.

Proposition 6.39. *Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine, $N = \widetilde{M}$ un $\mathcal{O}_X$ module quasi-cohérent. Alors, pour $f \in A$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\operatorname{Supp}(N) \subset V(f)$

2. *Pour tout $m \in M$, il existe $n \geq 0$ tel que $f^n m = 0$.*

On dit alors que f agit de manière localement nilpotente sur M Dans le cas où M est de type fini, cela équivaut à $f \in \sqrt{\operatorname{Ann}(M)}$.

Démonstration. Supposons 1..Pour chaque $x \in D(f) = \operatorname{Spec}(A_f)$, on a :

$$(\widetilde{M \otimes A_f})_x = N_x = 0 \quad (\star)$$

Comme x est arbitraire et $\widetilde{M \otimes_A A_f}$ est un faisceau sur $D(f)$, cela implique

$$M \otimes A_f = 0$$

i.e pour chaque $m \in M$, il existe $n \geq 0$ tel que $f^n m = 0$. Donc 2..

Réciproquement, si f agit de manière localement nilpotente sur M, on a $(\star)$ quelque soit x dans $D(f)$, donc $\mathrm{Supp}(N) \subset V(f)$.

$\square$

Corollaire 6.40. *Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine, I un idéal de A et $\widetilde{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent sur X. Alors $\mathrm{Supp}(\widetilde{M}) \subset V(I)$ si et seulement si tout élément de I agit de manière localement nilpotente sur M.*

Définition 6.41. *Soit X un schéma et $V \subset X$ un fermé de X. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module M est supporté sur V si $\mathrm{Supp}\, M \subset V$.*

Corollaire 6.42. *Si I est un idéal de $\mathcal{O}_X$, et M un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent, alors M est supporté sur $V(I)$ si et seulement si tout élément de I agit de manière localement nilpotente sur M.*

Corollaire 6.43. *Si N est un A-module de type fini, $\mathrm{Supp}(N) = V(\mathrm{Ann}(N))$ est un fermé.*

Définition 6.44. *Soit $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-idéal quasi-cohérent sur X au sens où $\mathcal{I}$ est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent tel que pour chaque U, $\mathcal{I}(U)$ est un idéal de $\mathcal{O}_X(U)$. Un tel faisceau est naturellement associé à un fermé de l'espace topologique X, union des*

$$V(\mathcal{I}(U)) \subset \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_X(U)$$

pour U parcourant les ouverts affines de X, que l'on note $V(\mathcal{I})$.

Corollaire 6.45. *Soit X un schéma et $\mathcal{O}_X$-idéal $\mathcal{I}$. Soit M un $\mathcal{O}_X$-idéal quasi-cohérent. M est supporté sur $V(\mathcal{I})$ si et seulement sur chaque ouvert affine U de X, les éléments de $\mathcal{I}(U)$ agissent de manière localement nilpotente sur $M|_U$.*

Démonstration. Cela découle du corollaire 6.40, et du fait que

$$\mathrm{Supp}(M) \subset V$$

si et seulement si pour tout ouvert affine U de X,

$$\mathrm{Supp}(M(U)) = \mathrm{Supp}(M) \cap U \subset V \cap U = V(\mathcal{I}(U))$$

$\square$

Proposition 6.46. Pour deux modules quasi-cohérents $\widetilde{M}$ et $\widetilde{N}$ sur un schéma affine $\mathrm{Spec}\, A$, on a

$$\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A}} \widetilde{N} \cong \widetilde{M \otimes_A N}.$$

De plus, si X est un schéma et si M et N sont *quasi-cohérents* sur X, alors pour tout ouvert *affine* U, on a :

$$\Gamma(U, M \otimes N) \cong \Gamma(U, M) \otimes \Gamma(U, N).$$

Démonstration. Le premier isomorphisme s'obtient en construisant un morphisme $\widetilde{M} \otimes \widetilde{N} \longrightarrow \widetilde{M \otimes N}$ par propriété universelle du produit tensoriel et en constatant que c'est un isomorphisme sur les fibres. Pour le second, on a :

$$\Gamma(U, M \otimes N) = \Gamma(U, M_{|U} \otimes_{\mathcal{O}_U} N_{|U}).$$

Or U est affine et M et N sont quasi-cohérents donc $M_{|U} \cong \widetilde{\Gamma(U,M_{|U})} = \widetilde{\Gamma(U,M)}$ et $N_{|U} \cong \widetilde{\Gamma(U,N)}$. Par conséquent on a :

$$\Gamma(U, M \otimes N) \cong \Gamma(U, \widetilde{\Gamma(U,M)} \otimes_{\mathcal{O}_U} \widetilde{\Gamma(U,N)}) \cong \Gamma(U, \widetilde{\Gamma(U,M) \otimes_{\Gamma(U,\mathcal{O}_X)} \Gamma(U,N)})$$

qui est simplement $\Gamma(U,M) \otimes_{\Gamma(U,\mathcal{O}_X)} \Gamma(U,N)$ puisque $\widetilde{\bullet}$ et $\Gamma(U,\bullet)$ sont quasi-inverses (sur les modules quasi-cohérents). $\square$

Sur les schémas quasi-compacts, les coproduits commutent aux sections globales :

Proposition 6.47. *Soit X un schéma dont l'espace topologique sous-jacent est quasi-compact, et $(M_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents. Alors, la flèche canonique*

$$\bigoplus_{i\in I} \Gamma(X, M_i) \longrightarrow \Gamma(X, \bigoplus_{i\in I} M_i)$$

est un isomorphisme de $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$-modules.

Démonstration. On peut decouvrir X par un nombre fini d'ouverts affines $U_1, \dots, U_n$. Alors, on a pour $j \in \{1, \dots, n\}$ un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X, \bigoplus_{i\in I} M_i) \arrow[d] & \bigoplus_{i\in I} \Gamma(X, M_i) \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d] \\
\Gamma(U_j, \bigoplus_{i\in I} M_i) & \bigoplus_{i\in I} \Gamma(U_j, M_i) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Où la flèche du bas est un isomorphisme car U_i est affine, et on identifie les deux membres dans la suite. Ainsi, si $s = \oplus s_i$ est envoyée sur 0 par φ, pour chaque j on a :

$$0 = \varphi(s)|_{U_j} = \oplus(s_i|_{U_j})$$

Donc,

$$\forall i \in I, \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad s_i|_{U_j} = 0$$

Comme les U_j recouvrent X, on a $s_i = 0$ pour tout i, soit $s = 0$. Donc φ est injective.

Si $s' \in \Gamma(X, \bigoplus_{i\in I} M_i)$, s' s'écrit localement

$$s'|_{U_j} = \oplus s_i^{(j)}$$

Où $s_i^{(j)}$ est une section de M_i sur U_j. De plus, pour $k, j \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$\oplus s_i^{\ell}|_{U_j \cap U_l} = s'|_{U_j \cap U_l} = \oplus s_i^{j}|_{U_j \cap U_l}$$

Donc

$$s_i^{j}|_{U_j \cap U_l} = s_i^{j}|_{U_j \cap U_l}$$

donc il existe une section s_i de M_i sur X telle que

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad s_i|_{U_j} = s_i^{(j)}$$

Comme les familles $(s_i)_{i\in I}$ sont à support finis, hormis pour un nombre fini d'indice i on a :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad s_i^{(j)} = 0$$

Donc la famille $(s_i)_{i\in I}$ est aussi à support fini, et

$$s = \oplus s_i \in \bigoplus_{i\in I} \Gamma(X, M_i)$$

est bien définie. De plus, on a pour $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\varphi(s)|_{U_j} = \oplus s_i|_{U_j} = \oplus s_i^{(j)} = s'|_{U_j}$$

Donc $\varphi(s) = s'$, et φ est surjective.

□

6.7 Image réciproque et directe d'un $\mathcal{O}_X$-module

On peut généraliser la définition d'image directe et d'image réciproque aux $\mathcal{O}_X$-modules. Dans la suite, on fixe deux schémas X, Y et un morphisme de schémas $f : X \to Y$.

Définition 6.48. *Soit N un $\mathcal{O}_X$-module. Alors, $f_\star N$ est naturellement un $f_\star\mathcal{O}_X$-module ($f_\star\mathcal{O}_X$ est un faisceau d'anneaux sur Y), et donc est doté d'une structure naturelle de $\mathcal{O}_Y$-module via le morphisme associé à f :*

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow f_\star\mathcal{O}_X \quad (\star)$$

On définit ainsi un foncteur

$$f_\star : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \to \mathcal{O}_Y\text{-Mod}$$

Théorème 6.49. *Le foncteur $f_\star$ admet un adjoint à gauche $f^\star$, que l'on peut définir par :*

$$f^\star(M) = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}O_Y} f^{-1}M$$

Où $f^{-1}N$ est muni de sa structure naturelle de $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-module, et $\mathcal{O}_X$ de la structure de $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-module induite par le morphisme obtenu par adjonction de $(\star)$.

Le $\mathcal{O}_X$-module $f^\star M$ est appelé image réciproque de M par f.

Proposition 6.50. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas, et $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ deux ouverts avec $U = f^{-1}(V)$. Alors la restriction-corestriction de f en $g : U \longrightarrow V$ est naturellement un morphisme de schémas, et pour M un $\mathcal{O}_X$-module et N un $\mathcal{O}_Y$-module, $(f_\star M)_{|V} = g_\star(M_{|U})$ et $(f^\star N)_{|U} = g^\star(N_{|V})$.

Démonstration. Soit M un $\mathcal{O}_X$-module et W un ouvert de V. On a donc $f^{-1}(V) \subseteq U$, et donc :

$$(f_\star M)_{|V}(W) = M(f^{-1}(W)) = M(g^{-1}(W)) = g_\star M_{|U}(W)$$

donc $(f_\star M)_{|V} = g_\star M_{|U}$.
À présent, soit N un $\mathcal{O}_Y$-module. Notons $i : U \longrightarrow Y$ l'inclusion (c'est une immersion ouverte). On a $(f^\star N)_{|U} = i^\star f^\star N$. Soit P un $\mathcal{O}_U$-module. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}((f^\star N)_{|U}, P) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(i^\star f^\star N, P) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^\star N, i_\star P) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(N, f_\star i_\star P) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_V}(N_{|V}, g_\star P) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(g^\star N_{|V}, P)
\end{aligned}$$

naturellement en P. Donc $(f^\star N)_{|U} \cong g^\star N_{|V}$. □

Corollaire 6.51. Si Y admet un recouvrement par des ouverts affines V_i dont l'image réciproque par f est affine, alors l'image directe par f de tout module quasi-cohérent sur X est un module quasi-cohérent sur Y, et l'image inverse par f de tout module quasi-cohérent sur Y est un module quasi-cohérent sur X.

Démonstration. Soit M quasi-cohérent sur X. Par la caractérisation locale de la quasi-cohérence 6.36, il suffit de montrer que pour tout i, le $\mathcal{O}_{V_i}$-module $(f_\star M)_{|V_i}$ est quasi-cohérent. Posons $U_i = f^{-1}(V_i)$ qui est un ouvert affine par hypothèse. On note g la restriction-corestriction de f de U_i vers V_i. La proposition précédente donne :

$$(f_\star M)_{|V_i} = g_\star(M_{|U_i})$$

Ce $\mathcal{O}_{V_i}$-module est quasi-cohérent. En effet, si $U_i = \operatorname{Spec} A$ et $V_i = \operatorname{Spec} B$, le morphisme g est adjoint à un morphisme $B \longrightarrow A$ qui permet de voir A comme une B-algèbre, et $M_{|U_i}$ étant quasi-cohérent, on peut l'écrire $\widetilde{P}$ avec P un A-module, et on a :

$$g_\star(M_{|U_i}) = \widetilde{P_{|B}}$$

où $P_{|B}$ est le B-module sous-jacent à P (la restriction des scalaires).

Soit maintenant N quasi-cohérent sur Y. Encore une fois, il suffit de voir que $(f^\star N)_{|U_i}$ est quasi-cohérent car les U_i recouvrent X, et en gardant les notations précédentes on a :

$$(f^\star N)_{|U_i} = g^\star(N_{|V_i}) = \widetilde{Q \otimes_B A}$$

en prenant $N_{|V_i} = \widetilde{Q}$. □

6.8 Algèbres quasi-cohérentes sur un schéma

Définition 6.52. *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un schéma. Une $\mathcal{O}_X$-algèbre commutative $\mathcal{A}$ est un faisceau d'anneaux commutatifs sur X muni d'un morphisme de faisceaux d'anneaux*

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{A}$$

Une telle $\mathcal{O}_X$-algèbre est dotée d'une structure naturelle de $\mathcal{O}_X$-module. On dispose donc de la catégorie $\mathcal{O}_X - \mathrm{Alg}$ des $\mathcal{O}_X$-algèbres et d'un foncteur d'oubli vers la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules.

Proposition 6.53. *Si $X = \operatorname{Spec} R$ est un schéma affine, toute R-algèbre A sur M définit naturellement une $\mathcal{O}_X$-algèbre via*

$$\widetilde{A}(D(f)) := A \otimes R_f$$

et les flèches de restrictions induites par localisation. On appelle ces $\mathcal{O}_X$-algèbres quasi-cohérentes.

Définition 6.54. *Sur un schéma arbitraire,une $\mathcal{O}_X$-algèbre $\mathcal{A}$ et dite quasi-cohérente si elle l'est sur tout ouvert affine.*

Remarque 6.55. *Une $\mathcal{O}_X$-algèbre est quasi-cohérente si et seulement si elle l'est en tant que $\mathcal{O}_X$-module.*

Ce formalisme permet de généraliser les constructions d'algèbre symétrique, d'algèbre tensorielle et extérieure aux $\mathcal{O}_X$-modules :

Définition 6.56. *Soit M un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent, on définit un pré-faisceau d'anneau sur X par :*

$$\mathrm{Sym}^{\mathrm{pre}}(U) := \mathrm{Sym}_R(M(U))$$

pour tout $U = \operatorname{Spec} R \subset X$ ouvert affine. L'algèbre symétrique de M est définie comme le faisceau associé à ce préfaisceau note $\mathrm{Sym}_X(M)$ et est munie d'une stucture naturelle de $\mathcal{O}_X$-algèbre.

Comme pour les modules sur un anneau, la construction Sym satisfait une propriété universelle :

Proposition 6.57. *Soit M un $\mathcal{O}_X$ module quasi-cohérent et $\mathcal{B}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente, alors on a une bijection naturelle en $\mathcal{B}$:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X-\mathrm{Alg}}(\mathrm{Sym}(M),\mathcal{B}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod}}(M,\mathcal{B})$$

Démonstration. En effet, on a par la propriété universelle du Sym sur les modules et l'adjonction faisceautisation, oubli de la structure de faisceau :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X-\mathrm{Alg}}(\mathrm{Sym}(M),\mathcal{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X-\mathrm{Alg}}(\mathrm{Sym}(M)^{pre},\mathcal{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod}}(M,\mathcal{B})$$

et ce de manière naturelle en $\mathcal{B}$. □

De même, on peut construire l'algèbre tensorielle et l'algèbre extérieure d'un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module quasi-cohérent. On admet la définition-proposition suivante dans le cas général, dont on trouvera une preuve dans le chapitre 7 de [1].

Proposition 6.58. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre quasi-cohérente sur un schéma X. La colimite dans la catégorie des schémas du diagramme formé par les flèches*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spec}\,\mathcal{A}(U) \\ \mathrm{Spec}\,\mathcal{A}(V) & \mathrm{Spec}\,\mathcal{A}(U\cap V) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

pour U, V et W des ouverts affines de X tels que $W \subset U, V$ existe. On la note $\mathrm{Spec}_X \mathcal{A}$, et on l'appelle le spectre relatif de l'algèbre $\mathcal{A}$.

Dans le cas d'une algèbre quasi-cohérente sur $\mathbb{P}^1$, $\mathrm{Spec}_{\mathbb{P}^1} \mathcal{A}$ est recouvert par les deux ouverts $\mathrm{Spec}\,\mathcal{A}|_{U_X}$ et $\mathrm{Spec}\,\mathcal{A}|_{U_Y}$, d'intersection homéomorphe à $\mathrm{Spec}\,\mathcal{A}|_{U_{XY}}$.

Remarque 6.59. *On a $\mathbb{P}^1 = \mathrm{Spec}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$.*

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre quasi-cohérente sur $\mathbb{P}^1$, on a par définition des morphismes qui font commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spec}\,\mathcal{A}(U_X) \arrow[r] \arrow[d] & U_X \arrow[dr, hook] & \\ \mathrm{Spec}\,\mathcal{A}(U_{XY}) \arrow[ur] \arrow[dr] & \mathrm{Spec}\,\mathcal{A} \arrow[rr, dotted, "\exists!"] & & \mathbb{P}^1 \\ & \mathrm{Spec}\,\mathcal{A}(U_Y) \arrow[r] \arrow[u] & U_Y \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Le spectre de $\mathcal{A}$ est donc canoniquement un schéma au-dessus de $\mathbb{P}^1$ via l'unique morphisme

$$\mathrm{Spec}\,\mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

qui fait commuter le diagramme précédent.

6.9 Fibré vectoriel sur un schéma et $\mathcal{O}_X$-modules localement libres

Définition 6.60 (fibré vectoriel)**.** *Soit X un schéma. Un fibré vectoriel de rang n au-dessus de X est la donnée d'un schéma Y et d'un morphisme de schéma,*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "p"] \\ X \end{tikzcd}$$

appelé projection, d'un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de X par des ouverts ouverts affines, et de trivialisations locales

$$\psi_i : p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_Y(U_i)[X_1,\dots,X_n])$$

telles que pour $i,j\in I$, et tout ouvert affine $V = \operatorname{Spec} A \subset U_i \cap U_j$, l'automorphisme de schéma affine

$$\psi_i \circ \psi_j^{-1} : \operatorname{Spec} A[X_1,\dots,X_n] \to \operatorname{Spec} A[X_1,\dots,X_n]$$

est induit par un automorphisme A-linéaire de l'algèbre polynomiale $A[X_1,\dots,X_n]$, de la forme

$$X_i \longrightarrow \sum_j \theta_{i,j} X_j$$

où les $\theta_{i,j}$ sont des éléments de A.

Définition 6.61 (Faisceau des sections associé à un fibré)**.** *Soit $p : X \to Y$ un fibré vectoriel de rang n au dessus de Y, et U un ouvert de Y. Une section du fibré au dessus de U est un morphisme de schéma $s : U \to Y$ tel que $p\circ s = \mathrm{id}_U$. Si $U \subset V$ avec V ouvert, toute section du fibré sur V se restreint à une section sur U. De même, on peut recoller des sections compatibles sur un recouvrement quelconque de U par des ouverts.Ainsi, on dispose ainsi d'un préfaisceau $\mathscr{S}_X(Y)$ (que l'on notera $\mathscr{S}(Y)$ si X est implicite) sur X.*

Proposition 6.62. *Le faisceau des section d'un fibré vectoriel $p : Y \to X$ est doté d'une structure naturelle de $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang n.*

Démonstration. Il suffit de définir la structure et de vérifier la liberté sur les cartes. Si (U_i, ψ_i) est une carte, une section du fibré au dessus de U_i correspond à un morphisme de schémas :

$$s : \operatorname{Spec} A = U_i \to p^{-1}(U_i)$$

tel que $p\circ s = \mathrm{id}_{U_i}$. De sorte que $\psi_i \circ s$ est issus d'un unique morphisme

$$A[X_1,\cdots,X_n] \mapsto A$$

qui soit A-linéaire. C'est-à-dire à un élément de A^n. Ainsi, le faisceau $\mathscr{S}(Y)$ est naturellement un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang n. $\square$

On admet la proposition suivante.

Proposition 6.63. *[Fibré vectoriel associé à un $\mathcal{O}_X$-module localement libre] Soit M un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang n. Alors, le spectre relatif de*

$$\operatorname{Sym}_X(M^\vee)$$

au dessus de X est un fibré vectoriel de rang n. On note $\mathcal{E}(M)$ ce fibré vectoriel, appelé le fibré vectoriel géométrique associé au module M.

6.10 Construction Proj

Soit $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ un anneau gradué. On note $\operatorname{Proj} A$ l'ensemble des *idéaux homogènes premiers* de A qui ne contiennent pas l'idéal $\bigoplus_{n\geq 1} A_n$. Pour chaque I idéal homogène de A on définit $V_+(I) = \{x \in \operatorname{Proj} A \mid x \supseteq I\}$ et $D_+(I) = \operatorname{Proj} A \setminus V(I)$. Les $D_+(I)$ forment une topologie sur $X = \operatorname{Proj} A$ dont une base d'ouvert est donnée par les $D_+(f) = D_+((f))$ pour $f \in A$ homogène de degré au moins 1. On va construire une structure de schéma sur $\operatorname{Proj} A$. Pour cela, on a besoin de quelques propriétés sur la localisation des anneaux gradués.

Lemme 6.64. Soit R un anneau $\mathbb{Z}$-gradué qui possède un élément inversible de degré strictement positif. Le morphisme $R_0 \longrightarrow R$ induit alors un *homéomorphisme* :

$$\operatorname{Spec} R_0 \cong \{x \in \operatorname{Spec} R \mid x \text{ homogène}\}$$

Démonstration. Le morphisme $R_0 \longrightarrow R$ induit une application continue $\operatorname{Spec} R \longrightarrow \operatorname{Spec} R_0$ que l'on restreint pour obtenir une application continue de $\{x \in \operatorname{Spec} R \mid x \text{ homogène}\}$ vers $\operatorname{Spec} R_0$. Construisons une application réciproque : soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de R_0. On observe que $R\mathfrak{p} \cap R_0 = \sqrt{R\mathfrak{p}} \cap R_0 = \mathfrak{p}$. De plus, $\sqrt{R\mathfrak{p}}$ est un idéal premier et homogène de R. Seul le côté premier nécessite un argument : soient $f, g \in R$ vérifiant $fg \in \sqrt{R\mathfrak{p}}$. On peut supposer f et g homogènes car $\sqrt{R\mathfrak{p}}$ est homogène. Il existe $N \geq 1$ tel que $(fg)^N \in R\mathfrak{p}$. Or par hypothèse on dispose d'un $\alpha \in R^\times$ homogène de degré $d \geq 1$. Ainsi $(fg)^{Nd}/\alpha^{N \deg f + N \deg g} \in R\mathfrak{p} \cap R_0$ donc cet élément vit dans $\mathfrak{p}$, et on conclut par primalité de $\mathfrak{p}$ que soit f soit g est dans $\sqrt{R\mathfrak{p}}$. On a bien construit une bijection réciproque puisque $\sqrt{R\mathfrak{p}} \cap R_0 = \mathfrak{p}$ et que pour $x \in \operatorname{Spec} R$ homogène, on a $\sqrt{R(x \cap R_0)} = x$: en effet, si $f \in x$ est homogène, $f^d/\alpha^{\deg f} \in x \cap R_0$ donc $f^d \in R(x \cap R_0)$. La continuité de l'application inverse est facile à établir. □

Proposition 6.65. Soit S une partie multiplicative de A *constituée d'éléments homogènes.* $S^{-1}A$ est alors naturellement un anneau $\mathbb{Z}$-gradué et le morphisme $A \longrightarrow S^{-1}A$ est gradué.
De plus, *dans le cas où* $S \cap A_0 = \{1\}$ *et* $S \neq \{1\}$, les morphismes $A \longrightarrow S^{-1}A \longleftarrow (S^{-1}A)_0$ induisent des homéomorphismes :

$$\{x \in \operatorname{Proj} A \mid x \cap S = \emptyset\} \cong \{y \in \operatorname{Spec} S^{-1}A \mid y \text{ homogène}\} \cong \operatorname{Spec} S^{-1}A_0$$

Si $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ pour f homogène de degré strictement positif, cela donne un homéomorphisme :

$$D_+(f) \cong \operatorname{Spec} A[1/f]_0.$$

Enfin, si $x \in \operatorname{Proj} A$, en notant $S_x = \{f \in A \setminus x \mid f \text{ homogène}\}$, la composante de degré 0 de $S_x^{-1}A$ est un anneau local, que l'on notera $A_{(x)}$: c'est le *localisé projectif* de A en x.

Démonstration. On définit la $\mathbb{Z}$-graduation sur $S^{-1}A$ par :

$$S^{-1}A_k = \{a/s \mid a \in A, s \in S, a \text{ homogène}, \deg a - \deg s = k\}$$

On vérifie sans peine que $S^{-1}A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} S^{-1}A_k$, que l'on a $1 \in S^{-1}A_0$ et pour tous $k, l \in \mathbb{Z}$, $S^{-1}A_k S^{-1}A_l \subseteq S^{-1}A_{k+l}$.
Le second homéomorphisme vient du lemme précédent appliqué à $R = S^{-1}A$ qui contient un inversible de degré au moins 1 par hypothèse sur S. Le premier est la restriction aux idéaux homogènes d'un homéomorphisme déjà connu, et les hypothèses sur S assurent que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier homogène de $S^{-1}A$, alors son image réciproque par la localisation $A \longrightarrow S^{-1}A$ ne contient pas $\bigoplus_{n \geq 1} A_n$.
Il reste à montrer que $A_{(x)}$ est local. Soit $f/s \in A_{(x)}$, non inversible. On a $s \in A \setminus x$ homogène de degré p et $f \in A$ également homogène de degré p. On a nécessairement $f \in x$: dans le cas contraire, s/f définit bien un élément de $A_{(x)}$ et f/s est inversible. Donc l'ensemble des éléments non inversibles de $A_{(x)}$ est l'idéal $x_{(x)}$ (l'autre inclusion est facile), ce qui montre que $A_{(x)}$ est local. □

Construisons maintenant le schéma $\operatorname{Proj} A$. Notons $X = \operatorname{Proj} A$. Encore une fois, on construit le faisceau structural sur une base d'ouverts. Pour $f \in A$ homogène de degré au moins 1, on pose :

$$\mathcal{O}_X(D_+(f)) = A[1/f]_0$$

Ensuite, si $D_+(f) \subseteq D_+(g)$ avec f et g homogènes de degrés strictement positifs, alors $g^{\deg f}/f^{\deg g} \in A[1/f]_0$ n'est contenu dans aucun idéal premier de $A[1/f]_0$ d'après la correspondance $\operatorname{Spec} A[1/f]_0 \cong D_+(f)$. Ainsi $g^{\deg f}/f^{\deg g}$ est inversible dans $A[1/f]_0$ et donc *g est inversible dans* $A[1/f]_0$ (en particulier dans $A[1/f]$). On a donc un unique morphisme de restriction $A[1/g]_0 \longrightarrow A[1/f]_0$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A[1/g]_0 & \longrightarrow & A[1/f]_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A[1/g] & \longrightarrow & A[1/f] \end{array}$$

Une preuve du même type que pour Spec A montre que cette construction définit un faisceau sur d'anneaux commutatifs sur X. De plus, pour chaque $x \in X$, on a un isomorphisme canonique :

$$\mathcal{O}_{X,x} \cong A_{(x)}$$

faisant de X un *espace localement annelé*. On peut montrer que pour $f \in A$ homogène de degré strictement positif, l'homéomorphisme $D_+(f) \cong \operatorname{Spec} A[1/f]_0$ provient d'un isomorphisme d'espaces localement annelés. Ainsi $D_+(f)$ est un sous-schéma ouvert affine, et ceux-ci recouvrent X donc X est un schéma. Puisque $\operatorname{Hom}(X, \operatorname{Spec} A_0) \cong \operatorname{Hom}(A_0, \mathcal{O}_X(X))$ et que les sections globales de O_X forment une A_0-algèbre, on dispose d'un morphisme $X \longrightarrow \operatorname{Spec} A_0$.

Comme pour les schémas affines, on a une manière naturelle de construire des $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} A}$-modules cohérents.

Définition 6.66. Soit M un A-module $\mathbb{Z}$-gradué. On lui associe un $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} A}$*-module* $\widetilde{M}$ *quasi-cohérent* de la façon suivante : pour chaque $D_+(f)$ ouvert de base (avec f homogène de degré strictement positif), on pose $\widetilde{M}(D_+(f)) = M[1/f]_0$. Pour chaque inclusion $D_+(f) \subseteq D_+(g)$, le morphisme $A[1/g]_0 \longrightarrow A[1/f]_0$ induit un morphisme $\widetilde{M}(D_+(g)) \longrightarrow \widetilde{M}(D_+(f))$.

Proposition 6.67. Cette construction définit bien un $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} A}$-module $\widetilde{M}$ quasi-cohérent, et pour tout $x \in \operatorname{Proj} A$, on a un isomorphisme naturel de $A_{(x)}$-modules :

$$\widetilde{M}_x \cong M_{(x)}$$

où $M_{(x)}$ est la composante de degré 0 de ${S_x}^{-1}M$ en reprenant les notations de la proposition 6.65. De plus, $M \mapsto \widetilde{M}$ définit un foncteur exact de la catégorie des A-modules $\mathbb{Z}$-gradués vers la catégorie des $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} A}$-modules.

On pourra trouver une preuve de ce résultat dans The Stacks Project [7, Tag 01M3].

Définition 6.68. Faisceaux "tordus" sur Proj A : soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour M un A-module $\mathbb{Z}$-gradué et $n \in \mathbb{Z}$, on note $M(n)$ le A-module $\mathbb{Z}$-gradué défini par $M(n)_k = M_{n+k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et la même structure de A-module que M. On pose alors $\mathcal{O}(n) = \widetilde{A(n)}$, on appelle cela un faisceau tordu sur Proj A.

Définition 6.69. Soient M et N deux A-modules $\mathbb{Z}$-gradués. On définit une graduation sur le produit tensoriel $M \otimes_A N$. On a un morphisme surjectif $M \otimes_{A_0} N \xrightarrow{p} M \otimes_A N$, et :

$$M \otimes_{A_0} N = \bigoplus_k \left(\bigoplus_{i+j=k} M_i \otimes_{A_0} M_j \right)$$

Cette décomposition est préservée par p car il ne peut y avoir de simplifications non homogènes en degré :

$$M \otimes_A N = \bigoplus_k p \left(\bigoplus_{i+j=k} M_i \otimes_{A_0} M_j \right)$$

qui est la graduation choisie pour $M \otimes_A N$.

Proposition 6.70. Soit M un A-module $\mathbb{Z}$-gradué, et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$M(n) \cong M \otimes_A A(n)$$

comme A-modules gradués. En particulier, pour $m, n \in \mathbb{Z}$, on a $A(m) \otimes_A A(n) \cong A(m+n)$.

Démonstration. On a un morphisme $M \otimes_A A(n) \longrightarrow M(n)$ induit par la multiplication, qui est bien un morphisme gradué. C'est un isomorphisme de A-modules et il est gradué donc c'est un isomorphisme de A-modules gradués. $\square$

7 Annexe 2 : Preuve du théorème 4.3 sur les catégories de modules

On démontre le théorème 4.3, dont on rappelle l'énoncé :

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne localement petite avec toutes les petites colimites. On suppose que $\mathcal{A}$ possède un *générateur projectif*, c'est à dire un objet projectif P tel que, pour tout X objet de $\mathcal{A}$ tel que $\mathrm{Hom}(P,X) = 0$, on ait $X = 0$. On suppose aussi que $\mathrm{Hom}(P,\bullet)$ préserve les petites colimites. Alors, en notant $\Lambda = \mathrm{Hom}(P,P)$, le foncteur additif $\mathcal{A} \longrightarrow \Lambda - \mathrm{Mod}^r$ qui à X associe $\mathrm{Hom}(P,X)$ est une équivalence de catégories (ici $\Lambda - \mathrm{Mod}^r$ désigne la catégorie des Λ-modules à droite).

Démonstration. Notons F le foncteur $\mathrm{Hom}(P,\bullet)$. D'abord F est clairement additif et exact car P est projectif. Il est fidèle puisque si $A \xrightarrow{f} B$ vérifie $\forall \alpha \in \mathrm{Hom}(P,A)\ f\alpha = 0$, alors on a $\mathrm{Hom}(P,\ker f) = \mathrm{Hom}(P,A)$ donc le quotient des deux, qui est $\mathrm{Hom}(P,\mathrm{im}\, f)$ (par projectivité de P) est nul. Or P est un générateur projectif donc $\mathrm{im}\, f = 0$ et $f = 0$.

Montrons qu'il est plein : soit $\mathrm{Hom}(P,A) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Hom}(P,B)$ un morphisme Λ-linéaire. *Traitons d'abord le cas où A et B sont des quotients de P* : il existe alors deux suites exactes :

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow P \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

qui induisent par exactitude de F :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P,K) \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\ell"'] & \mathrm{Hom}(P,A) \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\
 & & \Lambda \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P,B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

avec ℓ qui provient de la projectivité de Λ dans $\Lambda - \mathrm{Mod}$. Mais ℓ est Λ-linéaire à droite donc s'écrit comme la multiplication à gauche par un $r \in \Lambda$. Le diagramme précédent est donc induit par celui-ci dans $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & A \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"] & 0 \\
 & & P \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où f est induite par $P \longrightarrow P \longrightarrow B$ dont la composition avec $K \longrightarrow P$ est nulle car elle l'est en appliquant F qui est fidèle (ce qui justifie la factorisation par $P \longrightarrow A$). Le fait que $F(f) = \theta$ provient du fait que $F(f) \circ (\Lambda \to \mathrm{Hom}(P,A)) = \theta \circ (\Lambda \to \mathrm{Hom}(P,A))$ et cette dernière flèche est un épimorphisme. On a donc bien que F est plein dans ce cas.

Dans le cas général, prenons $A \xrightarrow{\theta} B$ comme précedemment, et posons :

$$\widetilde{P} = \bigoplus_{i \in \mathrm{Hom}(P,A) \sqcup \mathrm{Hom}(P,B)} P$$

C'est encore un générateur projectif (sauf si A et B sont nuls auquel cas il n'y a de toute façon rien à faire). On a des morphismes canoniques $\widetilde{P} \longrightarrow A$ et $\widetilde{P} \longrightarrow B$ qui sont des épimorphismes : si $A \xrightarrow{\alpha} X$ vérifie $\alpha \circ (P \to A) = 0$ alors pour tout $i \in \mathrm{Hom}(P,A)$ on a $\alpha i = 0$ donc $\alpha = 0$ par fidélité de F. Posons $\widetilde{F}$ le foncteur associé à $\widetilde{P}$ qui va de $\mathcal{A}$ dans $\widetilde{\Lambda} - \mathrm{Mod}$ où $\widetilde{\Lambda} = \mathrm{Hom}(\widetilde{P},\widetilde{P})$. D'après le cas particulier qu'on vient de traiter, le morphisme ($\widetilde{\Lambda}$-linéaire) évident $\mathrm{Hom}(\widetilde{P},A) \xrightarrow{\tilde{\theta}} \mathrm{Hom}(\widetilde{P},B)$ est induit par une flèche $A \xrightarrow{f} B$. On a $\widetilde{F}(f) = \widetilde{\theta}$, ce qui entraîne clairement $F(f) = \theta$. Le foncteur F est donc plein.

Enfin, montrons que F est essentiellement surjectif sur les objets : soit M un Λ-module. On écrit M comme colimite de modules libres de type fini et on utilise le fait que F commute aux colimites.

$\square$

Références

[1] Siegfried Bosch. *Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Springer, 2013.

[2] Peter Freyd. *Abelian Categories*. Harper & Row, 1966.

[3] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer, 2010.

[4] James E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer, 1972.

[5] Jacob Keller. Beilinson-bernstein localization. 2018.

[6] Saunders Mac Lane Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer, 1994.

[7] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. `https://stacks.math.columbia.edu`, 2023.

[8] Alexander Braverman Tatyana Chmutova Pavel Etingof David Yang. Introduction to algebraic d-modules. 2015.