

LA TRICHOTOMIE POUR LES STRUCTURES O-MINIMALES

ALEXANDER MOLYAKOV ET ANNA SAVELYEVA

Résumé

On expose le théorème de Peterzil-Starchenko sur l'existence d'un groupe infini définissable autour d'un point non trivial dans une structure o-minimale. Ce résultat fondamental fait partie de la trichotomie pour les structures o-minimales. On rappelle également les éléments de la théorie des modèles qui sont utilisés dans la démonstration, en particulier, la notion de la dimension dans les structures o-minimales.

INTRODUCTION

La théorie des modèles étudie les structures associées aux théories formelles. Les *structures o-minimales* sont les modèles de la théorie de l'ordre linéaire dense dans lesquelles tout sous-ensemble définissable de la droite est une union d'un nombre fini d'intervalles et de points. La géométrie o-minimale peut être vue comme une réalisation du concept de *topologie modérée* proposé par Grothendieck [Gr], qui consiste à définir une théorie géométrique excluant les phénomènes « sauvages » observés dans la topologie générale, y compris les exemples pathologiques. Les propriétés modérées et, en même temps, suffisamment flexibles des structures o-minimales les rendent utiles pour des domaines variés en mathématiques, on note particulièrement les applications récentes en théorie de Hodge [Bk] et en géométrie arithmétique [Pl].

Les trois exemples classiques de structures o-minimales sont

- $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ la structure de l'ordre linéaire dense,
- $\langle \mathbb{Q}, <, + \rangle$ la structure d'un groupe abélien divisible et ordonné,
- $\langle \mathbb{R}, <, +, \cdot \rangle$ la structure d'un corps réel clos.

Le théorème de trichotomie établi par Peterzil et Starchenko [PS] montre que, dans quelque sens, ces trois exemples décrivent le comportement local de toute structure o-minimale.

Si \mathcal{M} est une structure o-minimale, on dit qu'un point $a \in M$ est *non trivial* s'il existe un intervalle $I \ni a$ et une fonction continue définissable $F: I \times I \rightarrow M$ telle que F est strictement monotone en toutes les variables. Sinon, a est appelé *trivial*.

Théorème (Peterzil-Starchenko). *Soient \mathcal{M} une structure o-minimale ω_1 -saturée et $a \in M$ un point. Alors exactement une des trois possibilités suivantes vaut :*

- (T1) *le point a est trivial ;*
- (T2) *dans un voisinage convexe de a la structure \mathcal{M} est isomorphe à un espace vectoriel ordonné sur un anneau à division ordonné ;*
- (T3) *dans un voisinage convexe de a la structure \mathcal{M} est isomorphe à un corps réel clos ;*

Le théorème suivant, qui apparaît comme le théorème 4.3.1 ci-dessous, est le premier pas vers la trichotomie de Peterzil-Starchenko. Il permet de séparer le cas (T1) des cas (T2)-(T3).

Un ensemble \wedge -définissable est une intersection possiblement infinie d'ensembles définissables.

Théorème. *Soit \mathcal{M} une structure o-minimale ω_1 -saturée et soit $a \in M$ un point non trivial. Il existe un groupe convexe \wedge -définissable G tel que $a \in G$ et que G est divisible.*

Le but de ce texte est de démontrer ce résultat et d'exposer tous les préliminaires nécessaires. On suit le plan de la démonstration originale de Peterzil-Starchenko donnée dans [PS]. Dans les deux premières sections on rappelle les notions de base de la théorie des modèles et les résultats fondamentaux sur les structures o-minimales. Dans la section 3 on considère les familles de fonctions et les q-relations qui forment la base technique de l'argument. La dernière section contient la démonstration du théorème principal ainsi qu'un exemple d'une structure o-minimale dans laquelle il n'existe pas de groupe définissable (exemple 4.4.3).

Remerciements. On remercie Paul Wang, notre directeur de mémoire, pour de nombreuses discussions et pour la lecture attentive de ce texte.

1 PRÉLIMINAIRES

1.1 Les ensembles définissables

Définition 1.1.1. Soit M un ensemble. Supposons qu'on s'est donné une famille de sous-ensembles $D_i \subset \mathcal{P}(M^i)$ pour chaque $i \in \mathbb{N}$. On appelle la famille $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une *structure sur M* si

- (i) Pour tous $S, T \in D_i$ on a $S \cap T \in D_i$;
- (ii) Pour chaque $S \in D_i$ on a $M^i \setminus S \in D_i$;
- (iii) Pour tous $S \in D_i, T \in D_j$ on a $S \times T \in D_{i+j}$;
- (iv) Pour chaque $S \in D_i$ on a $\text{pr}(S) \in D_{i-1}$ où $\text{pr} : M^i \rightarrow M^{i-1}$ est une projection ;
- (v) Pour chaque i on a $\Delta_i \in D_i$ où $\Delta_i \subset M^i$ est la diagonale.

La paire $\mathcal{M} = (M, \mathcal{D})$ est appelée une *structure*. Les ensembles $S \in D_i$ sont appelés *0-définissables*. Soient $A \subset M$ un sous-ensemble et $S \subset M^i \times M^j$ un ensemble 0-définissable. Considérons les deux projections $\text{pr}_i : S \rightarrow M^i, \text{pr}_j : S \rightarrow M^j$. Étant donné un élément $\bar{a} \in A^i \subset M^i$ on définit l'ensemble $S(\bar{a})$ comme

$$S(\bar{a}) = \text{pr}_j(\text{pr}_i^{-1}(\bar{a})) = \text{pr}_j((\bar{a} \times M^j) \cap S).$$

On appelle les ensembles de cette forme *A-définissables*. Un ensemble $S \subset M^i$ est dit simplement *définissable* s'il est M -définissable.

La définition ci-dessus devient plus naturelle étant formulée en termes de la théorie des modèles. D'abord on rappelle les notions de base de la logique du premier ordre.

Définition 1.1.2. Un langage \mathcal{L} est un triplet $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ où \mathcal{F} est l'ensemble des *symboles de fonctions*, \mathcal{R} est l'ensemble des *symboles de relations* et \mathcal{C} est l'ensemble des *symboles de constantes*. À chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}$ et à chaque symbole de relation $r \in \mathcal{R}$ on associe les nombres n_f, n_r de variables.

Définition 1.1.3. Une \mathcal{L} -structure \mathcal{M} est définie par les données suivantes

- (i) Un ensemble non vide M qu'on appelle *domaine* de la structure,
- (ii) Une fonction $f: M^{n_f} \rightarrow M$ pour chaque symbole $f \in \mathcal{F}$,
- (iii) Un sous-ensemble $r \subset M^{n_r}$ pour chaque symbole $r \in \mathcal{R}$,
- (iv) Un élément $c \in M$ pour chaque $c \in \mathcal{C}$.

Dans les définitions qui suivent on fixe un ensemble dénombrable v_1, v_2, \dots de *variables*.

Définition 1.1.4. Soit \mathcal{L} un langage. L'ensemble \mathcal{T} des *termes* est défini par récurrence de la façon suivante :

- (i) $c \in \mathcal{T}$ pour chaque symbole de constante $c \in \mathcal{C}$;
- (ii) $v_i \in \mathcal{T}$ pour chaque variable v_i ;
- (iii) Si $f \in \mathcal{F}$ est un symbole de fonction et $t_1, t_2, \dots, t_{n_f} \in \mathcal{T}$ sont des termes, alors $f(t_1, \dots, t_{n_f}) \in \mathcal{T}$ est un terme.

Définition 1.1.5. Soit \mathcal{L} un langage. Une \mathcal{L} -formule *atomique* est une formule de la forme $t_1 = t_2$ avec $t_i \in \mathcal{T}$ des termes ou de la forme $r(t_1, \dots, t_{n_r})$ avec $r \in \mathcal{R}$ un symbole de relation et t_i des termes. L'ensemble des formules \mathcal{W} est défini par récursion :

- (i) Pour $\phi \in \mathcal{W}$ on a $\neg\phi \in \mathcal{W}$;
- (ii) Pour $\phi, \psi \in \mathcal{W}$ on a $\phi \wedge \psi \in \mathcal{W}$ et $\phi \vee \psi \in \mathcal{W}$;
- (iii) Si $\phi \in \mathcal{W}$ est une formule et v_i une variable on a $\exists v_i \phi \in \mathcal{W}, \forall v_i \phi \in \mathcal{W}$.

Une variable *apparaît librement* dans une formule si elle n'est pas précédée par un quantificateur. La notation $\phi(v_1, \dots, v_n)$ signifie que v_i sont les variables libres de la formule ϕ .

Soient \mathcal{L} un langage et \mathcal{M} un \mathcal{L} -structure. Soit $\phi \in \mathcal{W}$ une formule avec n variables libres v_1, v_2, \dots, v_n . Étant donné un élément

$$\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in M^n$$

on peut substituer \bar{a} dans ϕ afin d'obtenir une valeur booléenne $\phi(\bar{a}) \in \{0, 1\}$. On écrit $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ si $\phi(\bar{a}) = 1$. Une définition rigoureuse de la satisfaction est faite par récursion, voir [Mr, Définition 1.1.6].

Définition 1.1.6. Soit \mathcal{L} un langage. Soient \mathcal{M} un \mathcal{L} -structure et $A \subset M$ un sous-ensemble du domaine. Une \mathcal{L} -formule $\phi(v_1, \dots, v_i, w_1, \dots, w_j)$ et un élément $\bar{a} \in A^i$ définissent l'ensemble

$$M(\bar{a}, \phi) = \{\bar{b} \in M^j \mid \mathcal{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}.$$

Les ensembles de cette forme sont appelés A -définissables. Soit $X \subset M^i, Y \subset M^j$ des ensembles A -définissables. Une fonction (partielle) $f: X \rightarrow Y$ est dite A -définissable si le graphe $\Gamma_f \subset M^{i+j}$ est A -définissable.

Remarque 1.1.7. On peut élargir la signature \mathcal{L} en ajoutant des constantes pour chaque élément du sous-ensemble $A \subset M$. Cela résulte en une signature enrichie \mathcal{L}_A et l'ensemble M devient naturellement une \mathcal{L}_A -structure. En examinant les définitions, on vérifie que les sous-ensembles de M 0-définissables par rapport à \mathcal{L}_A sont précisément les sous-ensembles A -définissables dans la structure initiale.

La Définition 1.1.6 est équivalente à la Définition 1.1.1. Cette équivalence résulte du fait que les opérations des ensembles \cup, \cap, \setminus peuvent être exprimées comme les opérations logiques \vee, \wedge, \neg appliquées aux formules définissant ces ensembles, voir [Mr, Proposition 1.3.4].

Définition 1.1.8. Soit \mathcal{L} un langage. Une \mathcal{L} -théorie \mathcal{T} est un ensemble de \mathcal{L} -formules sans variables libres. On dit qu'une \mathcal{L} -structure \mathcal{M} est un *modèle* de \mathcal{T} si $\mathcal{M} \models \phi$ pour tout $\phi \in \mathcal{T}$.

Pour introduire la dimension dans le contexte de la théorie des modèles, on utilise les notions de clôture définissable et de clôture algébrique.

Définition 1.1.9. Soit \mathcal{L} un langage. Soient \mathcal{M} un \mathcal{L} -structure et $A \subset M$ un sous-ensemble du domaine. On définit la *clôture définissable* de A comme l'union des singletons A -définissables

$$\text{dcl}(A) = \{x \in M \mid \{x\} \text{ est } A\text{-définissable}\}.$$

La *clôture algébrique* de A est l'union des ensembles finis A -définissables

$$\text{acl}(A) = \bigcup \{B \mid B \subset M \text{ est un sous-ensemble fini } A\text{-définissable}\}.$$

On a donc une inclusion $\text{dcl}(A) \subseteq \text{acl}(A)$.

La clôture définissable peut être caractérisée en termes des fonctions définissables.

Lemme 1.1.10. Soit \mathcal{L} un langage. Soient \mathcal{M} un \mathcal{L} -structure et $A \subset M$ un sous-ensemble. On fixe un élément $b \in M$. Alors pour chaque $c \in M$ les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) L'élément c appartient à $\text{dcl}(A \cup \{b\})$;

(ii) Il existe une fonction A -définissable $f : M \rightarrow M$ telle que $f(b) = c$.

Démonstration. S'il existe une fonction A -définissable $f : M \rightarrow M$ telle que $f(b) = c$, alors la valeur c est Ab définissable. Supposons que le singleton $\{c\}$ est Ab -définissable. Donc il existe une formule $\phi(x, \bar{y}, z)$ et un uplet $\bar{a} \in A^r$ tels que

$$\mathcal{M} \models \exists! x \phi(x, \bar{a}, b) \wedge \phi(c, \bar{a}, b).$$

Soit

$$D = \{d \in M \mid \mathcal{M} \models \exists! x \phi(x, \bar{a}, d)\}.$$

On note que D est non vide et A -définissable et il y a une application A -définissable $f : D \rightarrow M$ définie comme

$$f(d) = x \iff \phi(x, \bar{a}, d).$$

On note que $f(b) = c$. On peut étendre la fonction f à M en définissant

$$\tilde{f}(d) = \begin{cases} f(d) & \text{si } d \in D; \\ d & \text{si } d \notin D. \end{cases}$$

□

1.2 L'espace des types et les structures saturées

Pour un ensemble de formules t on note $\neg t$ l'ensemble $\{\neg\phi \mid \phi \in t\}$.

Définition 1.2.1. Soit \mathcal{L} un langage. Soient \mathcal{M} un \mathcal{L} -structure et $A \subset M$ un sous-ensemble du domaine. Soit $F_n(A)$ l'ensemble des A -formules en n -variables. Un sous-ensemble $t \subset F_n(A)$ est appelé *n -type complet sur A* si $t \cap \neg t = \emptyset$, $t \cup \neg t = F_n(A)$ et t est clos par déduction, i.e. si $M \models \phi \rightarrow \psi$ et $\phi \in t$, alors $\psi \in t$. L'ensemble des n -types complets sur A est noté $S_n(A)$ et appelé *espace des types*.

L'espace des types $S_n(A)$ peut être muni d'une topologie naturelle [Mr, p.119], il est donc un invariant topologique associé à la structure. On associe à chaque formule $\phi \in F_n(A)$ l'ensemble $[\phi]$ des types $t \in S_n(A)$ qui contiennent ϕ . Ces ensembles constituent la base de la topologie sur $S_n(A)$. De plus, chaque ensemble de cette forme est ouvert-fermé puisqu'on a $S_n(A) = [\phi] \sqcup [\neg\phi]$. Le théorème de compacité assure que l'espace des types $S_n(A)$ est compact [Mr, Lemma 4.1.8].

Remarque 1.2.2. Il existe un autre point de vue sur les espaces des types. Soit $\mathcal{D}_n(A)$ la collection des ensembles A -définissables dans M^n . Notons que $\mathcal{D}_n(A)$ devient un anneau booléen muni par les opérations d'intersection \cap et de différence symétrique Δ . On peut montrer que l'espace des types $S_n(A)$ s'identifie naturellement avec le spectre de Zariski $\text{Spec}(\mathcal{D}_n(A))$. En particulier, il est compact.

Définition 1.2.3. Soit \mathcal{L} un langage. Soient \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure et $A \subset M$ un sous-ensemble du domaine. Chaque élément $\bar{a} \in M^n$ définit le type $\text{tp}_A(\bar{a}) \in S_n(A)$ composée des formules $\phi \in F_n(A)$ telles que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$. On dit qu'un n -type complet $t \in S_n(A)$ est *réalisé par un élément* $\bar{a} \in M^n$ si $t = \text{tp}_A(\bar{a})$.

Soit κ un cardinal. Une structure \mathcal{M} est dite κ -saturée si, pour tout $A \subset M$ tel que $|A| < \kappa$ et tout $n \in \mathbb{N}$, chaque type $t \in S_n(A)$ peut être réalisé par un élément de M^n .

Définition 1.2.4. Soit \mathcal{L} un langage, une extension de \mathcal{L} -structures $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ est appelé *élémentaire* si pour toute formule $\phi(v_1, \dots, v_n)$ définissant l'ensemble $S \subset M^n$ on a $S(N) \cap M^n = S$. Dans ce cas, on écrit $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$. La structure \mathcal{M} est appelée *modèle premier* de $\text{Th}(\mathcal{N})$ si, pour tout modèle \mathcal{N}' de la théorie $\text{Th}(\mathcal{N})$, il existe un plongement élémentaire $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}'$.

Un résultat fondamental de la théorie des modèles est l'existence d'une extension élémentaire qui est suffisamment saturée [Mr, Theorem 4.3.12].

Théorème 1.2.5. Soit \mathcal{M} une structure et soit κ un cardinal. Alors il existe une extension élémentaire $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ qui est κ -saturée.

2 LA DIMENSION DANS LES STRUCTURES O-MINIMALES

Le calcul des dimensions est un outil technique important pour la construction géométrique de Peterzil-Starchenko. Dans cette section on rappelle les définitions des objets nécessaires et les propriétés fondamentales de la dimension pour les structures o-minimales.

2.1 Les pré géométries.

Les pré géométries s'avèrent être des objets utiles pour introduire la notion de dimension. Pour un ensemble M , on note $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des sous-ensembles de M .

Définition 2.1.1. Une *pré géométrie* est un ensemble M muni d'un opérateur de clôture $\text{cl}: \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ qui satisfait les conditions suivantes pour tous $A \in \mathcal{P}(M)$; $a, b \in M$:

- (i) $A \subseteq \text{cl}(A)$;
- (ii) $\text{cl}(A) = \bigcup \text{cl}(A')$ où $A' \subseteq A$ varie parmi tous les sous-ensembles finis de A ;
- (iii) $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$;
- (iv) $a \in \text{cl}(Ab) \setminus \text{cl}(A) \Rightarrow b \in \text{cl}(Aa)$ (*la condition d'échange*).

Une pré géométrie telle que $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset$ et $\text{cl}(x) = \{x\}$ pour tout point $x \in M$ est appelée une *géométrie*.

Définition 2.1.2. Soit (M, cl) une pré géométrie et soit $S \subseteq M$ un sous-ensemble. On définit les pré géométries (S, cl^S) et (M, cl_S) de façon suivante

$$\text{cl}^S(A) = \text{cl}(A) \cap S, \quad \text{cl}_S(A) = \text{cl}(A \cup S).$$

On appelle (S, cl^S) *restriction* et (M, cl_S) *relativisation* de la pré géométrie (M, cl) .

Définition 2.1.3. Soit (M, cl) une pré-géométrie. Un sous-ensemble $B \subset M$ est appelé *base* si

- (i) $M = \text{cl}(B)$,
- (ii) $a \notin \text{cl}(B \setminus \{a\})$ pour tout $a \in B$.

Deux bases quelconques d'une pré-géométrie ont la même cardinalité [TZ, Lemma C.1.6], cela peut être prouvé par un argument généralisant le cas des espaces vectoriels.

Proposition 2.1.4. Soient B, B' deux bases d'une pré-géométrie (M, cl) . Alors, on a $|B| = |B'|$.

Définition 2.1.5. Soit (M, cl) une pré-géométrie. La *dimension* $\dim_{\text{pg}}(M)$ est la cardinalité d'une base de (M, cl) . Soient $A, B \subseteq M$ deux sous-ensembles. On définit la *dimension relative* $\dim_{\text{pg}}(A/B)$ comme la dimension de la pré-géométrie (A, cl_B^A) .

On aura besoin de la caractérisation suivante de la dimension relative [TZ, Lemma C.1.8].

Proposition 2.1.6. Soient (M, cl) une pré-géométrie et $S \subset M$ un sous-ensemble. Alors on a

$$\dim_{\text{pg}}(M) = \dim_{\text{pg}}(S) + \dim_{\text{pg}}(M/S).$$

Exemple 2.1.7. Toutes les notions introduites peuvent être interprétées dans le cas des espaces vectoriels. À un espace vectoriel V sur un corps k on associe une pré-géométrie (V, cl) où $\text{cl}(A)$ est défini comme le sous-espace linéaire engendré par les éléments de A . Soit $W \subset V$ un sous-espace linéaire, alors la pré-géométrie associée à W est la restriction (W, cl^W) . De façon similaire, la relativisation (V, cl_W) est isomorphe à la pré-géométrie associée à l'espace quotient V/W . Les notions de base et de dimension coïncident avec celles pour les espaces vectoriels.

2.2 Les structures géométriques

Étant donné une structure \mathcal{M} , on associe à chaque point $\bar{a} = (a_1, \dots, a_r) \in M^r$ l'ensemble des coordonnées $\text{coord}(\bar{a}) = \{a_1, \dots, a_r\}$ vu comme un sous-ensemble fini de M . L'expression $\bar{a}\bar{b}$ signifie l'union des coordonnées $\text{coord}(\bar{a}) \cup \text{coord}(\bar{b}) \subset M$. De façon similaire, si $A \subset M$ est un sous-ensemble et $\bar{b} \in M^r$ un point, on écrit $\bar{b}A$ pour l'union $\text{coord}(\bar{b}) \cup A \subset M$.

Définition 2.2.1. Soit \mathcal{L} un langage. Soit \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure. On dit que \mathcal{M} est une *structure géométrique* si les deux conditions suivantes valent

- (i) (*La condition d'échange*) Pour tous éléments $a, b \in M$ et tout sous-ensemble $A \subset M$ tels que $a \in \text{acl}(Ab) \setminus \text{acl}(A)$, on a $b \in \text{acl}(Aa)$;
- (ii) (*La finitude uniforme des fibres*) Pour tout ensemble 0-définissable $S \subset M^r$ il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que, si une fibre $\text{pr}^{-1}(a)$ de la projection $\text{pr}: S \rightarrow M^{r-1}$ est finie, on a $|\text{pr}^{-1}(a)| \leq n$.

La structure \mathcal{M} est dite *fortement géométrique* si toute extension élémentaire de \mathcal{M} est une structure géométrique.

Il découle des définitions que toute structure géométrique est une pré-géométrie munie par l'opérateur de clôture algébrique. Soit $A \subset M$ un sous-ensemble arbitraire. On note $\dim(\bar{a}/A)$ la dimension $\dim_{\text{pg}}(\text{coord}(\bar{a})/A)$. En fait, la dimension $\dim(\bar{a}/A)$ dépend seulement du type complet $\text{tp}_A(\bar{a})$. La formule suivante résulte de la Proposition 2.1.6.

Proposition 2.2.2. *Soit \mathcal{M} une structure géométrique et $A \subset M$ un sous-ensemble. Pour tous points $\bar{a}, \bar{b} \in M^r$ on a l'égalité*

$$\dim(\overline{a\bar{b}}/A) = \dim(\bar{a}/A\bar{b}) + \dim(\bar{b}/A).$$

Définition 2.2.3. Soit \mathcal{L} un langage. Soient \mathcal{M} une structure géométrique et $A \subset M$ un sous-ensemble. La dimension d'un sous-ensemble A -définissable $S \subset M^r$ est définie comme

$$\dim(S/A) = \max \{ \dim(\bar{a}/A) \mid \bar{a} \in S(N), \mathcal{M} \preceq \mathcal{N} \}$$

où le maximum est choisi pour tous les points \bar{a} de S dans toutes les extensions élémentaires $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$. On dit que $\bar{a} \in S(N)$ est un *point générique sur A* si $\dim(\bar{a}/A) = \dim(S/A)$.

Comme la dimension d'un point est déterminée par le type de ce point, on peut trouver un point générique d'un ensemble définissable sans avoir besoin de passer aux extensions élémentaires dès que la structure est suffisamment saturée.

Proposition 2.2.4. *Soit \mathcal{M} une structure géométrique et $A \subset M$ un sous-ensemble. Supposons que \mathcal{M} est $|A|^+$ -saturée. Soit $S \subset M^r$ un ensemble A -définissable. Alors il existe un point $\bar{a} \in S$ générique sur A .*

En fait, la dimension ne dépend pas de l'ensemble des paramètres.

Proposition 2.2.5. *Soit \mathcal{L} un langage. Soient \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure fortement géométrique et soient A, B deux sous-ensembles de M tels que $A \subset B$. Alors pour chaque ensemble A -définissable $S \subset M^r$ on a $\dim(S/A) = \dim(S/B)$.*

Vu la Proposition 2.2.5, on peut écrire simplement $\dim(S)$ pour la dimension d'un ensemble définissable $S \subset M^r$.

Démonstration. On a une inégalité $\dim(\bar{a}/A) \geq \dim(\bar{a}/B)$ pour tout point $\bar{a} \in M^r$. On en déduit l'inégalité $\dim(S/A) \geq \dim(S/B)$. Montrons l'inégalité inverse. Par le théorème 1.2.5, en passant à une extension élémentaire de \mathcal{M} on peut supposer que \mathcal{M} est $|B|^+$ -saturée. Soit $n = \dim(S/A)$ et soit $\bar{a} = (a_1, \dots, a_r) \in S$ un point générique de S sur A . On peut supposer que a_1, \dots, a_n sont algébriquement indépendants sur A . Comme la structure est saturée on peut appliquer le théorème de compacité pour trouver par récurrence $a'_1, \dots, a'_r \in M$ tels que a'_1, \dots, a'_n sont algébriquement indépendants sur B et que $\text{tp}_A(a'_1, \dots, a'_r) = \text{tp}_A(a_1, \dots, a_r)$. Alors on a

$$\dim(S/B) \geq \dim(\bar{a}'/B) \geq n = \dim(S/A).$$

□

Exemple 2.2.6. Soient \mathcal{M} une structure géométrique et $A \subset M$ un sous-ensemble. Considérons un ensemble A -définissable $S \subset M$. Si S est fini, alors chaque élément de S est A -algébrique. Dans ce cas, $\dim(S/A) = 0$. Supposons que S est infini. Soit Σ l'ensemble de toutes les A -formules qui définissent des sous-ensembles finis de M . Ajoutons une constante x dans la signature. On considère l'ensemble de formules

$$\mathcal{F} = \{\neg\phi(x) \mid \phi \in \Sigma\}.$$

Cet ensemble est finiment satisfaisable puisque la conjonction d'un sous-ensemble fini de formules $\{\neg\phi_1(x), \dots, \neg\phi_n(x)\}$ est réalisée dans S car S est infini. Alors, par le théorème de compacité, il existe une extension élémentaire $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ telle que toutes les formules de \mathcal{F} sont réalisées simultanément par un élément de $S(N)$. Ainsi, il existe un élément $x \in S(N)$ transcendant sur A et on a $\dim(S/A) = 1$. En particulier, on observe que la dimension de S ne dépend que de la finitude de S .

La dimension se comporte bien par rapport aux produits.

Proposition 2.2.7. *Soit \mathcal{M} une structure fortement géométrique et soient $S_1 \subset M^{r_1}$, $S_2 \subset M^{r_2}$ deux ensembles définissables. Leur produit peut être vu comme un ensemble définissable $S_1 \times S_2 \subset M^{r_1+r_2}$. Alors*

$$\dim(S_1 \times S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2).$$

Démonstration. Supposons que les S_i sont définis sur un ensemble fini de paramètres $A \subset M$. Alors pour tous points $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$ on a

$$\dim(x_1x_2/A) \leq \dim(x_1/A) + \dim(x_2/A) \leq \dim(S_1) + \dim(S_2).$$

Ainsi, $\dim(S_1 \times S_2) \leq \dim(S_1) + \dim(S_2)$. En utilisant la proposition 2.2.5, on trouve des points génériques $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$ tels que $\dim(x_1/Ax_2) = \dim(x_1/A)$. Alors

$$\dim(x_1x_2/A) = \dim(x_1/A) + \dim(x_2/A) = \dim(S_1) + \dim(S_2).$$

Ceci implique que $\dim(S_1 \times S_2) \geq \dim(S_1) + \dim(S_2)$ et donc complète la démonstration. \square

Définition 2.2.8. Soit \mathcal{M} une structure géométrique. Soient $S \in M^n$ un ensemble définissable et \sim une relation d'équivalence définissable sur S . On définit les ensembles

$$S_n = \{x \in S \mid \dim([x]_{\sim}) = n\}.$$

On définit la dimension du quotient S/\sim comme

$$\dim(S/\sim) = \max_i (\dim(S_i) - i).$$

2.3 Les structures o-minimales

Désormais, on suppose pour la simplicité que toutes les structures considérées sont ω_1 -saturées.

Définition 2.3.1. Soit M un ensemble muni d'une relation d'ordre linéaire dense. Soit \mathcal{L} un langage et \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure avec le domaine M . La structure \mathcal{M} est dite *o-minimale* si tout ensemble définissable $S \subset M$ est une union d'un nombre fini d'intervalles et de points.

Proposition 2.3.2. Soit \mathcal{M} une structure o-minimale et soit $A \subset M$ un sous-ensemble. Alors $\text{acl}(A) = \text{dcl}(A)$.

Démonstration. Il suffit de voir que chaque élément d'un ensemble fini A -définissable est définissable lui-même. Effectivement, soit $B \subset M$ un ensemble fini A -définissable, alors on peut définir chaque élément $b \in B$ en fixant son ordre par rapport aux autres éléments de B . \square

Les structures o-minimales satisfont le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 2.3.3. Soit \mathcal{M} une structure o-minimale et soit $I \subset M$ un intervalle. Considérons une fonction continue définissable $f: I \rightarrow M$ et un point $y \in M$. Supposons qu'il existe $a, b \in I$ tels que $f(a) \geq y \geq f(b)$. Alors il existe $c \in I$ tel que $f(c) = y$.

La preuve de ce résultat est similaire à celle du théorème standard, en particulier, elle s'appuie sur l'existence des opérations sup et inf pour les ensembles définissables. On aura également besoin du théorème de monotonie pour les structures o-minimales.

Théorème 2.3.4. [Dr, 3.1.2] Soit \mathcal{M} une structure o-minimale et soit $f: M \rightarrow M$ une fonction définissable. Alors il existe une partition

$$a_0 < a_1 < \dots < a_n \in M \cup \{-\infty, \infty\}$$

telle que pour chaque i la restriction $f|_{(a_i, a_{i+1})}$ est constante ou continue strictement monotone.

Lemme 2.3.5. Soit \mathcal{M} une structure ω_1 -saturée. Alors tout recouvrement de M^n par des ensembles 0-définissables admet un sous-recouvrement fini.

Démonstration. Soit $M^n = \bigcup_i D_i$ un recouvrement. Chaque D_i définit un ensemble ouvert-fermé \mathcal{D}_i dans l'espace des types $S^n(M)$. Soit $t \in S^n(M)$ un type, alors t est réalisable par un point $x_t \in M^n$. Comme $\{D_i\}$ est un recouvrement, x_t appartient à quelque D_i . Donc les ouverts-fermés \mathcal{D}_i forment un recouvrement de l'espace des types. Ce dernier est compact, alors il existe un sous-recouvrement fini. Les ensembles définissables correspondants forment un sous-recouvrement fini de M^n convenable. \square

On utilise le résultat suivant sur la finitude uniforme d'une projection d'un ensemble définissable.

Lemme 2.3.6. *Soit \mathcal{M} une structure o-minimale et soit $S \subset M^r$ un ensemble définissable. On considère une projection $\text{pr} : S \rightarrow M^{r-1}$.*

(i) *L'ensemble*

$$F = \{x \in M^{r-1} \mid \text{la fibre } \text{pr}^{-1}(x) \text{ est finie}\}$$

est définissable ;

(ii) *Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $|\text{pr}^{-1}(x)| \leq n$ pour tout $x \in F$.*

Démonstration. (i) Il suffit de montrer que le complémentaire $\neg F$ est définissable. Tout sous-ensemble infini définissable de M contient un intervalle puisque la structure est o-minimale. Donc, on peut le définir $\neg F$ comme l'ensemble des points tels que la fibre au-dessus de ces points contient un intervalle (a, b) pour quelques $a, b \in M$.

(ii) Désormais, on peut supposer que toute fibre est finie par (i) et que \mathcal{M} est ω_1 -saturée. Considérons les ensembles 0-définissables

$$D_{\leq n} = \{x \in M^{r-1} \mid |\text{pr}^{-1}(x)| \leq n\}.$$

On a $M^{r-1} = \bigcup_i D_i$, ceci implique que l'un des D_i coïncide avec M^{r-1} par le lemme 2.3.5. □

Théorème 2.3.7. *Soit \mathcal{M} une structure o-minimale. Alors \mathcal{M} est une structure fortement géométrique.*

Démonstration. Il découle du théorème de décomposition cellulaire qu'une extension élémentaire d'une structure o-minimale est o-minimale. Donc, il suffit de vérifier que \mathcal{M} est une structure géométrique. Le lemme 2.3.6 assure la finitude uniforme des fibres. Vu l'équivalence entre la clôture algébrique et la clôture définissable pour les structures o-minimales (Proposition 2.3.2), il reste à démontrer la condition d'échange (Définition 2.2.1) pour la clôture définissable.

Soit $A \subset M$ un sous-ensemble et soit $a, b \in M$ deux éléments. On suppose que $a \in \text{dcl}(Ab) \setminus \text{dcl}(A)$. Alors, par le lemme 1.1.10, il existe une fonction A -définissable $f : M \rightarrow M$ telle que $f(b) = a$. Par le théorème 2.3.4, on peut trouver une partition

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n \in M \cup \{-\infty, \infty\}$$

telle que pour chaque i la restriction $f|_{(t_i, t_{i+1})}$ est constante ou continue strictement monotone. Si $b = t_i$ pour quelque i , alors b est A -définissable et, donc, a est également A -définissable qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, il existe un intervalle A -définissable $I \subset M$ tel que $b \in I$ et $f|_I$ est monotone continue ou constante. Si $f|_I$ est constante, sa valeur est A -définissable et on conclut que a est A -définissable. Sinon, $f|_I$ est un homéomorphisme A -définissable sur son image J , soit $g : J \rightarrow I$ l'application inverse. On a $g(a) = b$ et il suffit de prolonger g par l'identité en dehors de J pour appliquer le lemme 1.1.10 et conclure que $b \in \text{dcl}(Aa)$. □

Le théorème précédent nous permet d'utiliser la définition 2.2.3 pour définir la dimension d'un ensemble définissable $S \subset M^r$ quand \mathcal{M} est une structure o-minimale. Il existe une autre définition de la dimension qui résulte du théorème de décomposition cellulaire.

Définition 2.3.8. Soit \mathcal{M} une structure o-minimale. On définit les (i_1, \dots, i_r) -cellules dans M^r , pour tous $i_k \in \{0, 1\}$, par récurrence.

- (i) Une (0)-cellule est un singleton $\{x\} \subset M$. Une (1)-cellule est un intervalle ouvert $I \subset M$.
- (ii) Soit D une (i_1, \dots, i_r) -cellule. Pour une fonction continue définissable $f: D \rightarrow M$ on définit la $(i_1, \dots, i_r, 0)$ -cellule D_f comme le graphe de f . Étant donné deux fonctions continues définissables $f, g: D \rightarrow M \cup \{\pm\infty\}$ telles que $f(x) < g(x) \forall x \in D$ on construit la $(i_1, \dots, i_r, 1)$ -cellule $D_{f,g}$ comme l'ensemble

$$D_{f,g} = \{(x, a) \in D \times M \mid f(x) < a < g(x)\}.$$

La dimension d'une (i_1, \dots, i_r) -cellule D est la somme $\dim_{\text{cell}}(D) = i_1 + \dots + i_r$.

Définition 2.3.9. Soit \mathcal{M} une structure o-minimale. Une décomposition cellulaire de M^r est une partition de M^r en un nombre fini de cellules définie par récurrence.

- (i) Une décomposition cellulaire de M a la forme

$$\{(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_k, +\infty), \{a_1\}, \dots, \{a_k\}\}.$$

- (ii) Une décomposition de M^{r+1} est une partition finie de M^{r+1} en cellules D_i telle que les projections $\text{pr}(D_i) \subset M^r$ forment une décomposition cellulaire de M^r .

Une décomposition cellulaire d'un ensemble définissable $S \subset M^r$ est une décomposition cellulaire $M^r = \bigcup D_i$ telle que chaque D_i est contenue dans S ou l'intersection $D_i \cap S$ est vide. Le résultat suivant est appelé théorème de la décomposition cellulaire [Dr, 2.11].

Théorème 2.3.10. Soit \mathcal{M} une structure o-minimale. Alors chaque ensemble définissable $S \subset M^r$ admet une décomposition cellulaire.

Toute structure o-minimale est une structure géométrique par le théorème 2.3.7. Il s'avère que la notion de la dimension est compatible avec les décompositions cellulaires.

Théorème 2.3.11. Soit \mathcal{M} une structure o-minimale et soit $S \subset M^r$ un ensemble définissable. Considérons une décomposition cellulaire $S = \bigcup D_i$. Alors

$$\dim(S) = \max_i \dim_{\text{cell}}(D_i).$$

Démonstration. On note que la dimension d'un intervalle $I \subset M$ est 1, voir exemple 2.2.6. Par la formule de produit 2.2.7, on déduit que la dimension d'une boîte $I_1 \times \cdots \times I_r \subset M^r$ est égale à r . Par conséquent, si un ensemble définissable $S \subset M^r$ a un intérieur non vide, on a $\dim(S) = r$. Ensuite, on diminue la décomposition cellulaire de S de manière que chaque cellule D_i avec $\dim_{\text{cell}}(D_i) = n$ se projette homéomorphiquement sur un ouvert de M^n . Ainsi,

$$\dim(S) = \max_i \dim(D_i) = \max_i \dim_{\text{cell}}(D_i).$$

□

Corollaire 2.3.12. *Soit \mathcal{M} une structure o-minimale et soit $A \subset M$ un sous-ensemble. Alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble*

$$\{x \in M^n \mid \dim(x/A) = n\}$$

est A -définissable.

3 LES FAMILLES DE FONCTIONS ET LES GROUPES DÉFINISSABLES

Le but de cette section est de construire un groupe \wedge -définissable dans une structure o-minimale \mathcal{M} à partir d'une famille de fonctions suffisamment variée (normale) de dimension au moins 2. Cette construction se compose de trois étapes. D'abord on produit une famille de fonctions qui vérifie certaines propriétés de monotonie, de telles familles sont dites *bonnes* (théorème 3.1.6). Une bonne famille de fonctions induit un prédicat d'arité 4 sur un ouvert convexe de M qu'on appelle *q-relation*, voir le théorème 3.2.6. Finalement, on définit l'opération de groupe qui repose sur la q-relation (cf. théorème 3.3.2).

3.1 Les familles de fonctions

Définition 3.1.1. Soit \mathcal{M} une structure o-minimale. Une *famille de fonctions* \mathcal{F} est une application définissable $F : U \times I \rightarrow M$ où $U \subset M^n$ est un ensemble définissable et $I \subset M$ est un intervalle. L'application F est vue comme une famille des fonctions $f_u(x) = F(u, x)$ paramétrées par les points de la base U . On appelle *dimension de \mathcal{F}* la dimension de la base $\dim(U)$. La famille \mathcal{F} est dite *normale* si pour tous points distincts $u_1, u_2 \in U$ il existe un nombre fini de valeurs $x \in I$ telles que $F(u_1, x) = F(u_2, x)$. Étant donné une famille de fonction \mathcal{F} avec une base U et un point $(x, y) \in I \times M$ on note

$$U_{xy} = \{u \in U \mid F(u, x) = y\}$$

l'ensemble des fonctions dans la famille dont les graphes passent par le point (x, y) .

Notre but est de produire une bonne famille de fonctions à partir d'une famille de fonctions normale de dimension au moins 2, voir le théorème 3.1.6. Cette famille nous servira pour définir une q-relation. On commence par trois lemmes techniques.

Lemme 3.1.2. *Soit \mathcal{M} une structure o-minimale et soit $A \subset M$ un sous-ensemble. Soit $x \in M^n$ un point générique sur A . Soit $U \ni x$ un voisinage ouvert. Alors il existe un ouvert $V \subset U$ définissable sur $B \supset A$ tel que $x \in V$ est générique sur B .*

Démonstration. Comme l'ensemble des points $y \in M^n$ génériques sur xA est dense, il existe un point $(y_1, y_2) \in U^2$ générique sur xA tel que x est contenue dans la boîte ouverte engendrée par y_1, y_2 . On doit montrer que x est générique sur y_1y_2A . Par la proposition 2.2.2,

$$\begin{aligned} \dim(x/y_1y_2A) &= \dim(xy_1y_2/A) - \dim(y_1y_2/A) \\ &= \dim(y_1y_2/Ax) + \dim(x/A) - \dim(y_1y_2/A) \\ &= \dim(x/A) = n. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.1.3. *Soit $F: U \times I \rightarrow M$ une famille de fonctions normale A -définissable de dimension n .*

- (i) *Supposons que $n \geq 1$. Soit $(u, a) \in U \times I$ un point tel que $\dim(u/A) \geq 1$ et $\dim(a/uA) = 1$. On note $b = F(u, a)$. Alors $\dim(ab/A) = 2$.*
- (ii) *Supposons que $n \geq 2$ et soit $(u, a_1, a_2) \in U \times I \times I$ un point générique sur A . Pour $i = 1, 2$ on note $b_i = F(u, a_i)$. Alors $\dim(b_1b_2/a_1a_2A) = 2$.*

Démonstration. (i) On note que

$$\dim(a/A) \geq \dim(a/uA) = 1.$$

On conclut que $\dim(a/A) = 1$ puisque $\dim(a/A) \leq \dim(I) = 1$. Par la formule de dimension (proposition 2.2.2), on a

$$\dim(ab/A) = \dim(b/aA) + \dim(a/A) = \dim(b/aA) + 1.$$

Supposons que $\dim(b/aA) = 0$, autrement dit, $b \in \text{dcl}(aA)$. Par le lemme 1.1.10, il existe une fonction A -définissable $f: M \rightarrow M$ telle que $f(a) = b$. On considère l'ensemble uA -définissable

$$W = \{x \in I \mid f(x) = F(u, x)\}.$$

Comme \mathcal{M} est une structure o-minimale W est une union d'intervalles et de points isolés. Si $a \in W$ est un point isolé, alors a est uA -définissable qui contredit l'hypothèse. Donc il existe un intervalle $I_1 \subset W$ qui contient a . De façon similaire on considère l'ensemble A -définissable

$$U_0 = \{u_0 \in U \mid f(x), F(u_0, x) \text{ coïncident sur un ensemble infini}\}.$$

Comme $u \in U_0$ et $\dim(u/A) \geq 1$ on conclut que U_0 est infini, ceci contredit la normalité de \mathcal{F} .

(ii) On a

$$\dim(ua_1b_1) \geq \dim(ua_1) \geq 3.$$

Alors par la formule de dimension

$$\dim(u/a_1b_1A) = \dim(ua_1b_1/A) - \dim(a_1b_1/A) \geq 3 - 2 = 1.$$

On a également

$$\dim(a_2/a_1b_1uA) = \dim(a_2/a_1uA) = 1$$

comme b_1 est a_1uA -définissable et $(u, a_1, a_2) \in U \times I^2$ est un point générique sur A . Ainsi, on peut appliquer (i) en remplaçant A par a_1b_1A et a par a_2 . \square

Lemme 3.1.4. *Soit \mathcal{M} une structure o-minimale.*

- (i) *Soient $I, J \subset M$ des intervalles ouverts et $a \in I, b \in J$ deux points. Soit $H: I \times J \rightarrow M$ une application continue définissable et strictement monotone en toutes les variables. Alors il existe des voisinages ouverts $a \in I_1 \subset I, b \in J_1 \subset J$ et une bijection continue définissable $\phi: I_1 \rightarrow J_1$. De plus, si H est strictement croissante ou décroissante on peut prendre ϕ décroissante.*
- (ii) *Soient $I_i \subset M$ des intervalles ouverts pour $i = 1, 2, 3$. Soit $G: I_1 \times I_2 \times I_3 \rightarrow M$ une application continue définissable et strictement monotone en toutes les variables. Alors il existe un intervalle $I \subset M$ et des injections continues définissables $\phi_i: I \rightarrow I_i$ telles que $G \circ (\phi_1, \phi_2, \phi_3): I^3 \rightarrow M$ est strictement croissante.*

Démonstration. (i) On considère l'ensemble

$$\Omega_{ab} = \{(x, y) \in I \times J \mid H(x, y) = H(a, b)\}.$$

Comme l'application H est strictement monotone et continue, par le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.3.3), il existe un voisinage $I_1 \times J_1$ du point (a, b) tel que $\Omega_{ab} \cap (I_1 \times J_1)$ est le graphe d'une fonction monotone et continue $\phi: I_1 \rightarrow J_1$. On vérifie que ϕ est décroissante quand H est strictement croissante ou décroissante.

(ii) Par (i) on trouve un sous-intervalle $I_0 \subset I_1$ et des plongements $\psi_i: I_0 \hookrightarrow I_i$ pour $i = 2, 3$. Ainsi, on obtient une application monotone continue

$$G' = G \circ (\text{id}, \psi_1, \psi_2): I_0^3 \rightarrow M.$$

On peut supposer que G' est strictement croissante ou décroissante par rapport aux deux premières variables. En fixant un élément arbitraire $c \in I_0$ et en appliquant (i) à la restriction $G'(x, y, c)$ on trouve un sous-intervalle $I \subset I_0$ et une application $\theta: I \rightarrow I_0$ continue strictement décroissante. On compose G' avec le plongement $I \hookrightarrow I_0$ ou avec θ pour obtenir une application $I^3 \rightarrow M$ strictement croissante continue. \square

Soit $p \in M$ un point. On dit qu'un énoncé vaut pour $x \in (p)^+$ (resp. $x \in (p)^-$) s'il vaut sur un intervalle de la forme (p, p_1) , resp. (p_2, p) .

Définition 3.1.5. Soient $f, g: I \rightarrow M$ deux fonctions définissables sur un intervalle I . Soit $p \in I$ un point tel que $f(p) = g(p)$. On utilise les notations suivantes.

$$\begin{aligned} f \prec_p^+ g &\text{ si } f(x) < g(x) \text{ pour } x \in (p)^+; \\ f \prec_p^- g &\text{ si } f(x) < g(x) \text{ pour } x \in (p)^-; \\ f \prec_p g &\text{ si } f \prec_p^+ g \text{ et } g \prec_p^- f. \end{aligned}$$

Théorème 3.1.6. Soit \mathcal{M} une structure o-minimale. Supposons qu'il existe une famille de fonctions normale de dimension $n \geq 2$ continue et strictement monotone en toutes les variables. Alors il existe une famille de fonctions $F: V \times J \rightarrow M$ où $V \subset M^2$ est un ouvert et $J \subset M$ est un intervalle qui satisfait les propriétés suivantes :

- (i) F est continue et strictement croissante en toutes les variables ;
- (ii) pour tout point $(x, y) \in M^2$ si l'ensemble V_{xy} est non vide alors $\pi_1: V_{xy} \rightarrow M$ est un homéomorphisme sur un intervalle ouvert, qui est monotone par rapport à l'ordre \prec_x ;
- (iii) Pour deux points distincts $u_1, u_2 \in V$ il existe au plus un x tel que $F(u_1, x) = F(u_2, x)$.

On appelle *bonnes familles de fonctions* celles qui vérifient les propriétés (i)-(iii).

Démonstration. Soit $G: U \times I \rightarrow M$ une famille normale monotone de dimension au moins 2. Par le théorème 2.3.10, U contient un sous-ensemble définissable qui se projette homéomorphiquement sur un ouvert $V \subset M^2$. On considère la famille induite $F: V \times I \rightarrow M$. Par le lemme 3.1.4, on peut supposer que $V = I^2$ et que F est strictement croissante en toutes les variables. Supposons que V est défini sur un ensemble fini de paramètres A . Soit $(u_0, e) \in V \times I$ un point générique sur A .

On note $b = F(u_0, e)$. Par la proposition 2.2.2, on a

$$\dim(u_0/ebA) = \dim(u_0eb/A) - \dim(eb/A) = \dim(u_0e/A) - \dim(eb/A) \geq 3 - 2 = 1,$$

donc $\dim(V_{eb}/ebA) \geq 1$ car V_{eb} contient u_0 . Si $\dim(V_{eb}) = 2$ alors V_{eb} contient un produit de deux intervalles qui contredit la monotonie de F . Ainsi, on conclut que $\dim(V_{eb}) = 1$. Comme F est strictement monotone, il existe un ouvert $V_0 \subset V$ tel que les deux projections $\pi_1, \pi_2: V_{eb} \cap V_0 \rightarrow I$ sont des homéomorphismes sur des intervalles ouverts. D'après le lemme 3.1.2, on peut choisir V_0 de façon que ces paramètres soient indépendants de u, e . On considère l'ensemble S des paires $(u, x) \in V \times I$ telles que $\dim(V_{xy}) = 1$, où $y = F(u, x)$, et que les deux projections $\pi_1, \pi_2: V_{xy} \cap V_0 \rightarrow I$ sont des homéomorphismes sur des intervalles ouverts. Par le corollaire 2.3.12, S est définissable. Par le lemme 3.1.2, on peut encore supposer que le point (u_0, e) est un point générique de S sur $B \supset A$ et il est contenu dans l'intérieur de S . En diminuant V et I on peut supposer que $S = V \times I$.

On considère l'intersection $J = \pi_1(V_{eb}) \cap (-\infty, \pi_1(u_0))$. Par le théorème 2.3.3, l'intervalle J se divise en deux ensembles définissables

$$J^+ = \{w \in J \mid F(\pi_1^{-1}(w), x) \prec_e^+ F(u_0, x)\},$$

$$J^- = \{w \in J \mid F(\pi_1^{-1}(w), x) \succ_e^+ F(u_0, x)\}.$$

Par o-minimalité, l'un de ces deux ensembles contient un intervalle de la forme $(t, \pi_1(u_0))$. En diminuant V on peut supposer que $J = J^+$ ou $J = J^-$. En passant à la composition avec une application décroissante comme dans le lemme 3.1.4 on peut se ramener au premier cas.

Considérons l'ensemble suivant

$$\Theta = \{(v, e') \in V \times I \mid \forall u \in V : F(u, e') = F(v, e') \ \& \ \pi_1(u) < \pi_1(v) \rightarrow F(u, x) \prec_{e'}^+ F(v, x)\}.$$

On note que le point générique (u_0, e) est contenu dans Θ . Par conséquent on peut diminuer $V \times I$ de façon que $\Theta = V \times I$ et que (u_0, e) reste générique dans Θ . Par un argument analogue on peut supposer que l'une des formules suivantes vaut pour chaque $(u, e') \in V \times I$

$$\forall u \in V (F(u, e') = F(v, e') \ \& \ \pi_1(u) > \pi_1(v)) \rightarrow F(u, x) \prec_{e'}^- F(v, x); \quad (1)$$

$$\forall u \in V (F(u, e') = F(v, e') \ \& \ \pi_1(u) > \pi_1(v)) \rightarrow F(u, x) \succ_{e'}^- F(v, x). \quad (2)$$

Il reste à démontrer que (1) n'est pas satisfaite. On choisit $a_1 < a_2 \in I$ tels que $\dim(a_1 a_2 / u_0 A) = 2$ et soient $b_i = F(u_0, a_i)$ pour $i = 1, 2$. Par le lemme 3.1.3, $\dim(b_1 b_2 / a_1 a_2 A) = 2$. Ceci implique qu'il existe des intervalles ouverts $I_1 \ni b_1$, $I_2 \ni b_2$ avec la propriété que, pour tout $(c_1, c_2) \in I_1 \times I_2$, il existe $v \in V$ tel que $F(v, a_1) = c_1$ et $F(v, a_2) = c_2$. Choisissons $c_1 < b_1$, $c_2 > b_2$ et $v \in V$ tels que $F(v, a_i) = c_i$. Alors on a

$$F(v, a_1) = c_1 < b_1 = F(u_0, a_1),$$

$$F(v, a_2) = c_2 > b_2 = F(u_0, a_2).$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.3.3), on peut trouver $e' \in (a_1, a_2)$ tel que $F(v, x) \prec_{e'} F(u_0, x)$. Ainsi, (1) ne vaut pas. Cela complète la démonstration. \square

3.2 Les q-relations

La notion d'une q-relation est motivée par l'exemple suivant.

Exemple 3.2.1. Considérons la famille de fonctions $\mathcal{F} : f_a(x) = x^2 + ax$ ($a > 0$) définissable dans la structure o-minimale $\mathbb{R}_{\text{alg}} = \langle \mathbb{R}, <, +, \cdot \rangle$. On note que les graphes des fonctions dans cette famille passent par l'origine. De plus, la famille \mathcal{F} vérifie une certaine propriété de monotonie : $a_1 \geq a_2$ si et seulement si $f_{a_1} \succ_0^+ f_{a_2}$.

Soit \mathcal{C}_0 le monoïde des germes des fonctions lisses $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, muni de l'opération de composition. La différentielle en 0 envoie \mathcal{C}_0 dans le groupe des automorphismes de l'espace tangent T_0

$$\delta_0 : \mathcal{C}_0 \rightarrow \text{Aut}(T_0) \simeq \mathbb{R}^*.$$

D'après la formule exprimant la différentielle d'une composée, δ_0 est un morphisme de monoïdes. L'image des fonctions f_a de la famille \mathcal{F} sous δ_0 est le sous-monoïde multiplicatif $\mathbb{R}_{>0}^* \subset \mathbb{R}^*$. Cependant, l'ensemble $\{f_a \mid a > 0\}$ n'est pas clos sous composition

et donc ne forme pas un sous-monoïde de \mathcal{C}_0 . Notre but est de reconstruire le groupe $\text{Aut}(T_0)$ à partir de la famille \mathcal{F} . Comme dans la construction de la symétrisation d'un monoïde (le groupe de Grothendieck), on considère les quotients de la forme $f_a f_b^{-1}$ dans un voisinage de 0. On introduit une relation R sur $\mathbb{R}_{>0}^4$ de la façon suivante

$$\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle \iff f_a f_b^{-1} \preceq_0^+ f_c f_d^{-1}.$$

La relation R nous permet de définir la relation d'équivalence

$$\langle a, b \rangle E \langle c, d \rangle \iff \langle c_1, d \rangle R \langle a, b \rangle R \langle c^1, d \rangle \text{ pour tous } c_1 < c < c^1.$$

On vérifie que $\delta_0(f_a f_b^{-1}) = ab^{-1}$. On en déduit que $\langle a, b \rangle E \langle c, d \rangle$ si et seulement si $\delta_0(f_a f_b^{-1}) = \delta_0(f_c f_d^{-1})$. Effectivement, si $\delta_0(f_a f_b^{-1}) > \delta_0(f_c f_d^{-1})$, on a $ab^{-1} > cd^{-1}$. Alors il existe un intervalle (c_1, c^1) contenant c tel que pour tout $c' \in (c_1, c^1)$, on a $ab^{-1} > c'd^{-1}$. Ainsi,

$$\langle a, b \rangle R \langle c', d \rangle \text{ pour tout } c' \in (c_1, c^1)$$

et on ne peut pas avoir $\langle a, b \rangle E \langle c, d \rangle$. Réciproquement, si $ab^{-1} = cd^{-1}$, on conclut que

$$c_1 d^{-1} < ab^{-1} < c^1 d^{-1} \text{ pour tous } c_1 < c < c^1.$$

Par conséquent,

$$\langle c_1, d \rangle R \langle a, b \rangle R \langle c^1, d \rangle \text{ pour tous } c_1 < c < c^1$$

et ceci donne $\langle a, b \rangle E \langle c, d \rangle$ par définition.

On note a/b la classe $\langle a, b \rangle_E$. Il reste à vérifier qu'il existe une unique opération binaire \star sur $\mathbb{R}_{>0}^2/E$ telle que $a/b \star b/c = a/c$.

On rappelle la définition et les propriétés importantes des q -relations qui furent établies dans [PS, §3]. On fixe une structure \mathcal{M} fortement o -minimale. Un sous-ensemble $\mathcal{A} \subset M$ est dit *convexe* si pour tous points $a < b$ dans \mathcal{A} , l'intervalle $[a, b]$ est entièrement contenu dans \mathcal{A} .

Définition 3.2.2. Soit \mathcal{A} un ensemble linéairement ordonné. Une relation entre paires $R \subset \mathcal{A}^4$ est appelée *q-relation* si les propriétés suivantes valent :

- (q1) R est un préordre sur \mathcal{A}^2 ;
- (q2) pour tous $b, a, a^1 \in \mathcal{A}$, $\langle a, b \rangle R \langle a^1, b \rangle$ si est seulement si $a \leq a^1$;
- (q3) $\langle a_1, b_1 \rangle R \langle a_2, b_2 \rangle$ si est seulement si $\langle b_2, a_2 \rangle R \langle b_1, a_1 \rangle$;
- (q4) si $\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle$ et $\langle b, a_1 \rangle R \langle d, c_1 \rangle$ alors $\langle a, a_1 \rangle R \langle c, c_1 \rangle$;
- (q5) pour tous $a, a_1, a_2, b \in \mathcal{A}$ tels que $a_1 < a_2$ il existe $b_1, b_2 \in \mathcal{A}$ tels que $\langle a_1, a \rangle R \langle b, b_1 \rangle R \langle a_2, a \rangle$ et $\langle a_1, a \rangle R \langle b_2, b \rangle R \langle a_2, a \rangle$.

Le théorème suivant nous permet d'éviter la vérification de la propriété (q5) en la remplaçant par 4 propriétés plus simples [PS, Lemma 3.18, Theorem 3.19].

Théorème 3.2.3. *Soit $I \subset M$ un intervalle et soit $B \subset M$ un ensemble fini de paramètres. Soit $R \subset \mathcal{A}^4$ une relation B -définissable qui satisfait (q1)-(q4) et les quatre propriétés suivantes :*

(R1) *si $c > d$ alors $\langle b, a \rangle R \langle c, d \rangle$ pour $b \in (a)^+$;*

(R2) *si $c < d$ alors $\langle c, d \rangle R \langle b, a \rangle$ pour $b \in (a)^-$;*

(R3) *si $c < d$ alors $\langle c, b \rangle R \langle d, a \rangle$ pour $b \in (a)^-$;*

(R4) *si $c > d$ alors $\langle d, a \rangle R \langle c, b \rangle$ pour $b \in (a)^+$.*

Si $a^ \in I$ est un point générique sur B alors a^* possède un voisinage ouvert convexe $\mathcal{A} \subset I$ tel que R est une q -relation sur \mathcal{A} .*

Soit $\mathcal{A} \subset M$ un ensemble convexe \wedge -définissable muni par une q -relation R . On lui associe la relation $E \subset \mathcal{A}^4$ définie comme

$$\langle a, b \rangle E \langle c, d \rangle \iff \langle c_1, d \rangle R \langle a, b \rangle R \langle c^1, d \rangle \text{ pour tous } c_1 < c < c^1.$$

Lemme 3.2.4. [PS, 3.9] *La relation E définie ci-dessus est une relation d'équivalence.*

Pour $a, b \in \mathcal{A}$ on note par a/b la classe d'équivalence de la paire $\langle a, b \rangle$ par rapport à la relation E .

Lemme 3.2.5. [PS, 3.10] *Pour tous $a, b, c \in \mathcal{A}$ il existe $d, e \in \mathcal{A}$ tels que $a/b = d/c$ et $a/b = c/e$.*

Un groupe $G \subset M$ est dit \wedge -définissable si G est un ensemble \wedge -définissable (i.e. une intersection possiblement infinie d'ensembles définissables) et le graphe de l'opération $*_G$ est une intersection de G^3 avec un sous-ensemble définissable de M^3 .

Théorème 3.2.6. *Soient \mathcal{M} une structure linéairement ordonnée et $B \subset M$ un sous-ensemble. Soit $R \subset M^4$ une q -relation B -définissable sur un sous-ensemble ouvert convexe \wedge -définissable $\mathcal{A} \subset M$. Alors pour chaque $e \in \mathcal{A}$ il existe une opération B -définissable \star_e telle que $\langle \mathcal{A}, <, \star_e \rangle$ est un groupe convexe ordonné \wedge -définissable dont l'identité est e . Le groupe est abélien et divisible.*

Démonstration. D'abord on définit l'opération \star sur les E -classes d'équivalence. Étant donné a, b, c, d on peut trouver $e \in \mathcal{A}$ tel que $c/d = b/e$ par le lemme 3.2.5. Alors on définit $a/b \star c/d = a/e$. On peut vérifier que cette opération est bien définie et munit le quotient \mathcal{A}^2/E d'une structure de groupe.

L'application $f(x) = x/e$ donne une bijection monotone $\mathcal{M}|_{\mathcal{A}}$ -définissable entre $\langle \mathcal{A}, < \rangle$ et $\langle \mathcal{A}^2/E, < \rangle$. Donc on a bien une structure de groupe \wedge -définissable sur \mathcal{A} . Tout groupe convexe \wedge -définissable dans une structure o-minimale est abélien et divisible, voir [Pt, p.99]. \square

3.3 La q-relation associée à une bonne famille de fonctions

On fixe la notation suivante. Soit $F: V \times I \rightarrow J$ une bonne famille de fonctions. Comme dans la démonstration du théorème 3.1.6, on peut trouver des points génériques $i^* \in I, j^* \in J$ et diminuer V, I de façon que la projection $\pi_1: V_{i^*j^*} \rightarrow M$ soit un homéomorphisme sur un intervalle $\mathcal{A} \subset M$. Encore en diminuant V on peut supposer que $\mathcal{A} = \pi_1(V)$. Pour un point $a \in \mathcal{A}$, il existe un unique $u \in V$ tel que $\pi_1(u) = a$ et $F(u, i^*) = j^*$. On note la fonction $F(u, x)$ par $f_a(x)$. On définit une relation R sur \mathcal{A}^4 de la façon suivante :

$$\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle \iff f_a f_b^{-1} \preccurlyeq_{j^*}^+ f_c f_d^{-1}.$$

On vérifie que R satisfait les propriétés (q1)-(q4).

On aura besoin d'un lemme technique démontré dans [PS, Lemma 5.5]. Ce lemme nous sert pour séparer localement les composées $f_b f_a^{-1}$ supérieures ou inférieures à l'identité.

Lemme 3.3.1. *Pour chaque $a, c, d \in \mathcal{A}$ où a est générique sur $\{i^*, j^*\}$,*

- (i) *Si $c > d$ il existe $a < b \in \mathcal{A}$ tel que $f_b f_a^{-1} \preccurlyeq_{j^*}^+ f_c f_d^{-1}$*
- (ii) *Si $c < d$ il existe $a > b \in \mathcal{A}$ tel que $f_b f_a^{-1} \succcurlyeq_{j^*}^+ f_c f_d^{-1}$*
- (iii) *Si $c < d$ il existe $a > b \in \mathcal{A}$ tel que $f_b^{-1} f_a \preccurlyeq_{j^*}^+ f_c^{-1} f_d$*
- (iv) *Si $c > d$ il existe $a < b \in \mathcal{A}$ tel que $f_b^{-1} f_a \succcurlyeq_{j^*}^+ f_c^{-1} f_d$*

Par le lemme 3.3.1, R satisfait les propriétés (R1)-(R4) pour $a, b, c, d \in \mathcal{A}$ où a est un point générique sur $\{i^*, j^*\}$. En diminuant \mathcal{A} on peut supposer que (R1)-(R4) valent pour tous $a, b, c, d \in \mathcal{A}$. Par le théorème 3.2.3, il existe un voisinage convexe \mathcal{A}' de a tel que R est une q-relation sur \mathcal{A}' . Ainsi, on a démontré le théorème suivant.

Théorème 3.3.2. *Soit $F: U \times I \rightarrow M$ une bonne famille de fonctions. Soit $a \in \pi_1(U)$ un point générique. Alors la relation R définie ci-dessus est une q-relation sur un voisinage convexe \mathcal{A}' de a .*

4 L'EXISTENCE D'UN GROUPE INFINI DÉFINISSABLE

On suppose que toute structure considérée est ω_1 -saturée.

Définition. Soit \mathcal{M} une structure o-minimale. Un point $p \in M$ est dit *non trivial* s'il existe un intervalle ouvert $I \ni p$ et une fonction continue définissable $F: I^2 \rightarrow M$ strictement monotone en toutes les variables.

Dans cette section on démontre le théorème suivant qui est l'un des résultats principaux de [PS].

Théorème (Peterzil-Starchenko). *Soit \mathcal{M} une structure o-minimale ω_1 -saturée et soit $a \in M$ un point non trivial. Il existe un groupe convexe \wedge -définissable G tel que $a \in G$ et que G est divisible.*

La démonstration comprend un traitement de deux cas séparés par des méthodes différentes. Dans le premier cas on arrive à construire une bonne famille de fonctions dont l'existence nous permet d'appliquer les résultats de la section précédente pour définir un groupe infini. Cependant, le deuxième cas est achevé par un argument indépendant qui suit le plan de la démonstration de [Pt, Theorem 5.1].

4.1 Le premier cas

Soit $F: I^2 \rightarrow M$ une fonction définissable continue strictement monotone. On voit F comme une famille de fonctions paramétrées par les points de I . On note $f_a(x) = F(a, x)$.

Lemme 4.1.1. *Soit $a \in M$ un point non trivial. Alors il existe des intervalles $I \supset J \ni a$ et une fonction $F: I^2 \rightarrow M$ définissable continue strictement monotone telle que la composée $f_a \circ f_b$ est définie sur J pour tous $a, b \in I$.*

Démonstration. Comme le point a est non trivial il existe une fonction $F: I^2 \rightarrow M$ définissable continue et strictement monotone. Choisissons un point arbitraire $u \in I$. En remplaçant F par la composée $f_u^{-1} \circ F$ on se ramène au cas où $f_u = \text{id}$. Par le théorème 2.3.3, on peut diminuer I et trouver un intervalle $J \ni u$ tel que l'intersection $f_a(I) \cap I$ contient J pour chaque $a \in I$. \square

Soit $a \in M$ un point non trivial. Soient I, J et $F: I^2 \rightarrow M$ comme dans le lemme 4.1.1. Par le lemme 3.1.4, on peut supposer que F est strictement croissante. Alors on définit $G(a, b, x) = (f_a \circ f_b)(x)$. La fonction G est définie sur l'intervalle J et strictement monotone. On considère G comme une famille de fonctions paramétrées par $U = J^2$.

Étant donné un intervalle $J' \subset J$ on définit une relation d'équivalence $\sim_{J'}$ sur U comme

$$u_1 \sim_{J'} u_2 \iff G(u_1, x) = G(u_2, x) \forall x \in J'.$$

Soient $u \in U$ un point et $J' \subset J$ un intervalle. Supposons que $\dim([u]_{\sim_{J'}}) = 2$. Alors $[u]_{\sim_{J'}}$ contient une boîte et donc deux points de la forme $(y, y_1), (y, y_2)$ qui contredit la monotonie de G . Ainsi, $\dim([u]_{\sim_{J'}}) \leq 1$ pour tout $u \in U$. On choisit un point générique $(u_0, e) \in U \times J$ sur un ensemble A des paramètres sur lesquels $U \times J$ est défini.

Proposition 4.1.2. *Dans la notation introduite ci-dessus, supposons que $\dim([u_0]_{\sim_{(e)^+}}) = 0$. Alors il existe des ouverts $V \subset U$ et $K \subset J$ tels que $(u_0, e) \in V \times K$ et la restriction de G à $V \times K$ définit une famille normale de fonctions sur K .*

Démonstration. Comme $[u_0]_{\sim_{(e)^+}}$ est fini, en utilisant le lemme 3.1.2, on peut diminuer U et supposer que $[u_0]_{\sim_{(e)^+}} \cap U = u_0$ et que (u_0, e) demeure un point générique sur les nouveaux paramètres B . Ainsi,

$$\{v \in U \mid G(v, x) \sim_{(e)^+} G(u_0, x)\} = \{u_0\}.$$

Puisque cette propriété est définissable et (u_0, e) est un point générique sur B , il existe un voisinage $V \times K \subset U \times J$ de (u_0, e) tel que pour tous $v \in V, b \in K, u \in U$ on a

$$G(v, x) \sim_{(b)^+} G(u, x) \rightarrow v = u.$$

Par o-minimalité, l'ensemble

$$\{(x, y) \in K \times M \mid G(u, x) = u, G(v, x) = y\}$$

est fini. Ceci implique que $G|_{V \times K}$ est normale. \square

4.2 Le deuxième cas

Proposition 4.2.1. *Dans la notation introduite ci-dessus, supposons que $\dim([u_0]_{\sim_{(e)^+}}) = 1$. Alors il existe un groupe $G \subset M$ convexe abélien \wedge -définissable tel que $a \in G$ et que G est divisible.*

Démonstration. Soit u_1 un point générique de la classe $[u_0]_{\sim_{(e)^+}}$ sur u_0eA . On peut choisir e_1 tel que les fonctions $G(u_0, x), G(u_1, x)$ coïncident sur l'intervalle (e, e_1) et e_1 est générique sur eu_0u_1A . Alors $\dim(u_1/ee_1u_0) = 1$ et $\dim(u_0/ee_1) = 2$. On note $J' = (e, e_1)$. Comme u_1 est générique sur u_0eA , l'image de la classe $[u_1]_{\sim_{J'}}$ sous l'une des projections $\pi: M^2 \rightarrow M$ contient un intervalle. Alors il existe un voisinage $V \subset U$ de u_0 tel que pour chaque $v \in V$ la projection $\pi([u]_{\sim_{J'}})$ contient un intervalle. En remplaçant U par V on se ramène au cas où

$$\dim([u]_{\sim_{J'}}) = 1$$

pour tout $u \in U$, donc $\dim(U/\sim_{J'}) \leq 1$. Soit e_0 un point générique de J' sur $u_0u_1e_0e_1A$.

Soit $c \in M$. On rappelle qu'on note

$$U_{e_0c} = \{u \in U \mid G(u, e_0) = c\}.$$

Par la monotonie de G , on a $\dim(U_{e_0c}) \leq 1$. Ainsi, $\dim(U_{e_0c}/\sim_{J'}) = 0$ et donc $U_{e_0c}/\sim_{J'}$ est fini. On définit un ordre linéaire sur $U/\sim_{J'}$ comme

$$[u_1]_{\sim_{J'}} \prec [u_2]_{\sim_{J'}} \iff \exists e \leq y_1 < y_2 \leq e_1: \begin{cases} G(u_1, x) = G(u_2, x) & \forall x \in (e, y_1) \\ G(u_1, x) < G(u_2, x) & \forall x \in (y_1, y_2) \end{cases}$$

Par le lemme 2.3.6, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $U_{e_0c}/\sim_{J'}$ a au plus N éléments pour tout $c \in M$. Soit U_i l'ensemble des points $u \in U$ tels que $[u]_{\sim_{J'}}$ a l'ordre i dans $U_{e_0G(u, e_0)}/\sim_{J'}$ par rapport à \prec . Comme les ensembles U_i sont définissables et couvrent U il existe n tel que $\dim(U_n) = 2$. On remplace U par U_n . Ainsi, le quotient $U_{e_0c}/\sim_{J'}$ contient au plus un élément pour chaque $c \in M$. Autrement dit, si deux composées $f_{a_1} \circ f_{b_1}, f_{a_2} \circ f_{b_2}$ coïncident au point e_0 , elles coïncident sur J' .

On suppose que $U = I_1 \times I_2$ est un produit de deux intervalles. Soit $(a, b) \in U$ un point. On considère les familles de fonctions

$$\mathcal{H}_1: \{v \in I_1 \mid h_v^1 = f_a^{-1} \circ f_v\}; \quad \mathcal{H}_2: \{w \in I_2 \mid h_w^2 = (f_b \circ f_a)^{-1} \circ f_w \circ f_a\}.$$

On note que la composée $h_v^1 \circ h_w^2$ est bien définie pour tous $v \in I_1, w \in I_2$. De plus, si deux composées de cette forme coïncident en e_0 elles coïncident sur J' .

La structure o-minimale \mathcal{M} admet un modèle premier $\mathcal{M}_1 \preccurlyeq \mathcal{M}$, voir [Pl]. On définit les ensembles des points inséparables de a et de e_0 .

$$G = \{u \in M \mid \forall u_1, u_2 \in M_1: (u_1 < a < u_2) \implies (u_1 < u < u_2)\};$$

$$\mathcal{J} = \{x \in J' \mid \forall z_1, z_2 \in M_1: (z_1 < e_0 < z_2) \implies (z_1 < x < z_2)\}.$$

On note que les ensembles G, \mathcal{J} sont \wedge -définissables.

Lemme 4.2.2. [Pl, Claim 2-3, p. 97-98]

- (i) Pour tous $u' \in G, x \in \mathcal{J}$ on a $h_{u'}^1(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$ et $\{h_u^1(x) \mid u \in G\} = \mathcal{J}$.
- (ii) Pour tous $u_1, u_2, u_3 \in G$ si $h_{u_1}^1 \circ h_{u_2}^1(e_0) = h_{u_3}^1(e_0)$, alors $h_{u_1}^1 \circ h_{u_2}^1 \equiv h_{u_3}^1$ sur \mathcal{J} .

On définit l'opération $*$ sur G de la façon suivante

$$u_1 * u_2 = u_3 \iff h_{u_1}^1 \circ h_{u_2}^1(e_0) = h_{u_3}^1(e_0).$$

Par le lemme 4.2.2(i), un tel u_3 existe et il est unique puisque $h_u^1(x)$ est monotone en les deux variables. L'opération $*$ est continue et strictement croissante en toutes les variables. L'associativité de $*$ résulte du lemme 4.2.2(ii). Le lemme 4.2.2(i) implique que $*$ est inversible. Donc, $\langle G, * \rangle$ est un groupe dont l'identité est a car $h_a^1 \equiv \text{id}$.

Montrons que $\langle G, * \rangle$ est divisible. Pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$ l'application $u \mapsto u^n$ est continue. Si $u > a$, on a $u^n > u$ mais $a^n = a < u$. Selon le théorème 2.3.3, il existe u_1 tel que $u_1^n = u$. Le cas $u < a$ est similaire. \square

Remarque 4.2.3. En fait, on peut montrer que tout groupe divisible \wedge -définissable dans une structure o-minimale est abélien en utilisant un argument analogue à [Pl, Corollary 2.16], voir [Pt, p.99].

4.3 La conclusion

Théorème 4.3.1. *Soit \mathcal{M} une structure o-minimale ω_1 -saturée et soit $a \in M$ un point non trivial. Il existe un groupe convexe \wedge -définissable G tel que $a \in G$ et que G est divisible.*

Démonstration. On considère un point $a \in M$ non trivial. Supposons qu'on est dans le cas de la proposition 4.1.2. Alors il existe une famille normale de fonctions avec une base de dimension 2 qui est continue et strictement monotone. D'après le théorème 3.1.6 il existe une bonne famille de fonctions définissable dans \mathcal{M} . Cette dernière famille définit une q-relation selon le théorème 3.3.2 et l'existence du groupe souhaité résulte du théorème 3.2.6. La proposition 4.2.1 complète le cas qui reste. \square

4.4 L'absence de groupes dans une prégéométrie triviale

Théorème 4.4.1. *Soit \mathcal{T} une théorie géométrique dont tous les modèles \mathcal{M} ont la clôture algébrique triviale i.e. $\text{acl}(X) = \bigcup_{x \in X} \text{acl}(x)$ pour chaque $X \subset M$. Alors aucun modèle \mathcal{M} de \mathcal{T} ne contient un groupe infini définissable.*

Démonstration. Soit \mathcal{M} un modèle de \mathcal{T} . On peut supposer que \mathcal{M} est ω_1 -saturée par le théorème 1.2.5. Soient $A \subset M$ un sous-ensemble fini et $G \subset M^n$ un groupe A -définissable. Alors on peut trouver $a, b \in G$ tels que a est générique sur A et b est générique sur aA . On a $\dim(b/A) \geq \dim(b/aA)$ puisque chaque aA -base de $\text{acl}(abA)$ peut être complétée en une A -base. D'autre part, on a

$$\dim(b/aA) = \dim(G/aA) = \dim(G/A) \geq \dim(b/A)$$

par la proposition 2.2.5. Donc, $\dim(a/A) = \dim(b/A) = \dim(b/aA)$. Comme $b = a^{-1} \cdot (a \cdot b)$ on a $b \subset \text{acl}(a \cup a \cdot b \cup A) = \text{acl}(aA) \cup \text{acl}(a \cdot bA)$ car la prégéométrie acl est triviale. Soit $\beta \subset b$ une aA -base de la prégéométrie $\text{acl}(abA)$, alors β est également une A -base. On a $\beta \subset \text{acl}(aA) \cup \text{acl}(a \cdot bA)$. Aucun des éléments de β n'est algébrique sur aA puisque β est une base. Ainsi, $\beta \subset \text{acl}(a \cdot bA)$ et on conclut que

$$b \subset \text{acl}(bA) = \text{acl}(\beta A) \subset \text{acl}(a \cdot bA).$$

On note que $a \subset \text{acl}(a \cdot bA)$ car on peut exprimer a comme $a = (a \cdot b) \cdot b^{-1}$. Donc, on a $\text{acl}(abA) \subset \text{acl}(a \cdot bA)$ et

$$\dim(G) \geq \dim(a \cdot b/A) \geq \dim(ab/A) = \dim(b/aA) + \dim(a/A) = 2 \dim(G).$$

On conclut que $\dim(G) = 0$, donc G est fini. □

Remarque 4.4.2. Soit \mathcal{M} une structure o-minimale. Alors on peut réaliser chaque groupe fini G comme un groupe définissable puisque tout ensemble fini $S \subset M$ est définissable.

Exemple 4.4.3. Considérons un modèle \mathcal{M} de la théorie de l'ordre linéaire dense $\mathcal{DLO} = \text{Th}(\mathbb{Q}, <)$. Par l'élimination des quantificateurs dans \mathcal{M} [Mr, Theorem 3.1.3], tout sous-ensemble définissable $S \subset M$ est une union d'intervalles et d'un nombre fini de points. Donc, \mathcal{M} est une structure o-minimale. Soit $A \subset M$ un sous-ensemble. On note que si un singleton $\{a\}$ est A définissable alors $a \in A$. Ceci implique que $\text{acl}(X) = X$ pour tout $X \subset M$. En particulier, la prégéométrie acl est triviale. Ainsi, il n'y a pas de groupe définissable infini contenu dans M^n par le théorème 4.4.1.

RÉFÉRENCES

- [Bk] B. Bakker, Hodge theory and o-minimality, lecture notes, available online.
- [Gr] A. Grothendieck, Esquisse d'un Programme (1984 manuscrit), Geometric Galois actions, London Math. Soc. Lecture Note Ser. vol. 242, Cambridge Univ. Press (1997) 5-48.

- [Pl] J. Pila, O-minimality and the André-Oort conjecture for \mathbb{C}^n , *Annals of Mathematics* 173 (2011), 1779–1840.
- [Pt] Y. Peterzil, Constructing a group-interval in o-minimal structures, *J. Pure Appl. Algebra* 94 (1994) 85-100.
- [PS] Y. Peterzil, S. Starchenko, A trichotomy theorem for o-minimal structures, *Proc. London Math. Soc.* (3) 77 (1998) 481-523.
- [Pl] A. Pillay and C. Steinhorn, Definable sets in ordered structures I, *Trans. Amer. Math. Soc.* 295 (1986) 565-592.
- [Mr] D. Marker, *Model Theory : an introduction*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 217, Springer, 2nd edition (2002).
- [TZ] K. Tent and M. Ziegler. *A Course in Model Theory*. Lecture Notes in Logic, vol. 40, Cambridge University Press, United Kingdom (2012).
- [Dr] L. van der Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Cambridge Univ. Press, New York (1998).

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
 45 RUE D'ULM, PARIS, FRANCE 75005
 alexander.molyakov@ens.psl.eu
 anna.savelyeva@ens.psl.eu