

Régularité des solutions faibles à l'équation de Navier-Stokes

Mouilleron Titouan, Zhu Qimeng

Mai 2023

Encadré par Cyril Imbert

Résumé

La question de la régularité des solutions de Navier-Stokes est un problème très complexe, encore ouvert aujourd'hui. L'article à la base de ce document, "Partial Regularity of Suitable Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations", publié en 1982 par L. Caffarelli, R. Kohn et L. Nirenberg, compte parmi les travaux de référence sur cette question. Dans la continuité des recherches de J. Leray, J. Serrin et V. Scheffer, il établit la régularité partielle d'une certaine classe de solutions, pour lesquelles on dispose de propriétés d'intégrabilité sur la vitesse ainsi que son gradient.

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Présentation du problème	2
1.2	Contexte historique et scientifique	3
1.2.1	Les travaux de J. Leray et E. Hopf	3
1.2.2	Condition de régularité de Serrin	3
1.2.3	Le résultat de V. Scheffer	4
1.3	Principal résultat de l'article	4
1.4	Idée de la preuve de la proposition 1	5
2	Outils Mathématiques	6
2.1	Points de Lebesgue	6
2.2	Inégalités d'interpolations	6
2.2.1	Injection de Sobolev	6
2.2.2	Inégalités d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg	7
2.3	Décomposition du terme de pression	7
2.4	Théorème de Calderón-Zygmund	8
3	Schémas de preuve	10
4	Conclusion	15

1 Introduction

Dans cette section, on détaille le problème de la régularité des solutions aux équations de Navier-Stokes puis on présente le principal résultat de l'article de L. Caffarelli , R. Kohn et L. Nirenberg. Dans la section suivante, on introduira les outils mathématiques employés dans l'article. Enfin, on donnera une preuve du résultat en section 3.

1.1 Présentation du problème

On rappelle le système d'équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible de viscosité unitaire, soumis à une force volumique f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p &= f , \\ \nabla \cdot u &= 0 . \end{aligned} \tag{1}$$

On se limitera par ailleurs aux forces volumiques de divergence nulle :

$$\nabla \cdot f = 0 .$$

On cherche les solutions (u, p) de (1), définies sur un domaine $\Omega \times (0, T) \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, qui vérifient les conditions initiales et limites suivantes :

$$\forall x \in \Omega : u(x, 0) = u_0(x) , \tag{2}$$

$$\forall t \in (0, T), \forall x \in \partial\Omega : u(x, t) = 0 . \tag{3}$$

On note qu'en appliquant l'opérateur divergence à l'équation (1) et en exploitant le fait que u et f sont de divergence nulle, on obtient une équation sur la pression :

$$\forall(x, t) \in \Omega \times (0, T) : \Delta p = \sum_{i,j} \nabla_{ij}(u_i u_j) . \quad (4)$$

1.2 Contexte historique et scientifique

Avant de présenter en détail les résultats de L. Caffarelli , R. Kohn et L. Nirenberg, il convient de détailler l'état de l'art de la recherche sur les équations de Navier-Stokes au moment de la publication de leur article.

1.2.1 Les travaux de J. Leray et E. Hopf

J. Leray et E. Hopf sont à l'origine de l'un des premiers résultats majeurs sur l'équation de Navier-Stokes. J. Leray [3] a obtenu en 1934 un résultat d'existence de solutions faibles à l'équation de Navier-Stokes qui sera plus tard affiné par E. Hopf [2] en 1951.

L'introduction de la notion de solution faible par J. Leray s'explique par l'impossibilité d'obtenir des estimées en temps long pour les solutions dites « fortes », des solutions régulières pour lesquelles l'unicité est garantie sur leur domaine de définition. Ces solutions fortes vérifient en particulier l'égalité d'énergie suivante, obtenue en multipliant l'équation (1) par u et en intégrant par parties :

$$\int_{\Omega_t} |u|^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} |u_0|^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} f.u .$$

S'inspirant de l'égalité d'énergie, le théorème d'existence de Leray et Hopf garantit l'existence d'une solution faible ¹ (u, p) au système d'équations de Navier-Stokes qui vérifie de plus l'inégalité d'énergie :

$$\int_{\Omega_t} |u|^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq \int_{\Omega} |u_0|^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} f.u . \quad (5)$$

On ne peut pas garantir l'unicité des solutions faibles de Leray-Hopf ni savoir si l'inégalité d'énergie est stricte. La notion de solution faible sera centrale dans l'article de L. Caffarelli, R. Kohn et L. Nirenberg.

1.2.2 Condition de régularité de Serrin

J. Serrin [5] a obtenu en 1962 un résultat qui simplifie l'étude des points réguliers de u . Sous certaines conditions sur f , la bornitude de u entraîne des propriétés de régularité. Plus précisément :

Théorème 1. *Soit u une solution faible de Leray des équations de Navier-Stokes sur un cylindre $D = B \times (0, T)$ et (q, s) un couple de réels tels que :*

$$\frac{3}{q} + \frac{2}{s} < 1 ,$$

$$\int_0^T \left(\int_B |u|^q \right)^{\frac{s}{q}} < \infty ,$$

Alors si f est C^∞ en espace, u est C^∞ en espace également.

1. solution au sens des distributions

On ne dispose pas de résultat similaire quant à la régularité en temps de la vitesse, mais on désignera tout de même comme régulier un point autour duquel la vitesse u est bornée.

1.2.3 Le résultat de V. Scheffer

Peu de temps avant la publication de l'article de L. Caffarelli, R. Kohn et L. Nirenberg, V. Scheffer a démontré un résultat notable sur l'ensemble des points singuliers (c'est-à-dire non réguliers) du domaine de définition de u [4]. Il fait intervenir le concept de dimension de Hausdorff, une généralisation de la notion de dimension permettant de définir des dimensions non entières.

Théorème 2. *Si $f = 0$, il existe une solution faible u au système d'équations de Navier Stokes, définie sur $\Omega \times (0, T)$ dont l'ensemble singulier S vérifie :*

$$\begin{aligned} \dim_H(S) &\leq \frac{5}{3}, \\ \forall t \in (0, T), \dim_H(S \cap (\Omega \times \{t\})) &\leq 1, \end{aligned}$$

où \dim_H désigne la dimension de Hausdorff.

Il existe donc des solutions au système d'équations de Navier-Stokes pour lesquelles l'ensemble singulier est relativement petit en comparaison avec le domaine de définition de u .

1.3 Principal résultat de l'article

Dans la continuité des travaux de J. Leray et E. Hopf, l'article introduit l'inégalité d'énergie généralisée, la forme localisée de l'inégalité d'énergie (5) :

$$2 \int \int |\nabla u|^2 \phi \leq \int \int |u|^2 \left(\Delta \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + (|u|^2 + 2p) u \cdot \nabla \phi + 2(u \cdot f) \phi, \quad (6)$$

où ϕ est une fonction test C^∞ positive à support compact.

L'article concentre son étude sur les solution faibles dites convenables.

Définition 1. *On dit de la paire (u, p) qu'elle est une solution faible convenable aux équations de Navier-Stokes dans le domaine $D \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ avec la force f si elle vérifie les conditions suivantes :*

- (i) (u, p) vérifie l'équation (1) au sens des distributions sur D ;
- (ii) $f \in L^q(D)$ pour un $q > \frac{5}{2}$, $p \in L^{\frac{5}{4}}(D)$;
- (iii) l'inégalité (6) est vérifiée pour toute fonction $\phi \in C^\infty(D)$ positive à support compact ;
- (iv) il existe des constantes réelles E_0 et E_1 telles que :

$$\int_{D_t} |u|^2 \leq E_0, \quad (7)$$

$$\int \int_D |\nabla u|^2 \leq E_1, \quad (8)$$

où $D_t = D \cap (\mathbb{R}^3 \times \{t\})$.

On introduit également la notation suivante pour les cylindres paraboliques : $Q_r(x, t) = \{(y, \tau) : |y - x| < r, t - r^2 < \tau \leq t\}$. On peut maintenant énoncer le principal résultat de l'article, dont on donnera une démonstration par la suite.

Proposition 1. *Pour tout $q > \frac{5}{2}$, il existe des constantes positives ϵ_1 , C_1 et $\epsilon_2(q)$ telles que pour toute solution faible convenable (u, p) de l'équation de Navier-Stokes sur $Q_1(0, 0)$ avec $f \in L^q$ qui vérifie :*

$$\int \int_{Q_1} (|u|^3 + |u||p|) + \int_{-1}^0 \left(\int_{|x|<1} |p| dx \right)^{\frac{5}{4}} \leq \epsilon_1 ,$$

$$\int \int_{Q_1} |f|^q \leq \epsilon_2 ;$$

On a pour presque tout² $(x, t) \in Q_{\frac{1}{2}}$:

$$|u(x, t)| \leq C_1 .$$

Grâce au Théorème (1) de Serrin, on obtient en particulier que u est régulier dans $Q_{\frac{1}{2}}$.

Nous ne le détaillerons pas dans ce document, mais la proposition (1) permet d'améliorer le résultat de Scheffer en ayant un contrôle plus fin sur la dimension de Hausdorff de l'ensemble singulier :

Proposition 2. *Pour toute solution faible convenable de l'équation de Navier-Stokes, l'espace singulier associé S a une dimension de Hausdorff inférieure à 1 :*

$$\dim_H(S) \leq 1$$

1.4 Idée de la preuve de la proposition 1

On va présenter l'idée principale de la preuve de la proposition 1. Pour montrer que u est bornée, on peut d'abord utiliser une approximation de l'unité et l'inégalité d'énergie généralisée pour obtenir une preuve formelle. Plus précisément, pour tout $\phi \in C^\infty(Q_1(0, 0))$, positive, nulle près de $\{|x| = 1\} \cup \{t = -1\}$ et $-1 < s < 0$, on a que :

$$\begin{aligned} & \int_{B_1 \times \{s\}} |u|^2 \phi + 2 \int_{-1}^s |\nabla u|^2 \phi \\ & \leq \int_{-1}^s \int_{B_1} |u|^2 (\phi_t + \Delta \phi) + \int_{-1}^s \int_{B_1} (|u|^2 + 2p) u \cdot \nabla \phi + 2 \int_{-1}^s \int_{B_1} \phi (f \cdot u). \end{aligned} \quad (9)$$

On choisit un point (a, s) arbitraire et on définit ϕ pour estimer $|u(a, s)|$ comme suit :

$$\phi(x, t) = \chi(x, t) \cdot (s - t)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{|x - a|^2}{4(s - t)}\right)$$

définie sur $\{x, t : t < s\}$, d'où $0 \leq \chi \leq 1$ est une fonction lisse, à support compact égale à 1 près de (a, s) . La fonction $(s - t)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{|x - a|^2}{4(s - t)}\right)$ est en même temps une constante fois la solution fondamentale de l'équation $\phi_t + \Delta \phi = 0$ et une approximation de l'unité quand t tend vers s à cause de la singularité. Donc par (9), on obtient une borne formelle. Cependant, ce n'est pas une bonne solution, car on ne peut pas borner effectivement les termes à droite.

L'idée de Scheffer [4] est d'approcher la fonction ϕ par régularisation. Plus précisément, on ne peut pas borner directement les termes à droite dans le cas singulier, c'est-à-dire borner

2. au sens de la mesure de Lebesgue

la valeur dans un point. Mais on peut montrer que la moyenne est toujours bornée dans un voisinage arbitrairement petit. On obtient l'estimée par une procédure de récurrence. On peut utiliser l'hypothèse que les termes à gauche sont petits pour prouver que les termes à droite sont aussi petits dans un domaine plus petit. Et puis par l'inégalité d'énergie généralisée, on peut montrer que les termes à gauche sont aussi petits dans le petit domaine. Itérativement, on peut obtenir le résultat que l'on veut.

2 Outils Mathématiques

On présente dans cette section les principaux outils mathématiques mobilisés dans la preuve de la proposition (1).

2.1 Points de Lebesgue

On cherchera dans la suite à contrôler la valeur d'une fonction en un point donné de son domaine de définition à partir de sa moyenne autour de ce même point. La notion de point de Lebesgue nous y aidera.

Définition 2. Soit $[f] \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et f un de ses représentants, on dit que $x \in \mathbb{R}^n$ est un point de Lebesgue de f lorsque :

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(s) - f(x)| ds \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 ,$$

où $B(x, r)$ désigne la boule de centre x et de rayon r .

On admet également le résultat suivant sur les points de Lebesgue :

Théorème 3. Soit $[f] \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et f un de ses représentants, l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ qui ne sont pas des points de Lebesgue est de mesure de Lebesgue nulle.

2.2 Inégalités d'interpolations

2.2.1 Injection de Sobolev

Le cadre mathématique adapté à la résolution des équations aux dérivées partielles est celui des espaces de Sobolev. Il s'agit d'espaces vectoriels composés de fonctions dont on contrôle l'intégrabilité ainsi que celle de certaines de leurs dérivées.

Définition 3. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$. L'espace de Sobolev $W^{(k,p)}(U)$ est défini par :

$$W^{(k,p)}(U) = \{f \in L^p(U) \cap C^k(U), \forall m \in \{1, \dots, k\} D^m f \in L^p(U)\} .$$

On admet le théorème de plongement de Sobolev. Ce résultat permet d'obtenir un meilleur contrôle sur l'intégrabilité d'une fonction à partir d'informations sur l'intégrabilité de ses dérivées.

Théorème 4. Soit $f \in W^{(1,p)}(\mathbb{R}^n)$, alors $f \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}$.

Corollaire 1. Dans le cas $p = 2$ et $n = 3$, on obtient en particulier que $W^{(1,2)}(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$. Plus précisément :

$$\forall f \in W^{(1,2)}(\mathbb{R}^3), \exists C \in \mathbb{R} : \|f\|_{L^6} \leq C (\|f\|_{L^2} + \|\nabla f\|_{L^2}) . \quad (10)$$

2.2.2 Inégalités d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg

On propose de démontrer le résultat suivant, qu'on pourra retrouver dans l'article [1].

Théorème 5. $\exists C \in \mathbb{R} : \forall q \in [2, 6], \forall u \in W^{(1,p)}(\mathbb{R}^n), \forall r > 0$

$$\int_{B_r} |u|^q \leq C \left(\int_{B_r} |\nabla u|^2 \right)^a \left(\int_{B_r} |u|^2 \right)^{\frac{q}{2}-a} + \frac{C}{r^{2a}} \left(\int_{B_r} |u|^2 \right)^{\frac{q}{2}},$$

où B_r désigne la boule de rayon r et $a = \frac{3}{4}(q-2)$.

Remarque 1. Cette inégalité est particulièrement utile dans notre étude, puisqu'elle permet de relier la norme $L^q(B_r)$ de u à sa norme $L^2(B_r)$ ainsi qu'à celle de son gradient, deux grandeurs contrôlées par les inégalités (7) et (8) dans le cas des solutions faibles convenables. Par exemple, en prenant $q = \frac{10}{3}$, de sorte que $a = 1$, puis en intégrant par rapport au temps, on obtient (lorsque $B_r \times (0, T) \subset D$) :

$$\int_0^T \int_{B_r} |u|^{\frac{10}{3}} \leq C \left(E_0^{\frac{2}{3}} E_1 + r^{-2} T E_0^{\frac{10}{3}} \right).$$

Démonstration. On commence par traiter le cas des fonctions définies sur la boule unité B_1 . On utilise l'inégalité de Hölder pour encadrer la norme $L^q(B_1)$:

$$\|u\|_{L^q(B_1)} \leq \|u\|_{L^2(B_1)}^\theta \|u\|_{L^6(B_1)}^{1-\theta}, \text{ avec } \frac{1}{q} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{6}.$$

On utilise maintenant l'injection de Sobolev pour se ramener à la norme L^2 du gradient :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^6(B_1)} &\leq C_1 (\|u\|_{L^2(B_1)} + \|\nabla u\|_{L^2(B_1)}), \\ \|u\|_{L^6(B_1)}^{q(1-\theta)} &\leq C_2 \left(\|u\|_{L^2(B_1)}^{q(1-\theta)} + \|\nabla u\|_{L^2(B_1)}^{q(1-\theta)} \right). \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\|u\|_{L^q(B_1)}^q \leq C_2 \left(\|u\|_{L^2(B_1)}^q + \|u\|_{L^2(B_1)}^{q\theta} \|\nabla u\|_{L^2(B_1)}^{q(1-\theta)} \right).$$

C'est-à-dire

$$\int_{B_1} |u|^q \leq C_2 \left(\int_{B_1} |u|^2 \right)^{\frac{q}{2}} + C_2 \left(\int_{B_1} |\nabla u|^2 \right)^a \left(\int_{B_1} |u|^2 \right)^{\frac{q}{2}-a}.$$

Enfin, on traite le cas général de la boule de rayon r par changement de variables dans les intégrales de l'inégalité précédente. \square

2.3 Décomposition du terme de pression

Dans cette section, on obtient une décomposition de la pression en plusieurs termes, plus simples à contrôler individuellement. Pour cela, on inverse l'équation (4) qui porte sur le laplacien de la pression Δp en considérant le produit de convolution du laplacien par la fonction de Green associé $G(x) = -\frac{3}{4\pi|x|}$.

On commence par localiser l'équation (4). Soit $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$, et soit ϕ une fonction C^∞ à support compact dans Ω telle que $\phi = 1$ sur un voisinage de $\bar{\Omega}_1$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \phi(x)p(x, t) &= -\frac{3}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \Delta(\phi p) dy \\ &= -\frac{3}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} (\phi \Delta(p) + p \Delta(\phi) + \nabla p \cdot \nabla \phi) dy \end{aligned}$$

En remplaçant Δp par son expression de l'équation (4) puis en intégrant par parties, on obtient la décomposition suivante :

$$\phi p = \tilde{p} + p_3 + p_4 \quad (11)$$

où on a (avec la convention de sommation sur les indices répétés) :

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= \frac{3}{4\pi} \int \nabla_{ij} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \phi u_i u_j dy, \\ p_3 &= \frac{3}{2\pi} \int \frac{x_i - y_i}{|x-y|^3} \nabla_j(\phi) u_i u_j dy + \frac{3}{4\pi} \int \frac{1}{|x-y|} \nabla_{ij}(\phi) u_i u_j dy, \\ p_4 &= \frac{3}{4\pi} \int \frac{1}{|x-y|} p \Delta \phi dy + \frac{3}{2\pi} \int \frac{x_i - y_i}{|x-y|^3} \nabla_j(\phi) p dy. \end{aligned}$$

2.4 Théorème de Calderón-Zygmund

On note que l'expression de \tilde{p} est en fait une intégrale singulière. Ainsi on a besoin du théorème suivant pour estimer ce terme.

Théorème 6. *Soit Ω une fonction réelle homogène de degré 0 (c'est à dire telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Omega(\lambda x) = \Omega(x)$) qui satisfait les conditions suivantes*

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(x) d\sigma = 0 \quad (12)$$

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta < \infty, \quad w(\delta) := \sup_{|x-x'| \leq \delta, |x|=|x'|=1} |\Omega(x) - \Omega(x')|. \quad (13)$$

Alors, pour tout $1 < p < \infty$, et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$T_\varepsilon(f)(x) = \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y) dy.$$

on a que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon(f) = T(f)$ existe dans L^p norme, et

$$\|T(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p,$$

où A_p ne dépend pas de f et ε .

Ce théorème est un corollaire de la théorie générale de Calderón et Zygmund. On va la présenter.

On rappelle le fait que tout ouvert dans \mathbb{R}^1 peut être écrit comme une union disjointe d'intervalles ouverts de manière unique. Malheureusement, on n'a pas un moyen canonique de faire des choses similaires dans les dimensions plus grandes. Cependant, on a un lemme de Calderón et Zygmund qui donne une version de décomposition.

Théorème 7. *Soit f une fonction positive et intégrable sur \mathbb{R}^n , et soit $\alpha > 0$ une constante. Alors il existe une décomposition de \mathbb{R}^n telle que*

- (i) $\mathbb{R}^n = F \cup \Omega$, $F \cap \Omega = \emptyset$.
- (ii) $f(x) \leq \alpha$ presque partout sur F .
- (iii) Ω est une union des cubes, $\Omega = \cup_k Q_k$, dont les intérieurs sont disjoints, et pour tout Q_k

$$\alpha < \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(x) dx < 2^n \alpha$$

d'où $|Q_k|$ désigne la mesure de Q_k .

On omet la preuve ici qui peut être trouvée dans la page 18 du livre [6]. Ensuite on va discuter le théorème principal dans cette partie. C'est de montrer qu'un type d'opérateur est borné. On énonce d'abord une version moins générale.

Théorème 8. Soit $K \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On suppose que :

(a) La transformée de Fourier de K est bornée

$$|\hat{K}(x)| \leq B.$$

(b) On a un contrôle sur le niveau de singularité de K

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq B, \quad |y| > 0.$$

Pour tout $f \in L^1 \cap L^p$, $1 < p < \infty$, on pose

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy.$$

Alors il existe une constante $A = A(p, B, n)$ qui ne dépend que de p, B et la dimension n , telle que

$$\|T(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

Ainsi on peut étendre T dans L^p tout entier par continuité.

Pour montrer ce résultat, le point clé est exactement le Théorème 7. Les détails sont dans la page 29-36 de livre [6]. Avec ce théorème, on peut énoncer une version plus générale.

Théorème 9. Supposer que K satisfait les conditions suivantes

$$|K(x)| \leq B|x|^{-n}, \quad \forall |x| > 0$$

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq B, \quad \forall |y| > 0 \tag{14}$$

$$\int_{R_1 < |x| < R_2} K(x) dx = 0, \quad 0 < R_1 < R_2 < \infty. \tag{15}$$

Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, on pose

$$T_\varepsilon(f)(x) = \int_{|y| > \varepsilon} f(x-y)K(y)dy, \quad \varepsilon > 0. \tag{16}$$

Alors

$$\|T_\varepsilon(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p, \tag{17}$$

avec A_p indépendant de f et ε . De plus, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon(f) = T(f)$ existe dans la norme L^p et l'opérateur T satisfait aussi l'inégalité (17).

Pour utiliser le Théorème 8, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 1. On suppose K comme dans le théorème 9, et on pose $K_\varepsilon(x) = K(x)\mathbb{1}_{|x| > \varepsilon}$. Comme $K_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on peut définir la transformée de Fourier. De plus,

$$\sup_y |\hat{K}_\varepsilon(y)| \leq CB, \quad \varepsilon > 0, \tag{18}$$

où C ne dépend que de la dimension n .

On peut d'abord montrer le cas où $\varepsilon = 1$ et puis le cas général est une conséquence directe par la dilatation. Pour $\varepsilon = 1$, on a besoin de couper \hat{K}_ε en quelques termes et puis estimer séparément. Les détails sont dans la page 36-37 de [6]. Maintenant on est en position de montrer le théorème 9.

Démonstration. Par Lemme 1 et Théorème 8, on a directement (17). Il reste à montrer que la limite existe. Dans ce cas, on peut supposer $\varepsilon < 1$. On suppose d'abord que f est une fonction lisse à support compact. Par la condition (15), on peut couper $T_\varepsilon(f)$ en deux termes :

$$T_\varepsilon(f)(x) = \int_{|y| \geq 1} K(y) f(x-y) dy + \int_{\varepsilon \leq |y| \leq 1} K(y) (f(x-y) - y) dy.$$

Le premier terme est une fonction dans L^p car c'est une convolution par L^1 fonction f et L^p fonction K_1 . Le deuxième terme est en fait supporté dans un compact fixé de x . Et par la contrôle de dérivée, on a qu'il converge uniformément sur x . Donc on obtient la convergence pour la norme de L^p . Pour le cas général, on approche f par une fonction lisse à support compact, et par (17) on a aussi la convergence. Ainsi on finit la preuve. \square

Par théorème 9, théorème 6 est une conséquence directe.

3 Schémas de preuve

Dans cette section, toutes les constantes C sont universelles, c'est à dire qu'elles ne dépendent pas d'autres choses. Pour montrer le résultat principal, on donne d'abord quelques définitions. Au début on suppose que u, p sont des fonctions définies sur $Q_\rho(0, 0) = \{(x, t) : |x| < \rho, -\rho^2 < t < 0\}$, $\rho > 0$. Pour $r < \rho$, On définit les quantités suivantes :

$$A(r) = \sup_{-r^2 < t < 0} r^{-1} \int_{B_r \times t} |u|^2, \quad (19)$$

$$\delta(r) = r^{-1} \int_{Q_r} |\nabla u|^2, \quad (20)$$

$$G(r) = r^{-2} \int_{Q_r} |u|^3, \quad (21)$$

$$L(r) = r^{-2} \int_{Q_r} |u| |p - \bar{p}_r|, \quad (22)$$

$$K(r) = r^{-\frac{13}{4}} \int_{-r^2}^0 \left(\int_{B_r} |p| \right)^{\frac{5}{4}} d\tau. \quad (23)$$

D'où $Q_r = Q_r(0, 0) = \{(x, t) : |x| < r, -r^2 < t < 0\}$, $B_r = B_r(0, 0)$. De plus, \bar{p}_r est la moyenne sur B_r :

$$\bar{p}_r = \bar{p}_r(t) = \int_{B_r} p(y, t) dy.$$

Ensuite on va présenter deux lemmes techniques qui donnent les relations entre ces quantités.

Lemme 2.

$$G(r) \leq CA(r)^{\frac{3}{4}} (A(r)^{\frac{3}{4}} + \delta(r)^{\frac{3}{4}}).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'inégalité de Sobolev et l'inégalité de Hölder sur le temps. \square

Lemme 3. Soit $r \leq \frac{1}{2}\rho$, alors :

$$\begin{aligned} L(r) &\leq C \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{7}{5}} A^{\frac{1}{5}}(r) G^{\frac{1}{5}}(r) K^{\frac{4}{5}}(\rho) \\ &+ C \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{5}{3}} G^{\frac{1}{3}}(r) G^{\frac{2}{3}}(\rho) + C G^{\frac{1}{3}}(r) G^{\frac{2}{3}}(2r) \\ &+ C r^3 G^{\frac{1}{3}}(r) \sup_{-r^2 < t < 0} \int_{2r < |y| < \rho} \frac{|u|^2}{|y|^4}. \end{aligned} \quad (24)$$

Démonstration. Il suffit d'exploiter la décomposition de la pression obtenue en section 2 et d'estimer chaque terme séparément. Les détails sont dans la section 3 de [1]. On va expliquer seulement une chose, c'est l'utilisation de théorème de Calderón-Zygmund. On veut montrer que l'opérateur de convolution suivant

$$T_{ij}(\psi) = \left(\nabla_{ij} \frac{1}{|x|} \right) * \psi$$

est borné. Il suffit de vérifier les hypothèses de Corollaire 6. La condition d'annulation est obtenue par la symétrie et la condition de régularité est obtenue par le fait que $\nabla_{ij} \frac{1}{|x|}$ est une fonction lisse hors de l'origine puis lipschitz sur la sphère. \square

Ces deux lemmes sont pour borner les termes à droite dans (9) par les termes à gauche. Plus de détails sont dans l'étape 2. On commence la preuve de proposition 1. Comme on l'a mentionné plus haut, on va le montrer par une récurrence.

Démonstration de la Proposition 1. La démonstration est scindée en 3 étapes.

Étape 1 : Énoncer et initialiser la récurrence.

On rappelle que nos hypothèses sont :

$$\int_{Q_1} (|u|^3 + |u||p|) + \int_{-1}^0 \left(\int_{B_1} |p| dx \right)^{\frac{5}{4}} dt \leq \varepsilon_1, \quad (25)$$

$$\int_{Q_1} |f|^q \leq \varepsilon_2(q). \quad (26)$$

On montrera avec les constantes bien choisies l'inégalité suivante :

$$\int_{|x-a| < r_n} |u|^2(x, s) \leq C_0 \varepsilon_1^{\frac{2}{3}}, \quad (27)$$

pour tout $(a, s) \in Q_{\frac{1}{2}}(0, 0)$ et tout $n \geq 2$, d'où $r_n = 2^{-n}$. Donc on aura une borne supérieure pour tous les points de Lebesgue. Par le théorème que l'on a montré avant, c'est une borne dans L^∞ . Plus précisément, on montrera par récurrence les résultats suivants : pour tout $n \geq 3$,

$$\int_{Q^n} |u|^3 + r_n^{\frac{3}{5}} \int_{Q^n} |u||p - \bar{p}_n| \leq \varepsilon_1^{\frac{2}{3}} \quad (1_n)$$

et pour tout $n \geq 2$,

$$\sup_{s-r_n^2 < t \leq s} \int_{|x-a| < r_n} |u|^2 dx + r_n^{-3} \int_{Q^n} |\nabla u|^2 \leq C_0 \varepsilon_1^{\frac{2}{3}} \quad (2_n)$$

d'où $Q^n = Q_{r_n}(a, s)$, f donne un moyen dans le sens

$$\bar{p}_n = \bar{p}_n(t) = \int_{B(a, r_n)} p dx = \frac{1}{|B(a, r_n)|} \int_{B(a, r_n)} p dx.$$

On peut supposer d'abord que $\varepsilon_1 < 1$ car en fait on peut choisir ε_1 arbitrairement petit. C'est clair que (2_n) implique (27). L'étape initial (2₂) est une conséquence directe de (25), (26), l'inégalité de Hölder et l'inégalité d'énergie généralisée en posant $\phi = 1$ sur Q^2 et $\text{supp } \phi \subset Q^1$ dans le cas où $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sont assez petits.

Étape 2 : On a que (2_k), $2 \leq k \leq n$ implique (1_{n+1}), si $n \geq 2$.

On utilise les deux lemmes avant. On réécrit l'hypothèse en termes de $A(r)$ et $\delta(r)$:

$$A(r_k) + \delta(r_k) \leq C \varepsilon_1^{\frac{2}{3}} r_k^2, \quad 2 \leq k \leq n, \quad (28)$$

et par (25) :

$$G(r_1) + K(r_1) \leq C \varepsilon_1. \quad (29)$$

Par le Lemme 2 et l'inégalité de Jensen, on a que

$$r_n^{-2} \iint_{Q^n} |u|^3 = G(r_n) \leq C (A(r_n)^{\frac{3}{4}} + \delta(r_n)^{\frac{3}{4}})^2 \leq \bar{C} \varepsilon_1 r_n^3, \quad (30)$$

ainsi par le fait que $\frac{|Q^n|}{|Q^{n+1}|}$ est une constante

$$\int_{Q^{n+1}} |u|^3 \leq C \int_{Q^n} |u|^3 \leq C^* \varepsilon_1. \quad (31)$$

Si on pose ε_1 assez petit tel que $C^* \varepsilon_1 \leq \frac{1}{2}$, on aura que

$$\int_{Q^{n+1}} |u|^3 \leq \frac{1}{2} \varepsilon_1^{\frac{2}{3}} \quad (32)$$

qui est une moitié du but. Pour l'autre moitié, on utilise le lemme 3 avec $\rho = \frac{1}{4}$ et $r = r_{n+1}$. Par un argument similaire que (31), on a que

$$G(r_{n+1}) \leq C G(r_n) \leq C \varepsilon_1 r_n^3,$$

et

$$A(r_{n+1}) \leq C A(r_n) \leq C \varepsilon_1^{\frac{2}{3}} r_n^2,$$

par (30) et (28). On a aussi que $K(\frac{1}{4}) \leq C\varepsilon_1$ par (29). Puis les termes supérieurs dans le Lemme 3 peuvent être estimés comme suivant :

$$\begin{aligned} r_{n+1}^{\frac{7}{5}} A^{\frac{1}{5}}(r_{n+1}) G^{\frac{1}{5}}(r_{n+1}) K^{\frac{4}{5}}(\frac{1}{4}) &\leq Cr_n^{\frac{12}{5}} \varepsilon_1, \\ r_{n+1}^{\frac{5}{3}} G^{\frac{1}{3}}(r_{n+1}) G^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{4}) &\leq Cr_n^{\frac{8}{3}} \varepsilon_1, \\ G^{\frac{1}{3}}(r_{n+1}) G^{\frac{2}{3}}(r_n) &\leq Cr_n^{\frac{8}{3}} \varepsilon_1 \end{aligned}$$

et par l'intégrale par parties, on a que

$$\begin{aligned} r_{n+1}^3 G^{\frac{1}{3}}(r_{n+1}) \sup_{s-r_{n+1}^2 < t \leq s} \int_{r_n < |y| < \frac{1}{4}} \frac{|u|^2}{|y|^4} &\leq r_{n+1}^3 G^{\frac{1}{3}}(r_{n+1}) \sum_{k=2}^n \sup_{s-r_{n+1}^2 < t \leq s} \int_{r_{k+1} < |y| < r_k} \frac{|u|^2}{|y|^4} \\ &\leq r_{n+1}^3 G^{\frac{1}{3}}(r_{n+1}) \sum_{k=2}^n \sup_{s-r_k^2 < t \leq s} \int_{|y| < r_k} \frac{|u|^2}{r_{k+1}^4} \\ &\leq Cr_n^4 \varepsilon_1^{\frac{1}{3}} \sum_{k=2}^n r_k^{-3} A(r_k) \\ &\leq Cr_n^4 \varepsilon_1 \sum_{k=2}^n r_k^{-1} \\ &\leq Cr_n^3 \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Comme $r_n \leq 1$, on conclut que

$$L(r_{n+1}) \leq Cr_n^{\frac{12}{5}} \varepsilon_1,$$

et puis

$$\begin{aligned} r_{n+1}^{\frac{3}{5}} \int_{Q^{n+1}} |u||p - \bar{p}_{n+1}| &\leq Cr_n^{-\frac{12}{5}} L(r_{n+1}) \\ &\leq C^{**} \varepsilon_1. \end{aligned}$$

On pose ε_1 assez petit tel que $C^{**} \varepsilon_1^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{2}$, et donc

$$r_{n+1}^{\frac{3}{5}} \int_{Q^{n+1}} |u||p - \bar{p}_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \varepsilon_1^{\frac{2}{3}}. \quad (33)$$

Par (32) et (33), on finit la preuve de (1_{n+1}) .

Étape 3 : On a que $(1_k), 3 \leq k \leq n$, implique $(4.7)_n$, si $n \geq 3$. Comme mentioné plus haut, on va utiliser une suite de fonctions lisses pour approcher la fonction singulière. On translate l'espace tel que on est toujours autour du point $(0, 0)$, c'est-à-dire que $(a, s) = (0, 0)$. On pose $\phi_n = \chi \psi_n$, où ψ_n est une constante fois la solution fondamentale de $\phi_t + \Delta \phi = 0$ avec singularité en $(0, r_n^2)$, et χ est une fonction de troncature. Plus précisément,

$$\psi_n = \frac{1}{(r_n^2 - t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4(r_n^2 - t)}\right), \quad t < r_n^2,$$

et χ est lisse sur $\{t \leq 0\}$ avec $0 \leq \chi \leq 1$ et

$$\begin{aligned} \chi &= 1 \quad \text{dans } Q^2, \\ \chi &= 0 \quad \text{dehors } Q_{\frac{1}{3}}(0,0) \end{aligned}$$

Par un calcul direct, on aura que $\phi_n \geq 0$ et

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial t} + \Delta \phi_n = 0 \quad \text{dans } Q^2, \quad (34)$$

$$\left| \frac{\partial \phi_n}{\partial t} + \Delta \phi_n \right| \leq C \quad \text{partout}, \quad (35)$$

$$\frac{1}{C} r_n^{-3} \leq \phi_n \leq C r_n^{-3}, \quad |\nabla \phi_n| \leq C r_n^{-4} \quad \text{dans } Q^n, \quad n \geq 2, \quad (36)$$

$$\phi_n \leq C r_k^{-3}, \quad |\nabla \phi_n| \leq C r_k^{-4} \quad \text{dans } Q^{k-1} \setminus Q^k, \quad 1 < k \leq n, \quad (37)$$

pour une constante C indépendante de n .

En utilisant ϕ_n comme fonction d'essai dans l'inégalité d'énergie généralisée (6), on obtient

$$\sup_{s-r_n^2 < t \leq s} \int_{|x-a| < r_n} |u|^2 dx + r_n^{-3} \int_{Q^n} |\nabla u|^2 \leq C(I + II + III + IV),$$

où,

$$\begin{aligned} I &= \int_{Q^1} |u|^2 \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial t} + \Delta \phi_n \right), \\ II &= \int_{Q^1} |u|^3 |\nabla \phi_n|, \\ III &= \left| \int_{Q^1} p(u \cdot \nabla \phi_n) \right|, \\ IV &= \int_{Q^1} |u| |f| |\phi_n|. \end{aligned}$$

On va estimer chaque terme. Pour I , il est borné directement par (35) et l'hypothèse. Pour II et IV , ils sont bornés par un argument d'intégration par parties comme avant. Le point clé est d'estimer III . On introduit une autre suite de fonctions de troncature. Plus précisément, on définit χ_k comme suivant : $0 \leq \chi_k \leq 1$ est lisse dans Q^1 telle que

$$\chi_k = 1 \quad \text{dans } Q_{\frac{7r_k}{8}}(0,0), \quad \chi_k = 0 \quad \text{dehors } Q_{r_k}(0,0),$$

et

$$|\nabla \chi_k| \leq \frac{C}{r_k}$$

Comme $\chi_1 \phi_n = \phi_n$, on aura que

$$\begin{aligned} III &= \left| \int_{Q^1} p(u \cdot \nabla \phi_n) \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_{Q^1} pu \cdot \nabla ((\chi_k - \chi_{k+1})\phi_n) \right| \\ &\quad + \left| \int_{Q^1} pu \cdot \nabla (\chi_n \phi_n) \right|. \end{aligned} \quad (38)$$

On estime séparément les termes du membre de droite. Comme $\chi_k - \chi_{k+1}$ est supporté dans Q^k et u est de divergence nulle, pour $k \geq 3$ on aura par intégration par parties que

$$\int_{Q^1} pu \cdot \nabla((\chi_k - \chi_{k+1})\phi_n) = \int_{Q^k} (p - \bar{p}_k)u \cdot \nabla((\chi_k - \chi_{k+1})\phi_n),$$

d'où \bar{p}_k est le moyen définie comme avant. Similairement,

$$\int_{Q^1} pu \cdot \nabla(\chi_n\phi_n) = \int_{Q^n} (p - \bar{p}_n)u \cdot \nabla(\chi_n\phi_n).$$

Pour $k = 1, 2$, on peut estimer directement par (37)

$$\left| \int_{Q^1} pu \cdot \nabla((\chi_k - \chi_{k+1})\phi_n) \right| \leq C \int_{Q^1} |p||u|.$$

Ainsi, on aura que

$$III \leq C \sum_{k=3}^n \int_{Q^k} |u||p - \bar{p}_k|r_k^{-4} + C \int_{Q^1} |u||p|. \quad (39)$$

Par l'hypothèse de récurrence (1_k) , $3 \leq k \leq n$ et (25), on conclut que

$$\begin{aligned} III &\leq C \sum_{k=3}^n r_k^{\frac{2}{5}} \varepsilon_1^{\frac{2}{3}} + C \varepsilon_1^{\frac{2}{3}} \\ &\leq C \varepsilon_1^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

On finit la preuve de (2_n) . On fixe les constantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2(q)$ comme expliqué au cours du raisonnement et puis on finira la preuve totale. \square

4 Conclusion

En conclusion, nous avons présenté une preuve de la propriété de régularité partielle des solutions faibles convenables aux équations de Navier-Stokes obtenue par L. Caffarelli, R. Kohn et L. Nirenberg en 1982. Ce résultat fut une grande avancée dans la recherche sur les équations de Navier-Stokes et compte encore aujourd'hui parmi les résultats de référence dans ce domaine.

Références

- [1] L. CAFFARELLI, R. KOHN et L. NIRENBERG. « Partial Regularity of Suitable Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 35.6 (1982), p. 771-831. ISSN : 1097-0312. DOI : [10.1002/cpa.3160350604](https://doi.org/10.1002/cpa.3160350604). (Visité le 23/05/2023).
- [2] Eberhard HOPF. « Über Die Anfangswertaufgabe Für Die Hydrodynamischen Grundgleichungen. Erhard Schmidt Zu Seinem 75. Geburtstag Gewidmet : Über Die Anfangswertaufgabe Für Die Hydrodynamischen Grundgleichungen. Erhard Schmidt Zu Seinem 75. Geburtstag Gewidmet ». In : *Mathematische Nachrichten* 4.1-6 (jan. 1950), p. 213-231. ISSN : 0025584X. DOI : [10.1002/mana.3210040121](https://doi.org/10.1002/mana.3210040121). (Visité le 02/06/2023).
- [3] Jean LERAY. « Sur Le Mouvement d'un Liquide Visqueux Emplissant l'espace ». In : *Acta Mathematica* 63.none (jan. 1934), p. 193-248. ISSN : 0001-5962, 1871-2509. DOI : [10.1007/BF02547354](https://doi.org/10.1007/BF02547354). (Visité le 02/06/2023).
- [4] Vladimir SCHEFFER. « The Navier-Stokes Equations on a Bounded Domain ». In : *Communications in Mathematical Physics* 73.1 (jan. 1980), p. 1-42. ISSN : 0010-3616, 1432-0916. (Visité le 02/06/2023).
- [5] James SERRIN. « On the Interior Regularity of Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations ». In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 9.1 (jan. 1962), p. 187-195. ISSN : 1432-0673. DOI : [10.1007/BF00253344](https://doi.org/10.1007/BF00253344). (Visité le 02/06/2023).
- [6] Elias M. STEIN. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions (PMS-30)*. Princeton University Press, 1970. ISBN : 978-0-691-08079-6. JSTOR : [j.ctt1bpmb07](https://www.jstor.org/stable/j.ctt1bpmb07). (Visité le 23/05/2023).