

# Autour du théorème de Stallings sur les bouts de groupes

Dürrüoğlu Emilhan  
Kirilov Borislav

Juin 2024

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>3</b>
2.1	Premières définitions . . . . .	3
2.2	Lemme de Švarc-Milnor . . . . .	5
2.3	Espace des bouts. Généralités . . . . .	6
2.4	Espace des bouts d'un groupe . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Preuve de Gromov du théorème de Stallings</b>	<b>9</b>
3.1	Énergie et fonctions harmoniques . . . . .	9
3.2	Action sur les variétés riemanniennes . . . . .	11
3.3	Moyennabilité . . . . .	12
3.4	Prolongement harmonique . . . . .	15
3.5	Construction de l'arbre . . . . .	18

# 1 Introduction

Les groupes sont des objets fondamentaux en mathématiques. Bien qu'ils soient des objets algébriques, ils peuvent être étudiés du point de vue géométrique, ce qui nous permet d'améliorer notre compréhension de leur structure algébrique.

Un des moyens de caractériser la géométrie des groupes est d'étudier leurs actions. On rappelle qu'un **arbre** est un graphe connexe sans cycle. Les actions de groupe sur les arbres sont d'un intérêt particulier.

**Définition 1.0.1.** Soit  $G$  un groupe et  $T = (V, E)$  un arbre. On dit que  $G$  **agit** sur  $T$  par isomorphismes si  $G$  agit sur l'ensemble des sommets  $V$  et si pour tout  $g \in G$  et  $v_1, v_2 \in V$  on a

$$(v_1, v_2) \in E \iff (g \cdot v_1, g \cdot v_2) \in E.$$

On dira de plus que l'action est

- sans point fixe global si pour tout  $v \in V$ , il existe  $g \in G$  tel que  $g \cdot v \neq v$ ,
- avec des stabilisateurs d'arêtes finis si pour tout  $(v_1, v_2) \in E$ , il n'existe qu'un nombre fini de  $g \in G$  tels que

$$\{v_1, v_2\} = \{g \cdot v_1, g \cdot v_2\},$$

- sans inversion d'arêtes si pour tout  $(v_1, v_2) \in E$ , il n'existe pas de  $g \in G$  tel que

$$g \cdot v_1 = v_2 \text{ et } g \cdot v_2 = v_1.$$

Toutes les actions de groupe sur des arbres considérées dans la suite seront par isomorphisme. Tous les groupes seront en outre supposés finiment engendrés.

Bien que les actions d'un groupe contiennent de l'information sur sa structure, les groupes peuvent eux-mêmes être vus comme des objets géométriques. Un moyen d'y parvenir est d'introduire la notion de **graphe de Cayley**, qui dépend d'un ensemble générateur  $S$  de  $G$ . Il s'agit du graphe où les sommets sont les éléments de  $G$  et pour lequel deux sommets  $g$  et  $h$  sont reliés par une arête si et seulement si  $g^{-1}h \in S$  ou  $h^{-1}g \in S$ . Par exemple, si  $G = \mathbb{Z}$  et  $S = \{1\}$ , le graphe de Cayley associé est une droite graduée.

Les graphes de Cayley nous permettent d'introduire un invariant géométrique fondamental des groupes que l'on appelle **l'espace des bouts**. De manière informelle, il s'agit de l'ensemble des directions vers l'infini dans le graphe de Cayley. Une façon de décrire cet espace est de considérer les composantes connexes infinies du graphe de Cayley lorsqu'on lui retire des ensembles finis assez grands.

On a le premier résultat suivant :

**Théorème 1.0.2** (Freudenthal). *Tout groupe finiment engendré a 0, 1, 2 ou une infinité de bouts.*

On montre facilement qu'un groupe a 0 bouts si et seulement si il est fini. On peut aussi caractériser les groupes à 2 bouts.

**Théorème 1.0.3.** *Un groupe finiment engendré  $G$  a 2 bouts si et seulement si  $G$  contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .*

Le théorème principal du mémoire est le résultat suivant :

**Théorème 1.0.4** (Stallings). *Tout groupe finiment engendré qui a une infinité de bouts admet une action sur un arbre sans point fixe global, avec des stabilisateurs d'arêtes finis et sans inversion d'arêtes.*

La théorie de Basse-Serre nous dit alors que  $G$  est isomorphe à un produit amalgamé de la forme  $G = G_1 \star_A G_2$ , où  $G_1$  et  $G_2$  sont de type fini et  $A$  est fini, ou à une extension HNN non-triviale  $G = G_1 \star_A$  d'un groupe de type fini par un groupe fini. On peut consulter le livre [12] de Serre pour étudier ces notions.

Comme expliqué dans la section 20.7 de [5], il est intéressant de souligner que ce théorème, considéré comme l'un des premiers en théorie géométrique des groupes, a permis de démontrer des résultats longtemps restés à l'état de conjecture.

Dans ce mémoire, nous présentons des éléments d'une preuve du Théorème 1.0.4 qui est due à Gromov ([7], pages 228-230). Celle-ci utilise des outils de géométrie différentielle et repose sur la notion de fonction harmonique sur une variété riemannienne. D'autres preuves du théorème existent, pouvant être plus géométriques ou plus combinatoires, comme la démonstration originale de Stallings (voir par exemple [13] et [4]).

Dans la section 2, nous introduisons des notions de base liées à la géométrie des groupes, qui nous permettent de démontrer les théorèmes 1.0.2 et 1.0.3. Dans la section 3, nous présentons une grande partie de la preuve de Gromov, après avoir rappelé quelques notions de géométrie différentielle. En faisant agir notre groupe  $G$  sur une variété riemannienne  $M$ , nous étudions quelles propriétés géométriques sont communes entre  $G$  et  $M$ . On utilise finalement certaines fonctions harmoniques sur  $M$  pour construire l'arbre sur lequel  $G$  agit.

La référence principale du mémoire est le livre [5], écrit par Cornelia Druţu et Michael Kapovich. Pour les notions de base de théorie géométrique des groupes, nous avons également consulté des ouvrages de Löh [10] et de Meier [11].

**Notations.** Pour un groupe  $G$ , on notera par la suite  $e_G$  son élément neutre. Pour un ensemble fini  $S$ , on note  $\text{card}(S)$  son cardinal. Pour une action du groupe  $G$  sur un ensemble  $X$ , notée  $G \curvearrowright X$ , on notera  $X/G$  le quotient de cette action. Pour un espace métrique  $(X, d)$ , un point  $x \in X$  et  $r > 0$ , on dénote par  $B(x, r)$  et  $\bar{B}(x, r)$  la boule respectivement ouverte et fermée de centre  $x$  et de rayon  $r$ . Pour un sous-ensemble  $S$  de cet espace métrique et  $r > 0$ , on note  $\mathcal{N}_r(S)$  le  $r$ -voisinage de  $S$ , ie  $\mathcal{N}_r(S) := \{x \in X \mid d(x, S) < r\}$ .

**Remerciements.** Nous remercions chaleureusement notre encadrant Eduardo Silva, qui nous a introduit au sujet et nous a partagé de nombreuses références et de nombreux conseils.

## 2 Préliminaires

### 2.1 Premières définitions

Nous commençons par introduire le graphe de Cayley d'un groupe qui nous permettra de voir tout groupe finiment engendré comme un espace métrique.

**Définition 2.1.1.** Soit  $G$  un groupe finiment engendré et  $S$  un système de générateurs fini de  $G$ . On appelle **graphe de Cayley** de  $G$  (associé à  $S$ ) le graphe, noté  $\Gamma_S$ , dont les sommets sont les éléments de  $G$ , et où les sommets  $g \neq h$  sont reliés par une arête si  $g^{-1}h \in S$  ou  $h^{-1}g \in S$ . On munit ce graphe de la métrique usuelle étendant aux arêtes la métrique du plus court chemin entre les sommets.

*Remarque 2.1.2.*  $S$  étant un système de générateurs de  $G$ , tout élément  $g \in G$  s'écrit sous la forme  $\prod_{i=1}^k s_i^{\epsilon_i}$ , où  $s_i \in S$  et  $\epsilon_i = \pm 1$ , donc on dispose du chemin  $(e_G, s_1^{\epsilon_1}, s_1^{\epsilon_1} \cdot s_2^{\epsilon_2}, \dots, g)$  dans  $\Gamma_S$ . Cela montre que  $\Gamma_S$  est connexe.

**Définition 2.1.3.** Si  $g, h \in G$ , on note  $d_S(g, h)$  la longueur du plus court chemin entre  $g$  et  $h$  dans  $\Gamma_S$ . On vérifie aisément que  $d_S$  induit une métrique sur  $G$ .

*Remarque 2.1.4.* Puisque  $\Gamma_S$  est invariant par translation, on remarque que si  $g, h, k \in G$ ,

$$d_S(kg, kh) = d_S(h^{-1}g, 1_G) = d_S(g, h).$$

Autrement dit,  $G$  agit isométriquement sur  $G$  par translation à gauche. De même,  $G$  agit isométriquement sur  $\Gamma_S$  par translation à gauche.

**Lemme 2.1.5.** Si  $S$  et  $S'$  sont des systèmes de générateurs finis de  $G$ , alors  $d_S$  et  $d_{S'}$  sont des métriques équivalentes sur  $G$ , au sens où

$$\exists \lambda > 0, \forall g, h \in G, \frac{1}{\lambda} \cdot d_{S'}(g, h) \leq d_S(g, h) \leq \lambda \cdot d_{S'}(g, h)$$

*Démonstration.*  $S'$  étant fini, on dispose de  $M > 0$  tel que tout élément de  $S'$  s'écrit comme un produit d'au plus  $M$  éléments de  $S \cup S^{-1}$ , donc si  $g, h \in G$ ,  $d_S(g, h) \leq M \cdot d_{S'}(g, h)$ . Le résultat s'obtient alors par symétrie.  $\square$

Le graphe de Cayley d'un groupe et la métrique induite dépendent de l'ensemble générateur  $S$ . On vient néanmoins de montrer que ces métriques sont les mêmes à *grande échelle*. Nous formalisons maintenant ce concept dans le cadre plus général des espaces métriques.

**Définition 2.1.6.** Soit  $X$  et  $Y$  des espaces métriques, et  $f: X \rightarrow Y$ . On dit que  $f$  est **quasi-isométrique** si

$$\exists c, b > 0, \forall x, x' \in X, \frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x') + b$$

Une application  $g: Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont à distances bornées de  $\text{id}_Y$  et de  $\text{id}_X$  respectivement est appelée un **quasi-inverse** de  $f$ . Si  $f$  possède un quasi-inverse, on dit que  $f$  est une **quasi-isométrie**.

On dit enfin que  $f: X \rightarrow Y$  est **quasi-dense** si  $\exists M > 0, \forall y \in Y, \exists x \in X, d_Y(f(x), y) < M$ .

**Lemme 2.1.7.** Si  $f: X \rightarrow Y$  est quasi-isométrique, alors  $f$  est une quasi-isométrie ssi elle est quasi-dense.

*Démonstration.* Pour le sens direct, il suffit de remarquer que si  $g$  est un quasi-inverse de  $f$ , alors on dispose de  $M > 0$  tel que  $d_Y(f(g(y)), y) < M$  pour tout  $y \in Y$ .

Pour le sens réciproque, en notant  $M$  une constante de quasi-densité de  $f$ , l'axiome du choix nous donne une application  $g: Y \rightarrow X$  telle que pour tout  $y \in Y, d_Y(f(g(y)), y) < M$ . En utilisant le caractère quasi-isométrique de  $f$ , on montre alors sans peine que  $g$  est quasi-isométrique et que  $g \circ f$  est à distance bornée de  $\text{id}_X$ , donc  $g$  est un quasi-inverse de  $f$ .  $\square$

On en déduit le résultat suivant :

**Lemme 2.1.8.** Les applications quasi-isométriques et les quasi-isométries sont stables par composition.

*Démonstration.* Soit  $f: X \rightarrow Y$  et  $g: Y \rightarrow Z$  des applications quasi-isométriques de constantes  $(c_1, b_1)$  et  $(c_2, b_2)$ . Pour tous  $x, x' \in X$ , on a alors

$$\begin{aligned} d_Z(g(f(x)), g(f(x'))) &\leq c_2 \cdot d_Y(f(x), f(x')) + b_2 \leq c_2 c_1 \cdot d_X(x, x') + c_2 b_1 + b_2 \\ d_Z(g(f(x)), g(f(x'))) &\geq \frac{1}{c_2} \cdot d_Y(f(x), f(x')) - b_2 \geq \frac{1}{c_2 c_1} \cdot d_X(x, x') - \frac{b_1}{c_2} - b_2 \end{aligned}$$

Donc  $g \circ f$  est quasi-isométrique. Si en outre  $f$  et  $g$  sont quasi-denses, on montre que  $g \circ f$  l'est aussi en utilisant le caractère quasi-isométrique de  $g$ .  $\square$

On peut maintenant définir une notion de ressemblance à *grande échelle*.

**Définition 2.1.9.** Deux espaces métriques  $X$  et  $Y$  sont dits **quasi-isométriques**, noté  $X \sim_{QI} Y$ , s'il existe une quasi-isométrie  $f: X \rightarrow Y$ . C'est une relation d'équivalence sur les espaces métriques.

*Remarque 2.1.10.* Vu Lemme 2.1.5, l'identité d'un groupe  $G$  est une quasi-isométrie de  $(G, d_S)$  vers  $(G, d_{S'})$ . On se permettra donc d'écrire  $G \sim_{QI} X$  sans préciser le système fini  $S$  de générateurs du groupe  $G$ .

*Remarque 2.1.11.* L'inclusion canonique  $(G, d_S) \rightarrow \Gamma_S$  est isométrique et quasi-dense, et est donc une quasi-isométrie. Donc  $G \sim_{QI} \Gamma_S$ . On vérifie en outre aisément que  $\Gamma_S$  est géodésique.

Introduisons une dernière définition utile.

**Définition 2.1.12.** Un espace métrique  $X$  est dit  **$(c, b)$ -quasi-géodésique** s'il existe  $c, b > 0$  tels que pour tous  $x, x' \in X$ , il existe  $\gamma: I \rightarrow X$  qui est  $(c, b)$ -quasi-isométrique, avec  $I = [t, t']$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ , tel que  $\gamma(t) = x$  et  $\gamma(t') = x'$ .

## 2.2 Lemme de Švarc-Milnor

On montre dans cette partie un critère qui nous permettra d'établir facilement la classe de quasi-isométrie d'un groupe  $G$  via ses actions sur les espaces métriques.

**Théorème 2.2.1.** *Soit  $G$  un groupe agissant isométriquement sur un espace métrique  $(c, b)$ -quasi-géodésique non vide  $(X, d)$ . Supposons qu'il existe  $B \subset X$  de diamètre fini tel que  $\bigcup_{g \in G} g \cdot B = X$  et tel que  $S := \{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$  soit fini, où  $B' := \{x \in X \mid \exists y \in B, d(x, y) \leq 2b\}$ . Alors  $G$  est finiment engendré par  $S$ , et l'application  $g \in G \mapsto g \cdot x$  est une quasi-isométrie pour tout  $x \in X$ . En particulier,  $G \sim_{QI} X$ .*

*Démonstration.* Soit  $g \in G$  et  $x \in B$ . Soit  $\gamma: [0, L] \rightarrow X$  une application quasi-géodésique reliant  $x$  à  $g \cdot x$ , et  $n := \lceil L \cdot \frac{c}{b} \rceil$ . Pour  $0 \leq j \leq n-1$  on pose  $t_j = j \cdot \frac{b}{c}$  et  $x_j = \gamma(t_j)$ , et on choisit  $g_j \in G$  et  $b_j \in B$  tel que  $x_j = g_j \cdot b_j$  (en prenant  $g_0 = e_G$  et  $b_0 = x$ ). On pose enfin  $t_n = L$ ,  $x_n = g \cdot x$ ,  $g_n = g$  et  $b_n = x$ .

Pour tout  $1 \leq j \leq n$ , on pose  $s_j = g_{j-1}^{-1} g_j$ . On a alors :

$$d(b_{j-1}, s_j \cdot b_j) = d(x_{j-1}, x_j) \leq c \cdot \frac{b}{c} + b \leq 2b.$$

Cela montre que  $s_j \cdot B \cap B' \neq \emptyset$ , donc  $s_j \in S$ . Ainsi,  $g = g_n = \prod_{j=1}^n s_j$ , donc  $S$  engendre  $G$ .

Soit maintenant  $x \in X$  et  $\phi: g \mapsto g \cdot x$ . Quitte à traduire  $B$  par un élément de  $G$ , on suppose que  $x \in B$ . Si  $x' \in X$ , on dispose de  $g$  tel que  $x' \in g \cdot B$ , donc  $d(x', \phi(g)) \leq \text{diam}(B)$ . Donc  $\phi$  est quasi-dense. Montrons que  $\phi$  est quasi-isométrique en encadrant, pour  $g \in G$ ,  $d(\phi(e_G), \phi(g))$  (ce qui conclura car  $G$  agit par isométries). En reprenant les notations précédentes, on a

$$d(\phi(e_G), \phi(g)) = d(x, g \cdot x) = d(\gamma(0), \gamma(L)) \geq \frac{1}{c} \cdot L - b \geq \frac{b}{c^2} \cdot d_S(e_G, g) - \frac{b}{c^2} - b$$

car  $L \geq \frac{b(n-1)}{c}$  et  $d_S(e_G, g) \leq n$ . En outre, si  $d_S(e_G, g) = n$ , on a des  $s_i \in S$  tels que (car  $S = S^{-1}$ ) :

$$d(\phi(e_G), \phi(g)) = d(x, g \cdot x) = d(x, \prod_{j=1}^n s_j \cdot x) \leq \sum_{j=1}^n d(x, s_j \cdot x) \leq 2 \cdot (\text{diam}(B) + 2b) \cdot d_S(e_G, g)$$

par inégalité triangulaire car  $g$  agit par isométries. Cela montre que  $\phi$  est une quasi-isométrie et conclut.  $\square$

Sur certains espaces métriques, les hypothèses du théorème précédent peuvent être vérifiées plus facilement.

**Définition 2.2.2.** Un espace métrique  $(X, d)$  est dit **propre** si pour tout  $x \in X$  et  $r > 0$ ,

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X, d(x, y) \leq r\}$$

est compact.

**Définition 2.2.3.** Une action de  $G$  sur un espace métrique  $(X, d)$  est dite **propre** si pour tout  $B \subset X$  compact,  $\{g \in G \mid g \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$  est fini. Elle est dite **cocompacte** si  $X/G$  est compact.

**Corollaire 2.2.4.** (*Švarc-Milnor*) *Soit  $G$  un groupe agissant isométriquement sur un espace métrique (non vide)  $(X, d)$  qui est propre et quasi-géodésique. Si l'action est propre et cocompacte, alors  $G$  est finiment engendré et  $g \mapsto g \cdot x$  est une quasi-isométrie pour tout  $x \in X$ .*

*Démonstration.* Soit  $c, b > 0$  tel que  $X$  soit  $(c, b)$ -quasi-géodésique. Soit  $\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid r > 0, x \in X\}$ . Soit  $\pi: X \rightarrow X/G$  la projection canonique, qui est ouverte. Par compacité de  $X/G$ , on peut écrire :

$$X/G = \pi(X) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \pi(B) = \bigcup_{i=1}^n \pi(B(x_i, r_i)).$$

Soit  $B = \bigcup_{i=1}^n \overline{B}(x_i, r_i)$ . Alors  $B$  est de diamètre fini,  $\bigcup_{g \in G} g \cdot B = X$  et  $B' := B_{2b}(B)$  est compact car  $X$  est propre. Par propriété de l'action de  $G$ ,  $\{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$  est fini, et on peut donc appliquer le lemme de Švarc-Milnor.  $\square$

Donnons une première application du lemme de Švarc-Milnor.

**Corollaire 2.2.5.** *Soit  $G$  un groupe finiment engendré et  $H$  un sous-groupe d'indice fini de  $G$ . Alors  $G \sim_{QI} H$ .*

*Démonstration.* Fixons  $S$  un système fini de générateurs de  $G$ . On fait agir  $H$  par multiplication à gauche sur  $G$ . On a vu précédemment que cette action est isométrique. On vérifie en outre que  $G$  est  $(1, 1)$ -quasi-géodésique, et qu'il est propre. En effet,  $\Gamma_S$  est localement fini donc une boule de rayon fini dans  $G$  est finie et est à fortiori compacte.

Il nous reste à montrer que l'action de  $H$  est propre et cocompacte. Soit donc  $B \subset G$  compact. Alors  $B$  est borné donc fini, donc  $\{h \in H \mid h \cdot B \cap B \neq \emptyset\} = B \cdot B^{-1} \cap H$  est fini. En outre, l'ensemble  $G/H$  est en bijection avec les classes à droite de  $H$  dans  $G$ , et est donc fini puisque  $H$  est d'indice fini dans  $G$ . Cela montre bien que  $G/H$  est compact.

En appliquant le corollaire précédent, on obtient le résultat voulu.  $\square$

## 2.3 Espace des bouts. Généralités

On fixe dans cette partie un espace métrique  $(X, d)$  qui est propre et localement connexe par arcs. En particulier, une partie de  $X$  est relativement compacte si et seulement si elle est bornée et les parties connexes de  $X$  coïncident avec celles qui sont connexes par arcs. L'idée de la section est de formaliser la notion de directions vers l'infini dans un tel espace.

Fixons un point  $x \in X$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $A_n$  l'ensemble des composantes connexes (par arcs) de  $X \setminus \overline{B}(x, n)$ . Si  $n < m$  alors tout élément de  $A_m$  est inclus dans exactement un élément de  $A_n$ . Cela nous permet de définir l'objet principal de cette section.

**Définition 2.3.1.** L'espace des bouts de  $X$ , noté  $e(X)$ , est l'ensemble

$$e(X) := \left\{ a \in \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid a_i \supseteq a_j \text{ pour tous } i < j \right\}.$$

On peut ainsi voir l'espace  $e(X)$  comme l'ensemble des suites décroissantes

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq \dots$$

de composantes connexes de  $X \setminus \overline{B}(x, n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . De plus, toute composante  $C_i$  dans une telle suite est non bornée puisqu'elle contient des éléments à distances arbitrairement grandes de  $x$ .

*Remarque 2.3.2.* Soit  $\mathcal{K}$  l'ensemble des compacts de  $X$ . Pour  $K \in \mathcal{K}$  notons  $\pi(K)$  l'ensemble des composantes connexes de  $X \setminus K$ . On aurait pu définir  $e(X)$  en considérant les  $a \in \prod_{K \in \mathcal{K}} \pi(K)$  tels que  $a_{K_1} \supseteq a_{K_2}$  si  $K_1 \subseteq K_2$ . Comme  $(\overline{B}(x, n))$  est une suite exhaustive de compacts, on peut montrer que les deux constructions sont équivalentes. En particulier, notre construction ne dépend pas du choix de  $x \in X$ .

*Remarque 2.3.3.* Si  $e(X)$  est fini et  $\text{card}(e(X)) = k$  on voit qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $X \setminus \overline{B}(x, n)$  a  $k$  composantes connexes non bornées. Si  $A \subseteq X$  est tel que  $X \setminus A$  a  $k$  composantes connexes non bornées, on dit que  $A$  **sépare** les bouts.

**Exemple 2.3.4.**  $\mathbb{Z}$  a deux bouts,  $\mathbb{Z}^n$  a un bout pour  $n \geq 2$ , le groupe libre  $F_n$  à  $n \geq 2$  générateurs a une infinité de bouts.

On étend maintenant la topologie de  $X$  sur  $\overline{X} = X \cup e(X)$ . Pour  $e = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in e(X)$ , on prend comme base de voisinages de  $e$  la famille  $(B_n(e))_{n \in \mathbb{N}}$ , où

$$B_n(e) \cap X = a_n \text{ et } B_n(e) \cap e(X) = \{f = (b_i)_{i \in \mathbb{N}} \in e(X) \mid b_n = a_n\}.$$

On vérifie sans peine que cela définit bien une topologie sur  $\overline{X}$ .

*Remarque 2.3.5.* Comme dans la remarque 2.3.2, la topologie construite ne dépend pas du choix de  $x \in X$ .

Comme les homéomorphismes préservent la connexité et la compacité, on montre le résultat suivant.

**Lemme 2.3.6.** *Toute action de groupe topologique  $G \curvearrowright X$  s'étend en une action topologique de  $G$  sur  $\overline{X}$ .*

On a le résultat suivant (voir par exemple [5], lemme 9.14).

**Proposition 2.3.7.** *Les espaces  $e(X)$  et  $\overline{X} = X \cup e(X)$  sont compacts.*

**Corollaire 2.3.8.** *L'espace  $\overline{X}$  est normal.*

Les quasi-isométries nous renseignent sur ce qui se passe à *grande échelle* et les bouts – ce qui se passe à l'infini. Le résultat suivant est donc naturel.

**Théorème 2.3.9.** *Toute quasi-isométrie d'espaces métriques géodésiques propres  $X \rightarrow X'$  induit un homéomorphisme  $e(X) \rightarrow e(X')$ .*

*Esquisse de démonstration.* Soit  $f: X \rightarrow X'$  une  $(c, b)$ -quasi-isométrie,  $r = c + b$  et  $C \subseteq X$  un ensemble connexe. Si  $x_1, x_2 \in X$  sont tels que  $d_X(x_1, x_2) < 1$ , alors  $d_{X'}(f(x_1), f(x_2)) < r$ . On en déduit que le  $r$ -voisinage de  $f(C)$ , que l'on note  $\mathcal{N}_r(f(C))$ , est connexe.

On définit une application  $e(f): e(X) \rightarrow e(X')$  comme suit. Soit  $e \in e(X)$  représenté par la suite décroissante  $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$  où  $C_i$  est une composante connexe de  $X \setminus K_i$ , avec  $K_i = \overline{B}(x, i)$  pour un certain  $x \in X$ . L'ensemble connexe  $\mathcal{N}_r(f(C_{i'}))$  est disjoint de  $\overline{B}(f(x), i)$ , où  $i \mapsto i'$  est une fonction linéaire croissante et non constante qui dépend de  $c$  et  $b$ . L'application  $f$  envoie les parties (non) bornées sur les parties (non) bornées. Soit donc  $D_i$  la composante connexe non bornée de  $X' \setminus \overline{B}(f(x), i)$  qui contient  $\mathcal{N}_r(f(C_{i'}))$ . Les ensembles  $D_i$  forment une suite décroissante pour l'inclusion et définissent donc un bout  $e'$  de  $X'$ . On pose  $e(f)(e) := e'$ . On montre que l'application ainsi construite est injective.

Montrons la surjectivité de  $e(f)$ . On choisit  $R > 0$  assez grand tel que  $\mathcal{N}_R(f(X)) = X'$ , qui existe par quasi-densité de  $f$ . Soit  $e' \in e(X')$  et  $(x'_i)$  une suite de points de  $X'$  qui représente  $e'$ . On prend une suite de points  $(x_i)$  de  $X$  qui vérifie  $d_{X'}(f(x_i), x'_i) \leq R$ . On voit alors que  $(x_i)$  converge vers un bout  $e \in e(X)$  tel que  $e(f)(e) = e'$ .

Vérifions finalement la continuité. En considérant des voisinages  $D_i \subseteq \overline{X'}$  de  $e' = e(f)(e)$ , on a comme ci-dessus  $f(C_{i'}) \subseteq D_i$  où  $i \mapsto i'$  est une fonction linéaire non-constante. Donc pour tout  $j \geq i'$  on a  $f(C_j) \subseteq D_i$ . Ainsi le voisinage de  $e \in e(X)$  défini par la paire  $(K_{i'}, e)$  est envoyé par  $f$  dans le voisinage de  $e' \in e(X')$  défini par la paire  $(\overline{B}(f(x), i), e')$ . Cela prouve la continuité de  $e(f)$ . Comme  $e(X)$  et  $e(X')$  sont compacts,  $e(f)$  est un homéomorphisme.  $\square$

*Remarque 2.3.10.* Quitte à augmenter  $r$ , la même démonstration reste valable dans le cas où les espaces sont quasi-géodésiques.

On en déduit directement le corollaire suivant :

**Corollaire 2.3.11.** *Si deux espaces métriques quasi-géodésiques et propres sont quasi-isométriques, alors ils ont des espaces des bouts homéomorphes.*

Dans la suite, on utilisera surtout que les espaces des bouts de deux espaces quasi-isométriques sont en bijection.

## 2.4 Espace des bouts d'un groupe

Considérons maintenant le cas des groupes finiment engendrés.

**Définition 2.4.1.** Soit  $G$  un groupe finiment engendré. On définit  $e(G)$  comme l'espace des bouts de son graphe de Cayley  $\Gamma_S$ .

*Remarque 2.4.2.* Le lemme 2.1.5 et le théorème 2.3.9 montrent que cette définition ne dépend pas du choix de l'ensemble générateur  $S$ . Comme  $G$  agit sur  $\Gamma_S$  isométriquement par multiplication à gauche, le groupe  $G$  agit sur  $\overline{\Gamma_S} = \Gamma_S \cup e(G)$  d'après le corollaire 2.3.6 .

Le premier résultat principal sur l'espace des bouts d'un groupe est le théorème suivant.

**Théorème 2.4.3.** (ou Théorème 1.0.2) *Tout groupe finiment engendré a 0, 1, 2 ou une infinité de bouts.*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $G$  possède  $k$  bouts, avec  $k > 2$  fini. En particulier,  $G$  est infini. Fixons un ensemble générateur  $S$  fini et soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\Gamma_S \setminus B(e_G, n)$  possède  $k$  composantes connexes infinies, et soit  $\mathcal{C}$  l'une de ces composantes. Soit  $g \in \mathcal{C}$  tel que  $d(e_G, g) > 2n$ , de sorte que  $B(e_G, n) \cap g \cdot B(e_G, n) = \emptyset$ . Par translation,  $\Gamma_S \setminus g \cdot B(e_G, n)$  possède  $k$  composantes connexes infinies. Or,  $B(e_G, n)$  est connexe donc intersecte au plus une des composantes connexes infinies de  $\Gamma_S \setminus g \cdot B(e_G, n)$ . Et toutes les autres composantes connexes infinies de  $\Gamma_S \setminus g \cdot B(e_G, n)$  sont incluses dans  $\mathcal{C}$  car sont reliées à  $g$  dans  $\Gamma_S \setminus B(e_G, n)$ . Ainsi, en posant  $D = B(e_G, n) \cup g \cdot B(e_G, n)$ ,  $\Gamma_S \setminus D$  possède au moins  $k-1$  composantes connexes infinies incluses dans  $\mathcal{C}$ , qui sont donc disjointes des  $k-1$  autres composantes connexes infinies de  $\Gamma_S \setminus B(e_G, n)$ . Donc  $e(G) \geq 2k-2 > k$ , absurde.  $\square$

On souhaite maintenant caractériser les groupes ayant un nombre de bouts fixé. On remarque que  $\text{card}(e(G)) = 0$  si et seulement si  $G$  est fini. La plupart des groupes vérifient  $\text{card}(e(G)) = 1$ . Avant de s'attaquer au théorème principal du mémoire, caractérisons le cas  $\text{card}(e(G)) = 2$ .

**Théorème 2.4.4.** (ou Théorème 1.0.3) *Un groupe  $G$  finiment engendré vérifie  $\text{card}(e(G)) = 2$  si et seulement si  $G$  contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupe contenant un sous-groupe  $H$  d'indice fini qui est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . On sait que  $H$  a deux bouts. Comme  $H$  est d'indice fini,  $G$  et  $H$  sont quasi-isométriques (Corollaire 2.2.5) et ont donc le même nombre de bouts. Ainsi  $\text{card}(e(G)) = 2$  dans ce cas.

Réciproquement, supposons que  $\text{card}(e(G)) = 2$ . Fixons un ensemble générateur  $S$  fini et considérons le graphe de Cayley  $\Gamma_S$  respectif. Soit  $R \in \mathbb{N}$  tel que  $B(e_G, R)$  sépare les deux bouts. Soit  $X$  l'union de  $B(e_G, R)$  et des composantes connexes finies de  $\Gamma_S \setminus B(e_G, R)$ . Alors  $X$  est fini, connexe et  $\Gamma_S \setminus X$  a exactement deux composantes connexes  $E$  et  $F$  qui sont infinies.

Le groupe  $G$  agit sur l'espace des bouts (Remarque 2.4.2). Le noyau  $H$  de cette action est d'indice au plus 2 et donc infini. Soit  $R_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $X \subseteq B(e_G, R_1)$ . Choisissons  $g \in H$  tel que  $d(e_G, g) > 2R_1$ , alors on a  $g \cdot X \cap X = \emptyset$ . Supposons sans perte de généralité que  $g \in E$ . Comme  $g \cdot X$  est un ensemble connexe de  $\Gamma_S \setminus X$  et  $g = g \cdot e_G \in g \cdot X$ , on a que  $g \cdot X \subseteq E$ . L'ensemble  $F \cup X$  est connexe dans  $\Gamma_S \setminus g \cdot X$  et donc soit  $F \cup X \subseteq g \cdot E$ , soit  $F \cup X \subseteq g \cdot F$ . Le premier cas est impossible parce que  $g$  fixe les bouts. Ainsi  $F \subsetneq g \cdot F$  et  $g \cdot E \subsetneq E$ . Cela démontre en particulier que  $g$  est d'ordre infini.

Montrons que le groupe  $K = \langle g \rangle$  qui est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  est d'indice fini dans  $G$ . Comme  $F$  et  $g \cdot E$  sont deux ensembles connexes infinies disjointes et  $\text{card}(e(G)) = 2$ , l'ensemble  $E \setminus g \cdot E$  est fini. Posons donc  $Y = E \setminus g \cdot E$  et montrons que  $G = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n \cdot Y$  ce qui va conclure. Comme  $g \cdot E \subsetneq E$  la suite  $(g^n \cdot E)$  est décroissante pour l'inclusion. Supposons qu'il existe  $b \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} g^n \cdot E$ , alors on a  $g^{-n}b \in E$  pour tout  $b \in \mathbb{N}$ . Comme  $g^{-1} \cdot (F \cup X) \subseteq F$  on a  $g^{-n} \in F$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $g$  est d'ordre infini,  $(g^{-n})$  sort de tout compact pour  $n$  assez grand. En particulier  $g^{-n}b \in F$  pour  $n$  assez grand, ce qui est absurde. Ainsi  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} g^n \cdot E = \emptyset$  ce qui montre que  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^n \cdot Y$ . On démontre de même que  $F \cup X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} g^{-n} \cdot Y$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarque 2.4.5.* Les groupes contenant un sous-groupe d'indice fini isomorphe à  $\mathbb{Z}$  sont dits **virtuellement cycliques**.

Le groupe  $\mathbb{Z}$  est virtuellement cyclique. Un autre exemple auquel on peut penser est le groupe diédral infini  $D_\infty = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1 \rangle = \langle a, b \mid a^2 = 1, aba = b^{-1} \rangle = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  où l'élément non trivial de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  agit sur  $\mathbb{Z}$  par  $x \mapsto -x$ . Ce groupe s'identifie aux isométries de  $\mathbb{Z}$  (avec la métrique induite par  $\mathbb{R}$ ). Ce sont en fait les seuls exemples principaux, au sens où dans [9], Hempel démontre le résultat suivant (lemme 11.4) :

**Proposition 2.4.6.** *Tout groupe virtuellement cyclique  $G$  contient un sous-groupe  $H \triangleleft G$  fini et distingué tel que  $G/H$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  ou  $D_\infty$ .*

### 3 Preuve de Gromov du théorème de Stallings

Le but de cette section est de présenter l'essentiel de la preuve du théorème de Stallings :

**Théorème 3.0.1.** (ou Théorème 1.0.4) *Tout groupe finiment engendré qui a une infinité de bouts admet une action sur un arbre sans point fixe global, avec des stabilisateurs d'arêtes finis et sans inversion d'arêtes.*

La preuve utilise les notions d'énergie et de fonction harmonique sur une variété riemannienne. Nous introduisons brièvement ces notions dans la section 3.1.

Donnons tout d'abord le plan de la preuve du théorème. On se donne un groupe  $G$  finiment engendré qui a une infinité de bouts. On montre dans la section 3.2. qu'on peut fait agir  $G$  sur une variété  $M$  qui est donc quasi-isométrique à  $G$  et a une infinité de bouts.

Dans la section 3.3, on introduit la notion de moyennabilité qui peut être vue comme une inégalité isopérimétrique pour les groupes. Nous montrons en particulier qu'il existe une telle inégalité sur  $G$  grâce au fait qu'il ait une infinité de bouts. Comme  $G$  et  $M$  sont quasi-isométriques, on a aussi une inégalité isopérimétrique sur  $M$ . Cela nous permet de contrôler l'énergie des fonctions harmoniques sur  $M$ .

Expliquons maintenant brièvement la construction de l'arbre sur lequel  $G$  agit, ce qui est l'objet de la section 3.5. Dans la section 3.4, nous montrons que toute fonction continue  $\chi: e(M) \rightarrow \{0, 1\}$  admet un prolongement continu sur  $\bar{M}$  qui est harmonique sur  $M$ . Notons  $H(M)$  l'ensemble de tous les prolongements harmoniques non-constants ainsi obtenus. Pour  $h \in H(M)$  on définit son énergie

$$E(h) := E(h|_M).$$

On définit  $E(M) = \inf\{E(h) \mid h \in H(M)\}$ . On démontre que  $E(M) > 0$  et que  $E(M)$  est atteint en utilisant un argument de compacité. C'est le moment le plus technique de la démonstration. On fixe ensuite  $h \in H(M)$  tel que  $E(h) = E(M)$  et on considère  $S := \{x \in M \mid h(x) = \frac{1}{2}\}$ . On vérifie que pour tout  $g \in G$ , on a soit  $g \cdot S = S$ , soit  $g \cdot S \cap S = \emptyset$ .

On considère les ensembles  $g \cdot S$  pour  $g \in G$ , qui jouent le rôle des arêtes. Les composantes de  $M \setminus G \cdot S$ , qui jouent le rôle des sommets de l'arbre, sont telles que chaque  $g \cdot S$  est à la frontière d'exactly deux d'entre elles. L'arête  $g \cdot S$  relie donc ces deux composantes.

#### 3.1 Énergie et fonctions harmoniques

Dans cette partie, nous rappelons quelques notions de géométrie riemannienne. On peut consulter [6] pour plus de détails.

**Définition 3.1.1.** Soit  $M$  une variété connexe lisse de dimension  $n$ . On dit que  $M$  est une **variété riemannienne** si en chaque point  $m \in M$ , l'espace tangent  $T_m M$  est muni d'un produit scalaire  $g_m$ , qui dépend de manière lisse de  $m$ .

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne. Pour tout  $m \in M$ , on dispose d'une norme  $|\cdot|_m$  induite par  $g_m$  sur  $T_m M$ . On peut donc définir la longueur de tout chemin  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  qui est  $\mathcal{C}^1$  par morceaux :

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_{\gamma(t)} dt.$$

On définit une métrique  $d$  sur  $M$  comme suit : pour deux points  $m, m' \in M$  on définit  $d_g(m, m')$  comme l'infimum des longueurs des chemins  $\mathcal{C}^1$  par morceaux reliant  $m$  à  $m'$ . C'est une métrique qui est compatible avec la topologie de  $M$ .

Toute variété lisse peut être munie d'une métrique riemannienne pour laquelle l'espace métrique sous-jacent est complet. Pour une telle métrique, le théorème de Hopf-Rinow implique que la variété est géodésique et propre.

Si  $M$  est une variété orientée, on dispose de plus d'une forme volume qui provient de la métrique riemannienne, appelée **volume riemannien**. Dans ce cas, on définit le volume de  $M$  comme l'intégrale de la fonction constante égale à 1 sur  $M$  par rapport au volume riemannien.

On fixe dans la suite  $(M, g)$  une variété riemannienne munie de la distance précédemment définie.

Nous aurons besoin de la formule suivante, démontrée dans [3] :

**Théorème 3.1.2** (Formule de la co-aire). Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction lisse. Pour presque tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , l'ensemble  $\mathcal{H}_t := f^{-1}(t)$  est une hypersurface lisse de  $M$ . Si  $dA_t$  est la densité d'aire riemannienne induite sur  $\mathcal{H}_t$ , alors pour toute fonction  $g$  positive, on a :

$$\int_M g |\nabla f| dV = \int_0^\infty \left( \int_{\mathcal{H}_t} g dA_t \right) dt.$$

Nous allons désormais étudier des fonctions particulières, dites harmoniques, liées à la minimisation locale de la fonctionnelle suivante :

**Définition 3.1.3.** Pour  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse, on définit son **énergie** par l'intégrale

$$E(f) = \int_M |df|^2 dV = \int_M |\nabla f|^2 dV.$$

*Remarque 3.1.4.* Le gradient est obtenu en dualisant la 1-forme différentielle  $df$  sur les espaces tangents qui sont euclidiens.

*Remarque 3.1.5.* L'énergie est en fait définie sur l'espace de Sobolev  $W_{loc}^{1,2}(M)$  des fonctions presque sûrement différentiables sur  $M$  et de dérivées partielles qui sont localement à carré intégrable.

**Définition 3.1.6.** Une fonction  $f \in W_{loc}^{1,2}(M)$  est dite **harmonique** si elle minimise localement l'énergie, c'est-à-dire si pour tout  $p \in M$ , il existe  $r > 0$  tel que  $\bar{B}(p, r) \subset M$  et tel qu'en notant  $B = B(p, r)$ ,

$$\forall u \in W_{loc}^{1,2}(\bar{B}), u|_{\partial B} = f|_{\partial B} \implies E(f|_B) \leq E(u|_B).$$

**Définition 3.1.7.** Si  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  est lisse, on appelle **laplacien** de  $u$  la fonction  $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$ .

**Proposition 3.1.8.** Si  $f$  est harmonique sur  $M$ , alors elle est lisse et vérifie  $\Delta f = 0$ . La réciproque est vraie.

*Remarque 3.1.9.* Sur  $\mathbb{R}^n$ , la condition d'harmonicité s'écrit simplement

$$\Delta f = 0 \iff \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0.$$

De même que dans le cas des fonctions harmoniques sur  $\mathbb{R}^n$ , on dispose d'un principe du maximum dans le cadre des variétés.

**Théorème 3.1.10** (Principe du maximum). Si  $\Omega \subset M$  est une partie connexe et relativement compacte à bord lisse, et si  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction harmonique, alors  $h|_{\bar{\Omega}}$  atteint son maximum sur  $\partial\Omega$ , et si  $h|_{\Omega}$  atteint un maximum sur  $\Omega$ , alors  $h$  est constante.

Les fonctions harmoniques sont liées à des propriétés de moyenne locale. Cela motive l'inégalité suivante :

**Lemme 3.1.11.** Supposons que la courbure de Ricci de  $M$  soit minorée (cette condition est par exemple vérifiée si  $M$  est compact). Alors pour tout  $R > 0$ , il existe une constante  $C$  telle que pour toute fonction harmonique  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  et  $p \in M$  tel que  $B(p, R)$  soit inclus dans une carte, on ait

$$h^2(p) \leq C \int_{B(p, R)} h^2 dV.$$

Nous nous intéresserons dans la suite aux rapports entre la taille d'une partie et de sa frontière. On suppose que  $M$  est de volume infini.

**Définition 3.1.12.** On définit la **constante de Cheeger** de  $M$ , notée  $h(M)$ , comme étant l'infimum des quantités

$$\frac{\operatorname{aire}(\partial\Omega)}{\operatorname{vol}(\Omega)},$$

où  $\Omega$  parcourt l'ensemble des sous-variétés ouvertes de  $M$  à adhérence compacte et à bord lisse.

**Proposition 3.1.13.** Soit  $V = L^2(M) \cap C^\infty(M)$ , et soit  $\lambda_1(M)$  la plus petite valeur propre de  $\Delta$  sur  $V$ . Alors

$$\lambda_1(M) = \inf \left\{ \frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M f^2} \mid f \in C_c^\infty(M) \setminus \{0\} \right\}.$$

Montrons un résultat qui sera utile :

**Lemme 3.1.14.** Pour toute variété riemannienne de volume infini  $M$  on a l'inégalité

$$\lambda_1(M) \geq \frac{1}{4}h(M)^2.$$

En particulier, si  $h(M) > 0$  alors  $\lambda_1(M) > 0$ .

*Remarque 3.1.15.* On a en fait même que (comme démontré dans [2])

$$\lambda_1(M) = 0 \iff h(M) = 0.$$

*Démonstration.* Commençons par montrer que pour toute fonction lisse  $f: M \rightarrow [0, \infty)$  à support compact, on a

$$\int_M |\nabla f| dV \geq h(M) \int_M f dV.$$

Soit  $A_t := f^{-1}([t, \infty))$  et  $X_t := \partial A_t = f^{-1}(t)$ . La formule de la co-aire (Théorème 3.1.2) nous donne que pour tout  $a < b$ ,

$$\int_{f^{-1}([a,b])} |\nabla f| dV = \int_a^b \text{aire}(X_t) dt.$$

Comme  $f$  est à support compact, on peut écrire

$$\int_M |\nabla f| dV = \int_0^\infty \text{aire}(X_t) dt \geq h(M) \int_0^\infty \text{vol}(A_t) dt = h(M) \int_M f dV.$$

Revenons à la preuve de l'inégalité principale. Soit donc  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  lisse à support compact et non nulle. Posons  $F := f^2$ , qui vérifie donc que  $\nabla F = 2f\nabla f$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$\begin{aligned} h(M)^2 \left( \int_M f^2 dV \right)^2 &= \left( h(M) \int_M F dV \right)^2 \leq \left( \int_M |\nabla F| dV \right)^2 = \\ &= \left( 2 \int_M |f| |\nabla f| dV \right)^2 \leq 4 \left( \int_M f^2 dV \right) \left( \int_M |\nabla f|^2 dV \right) \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{h(M)^2}{4} \leq \frac{\int_M |\nabla f|^2 dV}{\int_M f^2 dV}.$$

□

## 3.2 Action sur les variétés riemanniennes

Le but de cette partie est de démontrer la proposition suivante qui nous permettra de travailler avec des variétés qui ont une géométrie proche de celle de notre groupe  $G$ .

**Proposition 3.2.1.** Soit  $G$  un groupe finiment engendré. Alors il existe une variété riemannienne  $M$  sur laquelle  $G$  agit par isométries de manière libre, propre, totalement discontinue et cocompacte.

Le lemme de Švarc-Milnor (Corollaire 2.2.4) et le corollaire 2.3.11 impliquent alors que si  $G$  a une infinité de bouts, il agit sur une variété riemannienne qui a une infinité de bouts.

*Démonstration.* Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel qu'il existe  $k$  éléments de  $G$  qui engendrent le groupe. Il existe alors un morphisme surjectif  $\phi_1: F_k \rightarrow G$ , où  $F_k$  est le groupe libre à  $k$  générateurs. Notons  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  un ensemble générateur de  $F_k$ . Soit  $\Sigma_k$  la surface compacte de genre  $k$ . On sait que le groupe fondamental de  $\Sigma_k$  (voir par exemple [8], page 51) est

$$\pi_1(\Sigma_k) = \langle a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, k \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_k, b_k] = 1 \rangle.$$

Ainsi il existe un morphisme  $\phi_2: \pi_1(\Sigma_k) \rightarrow F_k$  tel que  $\phi_2(a_i) = \phi_2(b_i) = x_i$ . En particulier  $\phi_2$  est surjectif. On obtient alors un morphisme de groupes surjectif  $\phi := \phi_1 \circ \phi_2: \pi_1(\Sigma_k) \rightarrow G$ . Posons  $H := \text{Ker } \phi$  qui est un sous-groupe distingué de  $\pi_1(\Sigma_k)$ . On dispose donc d'un revêtement galoisien  $p: M \rightarrow \Sigma_k$  tel que  $p_*(\pi_1(M)) = H$ . Ainsi le groupe  $\text{Aut } p$  est isomorphe à  $\pi_1(\Sigma_k)/H \cong G$ . Ainsi  $G$  agit de manière libre et totalement discontinue sur  $M$  qui est une variété riemannienne. De plus, l'action est cocompacte car  $M/\text{Aut } p$  est homéomorphe à  $\Sigma_k$  qui est compact. C'est une action par isométries car elle préserve la longueur des chemins.

Montrons enfin que l'action est propre. Soit  $K$  un compact de  $M$ . Supposons par l'absurde qu'il existe une suite infinie de  $G$  d'éléments distincts  $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , et des éléments correspondants  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  dans  $K$  tels que  $g_i \cdot x_i \in K$ . Quitte à extraire,  $M$  étant un espace métrique, on suppose que  $(x_i)$  converge vers  $x \in K$ , et que  $(g_i \cdot x_i)$  converge vers  $y \in K$ . Mais puisque  $G$  agit par isométries,  $(g_i \cdot x)$  converge vers  $y$ . En outre, puisque la suite  $(g_i \cdot x)$  est à valeurs dans  $p^{-1}(p(x))$ , qui est discret, on en déduit que  $(g_i)$  est constante à partir d'un certain rang, ce qui est absurde car l'action est libre. Ainsi l'action de  $G$  sur  $M$  est propre.  $\square$

*Remarque 3.2.2.* Le groupe  $G$  étant infini, la variété  $M$  construite ci-dessus est de volume infini et n'est donc pas compacte.

### 3.3 Moyennabilité

Dans cette partie, on introduit une notion géométrique qui nous permettra de faire le lien entre les propriétés géométriques d'objets discrets comme les groupes et les propriétés géométriques des variétés.

On s'intéresse dans un premier temps aux graphes connexes infinis dont le degré maximal est borné.

**Définition 3.3.1.** Soit  $\mathcal{G} = (V, E)$  un graphe et  $S \subseteq V$  un ensemble de sommets. On appelle **frontière** de  $S$ , notée  $\partial S$ , le sous-ensemble de sommets de  $S$  adjacents à un sommet de  $V \setminus S$ .

On peut maintenant définir la notion de moyennabilité sur les graphes.

**Définition 3.3.2.** Soit  $\mathcal{G}$  un graphe. On dit que  $\mathcal{G}$  est **moyennable** si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un ensemble fini non-vide de sommets  $S$  tel que

$$\frac{\text{card}(\partial S)}{\text{card}(S)} < \epsilon.$$

Dans la suite, pour  $S \subseteq V$  et  $C > 0$ , on désignera par  $\mathcal{N}_C(S)$  le  $C$ -voisinage de  $S$  :

$$\mathcal{N}_C(S) := \{v \in V \mid d(v, S) \leq C\}.$$

On donne maintenant des critères de non-moyennabilité des graphes.

**Théorème 3.3.3.** Soit  $\mathcal{G} = (V, E)$  un graphe que l'on munit de la métrique usuelle. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a)  $\mathcal{G}$  est non moyennable.
- (b) Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $S \subseteq V$  fini, l'ensemble  $\mathcal{N}_C(S)$  vérifie  $\text{card}(\mathcal{N}_C(S)) \geq 2 \text{card}(S)$ .
- (c) Il existe  $C > 0$  et  $f: V \rightarrow V$  tels que pour tout  $v \in V$  on ait  $d(v, f(v)) \leq C$  et  $\text{card}(f^{-1}(v)) \geq 2$ .

On aura besoin d'un résultat classique de la théorie des graphes.

**Définition 3.3.4.** On dit qu'un graphe  $\mathcal{G} = (Y \sqcup Z, E)$  est **biparti** si toutes les arêtes du graphe ont un sommet dans  $Y$  et un dans  $Z$ .

**Définition 3.3.5.** Soit  $\mathcal{G} = (Y \sqcup Z, E)$  un graphe biparti et  $k, \ell \geq 1$  des entiers. Un sous-ensemble  $M \subseteq E$  d'arêtes est appelé un  $(k, \ell)$ -**couplage** si chaque sommet de  $Y$  est le bout d'exactly  $k$  arêtes de  $M$  et si chaque sommet de  $Z$  est le bout d'exactly  $\ell$  arêtes de  $M$ .

Le théorème classique en question, démontré par exemple dans [1] (pages 53-58), est le suivant :

**Théorème 3.3.6 (Hall).** Soit  $\mathcal{G} = (Y \sqcup Z, E)$  un graphe biparti dont les sommets sont de degré borné et  $k \geq 1$  un entier tel que

- Pour tout  $A \subseteq Y$  fini, le nombre des sommets adjacents à  $A$  dans  $Z$  est au moins  $k \text{card}(A)$ .
- Pour tout  $B \subseteq Z$  fini, le nombre des sommets adjacents à  $B$  dans  $Y$  est au moins  $\text{card}(B)$ .

Alors  $\mathcal{G}$  possède un  $(k, 1)$ -couplage.

On peut maintenant donner la preuve du Théorème 3.3.3.

*Démonstration.* Supposons que  $\mathcal{G}$  est non moyennable. Soit  $d \in \mathbb{N}$  le degré maximal du graphe. Il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $S \subseteq V$  fini,

$$\frac{\text{card}(\partial S)}{\text{card}(S)} \geq \epsilon.$$

En particulier si  $c := 1 + \frac{\epsilon}{d} > 1$ , on a pour tout  $S$  fini :

$$\frac{\text{card}(\mathcal{N}_1(S))}{\text{card}(S)} \geq c.$$

Si  $m \in \mathbb{N}$  est tel que  $c^m \geq 2$  on obtient alors :

$$\frac{\text{card}(\mathcal{N}_m(S))}{\text{card}(S)} \geq 2.$$

Cela démontre (a)  $\implies$  (b). Montrons (b)  $\implies$  (c). Soit  $C > 0$  une constante qui vérifie la propriété de (b). On peut supposer  $C \in \mathbb{N}$ . Construisons le graphe biparti  $\mathcal{G}_C = (V \sqcup V, E_1)$  qui a pour sommets deux copies disjointes de  $V$  et dans lequel  $v_1$  et  $v_2$  sont reliés par une arête si et seulement si  $d(v_1, v_2) \leq C$ . Le choix de la constante  $C$  nous assure que les conditions du théorème de Hall sont vérifiées pour  $\mathcal{G}_C$  et  $k = 2$ . On dispose donc d'un  $(2, 1)$ -couplage. Ce couplage définit une fonction  $f: V \rightarrow V$  telle que  $d(v, f(v)) \leq C$  et  $\text{card}(f^{-1}(v)) = 2$  pour tout  $v \in V$ . Cette fonction satisfait la condition de (c).

Montrons (c)  $\implies$  (b). Soient  $C$  et  $f$  comme en (c). Pour tout ensemble fini  $S \subseteq V$  on a  $f^{-1}(S) \subseteq \mathcal{N}_C(S)$  et  $\text{card}(f^{-1}(S)) \geq 2 \text{card}(S)$ . Ainsi  $C$  convient dans (b).

Il ne reste plus qu'à montrer (b)  $\implies$  (a). On se donne un  $C > 0$  comme en (b) qu'on suppose entier et  $S \subseteq V$  fini. Soit  $d \geq 2$  le degré maximal de  $\mathcal{G}$ . Les sommets à distance  $k$  de  $S$  sont au plus  $\text{card}(\partial S) \cdot d^k$  et donc

$$2 \text{card}(S) \leq \text{card}(\mathcal{N}_C(S)) \leq \text{card}(S) + (d + d^2 + \dots + d^C) \text{card}(\partial S) \leq \text{card}(S) + d^{C+1} \text{card}(\partial S),$$

d'où on déduit que

$$\text{card}(\partial S) \geq \frac{1}{d^{C+1}} \text{card}(S).$$

Par conséquent,  $\mathcal{G}$  est non moyennable. □

Le lemme suivant montre que la moyennabilité est un invariant quasi-isométrique.

**Lemme 3.3.7.** Soient  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$  deux graphes quasi-isométriques. Alors  $\mathcal{G}_1$  est moyennable si et seulement si  $\mathcal{G}_2$  est moyennable.

*Démonstration.* Supposons que  $\mathcal{G}_2$  est non moyennable et montrons que  $\mathcal{G}_1$  est non moyennable. On note  $V_1$  et  $V_2$  les ensembles des sommets de  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$  que l'on munit des métriques  $d_1$  et  $d_2$  induites par les métriques des graphes. Comme les deux graphes sont quasi-isométriques, on

dispose de quasi-isométries  $f: V_1 \rightarrow V_2$ ,  $g: V_2 \rightarrow V_1$  et de  $C > 0$  entier tels que pour tout  $u_1, v_1 \in V_1, u_2, v_2 \in V_2$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{C}d_1(u_1, v_1) - C &\leq d_2(f(u_1), f(v_1)) \leq Cd_1(u_1, v_1) + C \\ \frac{1}{C}d_2(u_2, v_2) - C &\leq d_1(g(u_2), g(v_2)) \leq Cd_2(u_2, v_2) + C \\ d(g \circ f(u_1), u_1) &\leq C. \end{aligned}$$

Soit  $d \geq 2$  le degré maximal dans  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$ . Considérons  $u, v \in V_1$  tels que  $f(u) = f(v)$ . On a  $d_1(u, v) \leq C^2$ . Les sommets à distance  $k$  de  $u$  sont au plus au nombre de  $d^k$ , ce qui montre que

$$\text{card}(f^{-1}(\{f(u)\})) \leq 1 + d + d^2 + \dots + d^{C^2} < d^{C^2+1}.$$

En particulier, pour tout  $X \subseteq V_1$  on a  $\text{card}(f(X)) \geq \frac{1}{d^{C^2+1}} \text{card}(X)$ . De même, pour tout  $Y \subseteq V_2$  on a  $\text{card}(g(Y)) \geq \frac{1}{d^{C^2+1}} \text{card}(Y)$ .

Soit  $B > 0$  tel que pour tout  $Y \subseteq V_2$ , on ait  $\text{card}(\mathcal{N}_B(Y)) \geq 2 \text{card}(Y)$ , un tel  $B$  existant grâce au théorème 3.3.3. Prenons  $S \subseteq V_1$ . Pour  $\ell \in \mathbb{N}$ , considérons

$$S_\ell := g(\mathcal{N}_{\ell B}(f(S))).$$

La définition de  $C$  entraîne que pour tout  $\ell$ , on a  $S_\ell \subseteq \mathcal{N}_{\ell BC+2C}(S)$ . De plus

$$\text{card}(S_\ell) \geq \frac{2^\ell}{d^{2C^2+2}} \text{card}(S).$$

Cela démontre que pour  $\ell$  assez grand  $\text{card}(\mathcal{N}_{\ell BC+2C}(S)) \geq 2 \text{card}(S)$ . L'entier  $\ell BC + 2C$  vérifie donc la condition (b) du Théorème 3.3.3. Ainsi  $\mathcal{G}_1$  est non moyennable comme voulu.  $\square$

Ce lemme permet de définir la moyennabilité des groupes finiment engendrés.

**Définition 3.3.8.** Soit  $G$  un groupe finiment engendré et  $S$  un ensemble fini de générateurs. On dit que  $G$  est **moyennable** si le graphe de Cayley  $\Gamma_S$  est moyennable.

*Remarque 3.3.9.* Les lemmes 2.1.5 et 3.3.7 montrent que cette définition ne dépend pas du choix de  $S$ .

La fin de cette section s'intéresse au lien entre moyennabilité et nombre de bouts.

**Définition 3.3.10.** Soit  $X$  un espace métrique. Pour  $x \in X$  et  $r > 0$ , on dit que la boule  $B(x, r)$  est **séparante** si  $X \setminus B(x, r)$  a au moins 3 composantes connexes non bornées.

**Théorème 3.3.11.** Soit  $\mathcal{G} = (V, E)$  un graphe muni de sa métrique naturelle. On suppose qu'il existe  $r > 0$  tel que tout sommet soit le centre d'une  $r$ -boule séparante. Alors  $\mathcal{G}$  est non moyennable.

*Remarque 3.3.12.* Si  $G$  est un groupe ayant une infinité de bouts et si  $\Gamma$  en est un graphe de Cayley, alors il existe  $r > 0$  tel que  $B(e_G, r)$  soit séparante dans  $\Gamma$ . Par invariance de  $\Gamma$  par translation, on en déduit que  $\Gamma$  vérifie les hypothèses du théorème, et est à fortiori non moyennable. Par définition,  $G$  n'est donc pas moyennable.

*Démonstration.* On démontre le résultat en utilisant la caractérisation (c) du Théorème 3.3.3. Soit  $m > 4r + 2$  un entier. Soit  $S \subset V$  un ensemble maximal de sommets à distances deux à deux au moins  $m$ , donné par le lemme de Zorn. Par maximalité, on a en particulier que toute boule de rayon  $m$  dans  $\mathcal{G}$  contient un sommet de  $S$ . Construisons une application  $f: S \rightarrow S$  telle que pour tout  $v \in S$ , on ait  $\text{card}(f^{-1}(\{v\})) \geq 2$  et  $d(v, f(v)) \leq 2m + 1$ . On munit l'ensemble  $S$  d'une structure de graphe en reliant deux sommets si et seulement s'ils sont à distance au plus  $2m + 1$  dans  $\mathcal{G}$ , et ce nouveau graphe, noté  $\mathcal{G}_S$ , est encore connexe et de degré borné. Le théorème 3.3.3 appliqué à  $\mathcal{G}_S$  avec la fonction  $f$  que nous construirons et la constante 1 nous dit alors que  $\mathcal{G}_S$  est non moyennable. En outre, l'injection de  $\mathcal{G}_S$  dans  $\mathcal{G}$  est quasi-isométrique et quasi-dense, et est donc une quasi-isométrie. Le lemme 3.3.7 permet alors de conclure que  $\mathcal{G}$  est non moyennable, comme voulu.

On fixe dans la suite un sommet  $v_0 \in S$ . Pour  $v \in S$ , si  $d(v_0, v) \leq m$ , on pose  $f(v) = v_0$ . Sinon, soit  $g$  une géodésique reliant  $v$  à  $v_0$ , et  $x \in g$  tel que  $d(v, x) = m + 1$ . On choisit alors  $f(v)$  parmi les sommets les plus proches de  $x$  dans  $S$ . On sait par maximalité de  $S$  que  $d(f(v), x) \leq m$ , donc  $d(v, f(v)) \leq 2m + 1$ .

Montrons une inégalité utile pour la suite : soit  $u \in S$ ,  $B = B(u, r) \subset X$  et  $C, C'$  des composantes connexes différentes de  $X \setminus B$ . Alors pour tous  $v \in S \cap C$  et  $v' \in S \cap C'$ , on a  $d(v, v') > m + 1$ . En effet, si  $g$  est une géodésique reliant  $v$  à  $v'$ , elle se décompose en  $vx \sqcup xv'$ , où  $x \in g \cap B$ , donc

$$d(v, v') = d(v, x) + d(x, v') \geq d(v, u) - r + d(u, v') - r \geq 2m - 2r > m + 1$$

car  $u, v, v' \in S$ .

Soit maintenant  $u \in S$ . Montrons que  $\text{card}(f^{-1}(\{u\})) \geq 2$ . Pour ce faire, on prend  $C$  une composante connexe non bornée de  $\mathcal{G} \setminus B(u, r)$  ne contenant pas  $v_0$ , on considère  $v \in C \cap S$  à distance minimale de  $v_0$ , et on montre que  $f(v) = u$ . On pourra alors conclure car  $B = B(u, r)$  est séparante. Soit  $g$  une géodésique reliant  $v$  à  $v_0$ . Elle a une intersection avec  $B$ .

**Premier cas :** Si  $d(v, v_0) \leq m$ , l'inégalité précédente nous assure que  $v$  et  $v_0$  ne peuvent être dans des composantes différentes de  $\mathcal{G} \setminus B$ , donc  $v_0 \in B$  et  $v_0 = u$ . Donc  $f(v) = v_0 = u$ , comme voulu.

**Deuxième cas :** On suppose que  $d(v, v_0) \geq m + 1$ , et on prend  $x \in g$  tel que  $d(v, x) = m + 1$ .

**Sous-cas 2a :** Supposons que  $x \notin C \cup B$ . Soit  $y \in g \cap B$ . On a alors :

$$m + 1 = d(v, y) + d(y, x) \geq d(y, x) + d(v, u) - d(y, u) \geq d(x, y) + m - r.$$

Donc  $d(x, y) \leq r + 1$ , et  $d(x, u) \leq d(x, y) + r \leq 2r + 1$ . Ainsi, si  $w \in S$  est tel que  $d(x, w) \leq 2r + 1$ , alors  $d(u, w) \leq 4r + 2 < m$ , donc  $u = w$ . Cela montre que  $f(v) = u$ .

**Sous-cas 2b :** On suppose  $x \in B$ . Alors  $d(x, u) \leq r$ , donc si  $w \in S \setminus \{u\}$ , on a  $d(x, w) \geq m - r > r$ . Donc  $f(v) = u$ .

**Sous-cas 2c :** On suppose  $x \in C$ . Si  $v' \in S \cap C'$ , où  $C'$  est une autre composante connexe de  $\mathcal{G} \setminus B$  que  $C$ , alors pour  $y \in g' \cap B$  sur une géodésique  $g'$  entre  $v'$  et  $x$ , on a

$$d(v', x) = d(v', y) + d(y, x) \geq m - r + d(u, x) - r > d(u, x).$$

Donc  $f(v) \in \{u\} \cup C$ . Supposons par l'absurde que  $f(v) = w \in C$ . Alors  $d(x, w) \leq m$ , donc  $d(v_0, w) \leq d(v_0, x) + m < d(v_0, v)$ . Cela contredit la définition de  $v$ , et montre une fois encore que  $f(v) = u$ .  $\square$

Enfin on utilisera le résultat (voir [5], Théorème 18.14) technique suivant :

**Proposition 3.3.13.** *Soit  $M$  une variété riemannienne connexe qui est quasi-isométrique à un groupe  $G$  finiment engendré. Alors la constante de Cheeger de  $M$  est strictement positive si et seulement si le groupe  $G$  est non moyennable.*

**Corollaire 3.3.14.** *Soit  $G$  un groupe finiment engendré avec une infinité de bouts qui agit sur une variété riemannienne connexe  $M$  de façon isométrique, propre, totalement discontinue et cocompacte. Alors  $G$  est non moyennable et  $\lambda_1(M) > 0$ .*

*Démonstration.* On a vu que  $G$  est non moyennable puisqu'il a une infinité de bouts, et il est quasi-isométrique à  $M$ , donc la constante de Cheeger de  $M$  est strictement positive, et on en déduit que  $\lambda_1(M) > 0$  par le lemme 3.1.14.  $\square$

### 3.4 Prolongement harmonique

Fixons une variété riemannienne  $M$  sur lequel  $G$  agit comme dans la proposition 3.2.1. La variété  $M$  est donc de volume infini (Remarque 3.2.2) et satisfait  $\lambda_1(M) > 0$  (Corollaire 3.3.14). De plus, la variété est géodésique et donc les parties bornées sont exactement les parties relativement compactes. En particulier, comme  $M$  est non compacte,  $M$  est non bornée pour la métrique riemannienne. On veut démontrer que les fonctions  $\chi: e(M) \rightarrow \{0, 1\}$  continues admettent des prolongements continus sur  $\overline{M}$  qui sont harmoniques sur  $M$ .

Montrons d'abord un lemme préliminaire.

**Lemme 3.4.1.** *Soit  $M$  une variété riemannienne de dimension  $n$  complète et connexe, et soit  $\chi: e(M) \rightarrow \{0, 1\}$  une fonction continue. Alors  $\chi$  possède un prolongement continu  $\varphi: \overline{M} \rightarrow [0, 1]$  qui est lisse sur  $M$  et tel que  $d\varphi|_M$  est à support compact dans  $M$ .*

*Démonstration.* Comme  $\chi$  est continu, les ensembles  $A := \chi^{-1}(0)$  et  $B := \chi^{-1}(1)$  sont fermés dans  $e(M)$  et donc dans  $\overline{M}$ . Comme l'espace  $\overline{M}$  est normal (Corollaire 2.3.8), il existe d'après le lemme d'Urysohn des ouverts  $U \supseteq A$  et  $W \supseteq B$  à adhérences disjointes dans  $\overline{M}$ . En réappliquant le lemme d'Urysohn, on dispose d'ouverts  $U, V$  à adhérences disjointes tels que  $\overline{U_1} \subseteq U$  et  $\overline{W_1} \subseteq W$ .

On prolonge  $\chi$  en une fonction  $\phi$  sur  $\overline{U} \sqcup \overline{V}$  en prenant  $\phi$  constante égale à 0 sur  $\overline{U}$  et à 1 sur  $\overline{V}$ . D'après le théorème d'extension de Tietze-Urysohn, la fonction continue  $\phi: \overline{U} \cup \overline{V} \rightarrow \{0, 1\}$  peut être prolongée en une fonction continue  $\zeta: \overline{M} \rightarrow [0, 1]$ .

Soit  $K := \overline{M} \setminus (U \sqcup W)$ . On construit un recouvrement ouvert  $(V_m)_{m \in M}$  de  $M$  comme suit : si  $m \in U$  (resp.  $W$ ), on prend  $m \in V_m \subseteq U \cap M$  (resp.  $W \cap M$ ), et si  $m \in K$ , on prend  $m \in V_m \subseteq \overline{M} \setminus (\overline{U_1} \sqcup \overline{W_1})$ , où tous les  $V_m$  sont pris assez petits pour être difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$ . Pour rendre  $\zeta$  lisse sur  $M$ , on considère une partition de l'unité lisse  $(\rho_m)_{m \in M}$  subordonnée à  $(V_m)_{m \in M}$ . On prend un noyau régularisant  $\rho$  dans  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  d'intégrale 1. Pour  $m \in M$ , et  $f_m: V_m \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difféomorphisme, posons

$$\zeta_m := f_m^*((\zeta \circ f_m^{-1}) * \rho)$$

sur  $V_m$ , où  $*$  est la convolution sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors l'application lisse (bien définie car la somme est localement finie)

$$\varphi := \sum_{m \in M} \rho_m \zeta_m$$

est un prolongement qui convient. En effet, si  $x \in U_1$ , et si  $x \in V_m$ , alors  $V_m \subseteq U$ , donc  $\zeta_m(x) = 0$ , et par suite  $\varphi(x) = 0$ . De même, si  $x \in W_1$ ,  $\varphi(x) = 1$ . Ainsi,  $\varphi$  et  $\zeta$  coïncident sur  $M$  en dehors du compact  $K_1 := \overline{M} \setminus (U_1 \sqcup W_1)$ .

En particulier, on peut prolonger  $\varphi$  sur  $e(M)$  (et  $\varphi$  coïncide avec  $\chi$  sur cet ensemble), et le support de  $d\varphi|_M$  est un fermé inclus dans  $K_1$ , et est donc compact.  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 3.4.2.** *Soit  $\chi: e(M) \rightarrow \{0, 1\}$  une fonction continue. Alors  $\chi$  admet un prolongement continu  $h$  harmonique sur  $M$  et d'énergie finie.*

*Démonstration.* On va noter  $C_c^\infty(M)$  l'espace des fonctions  $M \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont  $C^\infty$  et à support compact. Pour  $u, v \in C_c^\infty(M)$  définissons le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle := \int_M uv \, dV$$

où  $dV$  est le volume riemannien de  $M$ . Considérons la norme

$$\|u\|_{L^2} := \langle u, u \rangle^{1/2}$$

qui est induite par le produit scalaire. Comme pour toute fonction  $u \in C_c^\infty(M)$  la différentielle de  $u$  est à support compact, l'énergie  $E(u)$  est bien définie.

Définissons une autre norme sur  $C_c^\infty(M)$  :

$$\|u\| := \|u\|_{L^2} + \sqrt{E(u)}.$$

Pour vérifier que c'est une norme on va se contenter de vérifier l'inégalité triangulaire. En effet, pour  $f, g \in C_c^\infty(M)$  on a

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \|f + g\|_{L^2} + \sqrt{E(f + g)} = \|f + g\|_{L^2} + \sqrt{\int |\nabla(f + g)|^2 \, dV} \leq \\ &\leq \|f + g\|_{L^2} + \sqrt{\int (|\nabla f|^2 + |\nabla g|^2) \, dV} \leq \|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} + E(f) + E(g) = \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

Définissons l'espace de Sobolev  $W_0^{1,2}$  qui est le complété de  $C_c^\infty(M)$  par rapport à  $\|u\|$ . L'espace  $W_0^{1,2}$  s'identifie naturellement à un sous-espace de l'espace de Hilbert  $L^2(M)$ . De plus, l'énergie se prolonge continûment sur  $W$  par construction.

Notons  $L_{loc}^2(M)$  l'espace des fonctions qui sont localement dans  $L^2$ , i.e. les fonctions intégrables sur les compacts de  $K$ . Soit  $\varphi$  une extension de  $\chi$  donnée par le lemme 3.4.1. Par continuité,  $\varphi \in L_{loc}^2(M)$  et on peut donc définir

$$\mathcal{G} := \varphi + W_0^{1,2} \subseteq L_{loc}^2(M).$$

Comme  $d\varphi$  est à support compact, l'énergie est une fonction continue (non-linéaire) sur  $\mathcal{G}$ . Posons  $E := \inf_{f \in \mathcal{G}} E(f)$ . Comme  $\mathcal{G}$  est affine, on a pour tout  $u, v \in \mathcal{G}$  que  $\frac{u+v}{2} \in \mathcal{G}$  et donc

$$E\left(\frac{u+v}{2}\right) \geq E.$$

Si  $u$  et  $v$  sont lisses, on vérifie par un calcul direct que

$$E(u-v) + E(u+v) = 2E(u) + 2E(v).$$

Par continuité de  $E$  sur  $\mathcal{G}$ , on obtient que cela est vrai pour tous  $u, v \in \mathcal{G}$ . Ainsi, pour tous  $u, v \in \mathcal{G}$ ,

$$E(u-v) = 2E(u) + 2E(v) - 4E\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq 2E(u) + 2E(v) - 4E.$$

Prenons une suite  $(u_n) \in \mathcal{G}^{\mathbb{N}}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = E.$$

On remarque que :

$$E(u_n - u_m) \leq 2E(u_n) + 2E(u_m) - 4E = 2(E(u_n) - E) + 2(E(u_m) - E).$$

On a  $\lambda = \lambda_1(M) > 0$  et donc par définition de  $\lambda_1(M)$ , on a

$$\lambda \int_M f^2 dV \leq E(f)$$

pour toute fonction  $f \in C_c^\infty(M)$  et donc par continuité pour toute fonction  $f \in W_0^{1,2}$ . Ainsi, les fonctions  $v_n := u_n - \varphi \in W_0^{1,2}$  forment une suite de Cauchy dans  $W_0^{1,2}$  qui est complet. On pose donc

$$v := \lim_n v_n, \quad u := \varphi + v \in \mathcal{G}.$$

On a  $E(u) = E$ . Comme  $u$  minimise l'énergie parmi toutes les fonctions de  $\mathcal{G}$ ,  $u$  est harmonique et donc lisse (Proposition 3.1.8). Il reste à démontrer que  $u$  prolonge  $\chi$ .

On sait que  $K := \text{Supp } d\varphi$  est compact et que la fonction  $v$  est harmonique en dehors de  $K$  puisque la fonction  $u$  l'est. On a

$$\int_M v^2 dV \leq \lambda^{-1} E(v) < \infty.$$

Soit  $r > 0$  tel que  $B(x, r)$  soit inclus dans une carte de  $M$  pour tout  $x \in M$ . Un tel  $r > 0$  existe parce que  $M$  revête une surface compacte. Fixons  $o \in M$ . La dernière inégalité démontre qu'il existe  $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui converge vers 0 quand  $d(x, o) \rightarrow \infty$  et telle que

$$\int_{B(x, r)} v^2 dV \leq \rho(x).$$

Comme  $v$  est harmonique en dehors de  $K$ , d'après le lemme 3.1.11 il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $x$  assez éloigné de  $o$

$$v^2(x) \leq C \int_{B(x, r)} v^2(x) dV \leq C\rho(x).$$

Cela démontre que  $v$  converge vers 0 à l'infini. Ainsi  $u$  prolonge  $\chi$  comme voulu.  $\square$

*Remarque 3.4.3.* Le principe du maximum pour les fonctions harmoniques implique les propriétés suivantes :

1. Le prolongement harmonique  $h$  est unique.
2. L'unique prolongement harmonique  $h$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ .
3. Si  $h(x) = 0$  ou  $h(x) = 1$  pour  $x \in M$  quelconque, alors  $h$  est constante.

*Remarque 3.4.4.* Le résultat du théorème est faux en général. Si on considère  $\mathbb{R}$  muni de sa métrique usuelle, l'espace des bouts a deux éléments qui peuvent être identifiés à  $\pm\infty$ . Toute fonction harmonique sur  $\mathbb{R}$  est linéaire. En particulier, la fonction  $\chi: e(\mathbb{R}) \rightarrow \{0, 1\}$  définie par  $\chi(-\infty) = 0$  et  $\chi(+\infty) = 1$  n'admet pas de prolongement continu qui est harmonique sur  $\mathbb{R}$ .

### 3.5 Construction de l'arbre

Dans cette partie, nous présentons la construction de l'arbre sur lequel  $G$  agit afin d'achever la démonstration du théorème de Stallings. Dans la partie précédente, nous avons fixé une variété  $M$  sur laquelle  $G$  agit. Nous avons démontré que toute fonction continue  $\chi: e(M) \rightarrow \{0, 1\}$  possède une unique extension  $h_\chi: \overline{M} \rightarrow [0, 1]$  qui est lisse sur  $M$ . Notons  $H(M)$  l'ensemble de toutes les extensions harmoniques non constantes ainsi obtenues. Pour  $f$  une fonction définie sur  $\overline{M}$ , on notera  $E(f)$  l'énergie de la restriction de  $f$  à  $M$ . Posons

$$E(M) := \inf_{h \in H(M)} E(h).$$

Le résultat principal de la section 21.5 de [5] est la proposition suivante :

**Proposition 3.5.1.** *On a  $E(M) > 0$ . De plus, il existe  $h \in H(M)$  telle que  $E(h) = E(M)$ .*

On dira d'une fonction  $h \in H(M)$  qu'elle est **minimale** si  $E(h) = E(M)$ . Fixons une fonction minimale  $h = h_\chi \in H(M)$ . Pour tout  $g \in G$ , la fonction

$$g^*h := h \circ g$$

a la même énergie que  $h$ . Par unicité de l'extension harmonique (Remarque 3.4.3), on a  $g^*h = h_{g^*\chi}$ . Définissons les fonctions

$$g_+(h) := \max(h, g^*h), \quad g_-(h) = \min(h, g^*h).$$

Par définition,

$$g_+(h)(x) = g_-(h)(x) \iff h(x) = g^*h(x).$$

On a la proposition suivante (voir [5], Lemme 21.20) :

**Proposition 3.5.2.** *Soit  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions lisses sur  $M$ . Alors*

$$E(\min(f_1, f_2)) + E(\max(f_1, f_2)) = E(f_1) + E(f_2)$$

*Remarque 3.5.3.* Les applications  $\min(f_1, f_2)$  et  $\max(f_1, f_2)$  sont presque sûrement différentiables, comme expliqué dans la référence. L'énoncé a donc bien un sens.

On applique cette proposition pour obtenir que

$$E(g_+(h)) + E(g_-(h)) = E(h) + E(g^*h) = 2E(h).$$

Les fonctions  $g_+(h)$  et  $g_-(h)$  s'étendent continûment sur  $e(M)$ , respectivement via  $\chi_+ := \max(\chi, g^*\chi)$  et  $\chi_- := \min(\chi, g^*\chi)$ . Les fonctions  $\chi_\pm$  étant à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , nous pouvons considérer les extensions harmoniques de  $\chi_\pm$  :

$$h_\pm := h_{\chi_\pm}.$$

Comme les extensions harmoniques minimisent l'énergie,

$$E(h_\pm) \leq E(g_\pm(h))$$

et donc

$$E(h_+) + E(h_-) \leq E(g_+(h)) + E(g_-(h)) = 2E(h) = 2E(M).$$

Il est possible que l'une des deux fonctions  $h_+$  ou  $h_-$  (respectivement  $\chi_+$  ou  $\chi_-$ ) soit constante. Introduisons

$$G^c := \{g \in G \mid \chi_+ \text{ ou } \chi_- \text{ est constante}\}.$$

Considérons d'abord un  $g \in G \setminus G^c$ . On obtient grâce à la dernière inégalité que

$$E(h_+) = E(h_-) = E(h) = E(M)$$

et donc que

$$E(g_+(h)) = E(h_+), \quad E(g_-(h)) = E(h_-).$$

Cela montre que les fonctions  $g_\pm(h)$  sont harmoniques. Comme  $g_-(h) \leq g_+(h)$ , le principe du maximum implique que  $g_-(h) = g_+(h)$  ou  $g_-(h) < g_+(h)$ . En effet, puisque la fonction harmonique  $g_+(h) - g_-(h)$  est positive, si elle vaut 0 quelque part, alors elle atteint son minimum et est donc constante. On en déduit que sur  $M$ ,  $g^*h = h$  ou  $g^*h > h$  ou  $g^*h < h$ . En particulier, si on introduit

$$S := h^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

on a soit  $g \cdot S = S$ , soit  $g \cdot S \cap S = \emptyset$ .

Il reste à considérer les éléments de  $G^c$ . Sans perte de généralité, supposons que  $\chi_- = 0$ . En particulier, si  $\chi(\xi) = 1$  alors  $g^*\chi(\xi) = 0$  pour  $\xi \in e(M)$ . On obtient donc que

$$g^*\chi \leq 1 - \chi.$$

En utilisant le principe du maximum, on montre que

$$g^*h \leq 1 - h.$$

En effet, l'application continue  $g^*h + h - 1$  atteint son maximum  $C$  sur le compact  $\overline{M}$ . Si  $C > 0$ , ce maximum serait atteint sur  $M$ . Comme  $g^*h + h - 1$  est harmonique sur  $M$ , on aurait donc que  $g^*h + h - 1 \equiv C$  sur  $M$ , ce qui est impossible. De même, en utilisant de nouveau le principe du maximum, on obtient que si  $g^*h(x) = 1 - h(x)$  pour  $x \in M$  quelconque, alors  $g^*h = 1 - h$ . On a donc toujours que  $g \cdot S = S$  ou  $g \cdot S \cap S = \emptyset$ . En outre,  $S$  est un fermé de  $\overline{M}$ , et est donc compact.

Nous avons donc montré le lemme suivant :

**Lemme 3.5.4.** *Pour toute fonction minimale  $h$  :*

1. *Pour tout  $g \in G$ , on est (en restreignant les fonctions à  $M$ ) dans l'une des situations suivantes :*

$$g^*h = h, \quad g^*h < h, \quad g^*h > h, \quad g^*h = 1 - h, \quad g^*h < 1 - h, \quad g^*h > 1 - h.$$

2. *L'ensemble  $h^{-1}(\frac{1}{2}) = S$  est compact et pour tout  $g \in G$ , on a soit  $g \cdot S = S$ , soit  $g \cdot S \cap S = \emptyset$ . De plus, si  $g \cdot S = S$  alors  $g^*h = h$  ou  $g^*h = 1 - h$ .*

Le but est maintenant de construire un arbre  $T$  sur lequel  $G$  agit sans point fixe global, sans inversion d'arêtes et avec des stabilisateurs d'arêtes finis.

Pour cela, fixons  $h$  une fonction minimale et considérons l'ensemble de fonctions minimales

$$\mathcal{M} := \{g^*h, g^*(1 - h) : g \in G\}.$$

Toute fonction  $f \in \mathcal{M}$  définit le mur  $W_f = f^{-1}(\frac{1}{2})$  et les demi-espaces  $W_f^- = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$  et  $W_f^+ = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ . Notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des murs. On dit qu'un mur  $W_f$  **sépare**  $x, y \in M$  si

$$x \in W_f^-, \quad y \in W_f^+.$$

On introduit

$$M^o := M \setminus \bigcup_{f \in \mathcal{M}} W_f.$$

La relation de ne pas pouvoir être séparés par un mur est une relation d'équivalence sur  $M^o$ . En effet, si  $(x, y)$  et  $(y, z)$  sont inséparables, et si  $f \in \mathcal{M}$ , on a sans perte de généralité que  $x \in W_f^+$ , puis  $y \in W_f^+$  et donc  $z \in W_f^+$ .

Les classes d'équivalences ainsi construites seront dites **indécomposables**. On introduit

$$\mathcal{V} := \{\text{ensembles indécomposables de } M^o\}.$$

Les éléments de  $\mathcal{V}$  seront les sommets de l'arbre. On dira qu'un mur  $W$  **touche**  $V \in \mathcal{V}$  si  $W \cap \bar{V} \neq \emptyset$ , où  $\bar{V}$  est l'adhérence de  $V$ . Avant de pouvoir définir rigoureusement l'arbre, on démontre les propositions suivantes.

**Proposition 3.5.5.** *Si un sommet  $V \in \mathcal{V}$  est inclus dans  $W_{f_1}^- \cap W_{f_2}^+$ , et si  $W_{f_1}$  et  $W_{f_2}$  sont deux murs distincts qui touchent  $V$ , alors  $f_1 < f_2$  sur  $M$ .*

*Démonstration.* On sait que  $f_1|_V < \frac{1}{2} < f_2|_V$ . En outre, puisque  $W_{f_1}$  et  $W_{f_2}$  sont deux murs distincts, on a que  $f_1 \neq f_2$  et que  $f_1 + f_2 \neq 1$ . Ainsi, par le lemme 3.5.4, on a  $f_1 < f_2$  sur  $M$ , ou  $f_1 + f_2 > 1$  ou  $f_1 + f_2 < 1$  sur  $M$ . Or, puisque  $W_{f_1}$  touche  $V$ , on dispose de  $x \in \bar{V} \cap W_{f_1}$ , qui vérifie donc  $f_2(x) \geq \frac{1}{2}$ , et  $f_1(x) = \frac{1}{2}$ . De même, on dispose de  $y \in \bar{V} \cap W_{f_2}$  tel que  $f_1(y) + f_2(y) \leq 1$ . Ainsi, on a forcément  $f_1 < f_2$  sur  $M$ .  $\square$

**Lemme 3.5.6.** *Les ensembles indécomposables sont ouverts.*

*Démonstration.* Soit  $x \in M^o$ . Soit  $K$  un voisinage compact de  $x$  dans  $M$ . On sait que  $S$  est compact, et que les murs sont les translatés de  $S$  par  $G$ . Puisque  $S \cup K$  est compact et que l'action de  $G$  sur  $M$  est propre, on en déduit qu'il y a un nombre fini de  $g \in G$  tels que  $g \cdot S \cap K \neq \emptyset$ . Ainsi,  $K$  intersecte un nombre fini de murs  $W_1, \dots, W_r$ , et donc  $M^o \cap K$  est un voisinage de  $x$  inclus dans  $M^o$ . En particulier,  $x$  possède un voisinage ouvert connexe par arcs  $V$  qui est inclus dans  $M^o$ , et qui est inclus dans la classe de  $x$  par théorème des valeurs intermédiaires.  $\square$

*Remarque 3.5.7.* Le même argument montre que tout point de  $M$  possède un voisinage intersectant un nombre fini de murs.

**Proposition 3.5.8.** *Tout mur  $W = W_f$  touche exactement deux sommets  $V^+, V^- \in \mathcal{V}$  (qui sont inclus dans  $W_f^+$  et  $W_f^-$  respectivement).*

*Démonstration.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère  $x_n \in M$  tel que  $f(x_n) = \frac{1+2^{-n}}{2}$ , qui existe car  $M$  est connexe par arcs et  $f$  atteint les valeurs 0 et 1 sur  $\bar{M}$ . Par compacité de  $f^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{3}{4}])$ , on peut extraire une sous-suite  $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  qui converge vers  $x \in \bar{M}$ . On a en outre que  $f(x) = \frac{1}{2}$ , donc  $x \in W$ . Or, il existe un voisinage connexe par arcs  $V$  de  $x$  dans  $M$  tel que  $W$  soit le seul mur intersectant  $V$ , et pour  $k$  assez grand,  $x_{\phi(k)} \in V$ . Par définition,  $W$  ne sépare pas ces points, et par connexité locale, les autres murs ne peuvent pas non plus les séparer. Donc la sous-suite est à partir d'un certain rang dans une même classe, notée  $V^+$ , que  $W$  touche par construction. On raisonne de même pour  $V^-$ .

Montrons que  $V^+$  et  $V^-$  sont les seuls sommets qui touchent  $W$ . Soit  $(y_n) \in V^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $y \in W$ , avec  $V \in \mathcal{V}$  et sans perte de généralité  $V \subset W_f^+$ . Comme précédemment, pour  $k$  assez grand,  $y_k$  et  $y$  ne peuvent être séparés par un mur autre que  $W$ . En outre, par le lemme 3.5.4, deux points de  $W$  ne peuvent être séparés par un autre mur que  $W$ . Ainsi, puisque  $y, x \in W$  et puisque  $x$  et  $x_{\phi(k)}$  ne peuvent être séparés par un autre mur que  $W$  pour  $k$  assez grand, c'est aussi le cas de  $y_k$  et  $x_{\phi(k)}$ . Mais ils ne sont pas non plus séparés par  $W$ . Donc  $V = W_f^+$ .  $\square$

On définit ainsi le graphe  $T = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  où le mur  $W \in \mathcal{E}$  relie les sommets  $V^+$  et  $V^-$  qui sont comme dans la proposition 3.5.8.

**Proposition 3.5.9.** *Le graphe  $T$  est un arbre.*

*Démonstration.* Tout point de  $M$  appartient soit à un sommet, soit à un mur. Le graphe  $T$  est ainsi connexe car la variété  $M$  l'est. Supposons par l'absurde que  $T$  contienne un cycle

$$V_1, V_2, \dots, V_k, V_{k+1} = V_1,$$

où les sommets sont liés par les arêtes distinctes  $W_{f_1}, W_{f_2}, \dots, W_{f_k}$ . Quitte à remplacer  $f_i$  par  $1 - f_i$ , on peut supposer que

$$V_i \subseteq W_{f_{i-1}}^- \cap W_{f_i}^+, i = 1, 2, \dots, k,$$

où  $f_0 = f_k$ . La proposition 3.5.5 implique alors que

$$f_0 < f_1 < f_2 < \dots < f_k = f_0,$$

ce qui est absurde. Ainsi  $T$  est un arbre comme voulu.  $\square$

Puisque les ensembles  $\mathcal{M}, \mathcal{V}, \mathcal{E}$  sont stables sous l'action de  $G$ , le groupe  $G$  agit naturellement sur l'arbre  $T$ . Le stabilisateur d'une arête  $W$  est fini car  $W$  est compact (Lemme 3.5.4) et l'action de  $G$  sur la variété  $M$  est propre. On a aussi que :

**Lemme 3.5.10.** *L'action décrite ci-dessus n'admet pas de point fixe global.*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $V$  soit un sommet  $G$ -stable.

Puisque l'action de  $G$  sur  $M$  est cocompacte et que  $M$  est propre, on écrit comme dans la preuve du corollaire 2.2.4 :

$$M/G = \pi(M) = \bigcup_{r>0} \pi(\mathcal{N}_r(V)) = \pi(\mathcal{N}_\rho(V)),$$

pour un certain  $\rho > 0$ . Puisque  $V$  est stable sous l'action de  $G$  et que  $G$  agit par isométries, on en déduit que  $M = \mathcal{N}_\rho(V)$ . On dispose en outre de  $f \in \mathcal{M}$  telle que  $V \subseteq W_f^+$ . Or, puisque  $W_f^-$  est non borné, et que  $W_f$  est compact et donc borné, on a que  $W_f^- \not\subseteq \mathcal{N}_\rho(W_f)$ . Cela est absurde car un chemin continu partant de  $W_f^+$  et arrivant dans  $W_f^-$  passe par  $W_f$ .  $\square$

Finalement, il est possible que l'action soit avec inversion d'arêtes. Pour éviter ce problème, on peut diviser notre arbre  $T$  barycentriquement (on rajoute les milieux des arêtes à l'ensemble des sommets). Ainsi, toutes les conditions sont vérifiées et le théorème est démontré.

## Références

- [1] Béla Bollobás. *Graph theory, an introductory course*. Springer, 1979.
- [2] Peter Buser. A note on the isoperimetric constant. *Annales Scientifiques de l'E.N.S*, 15(2) :213–230, 1982.
- [3] Isaac Chavel. *Riemannian Geometry : A Modern Introduction*. Cambridge University Press, 2006.
- [4] Martin J. Dunwoody. The accessibility of finitely presented groups. *Inventiones mathematicae*, 81(2) :449–457, 1985.
- [5] Cornelia Druţu et Michael Kapovich. *Geometric Group Theory*. American Mathematical Society, 2018.
- [6] Richard Schoen et Shing-Tung Yau. *Lectures on Differential Geometry*. International Press, 1994.
- [7] Mikhail Gromov. *Hyperbolic groups*. Springer, 1987.
- [8] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [9] John Hempel. *3-Manifolds*. American Mathematical Society, 2004.
- [10] Clara Löh. *Geometric Group Theory*. Springer, 2017.
- [11] John Meier. *Groups, Graphs and Trees : An Introduction to the Geometry of Infinite Groups*. Cambridge University Press, 2008.
- [12] Jean-Pierre Serre. *Trees*. Springer, 1980.
- [13] John R. Stallings. On torsion-free groups with infinitely many ends. *Annals of Mathematics*, 88(2) :312–334, 1968.