

ENS PARIS
DMA

Hadrien Chalandon-Goskrzynski, Irina Mamsurova

La propriété (T) de Kazhdan pour $SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$

Exposé de première année

Encadrant :
Cyril Houdayer

Paris 2024

Table des matières

Introduction	3
1 Préliminaires	4
1.1 Représentations unitaires	4
1.2 Propriété (T)	4
1.3 Moyennabilité	5
1.4 Caractérisations de la propriété (T)	7
1.4.1 Actions affines isométriques et propriété (FH)	7
1.4.2 1-cohomologie	8
1.4.3 Actions sur les arbres et propriété (FA)	9
1.5 Propriété de Haagerup	10
2 Propriété (T) pour $SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$	11
2.1 Propriété (T) relative pour $\mathbb{Z}^2 \subset SL_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2$	11
2.2 Génération bornée	13
2.3 Propriété (T) et constante de Kazhdan pour $SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$	14
3 Applications	15
3.1 Graphes expandeurs	15
3.2 Le théorème du sous-groupe normal de Margulis	17
3.3 Questions ouvertes	17
A Le groupe dual et ses propriétés	18
A.1 Groupe dual	18
A.2 Mesure à valeurs dans des projecteurs	18
References	20

Introduction

La propriété (T) de Kazhdan est une propriété de rigidité des représentations unitaires d'un groupe localement compact. A l'origine, elle fut introduite par D. Kazhdan dans [Ka] comme un outil pour montrer qu'une grande classe de réseaux sont de type fini.

Pour trouver des exemples de groupes non compacts avec la propriété (T), les seules méthodes connues à l'époque de l'article de Kazhdan étaient d'utiliser la théorie des groupes de Lie ou des groupes algébriques, dont les résultats sont que des groupes comme $SL_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$ ont la propriété (T). Dans le texte qui suit, on présente une autre approche mise au point par Y. Shalom dans [Sh] 30 ans après Kazhdan. Cette approche a deux avantages cruciaux : elle permet de montrer la propriété (T) pour certains groupes $SL_n(R)$ (où R est un anneau) qui ne sont pas des réseaux d'un groupe avec la propriété (T) et elle peut aussi être utilisée pour estimer des constantes de Kazhdan.

Ces estimations apparaissent dans la première application de la propriété (T) en dehors de la théorie des groupes. Simplement dit, les graphes expanseurs sont des suites de graphes « assez connexes mais avec peu d'arêtes » tels que le nombre des sommets des graphes de cette suite tend vers l'infini. Si on regarde un graphe comme un modèle de réseau de communication, alors on peut définir une constante qui mesure la vitesse de transmission d'information dans le réseau. L'existence de graphes expanseurs avait d'abord été montrée de manière non-constructive avec outils probabilistes, mais G. A. Margulis dans [Ma2] a utilisé la propriété (T) pour construire explicitement une famille des graphes expanseurs. Avec l'approche de Shalom on peut même estimer la vitesse de transmission d'information en utilisant la constante de Kazhdan connue.

La preuve remarquable du théorème du sous-groupe normal que G. A. Margulis publie à la fin des années 70 s'appuie sur le fait que si un groupe infini est moyennable, alors il n'a pas la propriété (T). L'énoncé de ce théorème est purement algébrique. Soit G un groupe de Lie connexe, semi-simple, de centre fini et de rang supérieur à 2. Soit Γ un réseau irréductible dans G et $N \triangleleft \Gamma$. Alors, soit N est contenu dans le centre de G , donc fini, soit il est d'indice fini dans Γ . Étonnamment, la preuve du fait que tout groupe moyennable qui a la propriété (T) est fini se situe plutôt dans le domaine de l'analyse géométrique.

La propriété (T) ou l'absence de la propriété (T) peut être reformulée en d'autres termes pour diverses classes de groupes. Les recherches de la fin des années 70 ont montré qu'une grande classe de groupes topologiques possèdent une caractérisation de la propriété (T) en termes d'actions sur les espaces de Hilbert. On dit qu'un groupe topologique G a la propriété (FH) si chaque action par isométries affines de G sur un espace de Hilbert réel a un point fixe. Le théorème de Delorme-Guichardet montre que si un groupe topologique G a la propriété (T), alors il a la propriété (FH). De plus, tous les groupes topologiques σ -compacts et localement compacts qui ont la propriété (FH) ont aussi la propriété (T). La propriété (FH) peut être reformulée en termes de 1-cohomologie pour des utilisations dans d'autres contextes.

Le but de ce texte est d'exposer les résultats classiques concernant la propriété (T) de Kazhdan sans utiliser la théorie des groupes de Lie. La section 1 est consacrée aux définitions avec les préliminaires nécessaires et aux différentes caractérisations de la propriété (T), par exemple, le théorème de Delorme-Guichardet. Dans la section 2 on montre que $SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$ possède la propriété de Kazhdan relative et on en déduit que $SL_n(\mathbb{Z})$ a la propriété (T) en utilisant la méthode de Shalom et la notion de génération bornée. Cette preuve utilise les groupes duaux et leurs liens avec les représentations unitaires (dont le lecteur peut trouver le détail dans l'appendice A). La section 3 de ce texte se concentre sur les applications de la propriété de Kazhdan, notamment, les graphes expanseurs et le théorème du sous-groupe normal de Margulis. On présente aussi quelques questions ouvertes.

Remerciements. Nous tenons à remercier Cyril Houdayer, notre directeur de mémoire, pour les nombreuses discussions que nous avons eues avec lui et pour sa relecture attentive de ce texte.

1 Préliminaires

Convention : Tous les groupes sont supposés discrets. Beaucoup des résultats présentés ici se généralisent aux groupes localement compacts, nous renvoyons le lecteur au livre de Bekka, De la Harpe et Valette [BHV] qui se place dans ce cadre.

1.1 Représentations unitaires

Soit $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. On note $\mathcal{U}(\mathcal{H}) = \{u \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid uu^* = u^*u = \text{id}_{\mathcal{H}}\}$ le groupe des opérateurs unitaires sur \mathcal{H} . On le munit de la topologie forte : la topologie la moins fine telle que $\mathcal{U}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H} : u \mapsto u\xi$ est continue pour tout $\xi \in \mathcal{H}$.

Soit G un groupe topologique. On dit que $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ est une représentation unitaire fortement continue si π est un morphisme de groupes continu pour la topologie forte sur $\mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Remarque : Pour G discret, tout morphisme de groupe $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ est fortement continu. On ne précise donc pas que les représentations sont « fortement continues » dans la suite.

Définition 1.1. Si G est un groupe et (π, \mathcal{H}) une représentation unitaire de G , on dit que

- le vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ est G -invariant si $\forall s \in G$ on a $\pi(s)\xi = \xi$;
- le vecteur $\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ est (E, ε) -invariant si $\sup_{s \in E} \|\pi(s)\xi - \xi\| < \varepsilon \|\xi\|$, où $E \subset G$ et $\varepsilon > 0$;
- la représentation (π, \mathcal{H}) a presque des vecteurs invariants s'il existe un vecteur unitaire (ε, E) -invariant pour tous $\varepsilon > 0$ et $E \subset G$ fini.

Remarque :

- Si $Q' \subset Q$ et $\varepsilon' \geq \varepsilon$, alors chaque vecteur (Q, ε) -invariant est (Q', ε') -invariant.
- Pour chaque $\xi \in \mathcal{H}$, $g \in G$ on a $\|\pi(g)\xi - \xi\| = \|\pi(g^{-1})\xi - \xi\|$ par unitarité. Un vecteur est donc (Q, ε) -invariant si et seulement si il est $(Q \cup Q^{-1}, \varepsilon)$ -invariant.
- Chaque vecteur $(Q, \varepsilon/n)$ -invariant est $((Q \cup Q^{-1})^n, \varepsilon)$ -invariant.

Exemple 1.2. Soit $\ell^2(G)$ l'ensemble des fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\sum_g |f(g)|^2 < +\infty$ muni de sa structure d'espace de Hilbert canonique. Le groupe G agit unitairement sur $\ell^2(G)$ par $g \cdot f : h \mapsto f(g^{-1}h)$. Cette représentation est la *représentation régulière gauche* de G , notée λ_G .

1.2 Propriété (T)

Définition 1.3. Soit $\Lambda \subset G$ un sous-groupe. On dit que

- l'inclusion $\Lambda \subset G$ a la *propriété (T) de Kazhdan relative* si toute représentation unitaire de G qui admet presque des vecteurs G -invariants admet des vecteurs Λ -invariants non nuls ;
- le groupe G a la *propriété (T) de Kazhdan* si $G \subset G$ a la propriété (T) de Kazhdan relative ;
- la paire (E, ε) où $E \subset G$ et $\varepsilon > 0$ est une *paire de Kazhdan pour l'inclusion $\Lambda \subset G$* (ou juste pour G si $\Lambda = G$) si toute représentation unitaire de G qui a un vecteur (E, ε) -invariant non nul a un vecteur Λ -invariant non nul. Le nombre $\varepsilon > 0$ est appelé la *constante de Kazhdan* pour G et E .

Fait. Soit G un groupe qui a la propriété (T) et qui admet un ensemble de générateurs fini S tel que $S = S^{-1}$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que (S, ε) est une paire de Kazhdan.

Remarque : Pour un groupe topologique G , un sous-ensemble compact Q et une représentation unitaire (π, \mathcal{H}) de G , on étend la notion de la constante de Kazhdan en définissant la constante de Kazhdan associée à Q et π comme

$$\kappa(G, Q, \pi) = \inf \left\{ \max_{x \in Q} \|\pi(x)\xi - \xi\| : \xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| = 1 \right\} \geq 0.$$

Exemple 1.4. Pour tout G , la paire $(G, \sqrt{2})$ est de Kazhdan.

Démonstration. Soit (π, \mathcal{H}) une représentation unitaire avec un vecteur $(G, \sqrt{2})$ -invariant non nul ξ donné. Le sous-ensemble $V = \pi(G)\xi$ est borné par unitarité. En posant

$$r_0 = \inf\{r \geq 0 \mid \exists x \in \mathcal{H} : V \subset \overline{\mathbf{B}_x(r)}\},$$

il existe un seul $\zeta \in \mathcal{H}$ tel que $V \subset \overline{\mathbf{B}_\zeta(r_0)}$. De plus, ζ est G -invariant, car V l'est. Alors, en prenant la partie réelle du produit scalaire on a :

$$\Re\langle \xi, \zeta \rangle \geq \inf_{s \in G} \Re\langle \xi, \pi(s)\xi \rangle = 1 - \frac{1}{2} \sup_{s \in G} \|\xi - \pi(s)\xi\|^2 > 0,$$

d'où $\zeta \neq 0$, ce qui conclut. \square

Exemple 1.5. Les groupes finis ont la propriété (T).

Démonstration. Soit (π, \mathcal{H}) une représentation unitaire de G fini. Pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, $\sum_{s \in G} \pi(s)\xi$ est G -invariant. Supposons que (π, \mathcal{H}) ait presque des vecteurs invariants. Soit $\xi \in \mathcal{H}$ unitaire $(G, 1/2|G|)$ -invariant. Alors

$$\left\| \sum_{s \in G} \pi(s)\xi - |G|\xi \right\| = \left\| \sum_{s \in G} (\pi(s)\xi - \xi) \right\| \leq \frac{1}{2}.$$

Comme ξ est unitaire, $\sum_{s \in G} \pi(s)\xi$ est non nul, ce qui conclut. \square

Proposition 1.6. Si $\Lambda \triangleleft G$ et G a la propriété (T), alors G/Λ aussi.

Démonstration. Soit (π, \mathcal{H}) une représentation unitaire de G/Λ qui a presque des vecteurs invariants. Si $p : G \rightarrow G/\Lambda$ est la projection canonique, alors $(\pi \circ p, \mathcal{H})$ est une représentation unitaire de G , qui a aussi presque des vecteurs invariants. Il existe donc un vecteur non nul G -invariant pour $\pi \circ p$, donc invariant pour π . \square

Proposition 1.7. Si G a la propriété (T), alors G est de type fini.

Démonstration. Soit \mathcal{A} l'ensemble des sous-groupes de G de type fini. On a $G = \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$. On construit une représentation unitaire $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ où $\mathcal{H}_\pi = \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} \ell^2(G/H)$ par

$$\forall g, h \in G, \forall H \in \mathcal{A}, \pi(g)\delta_{hH} = \delta_{ghH}.$$

Cette représentation a presque des vecteurs invariants. En effet, si $E \subset G$ est fini, alors $\langle E \rangle \in \mathcal{A}$. Pour tout $g \in E$, $\pi(g)\delta_{\langle E \rangle} = \delta_{\langle E \rangle}$ car $g \in \langle E \rangle$, donc $\delta_{\langle E \rangle}$ est un vecteur (E, ε) -invariant pour tout $\varepsilon > 0$. Par la propriété (T), il existe $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ non nul et $\pi(G)$ -invariant. Comme ξ est non nul, il existe $H \in \mathcal{A}$ tel que ξ_H , la projection de ξ sur $\ell^2(G/H)$, est non nulle. Comme $\pi(g)\xi_H = \xi_H$ pour tout $g \in G$ et ξ_H est non nul, il vient que G/H est fini (sinon, ξ_H ne serait pas dans $\ell^2(G/H)$). Comme H est de type fini et G/H est fini, G est de type fini. \square

1.3 Moyennabilité

Définition 1.8. On dit que G est *moyennable* si toute action affine de G sur K un convexe compact non vide d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé a un point fixe.

Proposition 1.9. Les groupes finis sont moyennables.

Démonstration. Supposons G fini et qu'il agisse continûment sur un convexe compact non vide K dans un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. Soit $x \in K$. Alors, $\sum_{g \in G} \frac{1}{|G|}(g \cdot x)$ est dans K comme combinaison convexe d'éléments de K . C'est un point fixe pour l'action de G . \square

Proposition 1.10 (Markov-Kakutani). *Les groupes abéliens sont moyennables.*

Démonstration. Supposons G abélien agissant continûment sur un convexe compact non vide K dans un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. Soit $g \in G$. Soit $x \in K$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \frac{1}{n+1}(x + g \cdot x + \cdots + g^n \cdot x)$$

On a alors $x_n \in K$ par convexité. De plus, $x_{n+1} - g \cdot x_n = \frac{1}{n+1}x \rightarrow 0$. Or, $y \mapsto y - g \cdot y$ est continue. En particulier, $\{y - g \cdot y \mid y \in K\}$ est compacte comme image continue d'un compact. Comme l'espace ambiant est séparé, $\{y - g \cdot y \mid y \in K\}$ est fermé. Ainsi, $0 \in \{y - g \cdot y \mid y \in K\}$, donc il existe $y \in K$ tel que $y = g \cdot y$.

Pour $E \subset G$, on note Fix_E les éléments de K laissés fixes par tous les éléments de E . L'ensemble $\text{Fix}_{\{g\}}$ est un convexe fermé donc un convexe compact car K est compact. Soit h un autre élément de G . Alors, par abélianité, pour $x \in \text{Fix}_{\{g\}}$:

$$g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x = h(g \cdot x) = h \cdot x$$

Donc h stabilise $\text{Fix}_{\{g\}}$. Le même raisonnement que ci-dessus montre alors qu'il existe un point fixe commun à g et h . Par récurrence, on démontre que si $E \subset G$ est fini, les éléments de E admettent un point fixe commun dans K . On a $\text{Fix}_G = \bigcap_{g \in G} \text{Fix}_{\{g\}}$. Les $\text{Fix}_{\{g\}}$ sont des fermés et une intersection finie de tels fermés est non vide, donc par compacité de K , l'intersection de tous ces fermés est non vide, d'où il existe un point fixe par tous les éléments de G dans K . \square

Définition 1.11. On note $\ell^\infty(G)$ l'ensemble des fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ bornées. Le groupe G agit dessus par translation à gauche par $s \cdot f = (t \mapsto f(s^{-1}t))$. Une forme linéaire m continue sur $\ell^\infty(G)$ qui est :

- positive : si $f \in \ell^\infty(G)$ et $f \geq 0$, alors $m(f) \geq 0$;
- telle que $m(\text{id}) = 1$

est appelée une *moyenne*. Si de plus, pour tous $s \in G$ et $f \in \ell^\infty(G)$, $m(s \cdot f) = m(f)$, on dit que m est *invariante à gauche*.

Proposition 1.12. *Si G est moyennable, il existe une moyenne invariante à gauche sur $\ell^\infty(G)$.*

Remarque : c'est en fait une équivalence, mais on n'utilisera que ce sens ici.

Démonstration. Supposons G moyennable. L'ensemble $\ell^\infty(G)^*$ muni de la topologie faible-* est un espace vectoriel topologique localement convexe. L'ensemble \mathcal{M} des mesures sur $\ell^\infty(G)^*$ est fermé pour la topologie faible-* et inclus dans la boule unité donc est compact. De plus, \mathcal{M} est convexe : si $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ et $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2$ est positive et $\|\lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2\| \leq 1$. On a l'autre inégalité en considérant $f_\varepsilon, g_\varepsilon \in \ell^\infty(G)$ unitaires telles que $m_1(f_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ et $m_2(g_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ puis en considérant $\sup(f_\varepsilon, g_\varepsilon)$. Une action affine de G sur \mathcal{M} est donnée par $g \cdot m(\varphi) = m(g^{-1} \cdot \varphi)$ pour $g \in G$ et $\varphi \in \ell^\infty(G)$. Par moyennabilité, cette action a un point fixe, d'où l'existence d'une moyenne invariante à gauche. \square

Proposition 1.13. *Si G est moyennable, la représentation régulière à gauche de G (voir exemple 1.2) a presque des vecteurs invariants.*

Remarque : c'est en fait une équivalence, mais on n'utilisera que ce sens ici.

Démonstration. Soit $m \in \ell^\infty(G)^*$ une moyenne invariante à gauche sur G . Car $\ell^1(G)^* = \ell^\infty(G)$, $m \in \ell^1(G)^{**}$. On a une injection canonique $\ell^1(G) \hookrightarrow \ell^1(G)^{**}$ d'image dense dans $\ell^1(G)^{**}$ (on munit $\ell^1(G)^{**}$ de la topologie faible-*). Si on restreint aux fonctions positives et corestreint aux formes linéaires positives, on obtient une injection $\ell^1(G)_+ \hookrightarrow \ell^1(G)_+^{**}$, encore d'image dense. Il existe donc une suite généralisée $\mu_i \in \ell^1(G)_+$ où les μ_i sont de norme 1 tel que $ev_{\mu_i} \rightarrow m$ pour la topologie faible-*. Comme m est invariante à gauche, on a en fait $ev_{h \cdot \mu_i} \rightarrow m$ pour tout $h \in G$,

donc $ev_{h \cdot \mu_i} - ev_{\mu_i} \rightarrow 0$ pour la topologie faible. Alors, l'adhérence de l'enveloppe convexe des $h \cdot \mu_i - \mu_i$ pour la topologie faible (induite sur la copie de $\ell^1(G)_+$ dans $\ell^1(G)_+^{**}$) contient 0. Par locale convexité, l'adhérence de l'enveloppe convexe des $h \cdot \mu_i - \mu_i$ pour la topologie forte sur $\ell^1(G)_+$ contient 0, d'où il existe une suite généralisée (μ_j) telle que $\lim_j \|h \cdot \mu_j - \mu_j\|_{\ell^1(G)_+} = 0$. On en déduit que la représentation régulière à gauche a presque des vecteurs invariants en considérant $\xi_j = \mu_j^{1/2}$. \square

La propriété (T) peut être vue comme opposée à la moyennabilité. Rigoureusement, on a le résultat suivant :

Proposition 1.14. *Si G a la propriété (T) et est moyennable, alors G est fini.*

Démonstration. Si G est moyennable, la représentation de G sur $\ell^2(G)$ donnée par $g \cdot f = h \mapsto f(gh)$ a presque des vecteurs invariants. Par la propriété (T), il existe un vecteur invariant $f \in \ell^2(G)$ non nul. Or, un vecteur invariant est une fonction constante. Comme G est discret, muni de la mesure de Haar et qu'une fonction constante non nulle est intégrable, G est nécessairement fini. \square

Corollaire 1.15. *Si G a la propriété (T), son abélianisé G^{ab} est fini.*

Démonstration. La propriété (T) passe aux quotients (proposition 1.6), donc G^{ab} a la propriété (T) car G l'a. Or, un groupe abélien est moyennable (proposition 1.10), donc G^{ab} est fini. \square

Exemple 1.16. Les groupes libres $\mathbb{F}_N = \langle x_1, \dots, x_N \rangle$ n'ont pas la propriété (T) pour $N \geq 2$: l'abélianisé de \mathbb{F}_N est \mathbb{Z}^N qui est infini.

1.4 Caractérisations de la propriété (T)

1.4.1 Actions affines isométriques et propriété (FH)

Définition 1.17. Un *espace de Hilbert affine réel* est un ensemble \mathcal{H} muni d'une action simplement transitive du groupe additif d'un espace de Hilbert réel \mathcal{H}^0 .

Remarque. Une action $G \curvearrowright X$ est dite simplement transitive si elle est transitive et $\text{Stab}(x) = \{e\}$ pour tout $x \in X$.

On appelle une *translation* une application $T_\xi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ induite par l'action de $\xi \in \mathcal{H}^0$ et on la note $x \mapsto x + \xi$. L'unique vecteur $\xi \in \mathcal{H}^0$ tel que $T_\xi x = y$ est noté $y - x$.

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert affine réel. On définit une métrique d sur \mathcal{H} par $d(x, y) = \|x - y\|$. On rappelle le résultat suivant d'analyse fonctionnelle :

Théorème 1.18 (Mazur-Ulam). *Toute surjection isométrique F d'un espace vectoriel normé réel dans un autre est affine.*

Par le théorème de Mazur-Ulam, chaque isométrie de \mathcal{H} est affine.

Soit $\mathcal{O}(\mathcal{H}^0)$ le *groupe orthogonal* de \mathcal{H}^0 (le groupe des opérateurs linéaires inversibles isométriques sur \mathcal{H}^0). Pour $g \in \text{Isom}(\mathcal{H})$ on définit un morphisme $p : \text{Isom}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{H}^0)$ par $p(g)\xi = g(x + \xi) - g(x)$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}^0$, où x est un point arbitraire de \mathcal{H} . Le morphisme p est surjectif et $\ker p = \mathcal{H}^0$. Le choix d'origine $0 \in \mathcal{H}$ donne une décomposition $\text{Isom}(\mathcal{H}) = \mathcal{O}(\mathcal{H}^0) \ltimes \mathcal{H}^0$.

Définition 1.19. Une *action par isométries affines* de G sur \mathcal{H} est un morphisme de groupes $\alpha : G \rightarrow \text{Isom}(\mathcal{H})$ tel que l'application $G \rightarrow \mathcal{H}$, $g \mapsto \alpha(g)x$ est continue pour chaque $x \in \mathcal{H}$.

En composant α avec $\text{Isom}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{H}^0)$, on obtient une représentation orthogonale de G sur \mathcal{H}^0 – un morphisme $\pi : G \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{H}^0)$ tel que $G \rightarrow \mathcal{H}$, $g \mapsto \alpha(g)x$ est continue pour tout $x \in \mathcal{H}$. On appelle π la *partie linéaire* de α .

Définition 1.20. On dit qu'un groupe topologique G a la *propriété (FH)* (point Fixes sur les espaces de Hilbert) si chaque action par isométries affines de G sur un espace de Hilbert réel a un point fixe.

Le résultat suivant montre le lien entre la propriété (FH) et la propriété (T) pour tous les groupes topologiques, pas nécessairement discrets. On rappelle qu'un groupe localement compact est dit σ -compact s'il existe une suite croissante de sous-ensembles compacts Q_n de G tels que $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$.

Théorème 1.21 (Delorme-Guichardet, 1977, [D]). *Soit G un groupe topologique.*

- Si G a la propriété (T), alors G a la propriété (FH).
- Si G est localement compact, σ -compact et a la propriété (FH), alors G a la propriété (T).

On donne maintenant une autre caractérisation de la propriété (T) par la 1-cohomologie.

1.4.2 1-cohomologie

Définition 1.22. Soit (\mathcal{H}^0, π) une représentation orthogonale de G sur un espace de Hilbert réel \mathcal{H}^0 . On dit qu'une fonction $b : G \rightarrow \mathcal{H}^0$ est :

- un 1-cocycle si $\forall g, h \in G, b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h)$;
- un 1-cobord s'il existe $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $b(g) = \pi(g)\xi - \xi$ pour tout $g \in G$.

On note $Z^1(G, \pi)$ l'espace vectoriel des 1-cocycles et $B^1(G, \pi)$ l'espace vectoriel des 1-cobords. Un 1-cobord est toujours un 1-cocycle et on note $H^1(G, \pi) \stackrel{\text{def}}{=} Z^1(G, \pi)/B^1(G, \pi)$ l'espace quotient, appelé le premier groupe de cohomologie. La définition de $H^1(G, \pi)$ peut être adaptée au cas d'une représentation unitaire π d'un groupe topologique G sur un espace de Hilbert complexe.

L'action affine par isométries associée à un cocycle $b \in Z^1(G, \pi)$ est l'action affine par isométries α de G sur \mathcal{H} définie par $\alpha(g)x = \pi(g)x + b(g)$, $g \in G$, $x \in \mathcal{H}$, où \mathcal{H} est l'espace de Hilbert affine canonique associé à \mathcal{H}^0 .

Lemme 1.23. *Soit π une représentation orthogonale d'un groupe topologique G sur un espace de Hilbert réel \mathcal{H}^0 . Soit $b \in Z^1(G, \pi)$ avec une action affine isométrique associée α . Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. La fonction b appartient à $B^1(G, \pi)$.
2. L'action α a un point fixe dans \mathcal{H} .
3. L'action α est conjuguée à π par une translation : il existe $\xi \in \mathcal{H}^0$ tel que $\alpha(g)x = \pi(g)(x + \xi) - \xi$ pour tout $g \in G$ et $x \in \mathcal{H}$.

Démonstration. (1 \Rightarrow 2) Si $b \in B^1(G, \pi)$, il existe $\xi \in \mathcal{H}^0$ tel que si $g \in G$ on a $b(g) = \pi(g)\xi - \xi$. Alors $\alpha(g)x = \pi(g)(x + \xi) - \xi$ pour tout $g \in G$, $x \in \mathcal{H}$. En particulier, $-\xi$ est fixé par α .

(2 \Rightarrow 3) Supposons que α fixe $-\xi$. Alors $b(g) = \alpha(g)(-\xi) - \pi(g)(-\xi) = \pi(g)\xi - \xi$ et donc $\alpha(g)x = \pi(g)(x + \xi) - \xi$ pour tout $g \in G$ et $x \in \mathcal{H}$.

(3 \Rightarrow 1) Si α est conjuguée à π par une translation à $\xi \in \mathcal{H}^0$, alors $b(g) = \pi(g)\xi - \xi$ pour tout $g \in G$, donc $b \in B^1(G, \pi)$. \square

On rappelle que pour tout $g \in G$ et $x \in \mathcal{H}^0$ on a $\alpha(g)x = \pi(g)x + b(g)$, $\|\pi(g)x\| = \|x\|$ et le fait que chaque ensemble borné non-vide X d'un espace de Hilbert complexe ou réel est contenu dans une unique boule de rayon minimal. On appelle le centre de cette boule *le centre de X* . Remarquons que s'il existe une orbite X de l'action α qui est bornée alors le centre de $\alpha(g)X$ est $\alpha(g)x_0$ où x_0 est le centre de X . Or $\alpha(g)X = X$, donc le centre x_0 est un point fixe de l'action α . Avec le lemme précédent, on obtient le résultat suivant :

Proposition 1.24. *Soit π une représentation orthogonale d'un groupe topologique G sur un espace de Hilbert réel \mathcal{H}^0 . Soit $b \in Z^1(G, \pi)$ et α l'action affine isométrique associée. Sont équivalents :*

1. La fonction b appartient à $B^1(G, \pi)$.
2. L'action α a un point fixe dans \mathcal{H} .
3. La fonction b est bornée.

4. Toutes les orbites de α sont bornées.
5. Il existe une orbite bornée de α .

En conséquence, on peut reformuler la propriété (FH) en termes de 1-cohomologie.

Corollaire 1.25. *Soit G un groupe topologique. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. Le groupe G a la propriété (FH).
2. Pour toute représentation orthogonale π de G , $H^1(G, \pi) = 0$.

1.4.3 Actions sur les arbres et propriété (FA)

Définition 1.26. On appelle *graphe non orienté* un couple $X = (V, \mathbb{E})$ où V est un ensemble et $\mathbb{E} \subset V^2$ est un ensemble de couples d'éléments de V tel que si $(x, y) \in \mathbb{E}$, alors $(y, x) \in \mathbb{E}$. Les éléments de V sont les *sommets* du graphe et les éléments de \mathbb{E} sont les *arêtes*.

Pour $e = (x, y) \in \mathbb{E}$, on note $\bar{e} = (y, x)$. On note aussi $E = \{\{e, \bar{e}\} \mid e \in \mathbb{E}\}$ l'ensemble des *arêtes géométriques* du graphe.

Un *arbre* est un graphe connexe et acyclique. On fixe maintenant $X = (V, \mathbb{E})$ un arbre. Si $x, y \in V$, il existe une unique suite finie de longueur minimale $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ de sommets de X telle que $(x_i, x_{i+1}) \in \mathbb{E}$ pour tout i . On appelle une telle suite une *géodésique* et on note $[x, y] = \{(x_i, x_{i+1})\}$ l'ensemble des arêtes orientées qui la composent. On note aussi $d(x, y) = n$ la *distance* entre x et y (qui définit bien une distance sur V).

Le *groupe d'automorphismes* de l'arbre X est le groupe des isométries de V pour la distance de graphe. On le munit de la topologie de la convergence simple pour en faire un groupe topologique.

Soit \mathcal{H} l'espace de Hilbert réel des fonctions $\xi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\xi(e) = -\xi(\bar{e})$ pour tout $e \in \mathbb{E}$ et $\sum_{e \in \mathbb{E}} |\xi(e)|^2 < \infty$, où le produit scalaire est donné par

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathbb{E}} \xi(e) \eta(e)$$

Proposition 1.27. *Une action de G sur X (un morphisme de G dans le groupe d'automorphismes de X) induit une action de G sur \mathbb{E} donc une représentation orthogonale π_X de G sur \mathcal{H} .*

Soient $x, y \in V$ et $[x, y]$ la géodésique qui les joint. On définit $c : V \times V \rightarrow \mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{E})$ par

$$c(x, y)(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in [x, y] \\ -1 & \text{si } \bar{e} \in [x, y] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme G agit sur X par automorphismes de graphe, on a $\pi_X(g)c(x, y) = c(g \cdot x, g \cdot y)$. Comme X est un arbre, c vérifie aussi $c(x, z) = c(x, y) + c(y, z)$. De plus, $\|c(x, y)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathbb{E}} c(x, y)(e)^2 = d(x, y)$.

Proposition 1.28. *Soit G un groupe qui agit sur un arbre X . Si $H^1(G, \pi_X) = 0$ (en particulier si G a (FH)), alors G doit fixer un sommet ou une arête géométrique de X .*

Pour démontrer cela, on aura besoin d'un lemme :

Lemme 1.29. *Soit G un groupe qui agit sur un arbre X . Si G a une orbite bornée, alors G fixe un sommet ou une arête géométrique.*

Démonstration. Soit O une orbite bornée. On pose $X_0 \subset X$ l'enveloppe convexe de O (i.e. les sommets et les arêtes qui apparaissent dans les géodésiques entre les points de O). Le sous-graphe X_0 est un sous-arbre borné de X et est G -invariant. On définit alors X_1 comme le sous-arbre de X_0 obtenu en enlevant tous les sommets de X_0 adjacents à un seul autre sommet de X_0 et en enlevant l'arête géométrique associée. Comme G agit par isométries et que X_0 est G -invariant, X_1 est aussi G -invariant. On définit X_2 à partir de X_1 de la même manière. Au bout d'un nombre fini d'étapes (car X_0 est borné), on arrivera à un arbre X_N qui comporte 1 ou 2 sommets qui est G -invariant. Dans le premier cas, G fixe un sommet, dans le deuxième cas, G fixe une arête géométrique. \square

Revenons au lien avec la cohomologie.

Démonstration. Supposons que $H^1(G, \pi_X) = 0$. Pour tout $x \in X$, l'application $b_x : G \rightarrow \mathcal{H}$ définie plus haut est un 1-cocycle pour π_X . Ainsi, c'est un 1-cobord, donc b_x est bornée, donc $g \mapsto \|c(g \cdot x, x)\| = d(g \cdot x, x)$ est bornée, donc G a une orbite bornée. Ainsi, G fixe un sommet ou une arête géométrique de X . \square

Définition 1.30. Un groupe topologique a la *propriété (FA)* (point Fixe sur les Arbres) de Serre si toute action de G sur un arbre fixe un sommet ou une arête géométrique.

On peut donc reformuler le résultat précédent :

Proposition 1.31. *Un groupe qui est Kazhdan a la propriété (FA).*

Exemple 1.32. On définit le graphe de Cayley du groupe libre à N générateurs $\mathbb{F}_N = \langle x_1, \dots, x_N \rangle$ comme le graphe dont les sommets sont les éléments de \mathbb{F}_N et deux sommets a, b sont reliés s'il existe $b = x_i a$ pour un certain i . Comme \mathbb{F}_N est libre, son graphe de Cayley est un arbre. On a une action naturelle de \mathbb{F}_N sur son graphe de Cayley (donnée par $g \cdot a \mapsto ga$). Cette action ne fixe aucun sommet ni aucune arête géométrique, donc tout sous-groupe infini de \mathbb{F}_N n'a pas la propriété (FA). On en déduit qu'un sous-groupe infini de \mathbb{F}_N n'a pas la propriété (T).

1.5 Propriété de Haagerup

Proposition 1.33. *Soit G un groupe discret dénombrable. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *Le groupe G admet un 1-cocycle propre (i.e. un 1-cocycle $b : G \rightarrow \mathcal{H}$ tel que pour tout $R > 0$ l'ensemble $\{s \in G : \|b(s)\| \leq R\}$ est fini.)*
2. *Le groupe G admet une action affine isométrique propre sur un espace de Hilbert (réel).*

Dans ce cas on dit que le groupe G a la *propriété de Haagerup*. Pour les groupes infinis, la propriété de Haagerup peut être vue comme opposée à la propriété (T). On va l'utiliser pour montrer que les groupes libres et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ n'ont pas la propriété (T) (exemples 1.35 et 1.36).

Par définition de la propriété de Haagerup, on a le résultat suivant.

Proposition 1.34. *Si G a la propriété de Haagerup alors tout sous-groupe infini de G n'a pas la propriété (T). En particulier, un groupe avec la propriété de Haagerup et la propriété (T) est fini.*

Pour donner des exemples de groupes ayant la propriété de Haagerup, on montre la construction d'un 1-cocycle sur un groupe qui agit proprement sur un arbre.

Soit G un groupe qui agit sur un arbre $T = (V, \mathbb{E})$ et o une arête de T . On note π la représentation unitaire associée sur $\ell^2(\mathbb{E})$. Définissons $b(s) = c(s, o)$ (où la transformation c est celle définie dans la section 1.4.3). Des calculs montrent que b est un 1-cocycle sur G tel que $\|b(s)\|^2 = 2d(o, so)$, donc pour l'action propre de G sur T , le 1-cocycle associé est aussi propre.

Exemple 1.35. Comme on a déjà vu (exemple 1.32), les groupes libres de type fini ont la propriété de Haagerup. En effet, \mathbb{F}_N agit proprement sur son graphe de Cayley et le 1-cocycle associé est propre sur \mathbb{F}_N . Les groupes libres de type infini sont des unions croissantes de groupes libres de type fini et donc ont aussi la propriété de Haagerup.

Exemple 1.36. Pour un produit libre amalgamé de groupes $G = G_1 *_\Lambda G_2$ on définit l'arbre de Bass-Serre associé comme le graphe $T = (V, E)$, où les sommets sont $G/G_1 \sqcup G/G_2$ et les arêtes G/Λ , où $s\Lambda$ va de sG_1 à sG_2 . Le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ agit proprement sur son arbre de Bass-Serre et le 1-cocycle associé est propre sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, d'où $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ a la propriété de Haagerup.

On peut naturellement étendre la propriété de Haagerup.

Proposition 1.37 ([BO]). *Soit Λ un sous-groupe de G tel qu'il existe une moyenne μ sur $\ell^\infty(G/\Lambda)$ qui est G -invariante à gauche. Si Λ a la propriété de Haagerup, alors G l'a aussi.*

2 Propriété (T) pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$

Pour prouver que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ a la propriété (T), on utilise l'approche présentée par Y. Shalom dans [Sh], qui s'appuie sur la génération élémentaire bornée de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, pour $n \geq 3$. La preuve originale est un corollaire du résultat de D. Kazhdan [Ka] qui a montré que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ a la propriété (T) pour tout $n \geq 3$ et donc que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ l'a aussi comme réseau de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. La motivation pour cette recherche était le fait que la propriété (T) pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ implique que chaque réseau de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est de type fini.

2.1 Propriété (T) relative pour $\mathbb{Z}^2 \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$

Soient

$$U^\pm = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L^\pm = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lemme 2.1. Soit ν une mesure de probabilité finiment additive sur les boréliens de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Il existe alors un borélien $M \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et un élément $\gamma \in U^\pm \cup L^\pm$ tel que $|\nu(\gamma M) - \nu(M)| \geq 1/4$ pour l'action linéaire de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur \mathbb{R}^2 .

Démonstration. On divise \mathbb{R}^2 en huit domaines par les droites $x = 0$, $y = 0$, $x = y$ et $x = -y$ et on définit une partition de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ en quatre régions A, B, C, D avec

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : 0 \leq y < x \text{ ou } x < y \leq 0 \right\}$$

et B, C et D les images de A par des rotations anti-horaires de A d'angles $\pi/4$, $\pi/2$ et $3\pi/4$, respectivement. On a pour cette partition $U^+(A \cup B) = A$, $U^-(C \cup D) = D$, $L^+(A \cup B) = B$ et $L^-(C \cup D) = C$.

Supposons par l'absurde que $|\nu(\gamma M) - \nu(M)| < 1/4$ pour tout borélien $M \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et tout $\gamma \in U^\pm \cup L^\pm$. Alors pour $M = A \cup B$:

$$\nu(A) = \nu(A \cup B) - \nu(B) = \nu(A \cup B) - \nu(L^+(A \cup B)) < 1/4.$$

De même, $\nu(B), \nu(C), \nu(D) < 1/4$. Or, $\nu(A) + \nu(B) + \nu(C) + \nu(D) = \nu(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = 1$, d'où on obtient une contradiction. \square

On identifie $\widehat{\mathbb{Z}^2}$, le groupe dual de \mathbb{Z}^2 avec \mathbb{T}^2 , le tore de dimension 2 en associant $(e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}) \in \mathbb{T}^2$ au caractère $(m, n) \mapsto e^{2\pi i(xm + yn)}$. Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit sur \mathbb{Z}^2 , donc agit sur $\widehat{\mathbb{Z}^2}$. Cette action correspond à l'inverse de la transposée de l'action naturelle de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Soient les quatre vecteurs de \mathbb{Z}^2

$$e^\pm = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f^\pm = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

et l'ensemble générateur $Q = \{U^\pm, L^\pm, e^\pm, f^\pm\}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$.

Théorème 2.2. La paire $(Q, 1/10)$ est une paire de Kazhdan pour $\mathbb{Z}^2 \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$. En particulier, $\mathbb{Z}^2 \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ a la propriété (T) relative.

Démonstration. Soit (π, \mathcal{H}) une représentation unitaire de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ qui a un vecteur unitaire ξ qui est $(Q, 1/10)$ -invariant. Supposons par l'absurde qu'elle n'ait pas de vecteur non nul invariant par \mathbb{Z}^2 . Le groupe \mathbb{Z}^2 étant abélien, sa représentation unitaire $\pi|_{\mathbb{Z}^2}$ donne par le théorème A.6 une mesure à valeurs dans des projecteurs $E : \mathcal{B}(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Pour tout $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^2)$, on a $E(\gamma B) = \pi(\gamma^{-1})E(B)\pi(\gamma)$ (grâce à l'assertion d'unicité dans le théorème A.6). Comme ξ est unitaire, la mesure borélienne μ_ξ sur \mathbb{T}^2 définie par $\mu_\xi : B \mapsto \langle E(B)\xi, \xi \rangle$ est

de probabilité. $E(\{0\})$ est la projection sur les vecteurs $\pi_{|\mathbb{Z}^2}$ -invariants (proposition A.7) donc $E(\{0\}) = 0$ et $\mu_\xi(\{0\}) = 0$.

On identifie $\widehat{\mathbb{Z}^2}$ avec le carré $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ en associant à (x, y) le caractère de \mathbb{Z}^2

$$\chi_{x,y} : (m, n) \mapsto \exp(2\pi i(xm + yn)).$$

On pose $X = \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]^2$ et $\varepsilon = 1/10$.

Étape 1. On a $\mu_\xi(X) \geq 1 - \varepsilon^2$. En effet,

$$\|\pi(e^\pm)\xi - \xi\|^2 = \|(\pi(e^\pm) - \text{Id})\xi\|^2 = \int_{\widehat{\mathbb{Z}^2}} |\overline{\chi(e^\pm)} - 1|^2 d\mu_\xi(\chi).$$

Avec l'identification $\widehat{\mathbb{Z}^2} \simeq \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ ci-dessus, on obtient

$$\|\pi(e^\pm)\xi - \xi\|^2 = \int_{\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2} |e^{\pm 2\pi i x} - 1|^2 d\mu_\xi(x, y).$$

Le vecteur ξ est (Q, ε) -invariant et $e^\pm \in Q$, donc on a

$$\int_{\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2} |e^{\pm 2\pi i x} - 1|^2 d\mu_\xi(x, y) \leq \varepsilon^2.$$

Or, $|e^{\pm 2\pi i t} - 1|^2 = 2 - 2\cos(2\pi t) = 4\sin^2(\pi t) \geq 2$ quand $1/4 \leq |t| \leq 1/2$, donc

$$\varepsilon^2 \geq \int_{\substack{(x,y) \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 \\ |x| \geq 1/4}} 4\sin^2(\pi x) d\mu_\xi(x, y) \geq 2\mu_\xi\left(\left\{(x, y) \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2, |x| \geq 1/4\right\}\right),$$

d'où on trouve

$$\mu_\xi\left(\left\{(x, y) \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2, |x| \geq 1/4\right\}\right) \leq \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Et un raisonnement similaire avec f^\pm donne $\int_{\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2} |e^{\pm 2\pi i y} - 1|^2 d\mu_\xi(x, y) \leq \varepsilon^2$ puis

$$\mu_\xi\left(\left\{(x, y) \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2, |y| \geq 1/4\right\}\right) \leq \frac{\varepsilon^2}{2},$$

d'où découle le résultat énoncé.

Soit ν la mesure de probabilité sur \mathbb{T}^2 définie par $\nu(B) = \frac{\mu_\xi(B \cap X)}{\mu_\xi(X)}$ pour B borélien de \mathbb{T}^2 .

Étape 2. On a $|\nu(\gamma B) - \nu(B)| < \frac{1}{4}$ pour tout borélien B de \mathbb{T}^2 et tout $\gamma \in \{U^\pm, L^\pm\}$. En effet,

$$\begin{aligned} |\mu_\xi(\gamma B) - \mu_\xi(B)| &= |\langle \pi(\gamma^{-1})E(B)\pi(\gamma)\xi, \xi \rangle - \langle E(B)\xi, \xi \rangle| \\ &\leq |\langle \pi(\gamma^{-1})E(B)\pi(\gamma)\xi, \xi \rangle - \langle \pi(\gamma^{-1})E(B)\xi, \xi \rangle| \\ &\quad + |\langle \pi(\gamma^{-1})E(B)\xi, \xi \rangle - \langle E(B)\xi, \xi \rangle| \\ &= |\langle \pi(\gamma^{-1})E(B)(\pi(\gamma)\xi - \xi), \xi \rangle| + |\langle E(B)\xi, (\pi(\gamma)\xi - \xi) \rangle| \\ &\leq \|\pi(\gamma^{-1})E(B)\| \|\pi(\gamma)\xi - \xi\| + \|E(B)\| \|\pi(\gamma)\xi - \xi\| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

On a $\mu_\xi(X) \geq 1 - \varepsilon^2$, donc $0 \leq \mu_\xi(B) - \mu_\xi(B \cap X) \leq \varepsilon^2$. Alors

$$\begin{aligned} \mu_\xi(\gamma B \cap X) - \mu_\xi(B \cap X) &= (\mu_\xi(\gamma B \cap X) - \mu_\xi(\gamma B)) \\ &\quad + (\mu_\xi(\gamma B) - \mu_\xi(B)) + (\mu_\xi(B) - \mu_\xi(B \cap X)) \\ &\leq 0 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \end{aligned}$$

On peut remplacer B par $\gamma^{-1}B$ dans cette inégalité, d'où

$$|\mu_\xi(\gamma B \cap X) - \mu_\xi(B \cap X)| \leq 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

En utilisant $\mu_\xi(X) \geq 1 - \varepsilon^2$ et comme $\varepsilon = 1/10$, on obtient

$$|\nu(\gamma B) - \nu(B)| \leq \frac{2\varepsilon + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} = \frac{21}{99} < \frac{1}{4}$$

ce qui conclut cette étape.

Conclusion. Comme $\mu_\xi(\{0\}) = 0$, on peut voir ν comme une mesure sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Pour $\gamma \in \{U^\pm, L^\pm\}$, on a $\gamma X \subset]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ pour l'action usuelle de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur \mathbb{R}^2 .

Comme $\nu(X) = 1$, on a $|\nu(\gamma B) - \nu(B)| < 1/4$ pour tout borélien B de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, où γ agit naturellement sur \mathbb{R}^2 . Cela contredit le lemme 2.1, ce qui termine la preuve. \square

Corollaire 2.3. Soit $\varepsilon > 0$ et (π, \mathcal{H}) une représentation unitaire de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2$. Si π a un vecteur $(Q, \varepsilon/20)$ -invariant ξ , alors ξ est $(\mathbb{Z}^2, \varepsilon)$ -invariant, i.e. $\|\pi(t)\xi - \xi\| < \varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{Z}^2$.

Démonstration. On note \mathcal{H}_0 le sous-espace de \mathcal{H} qui contient tous les vecteurs $\pi(\mathbb{Z}^2)$ invariants. Le sous-groupe \mathbb{Z}^2 est un sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2$, donc \mathcal{H}_0 et $(\mathcal{H}_0)^\perp$ sont tous les deux $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2$ -invariants. Alors $\xi = \xi_0 + \xi_1$ où $\xi_0 \in \mathcal{H}_0$ et $\xi_1 \in (\mathcal{H}_0)^\perp$. Pour chaque $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2$ on a $\|\pi(\gamma)\xi_1 - \xi_1\|^2 = \|\pi(\gamma)\xi - \xi\|^2 - \|\pi(\gamma)\xi_0 - \xi_0\|^2 \leq \|\pi(\gamma)\xi - \xi\|^2 < (\varepsilon/20)^2$.

Le sous-espace $(\mathcal{H}_0)^\perp$ ne contient pas les vecteurs $\pi(\mathbb{Z}^2)$ -invariants et donc par le théorème précédent il existe $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2$ tel que $\|\pi(\gamma)\xi_1 - \xi_1\|^2 \geq (\|\xi_1\|^2/10)^2$.

La combinaison de ces deux inégalités donne $\left(\frac{\|\xi_1\|}{10}\right)^2 < \left(\frac{\varepsilon}{20}\right)^2$, d'où $\|\xi_1\| < \varepsilon/2$. Comme ξ_0 est $\pi(\mathbb{Z}^2)$ -invariant, on a $\|\pi(t)\xi - \xi\|^2 = \|\pi(t)\xi_0 - \xi_0\|^2 + \|\pi(t)\xi_1 - \xi_1\|^2 = \|\pi(t)\xi_1 - \xi_1\|^2$, d'où $\|\pi(t)\xi - \xi\| = \|\pi(t)\xi_1 - \xi_1\| \leq 2\|\xi_1\| < \varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{Z}^2$. \square

2.2 Génération bornée

Remarque : Les définitions et les résultats de cette section peuvent être étendus à un anneau topologique commutatif unitaire quelconque R . En particulier, si R est un anneau topologique commutatif avec la génération bornée tel qu'il existe un ensemble fini d'éléments de R qui engendre un sous-anneau dense, alors $\mathrm{SL}_n(R)$ a la propriété (T). En particulier, l'importance de l'approche de la génération bornée est qu'elle permet de prouver la propriété (T) même pour les groupes qui ne sont pas les réseaux dans des groupes ayant la propriété (T). (Le lecteur intéressé trouvera plus de détails dans [BHV].)

On rappelle que la matrice élémentaire $E_{ij}(t) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est la matrice dont les coefficients non-nuls sont l'unité sur la diagonale et $t \in \mathbb{Z}$ en (i, j) .

Définition 2.4. On dit que le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ a la *génération (élémentaire) bornée* s'il existe $\nu \in \mathbb{N}$ tel que chaque matrice de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ peut s'écrire comme un produit d'au plus ν matrices élémentaires. On note $\nu_n(\mathbb{Z})$ l'entier minimal ayant cette propriété.

Exemple 2.5. Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ n'a pas la génération bornée. En effet, si un groupe a la génération bornée, alors tous ses sous-groupes d'indice fini l'ont aussi. Mais \mathbb{F}_2 est un sous-groupe d'indice 12 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et n'a pas la génération bornée (on peut toujours considérer un mot plus long), donc $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ n'a pas la génération bornée.

On admet le théorème suivant (dont la preuve est assez technique). Les détails sont donnés dans [BHV] (théorème 4.1.3).

Théorème 2.6. Pour $n \geq 3$ le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ a la *génération élémentaire bornée* avec

$$\nu_n(\mathbb{Z}) \leq \frac{1}{2}(3n^2 - n) + 36.$$

En particulier, toute matrice de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ peut être écrite comme un produit d'au plus 48 matrices élémentaires.

2.3 Propriété (T) et constante de Kazhdan pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$

Lemme 2.7. Soit $1 \leq i, j \leq n$. Il existe un morphisme injectif $\alpha : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ tel que $E_{ij}(t) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est contenu dans $\alpha(\mathbb{Z}^2)$ pour chaque $t \in \mathbb{Z}$ et pour un $k \in \{0, \dots, n-2\}$ on a :

$$\alpha(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-k-2} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On démontre le lemme par récurrence. Si $n = 3$, il y a les plongements naturels de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ et leurs images sont de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Donc le lemme est vrai pour $n = 3$. Supposons maintenant que le lemme est vrai pour $n - 1$. Si $(i, j) \neq (1, n)$ et $(i, j) \neq (n, 1)$, on regarde un des sous-groupes

$$\begin{pmatrix} \mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{Z}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{Z}) \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Alors le lemme découle de l'hypothèse de récurrence. Si $(i, j) = (1, n)$, alors on peut prendre le plongement de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ avec l'image

$$\begin{pmatrix} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & 0 & \mathbb{Z}^2 \\ 0 & I_{n-4} & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

qui est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ et le transposé de ce sous-groupe pour $(i, j) = (n, 1)$. \square

Théorème 2.8. *Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ a la propriété (T) pour $n \geq 3$.*

Plus précisément, soit Q_n le sous-ensemble de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ consistant des $n^2 - n$ matrices élémentaires $E_{ij}(1)$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$. Alors $(Q_n, 1/20\nu_n)$ est une paire de Kazhdan pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, où $\nu_n = \nu_n(\mathbb{Z})$ est l'entier provenant de la génération élémentaire bornée de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$.

Démonstration. Soit $T_n = Q_n \cup Q_n^{-1}$. On veut montrer que $(T_n, 1/20\nu_n)$ est une paire de Kazhdan pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$.

Soit γ une matrice élémentaire quelconque de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ et (π, H) une représentation unitaire de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ avec un vecteur unitaire ξ qui est $(T_n, 1/20\nu_n)$ -invariant. Par le lemme 2.7, il y a un plongement α de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ tel que $\gamma \in \alpha(\mathbb{Z}^2)$ et $\alpha(Q) = T_n \cap \mathrm{Im}(\alpha)$ où Q est l'ensemble générateur de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2$ défini avant le théorème 2.2. Par le corollaire 2.3, ξ est $(\alpha(\mathbb{Z}^2), 1/\nu_n)$ -invariant ; en particulier, pour toute matrice élémentaire de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, on a $\|\pi(\gamma)\xi - \xi\| < 1/\nu_n$.

Soit maintenant γ une matrice arbitraire de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, alors par génération bornée il existe un entier $N \leq \nu_n$ et des matrices élémentaires $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ telles que $\gamma = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_N$. On a alors :

$$\|\pi(\gamma)\xi - \xi\| \leq \sum_{i=0}^{N-1} \|\pi(\gamma_1 \cdots \gamma_{N-i})\xi - \pi(\gamma_1 \cdots \gamma_{N-i-1})\xi\| = \sum_{j=1}^N \|\pi(\gamma_j)\xi - \xi\| \leq N/\nu_n \leq 1,$$

donc ξ est $(\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}), 1)$ -invariant. Alors par l'exemple 1.4 la représentation π a des vecteurs invariants non-nuls, ce qui conclut. \square

Remarque : L'estimation de la constante de Kazhdan pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ du théorème précédent a été améliorée par Kassabov [Kas] à la valeur $1/(42\sqrt{n} + 860)$.

3 Applications

On donne maintenant deux applications de la propriété (T) : elle peut servir à construire des familles de graphes expandeurs, qui sont des graphes connexes mais sans trop d'arêtes, et elle intervient dans la preuve du théorème du sous-groupe normal de Margulis, qui est un théorème de structure des réseaux irréductibles dans certains groupes de Lie.

3.1 Graphes expandeurs

On présente une construction de graphes expandeurs due à Margulis.

Définition 3.1. Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe localement fini et $A \subset V$ un sous-ensemble de ses sommets. On appelle *frontière de A* et on note ∂A l'ensemble des sommets dans $V \setminus A$ liés avec les sommets dans A par une arête :

$$\partial A = \{y \in V \setminus A \mid \exists x \in A : (x, y) \in E\}.$$

La *constante d'expansion* ou la *constante isopérimétrique* de Γ est le nombre

$$h(\Gamma) = \min \left\{ \frac{\#\partial A}{\min\{\#A, \#(V \setminus A)\}} \mid A \subsetneq V, 0 < \#A < \infty \right\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

La constante d'expansion d'un graphe montre « à quel point le graphe est connexe ». Remarquons $h(\Gamma_0 = (V, E_0)) \leq h(\Gamma_0 = (V, E_0 \cup E_1))$. Si on regarde le graphe Γ comme un modèle de réseau de communication, alors $h(\Gamma)$ est un moyen de mesurer la vitesse de transmission d'information dans le réseau.

Exemple 3.2.

1. Pour un graphe sans arête, $h = 0$.
2. Pour un graphe complet avec n sommets, $h = 1$.
3. Pour un cycle avec n sommets, $h = 2 / \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
4. Pour un arbre régulier de degré $k \geq 2$, $h = k - 2$.

On peut maintenant définir les graphes expandeurs.

Définition 3.3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ fixés. Une famille $\Gamma_n = (V_n, E_n)$ des graphes finis connexes est une famille de (k, ε) -*expandeurs* si

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \#V_n = \infty$.
2. $\deg(x) \leq k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in V_n$.
3. $h(\Gamma_n) \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La constante ε est appelée une *constante d'expansion* de $(\Gamma_n)_n$.

Une famille de (k, ε) -expandeurs existe toujours pour $k \geq 5$ et $\varepsilon = 1/2$ ([L]). On donne une construction explicite d'une famille de graphes expandeurs en utilisant la propriété (T). Pour la préparation on construit le graphe de Schreier associé à un sous-groupe H d'un groupe finiment engendré G .

Soit S un ensemble générateur de G tel que $S^{-1} = S$ et soit V un ensemble sur lequel G agit. Alors le graphe de Schreier $\Gamma(V, S)$ est un graphe dont V est l'ensemble des sommets et E son ensemble d'arêtes où $(x, y) \in E$ si et seulement si $y = sx$ pour un certain $s \in S$. Le graphe $\Gamma(V, S)$ est connexe si et seulement si l'action de G sur V est transitive.

Le graphe de Schreier $\Gamma(G/H, S)$ correspond à l'action naturelle de G sur G/H . Il est toujours connexe. Plus encore, chaque graphe de Schreier connexe $\Gamma(V, S)$ est de la forme $\Gamma(G/H, S)$ pour un sous-groupe H de G . Là on identifie V avec G/H pour H le stabilisateur d'un élément fixé v de V .

On note π_V la représentation de G sur $l^2(V)$ définie par

$$\pi_V(G)\xi(x) = \xi(g^{-1}x), \quad \xi \in l^2(V), x \in V, g \in G.$$

Si V est fini, les fonctions constantes sur V sont dans $l^2(V)$. De plus, le sous-espace

$$l_0^2(V) = \{\xi \in l^2(V) : \sum_{x \in V} \xi(x) = 0\} = \{1_V\}^\perp$$

est G -invariant. La représentation π_V^0 de G sur $l_0^2(V)$ n'a pas de vecteurs invariants non-nuls. Le lemme suivant établit un lien entre la constante d'expansion du graphe $\Gamma(V, S)$ et la constante de Kazhdan associée à S et π_V^0 . De plus, on va montrer qu'une famille de graphes de Schreier connexes est une famille d'expansesurs s'il n'y a pas de vecteurs presque invariants dans $l_0^2(V)$ non-nuls.

Lemme 3.4 ([BHV]). On a $h(\Gamma(V, S)) \geq \frac{\kappa(G, S, \pi_V^0)}{4}$, ou $\kappa(G, S, \pi_V^0)$ est la constante de Kazhdan associée à S et π_V^0 .

Théorème 3.5. Soit G un groupe avec un ensemble générateur fini S tel que $S = S^{-1}$. Soit $(H_n)_{n \geq 1}$ une famille de sous-groupes d'indice fini de G telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \#(G/H_n) = \infty$.

Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout n il n'y a pas de vecteur (S, ε) -invariant dans $l_0^2(G/H_n)$. Alors la famille de graphes de Schreier $\Gamma(G/H_n, S)$ est une famille de (k, ε) -expansesurs où $k = \#S$.

Démonstration. Il n'y a pas de vecteur (S, ε) -invariant dans $l_0^2(G/H_n)$, donc pour tout $\xi \in l_0^2(G/H_n)$ tel que $\|\xi\| = 1$ on a $\max_{s \in S} \|\pi_{G/H_n} \xi - \xi\| \geq \varepsilon$. On déduit $h(\Gamma_n) \geq \varepsilon^2/4$ par le lemme précédent. \square

Soit G un groupe avec la propriété (T) qui admet un ensemble générateur fini S tel que $S = S^{-1}$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que (S, ε) est une paire de Kazhdan. Par le lemme précédent pour un sous-groupe H de G d'indice fini on a $h(\Gamma(G/H, S)) \geq \varepsilon^2/4$ pour le graphe de Schreier associé.

Corollaire 3.6. Soit G un groupe résiduellement fini, infini qui a la propriété (T) avec un ensemble générateur fini S tel que $S = S^{-1}$ et une constante de Kazhdan $\varepsilon > 0$.

Pour chaque suite décroissante $(H_n)_n$ de sous-groupes d'indices finis de G telle que $\bigcap_n H_n = \{1\}$, la famille de graphes de Schreier $\Gamma(G/H_n, S)$ est une famille de $(k, \varepsilon^2/4)$ -expansesurs, où $k = \#S$.

On décrit deux exemples de familles de graphes expansesurs qui utilisent la propriété (T). La deuxième construction est la construction originale de Margulis dans [Ma].

Exemple 3.7. Soit $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ avec l'ensemble générateur $S = \{E_{ij}^{\pm 1} \mid 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j\}$, où $E_{ij}^{\pm 1} = E_{ij}(\pm 1)$ est une matrice élémentaire. On rappelle que G a la propriété (T) et que la constante de Kazhdan pour l'ensemble S est $\varepsilon \approx 10^{-3}$.

Soit $G(p) = \{A \in G \mid A \equiv I_3 \pmod{p}\}$ pour un nombre premier p . De manière équivalente, $G(p)$ est le noyau du morphisme surjectif $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ donné par la réduction modulo p . Comme $G/G(p) \cong \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, le sous-groupe $G(p)$ est d'indice fini et donc la famille de graphes de Schreier $(\Gamma(G/G(p), S))_p$ est une famille de (k, ε') -expansesurs avec $k = \#S = 12$, $\varepsilon' = \varepsilon^2/4 \approx 10^{-6}$.

Exemple 3.8. Soit $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2$ avec l'ensemble générateur S qui contient

$$\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2.$$

La paire (G, \mathbb{Z}^2) a la propriété (T) et $\varepsilon = 1/10$ est la constante de Kazhdan pour S . L'action de G sur \mathbb{Z}^2 par transformations affines induit une action transitive de G sur $V_n = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La famille de graphes de Schreier $(\Gamma(V_n, S))_n$ associés est donc une famille de (k, ε') -expansesurs avec $k = \#S = 8$, $\varepsilon' = \varepsilon^2/4 = 1/400$.

On a déjà vu que pour un groupe infini, la propriété (T) peut être vue comme « opposée » à la moyennabilité. Le résultat suivant montre les conséquences qu'entraîne la différence cruciale entre ces deux propriétés fondamentales pour les propriétés d'une famille de graphes de Schreier.

Théorème 3.9 (Lubotzky-Weiss, [LW]). *Soit G un groupe moyennable discret avec un ensemble générateur fini S tel que $S = S^{-1}$. Soit $(H_n)_{n \geq 1}$ une famille de sous-groupes d'indice fini de G telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \#(G/H_n) = \infty$.*

Alors la famille de graphes de Schreier $\Gamma(G/H_n, S)$ n'est pas une famille d'expandeurs.

3.2 Le théorème du sous-groupe normal de Margulis

Définition 3.10. Si G est un groupe topologique localement compact, un **réseau** dans G est un sous-groupe discret Γ de G tel que G/Γ est de volume fini (pour la mesure induite par la mesure de Haar sur G).

Historiquement, Kazhdan a introduit la propriété (T) pour démontrer que des réseaux dans certains groupes de Lie étaient de type fini. En effet, on a le résultat suivant :

Proposition 3.11 (Kazhdan, [Ka]). *Si G est localement compact et a la propriété (T), alors ses réseaux ont aussi la propriété (T).*

Ainsi, si un groupe localement compact a la propriété (T), ses réseaux sont de type fini par la proposition 1.7.

Définition 3.12.

- Un réseau Γ dans un groupe de Lie G est dit **irréductible** si pour tout sous-groupe normal fermé non-discret H de G l'image de Γ par la projection $G \rightarrow G/H$ est dense.
- Un groupe de Lie est dit **semi-simple** s'il ne contient pas de sous-groupe distingué, connexe et abélien non-trivial.
- Si G est un groupe de Lie semi-simple qui est un sous-groupe fermé de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ pour un certain n , le **rang** de G est le plus grand entier k tel que G contienne un sous-groupe abélien de dimension k qui est conjugué à un sous-groupe des matrices diagonales dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. (On peut démontrer que la définition du rang ne dépend pas du plongement de G dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$).

Théorème 3.13 (Margulis [Ma3]). *Soit G un groupe de Lie connexe, semi-simple, de centre fini et de rang supérieur à 2. Soit Γ un réseau irréductible dans G et $N \triangleleft \Gamma$. Alors N est ou bien contenu dans le centre de G , donc fini, ou bien d'indice fini dans Γ .*

Ce théorème, purement algébrique, se démontre via la stratégie suivante. Comme réseau dans un groupe de Lie de rang supérieur à 2, Γ a la propriété (T). Si N n'est pas contenu dans $\mathcal{Z}(G)$, on démontre que Γ/N est moyennable. Comme la propriété (T) passe aux quotients, Γ/N a la propriété (T) et est moyennable, il est donc nécessairement fini.

3.3 Questions ouvertes

- ? Existe-il un sous-groupe d'indice infini de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ qui a la propriété (T) ?
- ? Existe-il un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui n'est pas un réseau et qui a la propriété (T) ?
- ? Est-il vrai qu'un groupe qui peut être ordonné à gauche n'a pas la propriété (T) ?
- ? Quelles sont les conséquences topologiques et géométriques du fait que le groupe fondamental d'une variété compacte a la propriété (T) ?

A Le groupe dual et ses propriétés

A.1 Groupe dual

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert. L'espace de Hilbert conjugué $\bar{\mathcal{H}}$ est l'espace de Hilbert avec les mêmes éléments, la même addition, la multiplication scalaire $(\lambda, \xi) \mapsto \bar{\lambda}\xi$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\xi \in \mathcal{H}$ et le produit scalaire $\langle \xi, \tau \rangle_{\bar{\mathcal{H}}} = \langle \tau, \xi \rangle_{\mathcal{H}}$.

Chaque représentation unitaire (π, \mathcal{H}) d'un groupe topologique G définit une représentation $(\bar{\pi}, \bar{\mathcal{H}}) : \bar{\pi}(g)$ est l'opérateur sur $\bar{\mathcal{H}}$ qui coïncide avec $\pi(g)$ en tant qu'application ensembliste. Dans ce cas $(\bar{\pi}, \bar{\mathcal{H}})$ est bien une représentation unitaire de G et $\bar{\bar{\pi}} = \pi$. On l'appelle la représentation *contragrédiente* ou *conjuguée*.

Définition A.1.

- Un *caractère unitaire* de G est un morphisme continu $\chi : G \rightarrow \mathbb{S}^1$, où \mathbb{S}^1 est le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.
- On dit que deux représentations unitaires (π_1, \mathcal{H}_1) et (π_2, \mathcal{H}_2) sont *équivalentes* s'il existe un opérateur linéaire isométrique surjectif continu T de \mathcal{H}_1 à \mathcal{H}_2 tel que $T\pi_1(g) = \pi_2(g)T$ pour tout $g \in G$. On note alors $\pi_1 \simeq \pi_2$.
- Une représentation unitaire (π, \mathcal{H}) de G est dite *irréductible* si les seuls espaces fermés G -invariants de \mathcal{H} sont $\{0\}$ et \mathcal{H} .
- L'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G est le *dual unitaire* de G et est noté \hat{G} .

On munit maintenant \hat{G} d'une structure de groupe topologique. On se restreint au cas d'un groupe G abélien.

Le résultat suivant est le corollaire du lemme de Schur pour les représentations unitaires. Plus de détails sont fournis dans [BHV].

Proposition A.2. *Si G est un groupe topologique abélien, alors toutes ses représentations unitaires irréductibles sont de dimension 1. On peut donc identifier le dual unitaire \hat{G} avec l'ensemble des caractères unitaires de G .*

L'ensemble des caractères unitaires de G est un groupe pour la multiplication ponctuelle :

$$(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g) \text{ pour tout } g \in G; \quad 1_{\hat{G}} = (g \mapsto 1 \text{ pour tout } g \in G); \quad \chi^{-1} = \bar{\chi}$$

où $1_{\hat{G}} = (g \mapsto 1 \forall g \in G)$ est le caractère trivial (correspond à la représentation triviale) et $\bar{\chi}$ est le caractère conjugué (correspond à la représentation contragrédiente). Ainsi, si G est abélien, l'identification entre \hat{G} et le groupe des caractères unitaires montre que \hat{G} est aussi abélien.

Définition A.3. Soit G un groupe abélien topologique. Le dual unitaire de G est appelé le *groupe dual* de G . Muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de G , le groupe dual \hat{G} est un groupe topologique.

Exemple A.4. Le groupe dual de \mathbb{Z}^n est les caractères de \mathbb{Z}^n , donc chaque élément (caractère) peut être identifié avec ses images (points dans \mathbb{S}^1) de tous les générateurs $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Ainsi $\hat{\mathbb{Z}^n} = \mathbb{T}^1 \times \dots \times \mathbb{T}^1 = \mathbb{T}^n$.

A.2 Mesure à valeurs dans des projecteurs

Soit G un groupe discret abélien. On voudrait décrire toutes les représentations unitaires de G par une mesure à valeurs dans des projecteurs sur \hat{G} .

Définition A.5. Soit X un espace localement compact muni de $\mathcal{B}(X)$ la tribu de ses boréliens, \mathcal{H} un espace de Hilbert et $\text{Proj}(\mathcal{H})$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Une *mesure à valeurs dans des projecteurs* sur X est une fonction $E : \mathcal{B}(X) \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{H})$ ayant les propriétés suivantes :

1. $E(\emptyset) = 0$ et $E(X) = \text{id}$;
2. $E(B \cap B') = E(B)E(B')$ pour tout B, B' dans $\mathcal{B}(X)$;
3. $E(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E(B_n)$, où la somme converge pour la topologie forte sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Si E est une mesure à valeurs dans des projecteurs sur X , pour $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, $dE_{\xi, \eta} : B \mapsto \langle E(B)\xi, \eta \rangle$ est une mesure borélienne (à valeurs complexes) sur X . Alors, $dE_{\xi, \xi}$ est positive et $dE_{\xi, \xi}(X) = \|\xi\|^2$ donc est finie. Par polarisation, $4dE_{\xi, \eta} = dE_{\xi+\eta, \xi+\eta} - dE_{\xi-\eta, \xi-\eta} + idE_{\xi+i\eta, \xi+i\eta} - idE_{\xi-i\eta, \xi-i\eta}$, donc $dE_{\xi, \eta}$ est aussi finie.

Pour $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ borélienne bornée, la forme sesquilineaire

$$(\xi, \eta) \mapsto \int_X f(x) dE_{\xi, \eta}(x)$$

est bornée sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Il existe donc un opérateur dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ noté $\int_X f(x) dE(x)$ tel que

$$\left\langle \left(\int_X f(x) dE(x) \right) \xi, \eta \right\rangle = \int_X f(x) dE_{\xi, \eta}(x).$$

On obtient donc un morphisme d'algèbres $f \mapsto \int_X f(x) dE(x)$. De plus, il envoie \bar{f} sur l'adjoint de $\int_X f(x) dE(x)$, on dit que c'est un *morphisme de *-algèbres*. En particulier, on a

$$\left\| \left(\int_X f(x) dE(x) \right) \xi \right\|^2 = \int_X |f(x)|^2 dE_{\xi, \xi}(x).$$

On dit de plus que E est *régulière* si $dE_{\xi, \xi}$ est régulière pour tout $\xi \in \mathcal{H}$.

Le théorème suivant est une sorte de théorème spectral pour les représentations unitaires de groupes abéliens (localement compacts). Une démonstration est proposée dans [BHV].

Théorème A.6 (Stone, Naimark, Ambrose, Godement). *Soit (π, \mathcal{H}) une représentation unitaire d'un groupe abélien localement compact G . Il existe une unique mesure à valeurs dans des projecteurs régulière $E_\pi : \mathcal{B}(\widehat{G}) \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{H})$ sur \widehat{G} telle que*

$$\pi(x) = \int_{\widehat{G}} \overline{\chi(x)} dE_\pi(\chi)$$

pour tout $x \in G$. De plus, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ commute avec $\pi(x)$ pour tout $x \in G$ si et seulement si T commute avec $E(B)$ pour tout $B \in \widehat{G}$.

Réciproquement, si E est une mesure à valeurs dans des projecteurs régulière sur \widehat{G} , alors $\pi(x) = \int_{\widehat{G}} \overline{\chi(x)} dE(\chi)$ est une représentation unitaire de G sur \mathcal{H} .

Proposition A.7. *Si E_π est la mesure à valeurs dans des projecteurs définie dans le théorème précédent, alors $E_\pi(\{1_{\widehat{G}}\})$ est le projecteur sur l'espace des vecteurs invariants par π .*

Démonstration. Pour $\xi \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned} \xi \text{ invariant} &\iff \forall g \in G, \|\pi(g)\xi - \xi\|^2 = 0 \\ &\iff \forall g \in G, \int_{\widehat{G}} |\overline{\chi(g)} - 1|^2 dE_{\pi, \xi, \xi}(\chi) = 0 \\ &\iff dE_{\pi, \xi, \xi} = \delta_{1_{\widehat{G}}} \\ &\iff E_\pi(\{1_{\widehat{G}}\})\xi = \xi \end{aligned}$$

La troisième ligne venant du fait que les caractères de \widehat{G} séparent les points. □

Références

- [BHV] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, Alain Valette. *Kazhdan's Property (T)*. *New Mathematical Monographs*, Series Number 11, 1st Edition. 2007.
- [BO] Nathaniel P. Brown, Narutaka Ozawa. *C*-algebras and finite dimensional approximations*. *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 88. 2008.
- [CH1] Cyril Houdayer. *Ergodic group theory*. <https://cyrilhoudayer.com/wp-content/uploads/2022/04/egt-orsay.pdf>
- [D] P. Delorme. *1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles*. Produits tensoriels continus et représentations. *Bull. Soc. Math. France*, 105 :281–336. 1977.
- [Ka] D.A. Kazhdan. *On the connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*. *Funkcional. Anal. i Prilozen.*, 1. 1967.
- [Kas] M. Kassabov. *Kazhdan constants for $SL_n(\mathbb{Z})$* . Preprint, 2003.
- [L] A. Lubotzky. *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*. Birkhauser. 1994.
- [LW] A. Lubotzky, B. Weiss. *Groups and expanders*. *Expanding graphs*, p.95–109. DIMACS Series in Discrete Mathematics, Volume 10, Amer. Math. Soc. 1993.
- [Ma] G.A. Margulis. *Explicit constructions of concentrators*. *Problems of Inform. Transm.*, 10 :325–332. 1975. [Original russe : *Problemy Peredaci Informacii*, 9 :4, 71–80. 1973.]
- [Ma2] G.A. Margulis. *Explicit constructions of graphs without short cycles and low degree*. *Combinatorica*, 2(1) :71–78. 1982.
- [Ma3] G.A. Margulis. *Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups*. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics*, 1991
- [Rud] Walter Rudin. *Fourier Analysis on Groups*. Interscience Tracts in Pure and Applied Math., No. 12. Wiley, New York. 1962.
- [Sh] Yehuda Shalom. *Bounded generation and Kazhdan's property (T)*. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, tome 90. 1999.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
 45 RUE D'ULM, PARIS, FRANCE 75005
irina.mamsurova@ens.psl.eu
hadrien.chalandon--goskrzynski@ens.psl.eu