

Sur la symétrie radiale de solutions à des équations elliptiques quasi-linéaires

Mayeul CHAPUS

Simon ELIS

31 mai 2024

Le but de ce mémoire est d'étudier la symétrie des solutions d'équations aux dérivées partielles, dites elliptiques quasi-linéaires :

$$-\Delta u = f(u) \tag{1}$$

où u est définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n à valeurs réelles, et $f \in C^1(\mathbb{R})$.

On cherchera à montrer, sous certaines conditions, la symétrie radiale de la fonction u .

Pour cela, nous étudierons deux approches du problème, l'une se basant sur le principe du maximum pour les opérateurs elliptiques, l'autre pouvant être qualifiée d'énergétique. Les deux approches utilisent la technique nommée "*moving plane method*".

1 Approche classique

On se penche ici sur des solutions fortes et positives de l'équation (1), définies sur \mathbb{R}^n . Le théorème que nous allons montrer est le suivant, dû à Y. Li et W.M. Ni [YN79] :

Théorème 1. *Soit u de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , de classe C^2 , strictement positive et f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe C^1 et telle que $f' \leq 0$ sur un voisinage de 0. Si l'on a :*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

alors u est symétrique radialement par rapport à un point x_0 , et $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$, avec $r = |x - x_0|$.

1.1 La preuve

1.1.1 Notations et objets

Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit [YN79] :

$$T_\lambda = \{y \in \mathbb{R}^n, x_1 = \lambda\}$$

$$\Sigma_\lambda = \{y \in \mathbb{R}^n, x_1 < \lambda\}$$

et x^λ comme étant la réflexion de x par rapport à T_λ , i.e. $x^\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_n)$.

On pose également l'ensemble :

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}^n, x_1 < \lambda \Rightarrow u(x) > u(x^\lambda), \forall x \in T_\lambda, \frac{\partial u}{\partial x_1} > 0\}.$$

et la fonction :

$$w_\lambda(x) = u(x) - u(x^\lambda).$$

L'ensemble Λ est l'ensemble qui incarne le nom "moving planes" de la méthode employée. On aura relativement simplement l'existence d'un élément λ grand dans Λ . Cela voudra dire que les éléments à gauche du plan T_λ seront plus grand que leur réflexion par rapport à T_λ . On va ensuite faire bouger λ vers la gauche jusqu'à qu'on ne soit plus dans Λ , et de façon intuitive, l'élément limite nous donnera le plan de symétrie. [GNN79]

1.1.2 Etapes de la preuve

La preuve se déroule en quatre étapes. [YN79]

1. On montre que Λ contient tous les réels assez grands, en particulier est non-vide.
2. On montre que Λ est un ouvert.
3. On étudie la borne de la composante connexe non bornée en l'infini à droite pour trouver un plan de symétrie.
4. On montre que si l'on a un plan de symétrie pour toute direction, alors on a une symétrie radiale.

1.1.3 Première étape

Montrons que Λ contient tous les réels assez grands.

Pour trouver une borne, on va utiliser les propriétés asymptotiques de u et f' . On rappelle que $f' \leq 0$ sur un voisinage de 0. Il existe donc $r_0 > 0$ tel que :

$$\forall |s| < r_0, f'(s) \leq 0. \quad (3)$$

De plus, puisque :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0$$

alors on peut trouver $0 < R_0 < R_1$ tel que :

$$\begin{cases} \max_{|x| \geq R_0} u(x) < r_0 \\ \max_{|x| \geq R_1} u(x) < \min_{|x| \leq R_0} u(x) \end{cases} \quad (4)$$

La continuité, stricte positivité de u et le théorème des bornes atteintes nous garantit l'existence de ces min et max.

Montrons maintenant que si $\lambda \geq R_1$, alors $\lambda \in \Lambda$. Soit λ un tel réel. Les propriétés 3 et 4 qui définissent R_1 permettent de dire que :

$$\forall x \in \bar{B}(0, R_0) \subset \Sigma_\lambda, w_\lambda(x) > 0.$$

On aimerait maintenant avoir :

$$\begin{cases} \forall x \in \Sigma_\lambda \setminus \bar{B}(0, R_0), w_\lambda(x) > 0, \\ \forall x \in T_\lambda, \frac{\partial w_\lambda}{\partial x_1} < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Pour le montrer, on va utiliser un principe du maximum (théorème 2) avec w_λ . On a donc besoin de montrer quelques propriétés sur w_λ .

On montre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \Delta w_\lambda(x) = \Delta u(x) - \Delta u(x^\lambda)$$

Comme u vérifie 1, il s'ensuit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \Delta w_\lambda(x) + c(x)w_\lambda(x) = 0.$$

avec :

$$c(x) = \int_0^1 f'[u(x^\lambda) + t[u(x) - u(x^\lambda)]] dt$$

$$\text{car } -\Delta w_\lambda = f(u(x)) - f(u(x^\lambda)) = w_\lambda(x) \int_0^1 f'[u(x^\lambda) + t[u(x) - u(x^\lambda)]] dt.$$

Pour appliquer un principe du maximum ici, il nous faut regarder le signe de c . Grâce à 4, on a :

$$\forall t \in [0, 1], u(x^\lambda) + t[u(x) - u(x^\lambda)] < r_0.$$

Puis grâce à 3, on a :

$$\forall x \in \Sigma_\lambda \setminus \bar{B}(0, R_0), c(x) \leq 0.$$

Par conséquent, w vérifie donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Sigma_\lambda \setminus \bar{B}(0, R_0), \Delta w_\lambda(x) + c(x)w_\lambda(x) = 0, \\ \forall x \in \partial(\Sigma_\lambda \setminus \bar{B}(0, R_0)), w_\lambda(x) = 0, \\ \lim_{\substack{|x| \rightarrow +\infty \\ x \in \Sigma_\lambda \setminus \bar{B}(0, R_0)}} w_\lambda(x) = 0, \\ \forall x \in \Sigma_\lambda \setminus \bar{B}(0, R_0), c(x) \leq 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

On applique alors un principe du maximum (théorème 2). Il faut alors nous assurer que w_λ ne peut pas être identiquement nulle, ce qui est le cas puisque sur $\bar{B}(0, R_0)$, $w > 0$. On aurait une rupture de la continuité sinon, en utilisant le théorème des bornes atteintes sur $\bar{B}(0, R_0)$. En utilisant le lemme de Hopf (théorème 6), on obtient alors 5. De ce fait, $[R_1, +\infty[\in \Lambda$.

Voici ici en détail le principe du maximum utilisé. On le montre avec des inégalités pour les deux premières hypothèses, dans le but de mieux comprendre l'importance des hypothèses et d'utiliser le cas strict avec la première hypothèse.

Théorème 2. *Soit w continue sur l'adhérence d'un ouvert connexe Ω , de classe C^2 sur Ω , et qui vérifie :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega, \Delta w(x) + c(x)w(x) \leq 0, \\ \forall x \in \partial\Omega, w(x) \geq 0, \\ \lim_{\substack{|x| \rightarrow +\infty \\ x \in \Omega}} w(x) = 0, \\ \forall x \in \Omega, c(x) \leq 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

c étant une fonction définie sur Ω , bornée sur tout compacts.

Alors soit $w > 0$, soit w est identiquement nulle.

1.1.4 Deuxième étape

Montrons que Λ est un ensemble ouvert.

Soit $\lambda_0 \in \Lambda$. Par ce que l'on a montré à la première étape, on peut et on va supposer que $\lambda_0 \leq R_1$. On va procéder comme à l'étape 1, c'est-à-dire, que pour λ assez proche de λ_0 , on aura facilement les conditions d'appartenance à Λ remplies sur les x assez proches de $(0, 0, \dots, 0)$. Pour les autres x , on appliquera comme à l'étape 1 le principe du maximum, et le lemme de Hopf.

Puisque u est de classe C^2 et $\lambda_0 \in \Lambda$, on peut trouver $0 < \epsilon_1 < 1$, tel que :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0 \text{ sur } \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_0 - 4\epsilon_1 \leq x_1 \leq \lambda_0 + 4\epsilon_1, |x'| \leq R_1 + 1\} \quad (8)$$

On a donc :

$$\begin{cases} u(x) - u(x^\lambda) > 0 \text{ sur } \{x \in \bar{B}_{R_1+1}(0) \mid \lambda_0 - \epsilon_1 \leq x_1 < \lambda\}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} < 0 \text{ sur } T_\lambda \cap \bar{B}_{R_1+1}(0). \end{cases} \quad (9)$$

quelque soit l'élément λ de $]\lambda_0 - \epsilon_1, \lambda_0 + \epsilon_1[$.

On pose maintenant

$$M = 2 \max \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|, |x_1| \leq 2(R_1 + 1), |x'| \leq R_1 + 1 \right\}$$

et

$$\delta = \min \{u(x) - u(x^{\lambda_0}), |x'| \leq R_1 + 1, -(R_1 + 1) \leq x_1 \leq \lambda_0 - 2\epsilon_1\}$$

Ces deux quantités existent et $\delta > 0$ par le théorème des bornes atteintes, et ainsi :

$$u(x) - u(x^\lambda) > 0 \text{ sur } \{x \in \bar{B}_{R_1+1}(0) \mid -(R_1 + 1) \leq x_1 \leq \lambda_0 - 2\epsilon_1\} \quad (10)$$

pour n'importe quel λ dans $]\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon[$, où $\epsilon = \min(\epsilon_1, \frac{\delta}{M}, \lambda_0)$. En combinant 8 et 9, il vient :

$$\begin{cases} u(x) - u(x^\lambda) > 0 \text{ sur } \bar{B}_{R_1+1}(0) \cap \Sigma_\lambda, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} < 0 \text{ sur } T_\lambda \cap \bar{B}_{R_1+1}(0). \end{cases} \quad (11)$$

pour tout λ dans $]\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon[$.

De plus, de la même manière qu'à l'étape 1, $w_\lambda = u(x) - u(x^\lambda)$ vérifie :

$$\begin{cases} \forall x \in \Sigma_\lambda \setminus \bar{B}_{R_1+1}(0), \Delta w_\lambda(x) + c(x)w_\lambda(x) = 0, \\ \forall x \in \partial(\Sigma_\lambda \setminus \bar{B}_{R_1+1}(0)), w_\lambda(x) \geq 0, \\ \lim_{\substack{|x| \rightarrow +\infty \\ x \in \Sigma_\lambda \setminus \bar{B}_{R_1+1}(0)}} w_\lambda(x) = 0, \\ \forall x \in \Sigma_\lambda \setminus \bar{B}_{R_1+1}(0), c(x) \leq 0. \end{cases} \quad (12)$$

De même qu'à l'étape 1, on applique un principe du maximum (théorème 2) et le lemme de Hopf (théorème 6), puisque w_λ ne peut pas être identiquement nulle. Ainsi :

$$\begin{cases} \forall x \in \Sigma_\lambda \setminus \bar{B}_{R_1+1}(0), w_\lambda(x) > 0, \\ \forall x \in T_\lambda \setminus \bar{B}_{R_1+1}(0), \frac{\partial u}{\partial x_1} < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Ceci, combiné avec 10, montre que $]\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon[\subset \Lambda$, et *in fine* que Λ est ouvert.

1.1.5 Troisième étape

Trouvons maintenant le plan de symétrie. Comme annoncé précédemment, on va s'intéresser à un élément limite de Λ . Soit $]\lambda_1, \infty[$ la composante connexe non bornée à droite de Λ .

Montrons tout d'abord que Λ n'est pas R , et donc que λ_1 est bien un réel. Supposons le contraire par l'absurde. Alors, en considérant des $\lambda > 0$, et avec le fait que $-\lambda \in \Lambda$, alors $u(-\lambda, 0, \dots, 0) > u(0, 0, \dots, 0)$. En faisant tendre λ vers l'infini, on obtient :

$$u(0, 0, \dots, 0) = 0$$

Ce qui est absurde par stricte positivité de u .

Maintenant, par continuité de u , on a :

$$\forall x \in \Sigma_{\lambda_1}, w_\lambda(x) = u(x) - u(x^{\lambda_1}) \geq 0.$$

Il en résulte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Sigma_{\lambda_1}, \Delta w_\lambda(x) + c(x)w_\lambda(x) \leq 0, \\ \forall x \in \partial(\Sigma_{\lambda_1}) = T_{\lambda_1}, w_\lambda(x) = 0, \\ \lim_{\substack{|x| \rightarrow +\infty \\ x \in \Sigma_{\lambda_1}}} w_\lambda(x) = 0, \\ \forall x \in \Sigma_{\lambda_1}, w_\lambda(x) \geq 0. \end{array} \right. \quad (14)$$

On va pouvoir appliquer ici le théorème 2. En effet, même s'il l'on n'a pas nécessairement $c \leq 0$, on a quand même c borné. En notant M un de ses majorant, on a alors :

$$\forall x \in \Sigma_{\lambda_1}, \Delta w_\lambda(x) + (c(x) - M)w_\lambda(x) \leq -Mw_\lambda(x) \leq 0$$

par positivité de w_λ . On peut donc appliquer le théorème 2 et le lemme de Hopf.

$$\forall x \in \Sigma_{\lambda_1}, w_\lambda(x) = 0, \quad (15)$$

ou soit :

$$\forall x \in \Sigma_{\lambda_1}, w_\lambda(x) > 0, \forall x \in T_{\lambda_1}, \frac{\partial w_\lambda}{\partial x_1} < 0. \quad (16)$$

Si 15 est vérifié, alors le résultat que l'on voulait prouver est montré. Si par contre 16 est vérifié, alors $\lambda_1 \in \Lambda$, ce qui est absurde par ouverture de Λ . L'étape trois est donc prouvée.

1.1.6 Quatrième étape

On a montré avec l'étape 3 que l'on dispose d'un plan de symétrie normal à e_1 . On peut refaire le même raisonnement avec chaque direction, on dispose donc d'un plan de symétrie normal à chaque direction. On montrera alors en annexe que cela implique une symétrie radiale autour d'un point x_0 . La stricte négativité de $\frac{\partial u}{\partial r}$ découle du fait que si jamais x_0 est le centre de symétrie de u , alors $\frac{\partial u}{\partial r}(r) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0 + r.e_1)$ avec e_1 le vecteur unitaire dans le sens et la direction des x_1 croissants, du fait que dans Λ , on s'est bien assuré d'avoir la condition $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$ sur T_λ et finalement du fait que si $\lambda > \lambda_1$, alors $\lambda \in \Lambda$.

2 Approche énergétique

2.1 Changement de perspective

Ces équations sont étroitement liées à des problèmes d'optimisation pouvant trouver son intérêt notamment du côté de la physique. Nos résultats

et preuves sur ces problèmes de minimisation sont adaptés de l'article d'O. Lopes [Lop96]. Le lien avec notre équation aux dérivées partielles, traité comme une évidence dans cet article, a été détaillé par nos soins.

2.1.1 Cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$

Commençons par poser $\alpha = f'(0)$ et $g : t \mapsto -f(t) + \alpha t$ de sorte à avoir $g'(0) = 0$ et u solution de (1) si et seulement si :

$$-\Delta u + g(u) = \alpha u \quad (17)$$

On s'intéresse au problème de minimisation sous contrainte de la fonctionnelle suivante :

$$J_1 : \begin{cases} H^1(\mathbb{R}^n) & \rightarrow \mathbb{R} \\ u & \mapsto \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^n} F(u) \end{cases}$$

où G est la primitive de g qui s'annule en 0, sous la contrainte

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} u^2 = 1 \quad .$$

2.1.2 Cas où $\Omega = B$, une boule centrée en l'origine

Cette fois-ci, on s'intéresse à la fonctionnelle suivante :

$$J_2 : \begin{cases} H_0^1(B) & \rightarrow \mathbb{R} \\ u & \mapsto \frac{1}{2} \int_B |\nabla u|^2 + \int_B F(u) \end{cases}$$

où F est la primitive de $-f$ qui s'annule en 0.

2.1.3 Lien avec l'équation aux dérivées partielles

Lemme 1. *Si u est un minimiseur admissible de J_1 , alors u est solution sur \mathbb{R}^n de l'équation aux dérivées partielles (17) pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. On munit $H^1(\mathbb{R}^n)$ de son produit scalaire usuel, calculons la différentielle de J_1 , appliquée en des fonctions test : on a $\forall u \in H^1(\mathbb{R}^n), \forall h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} J_1(u+h) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u+h)|^2 + \int_{\mathbb{R}^n} G(u+h) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} J(u) + \int_{\mathbb{R}^n} [\nabla u \cdot \nabla h + \frac{1}{2} |\nabla h|^2 + hg(u) + O(h^2)] \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} J(u) + \int_{\mathbb{R}^n} [\nabla u \cdot \nabla h + hg(u) + O(h^2)] \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} J(u) + \int_{\mathbb{R}^n} [\nabla u \cdot \nabla h + hg(u)] + O(h^2) \end{aligned}$$

Or, par définition de la dérivée au sens des distributions,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla h = - \int_{\mathbb{R}^n} h \Delta u$$

d'où

$$DJ_1(u)(h) = \int_{\mathbb{R}^n} h(-\Delta u + g(u)) \quad .$$

De même, la différentielle de la contrainte en u est $h \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} hu$. Le théorème des multiplicateurs de Lagrange permet de conclure l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{-\Delta u + g(u) = \alpha u}$$

□

Lemme 2. *Si u est un minimiseur de J_2 , alors u est solution sur B de l'équation (1).*

La preuve fonctionne exactement de la même manière que la précédente, sans l'introduction du multiplicateur α car il s'agit ici d'une optimisation sans contrainte.

Remarque 1. *On pourrait également chercher à minimiser $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2$ sous la contrainte $\int_{\mathbb{R}^n} F(u) = 1$, ce qui donnerait cette fois-ci l'équation d'Euler-Lagrange*

$$-\Delta u = \alpha F(u) \quad ;$$

on pourrait montrer le même type de propriétés de manière très similaire, on ne le traitera pas ici. Notons qu'on peut obtenir $\alpha > 0$ en relâchant la contrainte [HP83] et en posant $v(x) := u(x/\sqrt{\alpha})$, alors v est solution de l'équation aux dérivées partielles 1.

2.2 Les théorèmes

Théorème 3 (Cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$). *Supposons que $g(u) \underset{\pm\infty}{=} O(u^p)$ pour un certain $p < \frac{2n}{n-2}$. Alors si u est un minimiseur admissible de J_1 , à une translation près, u est radiale.*

Théorème 4 (Cas où $\Omega = B$). *Supposons que $f(u) \underset{\pm\infty}{=} O(u^p)$ pour un certain $p < \frac{2n}{n-2}$, et $f(0) \neq 0$. Alors si u est un minimiseur de J_2 , u est radiale.*

Remarque : la fonction nulle vérifie $J_2(0) = 0$, et la condition $f(0) \neq 0$ assure qu'elle n'est pas solution de l'EDP (1), et qu'elle ne minimise donc pas J_2 . Un minimiseur u vérifiera alors $J_2(u) < 0$.

2.3 Les preuves

On admettra dans nos preuves le lemme suivant, dû à Aronszjan [Aro57] :

Lemme 3 (Principe du prolongement unique). *Si u est solution presque partout sur Ω connexe d'une inégalité du type*

$$|\Delta u| \leq M|u|$$

où $M > 0$ est une constante fixée, et u s'annule (presque partout) sur un ouvert non vide, alors u est presque partout nulle sur Ω .

Preuve du théorème 3. On admettra dans la suite de la preuve que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par u et la condition asymptotique sur g impliquent que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

On va montrer que si π est un hyperplan de \mathbb{R}^n , alors il existe un hyperplan $\tilde{\pi}$ parallèle à π tel que u est symétrique par rapport à $\tilde{\pi}$.

Prenons alors π un hyperplan et notons $\tilde{\pi}$ l'unique hyperplan tel que

$$\int_{\tilde{\pi}_+} \frac{1}{2} u^2 = \int_{\tilde{\pi}_-} \frac{1}{2} u^2 = \frac{1}{2}$$

où on a noté $\tilde{\pi}_+$ et $\tilde{\pi}_-$ les demi-espaces délimités par $\tilde{\pi}$.

Notons également v la fonction égale à u sur $\tilde{\pi}_+$ et symétrique par rapport à $\tilde{\pi}$ (on admet que $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$, la preuve est assez technique mais sans grande difficulté, on peut la trouver dans [Bre87], Lemme IX.2).

On remarque qu'on a alors nécessairement

$$\int_{\tilde{\pi}_+} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + G(u) = \int_{\tilde{\pi}_-} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u)$$

sans quoi on aurait alors

$$\int_{\tilde{\pi}_+} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + G(u) < \int_{\tilde{\pi}_-} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + G(u)$$

et donc $J_1(v) < J_1(u)$, ce qui est impossible car v est admissible (quitte à échanger $\tilde{\pi}_+$ et $\tilde{\pi}_-$, qui sont choisis arbitrairement).

On en déduit que v est également un minimiseur admissible de J_1 , et on dispose donc de $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$ tel que

$$-\Delta v + g(v) = \bar{\alpha}v$$

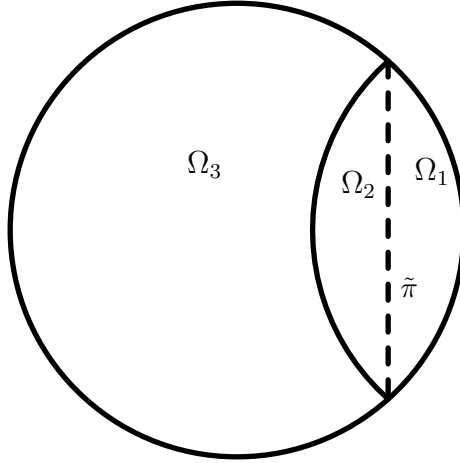
Comme $v = u$ sur $\tilde{\pi}_+$, on a alors nécessairement $\bar{\alpha} = \alpha$.

Comme f est continue et $w := u - v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, on dispose alors de $M > 0$ tel que $|\Delta w| \leq M|w|$.

Or, $w = 0$ sur $\tilde{\pi}_+$, et donc $w = 0$ sur \mathbb{R}^n d'après le principe du prolongement unique. Cela termine de prouver que u est symétrique par rapport à $\tilde{\pi}$, puis finalement que u est radiale avec le même raisonnement que dans l'approche classique. \square

Preuve du théorème 4. Tout comme dans la preuve du théorème 3, il suffit ici de montrer que toute séparation de B en deux demi-boules par un hyperplan passant par l'origine coupe l'intégrale définissant $J_2(u)$ en deux intégrales égales.

Prenons π un hyperplan passant par l'origine, et supposons par l'absurde que π ne coupe pas l'intégrale en deux parties égales. Définissons alors $\tilde{\pi}$ un hyperplan parallèle à π qui coupe l'intégrale au milieu. On définit les ouverts Ω_1, Ω_2 , et Ω_3 selon la figure suivante :



de sorte à avoir

$$\int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u) \right] = \frac{J_2(u)}{2}$$

mais aussi Ω_2 le symétrique de Ω_1 par rapport à π , et $\Omega_3 = B \setminus (\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2})$. On définit finalement v égale à u sur Ω_1 , prolongée par réflexion par rapport à $\tilde{\pi}$ sur Ω_2 et nulle sur Ω_3 , on admet qu'on a alors $v \in H_0^1(B)$. La fonction v a été construite de sorte à avoir $J_2(v) = J_2(u)$, et v est alors un minimiseur de J_2 .

La fonction v est alors solution de l'EDP $\Delta v + f(v) = 0$ et est nulle sur l'ouvert Ω_3 , ce qui impose $f(0) = 0$ et mène donc à une contradiction. On a donc $\tilde{\pi} = \pi$ et $\Omega_3 = \emptyset$.

Tout comme dans la preuve du Théorème 3, le principe du prolongement unique permet encore de conclure que $u = v$ et donc u est symétrique par rapport à π . Ceci achève la preuve du théorème 4 avec les mêmes arguments que dans la preuve précédente. □

3 Annexes

3.1 Principe du maximum

Revenons maintenant sur le principe du maximum que l'on a utilisé ici. On le re-énonce et on le démontre. [YN79][PW69] Sur la symétrie radiale de solutions à des équations elliptiques

Théorème 5. *Soit w continue sur l'adhérence d'un ouvert connexe Ω , de classe C^2 sur Ω , et qui vérifie :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega, \Delta w(x) + c(x)w(x) \leq 0, \\ \forall x \in \partial\Omega, w(x) \geq 0, \\ \lim_{\substack{|x| \rightarrow +\infty \\ x \in \Omega}} w(x) = 0, \\ \forall x \in \Omega, c(x) \leq 0. \end{array} \right. \quad (18)$$

c étant une fonction définie sur Ω , bornée sur tout compacts.

Alors soit $w > 0$, soit w est identiquement nulle.

Démonstration. En fait, nous allons montrer que soit $w > 0$, soit w est constante et négative. S'il l'on est dans le deuxième cas, les conditions aux frontières et en l'infini imposeront que la constante vaut 0. La difficulté réside dans l'inégalité large de la première hypothèse, la preuve dans le cas strict

étant bien plus simple, et ne permettant que le cas $w > 0$. En effet, dans le cas strict, par l'absurde, on prend x_0 qui minimise w (avec donc $w(x_0) \leq 0$), ce qui donne un laplacien strictement négatif en x_0 , ce qui absurde (le paragraphe suivant justifie l'existence de ce x_0).

Supposons que l'on ne soit pas dans le premier cas. Les deuxièmes et troisièmes hypothèses nous garantissent alors l'existence de x_0 dans Ω minimisant w sur $\bar{\Omega}$. Nécessairement, $m := w(x_0) \leq 0$. On va montrer que l'ensemble des x de Ω tel que $w(x) = m$ est un ouvert fermé de Ω . La continuité de w montre directement que cet ensemble est fermé.

Pour montrer son ouverture, on peut, sans perte de généralité, quitte à changer le minimiseur x_0 , montrer qu'il existe un voisinage de x_0 telle que $w = m$ dessus. Comme Ω est un ouvert, on dispose de $B(x_0, r) \subset \Omega$. Par l'absurde, on suppose que l'on dispose de $x_1 \in \mathcal{B}(x_0, r)$ tel que $w(x_1) > m$. On procède de façon à avoir une inégalité stricte dans la première hypothèse avec un w perturbé, mais avec w perturbé qui, sur des nouvelles frontières, reste plus grande qu'en x_0 . On contredit alors le principe du maximum strict. L'idée de la preuve vient du fait que l'on exploite la "faille" en x_1 , car la perturbation ne respectera pas la condition aux frontières proche de x_1 , mais sera assez petite pour que la fonction perturbée la respecte.

Intéressons nous dans un premier temps aux caractéristiques de la perturbation. Soit $r' > 0$, tel que $\bar{B}(x_1, r') \subset \mathcal{B}(x_0, r)$ et tel que $w > m$ sur $\bar{B}(x_1, r')$, qui existe par continuité de w . Supposons maintenant, que l'on dispose d'une fonction h de classe C^2 positive, définie sur $\bar{\Omega}'$, avec Ω' un ouvert de $B(x_0, r)$ qui contient x_0 et x_1 , qui s'annule sur $\partial\Omega \setminus \bar{B}(x_1, r')$ et tel que :

$$\Delta h(x) + c(x)h(x) > 0 \text{ sur } \Omega'.$$

Si on pose :

$$z = w - \epsilon h,$$

avec ϵ assez petit de façon à ce que sur $\partial\Omega \cap \mathcal{B}(x_1, r')$, $z \geq m$ (ce ϵ existe par strict positivité de w sur $B(x_1, r')$ et par théorème des bornes atteintes), alors :

$$w \geq m \text{ sur } \partial\Omega'.$$

Puisque h est positive, alors $z(x_0) \leq m$. Cette assertion et celle d'avant nous permettent d'obtenir un minimiseur noté x_2 de z sur Ω' . De plus, étant donné

que l'on a :

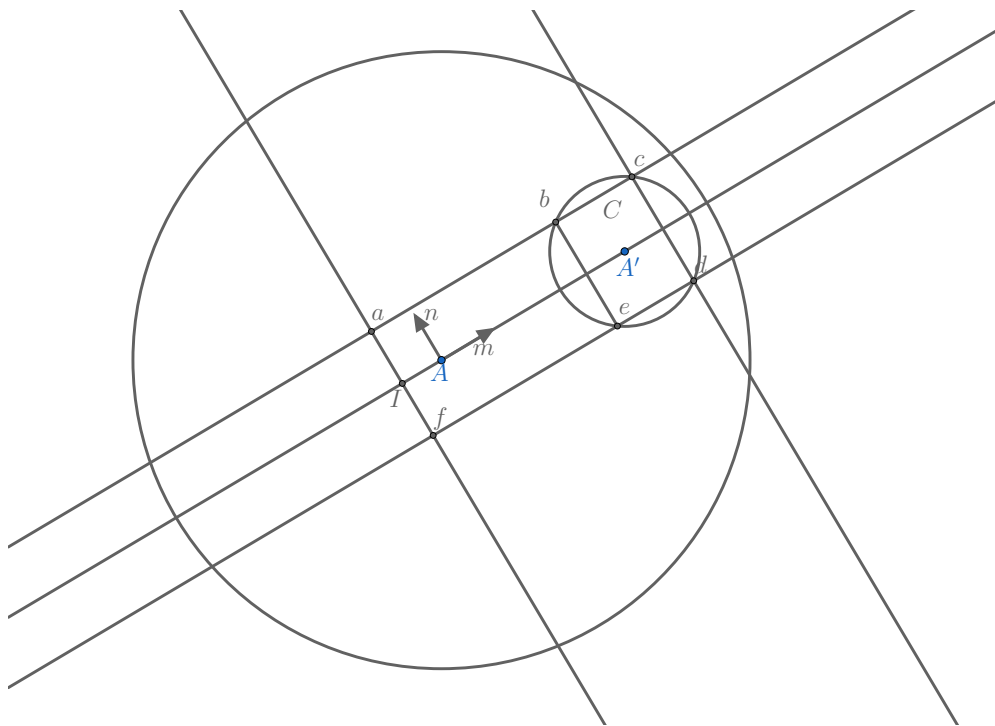
$$\Delta z(x) + c(x)z(x) < 0 \text{ sur } \Omega',$$

il vient en évaluant cette expression en x_2 que :

$$\Delta z(x_2) < 0 \quad .$$

Ceci est absurde car x_2 est un minimiseur donc minimum local de z . La preuve s'achève grâce à la connexité de Ω .

Il nous faut maintenant construire une telle fonction. On se place en deux dimensions pour pouvoir illustrer par un beau dessin et pour simplifier rédaction, et donc la compréhension. On pose $B = B(x_0, r)$, $C = B(x_1, r')$, $A = x_0$, $A' = x_1$, m le vecteur directeur unitaire de même sens et direction que $\overrightarrow{AA'}$ et n normale à m dans le même sens que sur figure ci-dessous. Les autres notations sont définies sur la figure. On note l la distance entre le point I et le point a . On se place désormais dans la base (m, n) .



Faisons un point entre les notations nouvelles et précédentes. Ω' correspond au rectangle ouvert $acdf$, et $\partial\Omega \setminus \bar{B}(x_1, r')$ à la réunion des segments ab , af et

fe. L'idée va être de créer une fonction qui donc s'annule sur la réunion des segments *ab*, *af* et *fe* pour satisfaire la condition aux frontières, et accélère suffisamment dans la direction *m* pour compenser les possibles décélérations selon *n* et le terme en $c(x)h$.

On va alors poser :

$$h(x, y) = \sin\left(\pi\left(\frac{y_I - l}{2l}\right)\right)(\exp(\beta(x - x_I)) - 1).$$

avec $\beta > 0$ que l'on choisira plus tard. On a :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \beta^2 \frac{\exp(\beta(x - x_I))}{\exp(\beta(x - x_I)) - 1} h > \beta^2 h$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{-\pi^2}{4l^2} h$$

sur le rectangle ouvert *acdf*.

On vérifie également que *h* est positive, et par ce qui précède :

$$\Delta h(x) + c(x)h(x) > h\left(\beta^2 - \frac{\pi^2}{4l^2} + c(x)\right) > 0$$

si l'on prend un β assez grand, qui existe par bornitude de *c* sur tout compact. Comme la condition d'annulation est vérifiée sur la frontière souhaitée par *h*, la fonction définie ici fonctionne. \square

3.2 Lemme de Hopf

Dans cette section, nous allons montrer le résultat suivant, dit lemme de Hopf. [YN79][LN07]

Théorème 6. *Soit $\lambda \in R$. Soit B une boule ouverte situé à gauche de T_λ tangent à ce dernier en un point P . Soit u de classe C^2 sur B , tel que $u > 0$ sur \bar{B} sauf en P où $u(P) = 0$. De plus, u vérifie :*

$$\forall x \in B, \Delta u(x) + c(x)u(x) \leq 0$$

avec $c(x) \leq 0$ sur B . Alors, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(P) < 0. \tag{19}$$

La non-trivialité de ce résultat découle de l'inégalité stricte, car on a directement que :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(P) \leq 0.$$

De la même manière pour le principe du maximum, on va perturber u . Supposons dans un premier temps que l'on dispose d'une fonction h assez régulière, satisfaisant dans un voisinage ouvert V de P dans \bar{B} :

$$h(P) = 0, \quad h \leq 0 \text{ sur } \partial V, \tag{20}$$

$$\Delta h + c(x)h \geq 0 \text{ sur } V, \tag{21}$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(P) < 0. \tag{22}$$

Avec une telle fonction, on peut trouver un ϵ assez petit, tel que :

$$z := u - \epsilon h \geq 0 \text{ sur } \partial V.$$

L'hypothèse 21 implique que

$$\Delta z + c(x)z \leq 0 \text{ sur } V,$$

on peut donc appliquer le principe du maximum à z , pour obtenir :

$$z \geq 0 \text{ sur } V, \text{ ie } u \geq \epsilon z \text{ sur } V.$$

Comme u et h coïncident en P , il vient :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(P) < \epsilon \frac{\partial h}{\partial x_1}(P).$$

On conclut grâce à 22.

Pour construire une telle fonction, on raisonne d'une manière similaire que lorsqu'on avait construit la perturbation pour le principe du maximum.

3.3 Symétrie par rapport aux plans et symétrie radiale

On va donner ici deux preuves du fait que la symétrie par rapport à un hyperplan de chaque direction implique la symétrie radiale.

Première preuve, dans le cas général. Une difficulté apparente vient du fait que l'on ne maîtrise pas la localisation de ces plans de symétries (si l'on savait par exemple que ces plans passent tous par un point x_0 , le résultat serait trivial à montrer).

Dans ce mémoire, on ne va donner la preuve qu'en dimension deux et trois pour des raisons de commodités de rédaction, mais ce n'est pas un problème puisque la preuve en dimension trois donne la marche à suivre pour des dimensions supérieures.

Pour le cas de la dimension deux, on se place donc dans \mathbb{R}^2 . Pour ne pas avoir le problème de la localisation du plan de symétrie, on va voir que l'on peut se restreindre à seulement deux plans. Soit θ un irrationnel. Soit d un plan de symétrie normal à e_x , et soit d' un plan de symétrie normal à $\cos \frac{\pi\theta}{2}e_x + \frac{\pi\theta}{2}e_y$ (ce sont en fait deux droites puisque l'on est en dimension 2). Soit x_0 le point d'intersection de ces deux droites non parallèles. Si on note s et s' les réflexions par rapport à d et d' , on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, u(s'(s(x))) = u(x).$$

Or, la composée de deux réflexions est une rotation, et on peut facilement montrer que $s' \circ s$ est la rotation de centre x_0 d'angle $\pi\theta$. Il en découle donc, si on se place en coordonnées polaire de centre x_0 , que :

$$\forall (r, k) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}, u(r, k\theta) = u(r, 0).$$

Ainsi, puisque θ est irrationnel, $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} . Par continuité de u , il vient alors :

$$\forall (r, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, u(r, \phi) = u(r, 0).$$

Le résultat est donc prouvé en dimension deux.

Passons maintenant dans \mathbb{R}^3 . On note (x, y, z) les coordonnées dans la base canonique. En prenant les mêmes vecteurs que précédemment (en identifiant

\mathbb{R}^2 et $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$), et en faisant le même raisonnement qu'en deux dimension, il vient que l'on dispose d'une droite d de vecteur directeur e_z telle que u ne dépende que de la distance à d . C'est-à-dire que s'il on se place en coordonnées (x', y', z) , avec $x' = y' = 0$ sur la droite d :

$$\forall (x', y', z) \in \mathbb{R}^3, u(x', y', z) = u(\sqrt{x'^2 + y'^2}, 0, z). \quad (23)$$

On refait alors le même raisonnement qu'en dimension 2, mais cette fois avec les vecteurs e_x et $\cos \frac{\pi\theta}{2} e_x + \frac{\pi\theta}{2} e_z$. On dispose alors d'une droite d' de vecteur directeur e_y , telle que d et d' se coupent (car d et d' appartiennent toutes les deux au plan de symétrie normal à e_x , et ne sont pas parallèles) en un point que l'on note A . Ainsi, s'il on se place en coordonnées (x', y', z') avec $x' = z' = 0$ sur la droite d' :

$$\forall (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, u(x', y', z') = u(\sqrt{x'^2 + z'^2}, y, 0). \quad (24)$$

Finalement, en combinant 23 et 24, on a :

$$\forall (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, u(x', y', z') = u(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, 0, 0),$$

ce qui termine la preuve de la symétrie radiale. \square

Deuxième preuve, en utilisant l'hypothèse $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On commence par redéfinir l'origine O de sorte à ce que u soit symétrique par rapport à tous les hyperplans $\{x_i = 0\}$. Cela implique notamment que u est symétrique par rapport à l'origine.

Il reste donc à montrer que u est symétrique par rapport à tout hyperplan passant par l'origine. Pour cela, prenons π un hyperplan passant par l'origine, $\tilde{\pi}$ l'hyperplan qui lui est parallèle tel que u est symétrique par rapport à $\tilde{\pi}$, et supposons par l'absurde que $\pi \neq \tilde{\pi}$.

Notons x_0 un vecteur de \mathbb{R}^n tel que $\pi = \{\langle x_0, x \rangle = 0\}$. L'hypothèse se traduit alors en $\tilde{\pi} = \{\langle x_0, x \rangle = \lambda\}$ avec $\lambda \neq 0$. Notons finalement

$$\Omega_k := \{\langle x_0, x \rangle \in (k\lambda, (k+1)\lambda)\}$$

pour $k \in \mathbb{Z}$.

La symétrie de u par rapport à l'origine et par rapport à $\tilde{\pi}$, appliquées inductivement, permettent de montrer que $\int_{\Omega_k} u^2$ est indépendante de k , ce qui mène à une contradiction car $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Finalement, si $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ sont tels que $|x| = |y|$, alors l'hyperplan médiateur de x et y passe par l'origine et est donc un hyperplan de symétrie de u , ce qui impose $u(x) = u(y)$ et termine donc de prouver que u est radiale. \square

Références

- [Aro57] N. ARONSZAJN. « A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order ». In : (1957). URL : <https://sites.math.washington.edu/~blwilson/Nodal/Aronszajn.pdf>.
- [PW69] M.H. PROTTER et H.F. WEINBERGER. « Maximum Principles in Differential Equations ». In : (1969). URL : <https://projecteuclid.org/journals/communications-in-mathematical-physics/volume-68/issue-3/Symmetry-and-related-properties-via-the-maximum-principle/cmp/1103905359.full>.
- [GNN79] B. GIDAS, W-M. NI et L. NIREMBERG. « Symmetry and related properties via the maximum principle ». In : (1979). URL : <https://projecteuclid.org/journals/communications-in-mathematical-physics/volume-68/issue-3/Symmetry-and-related-properties-via-the-maximum-principle/cmp/1103905359.full>.
- [YN79] L. YI et W-M. NI. « Radial Symmetry of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations in \mathbb{R}^n ». In : (1979). URL : <https://corescholar.libraries.wright.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1136&context=math&httpsredir=1&referer=>.
- [HP83] H. BERESTYCKI et P.L. LIONS. « Nonlinear scalar field equations, I existence of a ground state ». In : (1983). URL : <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00250555>.
- [Bre87] H. BREZIS. « Analyse Fonctionnelle ». In : (1987).
- [Lop96] O. LOPES. « Radial Symmetry of Minimizers for Some Translation and Rotation Invariant Functionals ». In : (1996). URL : <https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0015>.
- [LN07] Y. LI et L. NIREMBERG. « On the Hopf Lemma ». In : (2007). URL : <https://arxiv.org/abs/0709.3531>.