De la théorie des modèles à l'apprentissage automatique : application de l'o-minimalité à l'étude des réseaux de neurones

Aziz Ben Nejma, Achille De Ridder

Co-encadrés par Arthur Stephanovitch et Paul Wang

1 Introduction

Dans *Esquisse d'un programme* [3], Grothendieck motive la création d'une *topologie modérée* qui exclurait les phénomènes "sauvages". Une axiomatisation d'une telle topologie, développée ensuite par Lou van den Dries, a permis l'émergence des théories o-minimales. Cette notion s'est imposée aujourd'hui comme un champ de recherche à la frontière de la théorie des modèles, de la topologie, de la topologie algébrique, de la géométrie différentielle et de la géométrie algébrique. Tout comme il est facile de faire de l'algèbre sur des corps algébriquement clos, il est intéressant de faire de l'analyse ou de la topologie sur des structures o-minimales : des structures ordonnées dans lesquelles les ensembles dits “définissables” sont des unions finies d'intervalles et de points ; cela permet d'éviter les constructions de fonctions très peu régulières telles que l'escalier du diable ou la fonction de Weierstrass. Un des premiers exemples de structures o-minimales est l'anneau ordonné $(\mathbb{R}, +, ., <)$: c'est une conséquence du théorème de Tarski-Seidenberg. Un exemple plus récent et plus difficile est l'o-minimalité de $(\mathbb{R}, +, ., \exp, <)$, démontrée par Wilkie en 1996 [10]. Cela fait de l'o-minimalité un cadre adapté à des mathématiques variées.

Une application récente de cette théorie se trouve dans l'étude théorique des réseaux de neurones. En supposant que les fonctions intervenant dans l'architecture du réseau sont définissables dans une structure o-minimale, on peut prouver la convergence “en direction” de ses paramètres, et cela implique la convergence des prédictions, des erreurs d'entraînement ainsi que celle des distributions marginales (*margin distribution*). C'est ce qui est fait dans l'article *Directional convergence and alignment in deep learning* de Ziwei Ji et de Matus Telgarsky [2], que nous suivons dans la dernière partie.

La première partie de ce mémoire est dédiée à la définition et à l'étude de diverses structures o-minimales.

La deuxième partie porte sur la régularité des fonctions définissables dans des structures o-minimales. On y démontre plusieurs théorèmes de décomposition d'ensembles définissables en fonction de leur topologie ou de leur géométrie.

Ensuite, nous nous concentrons sur les structures localement o-minimales et sur une preuve d'élimination des quantificateurs pour une théorie à laquelle nous nous sommes intéressés et dont nous avons pu montrer le caractère localement o-minimal.

Enfin, nous esquissons dans la dernière partie du mémoire une preuve d'optimisation qui repose sur la plupart des résultats montrés dans ce travail. Nous introduisons une modélisation d'un réseau de neurones, puis nous démontrons quelques lemmes utilisés par Ji et Telgarsky dans leur article, et nous reprenons l'esquisse de leur preuve de la convergence directionelle du vecteur des paramètre.

Nous remercions Arthur Stephanovitch et Paul Wang pour toutes les mathématiques qu'ils nous ont permis de découvrir, pour leur encadrement régulier, et pour les échanges qui ont accompagné la rédaction de ce mémoire.

2 Rappels de logique du premier ordre

Dans la suite, on se fixe un ensemble dénombrable de variables V, qui sert à nommer des éléments de certains ensembles.

Définition 2.1.

1. *Un langage $\mathcal{L}$ est la donnée, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, d'un ensemble $\mathcal{F}_n$ de symboles de fonctions à n variables, c'est-à-dire d'arité n, et d'un ensemble $\mathcal{R}_n$ de symboles de relations d'arité n.*
2. *Une structure M dans un langage $\mathcal{L}$ est la donnée d'un ensemble sous-jacent $A(M)$ et d'une interprétation pour chaque élément de $\mathcal{F}_n$ et de $\mathcal{R}_n$ respectivement comme une fonction ou une relation.*

3. *Un morphisme de $\mathcal{L}$-structures $M \xrightarrow{f} N$ est une application f telle que pour toute fonction F du langage et tout $(a_1, \ldots, a_r)$ argument de F, on a $f(F(a_1, \ldots, a_r)) = F(f(a_1), \ldots, f(a_r))$ et telle que, pour toute relation R d'arité n, pour tous éléments $a_1, \ldots, a_n$ de M tels que $R(a_1, \ldots, a_n)$, on a $R(f(a_1), \ldots, f(a_n))$.*
4. *Un plongement de M dans N est un morphisme injectif, tel que pour toute relation R d'arité n, et tous $a_1, ..., a_n$ dans M on a $R(f(a_1), ..., f(a_n))$ si et seulement si $R(a_1, ..., a_n)$.*

Définition 2.2. *Une formule du premier ordre (dans un langage $\mathcal{L}$) notée $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ où $x_1, ...x_n$ sont des variables est une suite de caractères faisant appel aux fonctions et relations du langage, aux opérations booléennes et aux quantifications universelles et existentielles portant sur les éléments d'une structure.*
Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ est une telle formule, et que $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments d'une structure M, on note $M \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ lorsque $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ est vraie dans M.
(Pour une définition plus rigoureuse, voir la partie 2.2 du livre de Hils et Loeser [1])

Exemple 2.3.

1. *Dans le langage des groupes (avec une fonction d'arité 2 qui représente la loi et une fonction d'arité 0 qui représente l'élément neutre) : les suites de caractères $[\forall y \exists z \ x = z \cdot y]$ et $[\forall x \exists y \ x \cdot y = 1]$ sont des formules du premier ordre, chacune à une variable libre : dans la première formule par exemple, y et z ne comptent pas comme des variables.*
2. *La formule $[\forall x \ x^2 = x]$ est une formule close (ou énoncé) : elle n'utilise pas de variables.*
3. *En revanche, la suite de caractères $[\exists n \in \mathbb{N} \ x^n = 1]$ n'est pas une formule du premier ordre dans le langage des groupes puisqu'il y a une quantification existentielle sur des éléments qui n'appartiennent pas à la structure.*

Définition 2.4. *Soit M une $\mathcal{L}$-structure et E une partie de M^n. On dit que E est* ***définissable avec paramètres*** *(ou simplement définissable) lorsqu'il existe une formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, y_m)$ et des éléments $a_1, ..., a_n \in A(M)$ tels que*

$$E \ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in M^n \ : \ M \models \varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, ..., a_m)\}.$$

Exemple 2.5. *Dans la $\mathcal{L}$-structure $(\mathbb{R}, <)$ où $\mathcal{L}$ est le langage de l'ordre, la formule $\varphi(x) : \exists y \ (y < 1) \wedge (x < y)$ a 1 comme paramètre et définit dans $(\mathbb{R}, <)$ l'ensemble définissable $(-\infty, 1)$.*

Définition 2.6. *Soit M, N deux $\mathcal{L}$-structures :*

1. *La structure M est une sous-structure de N lorsque $M \subseteq N$ et que l'inclusion $M \hookrightarrow N$ est un plongement.*
2. *Si M est une sous-structure de N, on dit que M est une sous-structure élémentaire de N ou que N est une extension élémentaire de M lorsque pour toute formule φ et tous $a_1, \ldots, a_n \in M$, on a*
$$M \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \iff N \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

Exemple 2.7.

1. *Le groupe $\mathbb{Z}$ est une sous-structure de $\mathbb{R}$ dans le langage des groupes.*
2. *Le groupe $\mathbb{Z}$ n'est pas une sous-structure élémentaire de $\mathbb{R}$ dans le langage des groupes car $\mathbb{R} \vDash \exists x \ x + x = 1$ mais $\mathbb{Z} \nvDash \exists x \ x + x = 1$.*

Définition 2.8. *Soit $\mathcal{L}$ un langage.*

1. *Une $\mathcal{L}$-théorie T est une collection d'énoncés (i.e. de formules sans variables libres) dans le langage $\mathcal{L}$.*
2. *Une $\mathcal{L}$-structure M est appelée modèle de T lorsque tout énoncé de T est vrai dans M, et on note $M \vDash T$.*

Définition 2.9. *Une $\mathcal{L}$-théorie T élimine les quantificateurs lorsque pour toute formule avec quantificateurs, il existe une formule sans quantificateur qui lui est équivalente dans tout modèle de T.*

Théorème 2.10. *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie, on a alors équivalence entre les assertions suivantes :*

(i) La théorie T élimine les quantificateurs

(ii) Pour tous modèles M, N de T, si E est une sous-structure de M, $f : E \longrightarrow N$ un plongement et si $a \in M$, alors il existe un prolongement de f en un plongement défini sur $E \cup \{a\}$, quitte à remplacer N par une extension élémentaire.

Pour une preuve, voir par exemple les notes du cours de logique de Silvain Rideau-Kikuchi [7] (théorème 2.47).

3 Préliminaires sur l'o-minimalité

Dans cette section, on définit ce qu'est l'o-minimalité, et on donne quelques exemples de structures o-minimales.

3.1 Définition de l'o-minimalité

Définition 3.1. *Un ensemble ordonné $(R, <)$ est dit dense si pour tous $x, y \in R$ tels que $x < y$, il existe $z \in R$ tel que $x < z < y$, et il est dit sans extrémités s'il n'a ni majorant ni minorant.*

Dans le reste de ce texte, sauf mention du contraire, tous les ordres considérés seront des ordres totaux denses sans extrémités. **Les ensembles ordonnés seront munis de la topologie de l'ordre**.

La théorie des ordres totaux denses sans extrémité est simple :

Proposition 3.2. *La théorie des ordres totaux denses sans extrémité élimine les quantificateurs*

(Voir l'exercice 3.7.6 de [1] ou l'exemple 2.50 des notes de cours de Silvain Rideau-Kikuchi [7])

En particulier, toute formule à une variable libre est équivalente à une combinaison booléenne d'inégalités et d'égalités. Les ensembles définissables dans $(R, <)$ sont donc des unions finies d'intervalles et de points.

Cependant, lorsque l'on ajoute au language d'autres symboles, on perd souvent l'élimination des quantificateurs. Dans ce cas, l'o-minimalité est une condition qui peut être vue comme une forme faible d'élimination des quantificateurs.

Définition 3.3. *Soit $L = \{<, ...\}$ un langage, et $(R, <, ...)$ une L-structure, telle que $(R, <)$ soit un ordre (total dense sans extrémités). On dit que $(R, <, ...)$ est o-minimale si tout ensemble définissable avec paramètres dans $(R, <, ...)$ est une union finie d'intervalles et de points.*

En particulier, R est définissablement complète : toute partie définissable de R admet une borne supérieure et inférieure dans $R \cup \{+\infty, -\infty\}$

Définition 3.4. *Soit $(R, <, ...)$ une structure ordonnée. Une partie A de R est dite définissablement connexe si pour tous ouverts définissables disjoints U et V, on a $A \subseteq U \cup V$ si et seulement si ($A \subseteq U$ ou $A \subseteq V$).*

Le lemme suivant sera utile dans la suite :

Lemme 3.5. *Soit $(R, <, ...)$ une structure o-minimale, alors les parties définissablement connexes de R sont exactement les parties convexes (pour l'ordre). En particulier, les parties définissables définissablement connexes de R sont les intervalles.*

Démonstration : Si $a \notin A$, on considère $]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$. Un de ces deux ensembles ne doit pas couper A car la partie A est définissablement connexe. Cela implique que si $x, z \in A$ et si $x < y < z$ alors $y \in A$. □

3.2 Un exemple : les ensembles semilinéaires

Dans cette partie, on donne un exemple de structure o-minimale : les espaces vectoriels ordonnés.

Définition 3.6. *Un **groupe ordonné** est un triplet $(G, ., \leq)$ avec $(G, .)$ un groupe et $\leq$ est une relation d'ordre $\leq$ telle que la translation à gauche ou à droite par un élément de G est croissante. Un **anneau ordonné** est un quadruplet $(A, +, ., \leq)$ tel que $(A, +, \leq)$ est un groupe ordonné et que pour tous $x, y > 0$, on a $xy > 0$.*

Définition 3.7. *Soit K un corps ordonné. On appelle $(E, +, <)$ un K**-espace vectoriel ordonné** si $<$ est un ordre total dense sans extrémité, tel que $(E, +, <)$ est un groupe ordonné, et que pour tout $\lambda \in K_{>0}$ et pour tout $x > 0$, on a $\lambda x > 0$.*

Ce sont des structures dans le langage $L_K = \{0, +, <\} \cup \{\lambda : \lambda \in K\}$, où $\lambda \in K$ est interprétée comme une fonction unaire.

Définition 3.8. *Une **fonction affine** sur R^m une fonction de la forme $f(x_1, ..., x_n) = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n + \lambda$ où $\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda \in R$ sont fixés. Un sous-ensemble $S \subset R^n$ est appelé **ensemble semilinéaire de base** s'il s'écrit :*

$$S = \{x \in R^n : f_1(x) = ... = f_k(x) = 0, g_1(x) > 0, ..., g_l(x) > 0\}$$

*pour $f_1, ..., f_k, g_1, ..., g_l$ des fonctions affines. Une union finie d'ensembles semilinéaires de base est appelée **ensemble semilinéaire.***

Proposition 3.9. *Tout ensemble définissable de R^n dans le language L_K est un ensemble semilinéaire. En particulier, la structure R est o-minimale.*

Démonstration : On procède par récurrence sur les formules. La proposition est vraie pour les termes car il s'agit seulement de résoudre une (in)équation portant sur une fonction affine. La proposition est également vraie pour la disjonction et la négation de formules définissant des ensembles semilinéaires. Le cas difficile est celui d'une formule $\exists x_n \Phi(x_1, ..., x_n)$, où Φ définit un ensemble semilinéaire de R^n. On utilise alors une méthode appelée élimination de Fourier-Motzkin.

Commençons par supposer que Φ définit un ensemble semilinéaire de base : il existe $f_1, ..., f_k, g_1, ...g_l$ des fonctions affines telles que

$$\{x : \Phi(x)\} = \{x : f_1(x) = ... = f_k(x) = 0, g_1(x) > 0, ..., g_l(x) > 0\}.$$

Pour simplifier, on va supposer qu'il n'y a pas de f_i, mais la preuve dans le cas général est la même en remplaçant chaque condition $f_i(x) = 0$ par $f_i(x) \geq 0 \wedge f_i(x) \leq 0$. On classe les g_i en trois catégories, selon le signe du coefficient devant x_n :

- celles pour lesquelles $g_i(x) > 0$ est équivalent à

$$x_n > b_i + \sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j} x_j.$$

  On définit alors la fonction affine $A_i(x_1, ..., x_{n-1}) = b_i + \sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j} x_j$, et on note I_A l'ensemble des indices i tels que $g_i(x) > 0$ est de ce type.
- celles pour lesquelles $g_i(x) > 0$ est équivalent à

$$x_n < b_i + \sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j} x_j.$$

  On définit de même $B_i(x_1, ..., x_{n-1}) = b_i + \sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j} x_j$ et I_B.
- celles dans lesquelles x_n n'apparaît pas. On note $\Psi(x_1, ..., x_{n-1})$ la conjonction de ces conditions.

Alors on a

$$R \vDash \forall x_1 ... \forall x_n [\Phi(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow [\max_{i \in I_A}(A_i(x_1, ..., x_{n-1})) < x_n < \min_{i \in I_B}(B_i(x_1, ..., x_{n-1}))] \wedge \Psi(x_1, ..., x_{n-1})]$$

Aussi,

$$R \vDash \forall x_1 ... \forall x_{n-1} [\exists x_n \Phi(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow [\max_{i \in I_A}(A_i(x_1, ..., x_{n-1})) < \min_{i \in I_B}(B_i(x_1, ..., x_{n-1}))] \wedge \Psi(x_1, ..., x_{n-1})]$$

D'où

$$R \vDash \forall x_1 ... \forall x_{n-1} [\exists x_n \Phi(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \bigwedge_{i \in I_A, j \in i_B} A_i(x_1, ..., x_{n-1}) < B_j(x_1, ..., x_{n-1}) \wedge \Psi(x_1, ..., x_{n-1})]$$

Donc $\exists x_n \Phi$ définit un ensemble semilinéaire.

Dans le cas où Φ définit seulement un ensemble semilinéaire, on a que $R \vDash \Phi \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \Phi_i$ avec les Φ_i définissant des ensembles semilinéaires de base, et alors $R \vDash \exists x_n \Phi \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \exists x_n \Phi_i$. $\square$

3.3 Groupes et anneaux o-minimaux

Dans cette partie on donne une caractérisation des groupes o-minimaux dans le langage des groupes ordonnés. On montre notamment que tout groupe o-minimal est commutatif, qu'il est divisible et sans torsion (corollaire 3.11). On s'interesse également aux anneaux ordonnés o-minimaux, qui se trouvent être des corps réels clos.

Lemme 3.10. *Soit $(G, ., <)$ un groupe o-minimal et H un sous-groupe définissable de G. Alors $H = \{1_G\}$ ou $H = G$.*

Démonstration : On suppose que $H \neq \{1_G\}$. Par o-minimalité de G, l'ensemble H est une union finie d'intervalles. Soit $y > 1_G$ un élément de H, et $1_G < x < y$, si par l'absurde $x \notin H$, alors on a la chaîne d'inégalités suivante d'éléments alternativement dans H et hors de H : $x < y < xy < y^2 < xy^3 < y^4 < ...$, ceci contredit l'o-minimalité. Cela montre que H est ouvert pour la topologie de l'ordre. Donc H est aussi fermé comme complémentaire de l'union des autres classes à gauches (homéomorphes à H car les translations sont des homéomorphismes). Donc $H = G$ par connexité de G (qui découle de la densité de l'ordre). □

Corollaire 3.11. *Un groupe o-minimal est abélien, divisible et sans torsion.*

Démonstration : Il s'agit d'appliquer le lemme précédent au commutant d'un élément $x \in G$ et au sous-groupe nG pour $n \in \mathbb{N}$ (en notation additive), qui sont des sous-groupes définissables. □

Il est connu que les groupes divisibles et sans torsions sont exactement les espaces vectoriel sur $\mathbb{Q}$. D'après la proposition 3.9 on en déduit qu'un groupe o-minimal n'est rien d'autre qu'un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel ordonné, au sens de la définition 3.7.

Définition 3.12. *Un anneau $(A, +, ., <)$ est un* ***anneau ordonné*** *si $(A, +, <)$ est un groupe ordonné et que la multiplication par un élément strictement positif est strictement croissante.*

Proposition 3.13. *Un anneau o-minimal A est un corps (commutatif).*

Démonstration : Il s'agit d'appliquer le lemme 3.10 à xA et au commutant de x, pour tout $x \in A$. □

Un anneau o-minimal est alors un corps réel clos : on vérifie que la propriété d'o-minimalité implique que tous les nombres positifs sont des carrés et que les polynômes vérifient le théorème des valeurs intermédiaires : c'est une conséquence du théorème 4.1.

4 Régularité des fonctions définissables et topologie o-minimale

Un intérêt de l'o-minimalité est que les fonctions définissables dans une structure o-minimales sont très régulières. Par exemple, le théorème 4.1 affirme qu'une fonction définissable $R \to R$ est continue par morceau (et même mieux). Dans cette section, on démontre plusieurs résultats de décomposition des ensembles définissables en parties régulière.

4.1 Théorème de monotonie

Théorème 4.1. *(Théorème de monotonie) Soit $(R, <, ...)$ o-minimale, $a, b \in R$ et $f : (a, b) \to R$ définissable. Alors il existe des points $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ tels que sur chaque intervalle (a_k, a_{k+1}), f est constante ou bien strictement monotone et continue.*

La preuve de ce résultat est un peu longue et technique. Elle s'appuie sur le lemme suivant, dans lesquels I est un intervalle de R et $f : I \to R$ une fonction définissable.

Lemme 4.2. *Il y a un sous-intervalle de I sur lequel f est constante ou continue et strictement monotone.*

Le théorème se déduit du lemme de la manière suivante :
Considérons $F = \{a \in \mathbb{R}$, il existe un intervalle ouvert contenant a sur lequel f est constante ou (continue et strictement monotone)$\}$. Alors F et $R \backslash F$ sont définissables, mais $R \backslash F$ ne peut pas contenir d'intervalle : si I est un intervalle (non trivial) inclus dans $R \backslash F$, alors d'après le lemme, il existe un sous intervalle de I sur lequel f est constante ou continue et strictement monotone, absurde. Ainsi $R \backslash F$ est fini. Si $a < b$ sont deux points consécutifs de $(R \backslash F) \cup \{+\infty, -\infty\}$, la définissable connexité de (a, b) montre que f est constante sur (a, b) ou continue et strictement monotone. $\square$

Il ne reste plus qu'à démontrer le lemme :

Démonstration : La partie $f(I)$ est une partie définissable de R; si elle est finie alors un élément de $f(I)$ admet une infinité d'antécédents dans I, et donc tout un intervalle d'antécédents, sur lequel f est alors constante.

Dans la suite, on suppose sans perte de généralités qu'il n'y a aucun sous-intervalle non trivial de I sur lequel f est constante et que $f(I)$ est infini. Celui-ci contient alors un intervalle non trivial $[a, b]$.

Un fait utile pour la suite est le suivant : les images par f des extrema locaux forment un ensemble fini. En effet, l'ensemble des extrema locaux ne peut pas contenir d'intervalles étant donné que f n'est jamais localement constante : la démonstration de cela est analogue à la démonstration très détaillée de croissance un paragraphe plus bas.

On définit les ensembles définissables suivants :

$$A = \left\{ x \in I \ : \ \exists u < x < v \ \forall y \in (u, v) \ \Big(y < x \implies f(y) \leq f(x) \Big) \wedge \Big(y > x \implies f(y) \geq f(x) \Big) \right\}$$

$$B = \left\{ x \in I \ : \ \exists u < x < v \ \forall y \in (u, v) \ \Big(y < x \implies f(y) \geq f(x) \Big) \wedge \Big(y > x \implies f(y) \leq f(x) \Big) \right\}.$$

À présent, si $z \in (a, b)$ n'est pas une valeur localement extrémale de f, l'ensemble définissable $f^{-1}\Big((-\infty, z]\Big)$ est infini et est donc une union finie d'intervalles et de singletons ; or les antécédents de z sont nécessairement des bords d'intervalles car sinon z serait valeur localement extrémale de f. Donc tout antécédent de z est dans A ou dans B.

Par suite, un des ensembles A ou B est infini. Disons A sans perte de généralités. Soit $J = (\alpha, \beta)$ un intervalle inclus dans A, montrons que sur cet intervalle f est croissante : soit $x_0 \in E$, supposons par l'absurde qu'il existe un élément y de J tel que $y > x$ et $f(x_0) > f(y)$. Soit E l'ensemble des tels y et $y_0 = \inf E$;

- si $y_0 > x_0$: on sait que $y_0 \in A$ donc $f(y_0) \leq f(y)$ pour $y > y_0$ suffisamment proche, donc $f(y_0) < f(x_0)$. Mais alors on peut trouver $z \in (x_0, y_0)$ tel que $f(z) \leq f(y_0)$ car $y_0 \in A$, ce qui contredit la minimalité de y_0.

- si $y_0 = x$: comme $x_0 \notin E$, E étant une union finie d'intervalles et de singletons par o-minimalité, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $y \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$; on a alors $y \in E$ et donc $f(y) < f(x_0)$ ce qui fournit une contradiction car $x \in A$.

Ainsi f est croissante sur J, et elle l'est strictement car f n'est jamais localement constante par hypothèse. En particulier $f(J)$ est infini et contient alors un intervalle non trivial K. Soit $I_0 = f^{-1}(K) \cap J$, alors f réalise une bijection strictement croissante de l'intervalle I_0 sur K d'où f est continue et strictement monotone sur cet intervalle, ce qui clôt la preuve du théorème. □

Le théorème que l'on vient de montrer est extrêmement utile, il implique par exemple les corollaires suivants :

Corollaire 4.3. *Soit $f : R \to R$ une fonction continue définissable, alors sur tout segment, f est bornée et atteint ses bornes.*

Corollaire 4.4. *Soit $(R, +, <, ...)$ une strucure o-minimale, et $f : R \to R$ une fonction définissable continue, alors f est uniformément continue sur tout segment de R, i.e.*

$$R \models \forall M > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in [-M, M]\ (-\delta < y - x < \delta) \longrightarrow (-\delta < f(y) - f(x) < \delta)\ .$$

Démonstration : Si $\varepsilon > 0$, on considère la fonction définissable

$$u : x \longmapsto \sup \{\delta > 0\ :\ \forall y \in (x - \delta, x + \delta),\ f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon\}$$

Soit I un segment de R, on a alors que u est définie partout sur I et finie, on écrit ensuite la continuité de f en les points de discontinuité de u. On a alors un module de continuité uniforme au voisinage de ces points, relatif à 2ε. Mais u est minorée par une constante strictement positive sur le complémentaire de ces voisinages dans I. On en déduit que f est uniformément continue sur I. □

4.2 Décomposition cellulaire

Dans une structure o-minimale R, on peut avoir une description précise non seulement des ensembles définissables de R, mais également de ceux de R^m pour tout $m \in \mathbb{N}$. Pour cela, on introduit la notion de cellule, que l'on définit par récurrence :

Définition 4.5. *Soit $(R, <, ...)$ une structure o-minimale, on définit les cellules de la manière suivante :*
Une cellule en dimension 0 est $R^0 = 0$.
Une cellule C en dimension $n \geq 1$ est une partie de R^n qui vérifie une des deux propriétés suivantes :

- *L'ensemble C est de la forme $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ où X est une cellule en dimension $m - 1$ et f une fonction définissable continue sur X, à valeurs dans R.*
- *L'ensemble C est de la forme $\{(x, y) : x \in X, f(x) < y < g(x)\}$ où X est une cellule en dimension $m - 1$ et f, g deux fonctions définissables continues sur X, à valeurs dans $R \cup \{\pm\infty\}$ (on demande en outre que si une fonction vaut l'infini, alors elle est constante) et telles que $f < g$ sur X.*

Exemple 4.6. *Une cellule en dimension* 1 *est alors soit un graphe d'une fonction définie sur* R^0*, autrement dit un singleton de* R^1*, soit une partie de* R *entre deux graphes de fonctions sur* R^0*, i.e. un intervalle ouvert.*

Définition 4.7. *Soit* $(i_1, i_2, ..., i_m) \in \{0,1\}^m$*. Une cellule* C *de* R^m *est une* $(i_1, i_2, ..., i_m)$*-cellule si* $\pi_{m-1}(C)$ *est une* $(i_1, i_2, ..., i_{m-1})$*-cellule* ***(où*** π_{m-1} ***est la projection sur les*** $(m-1)$ ***premières coordonnées)*** *et que l'une des deux assertions suivantes est vraie :*

- *La cellule* C *est le graphe d'une fonction définie sur* $\pi_{m-1}(C)$ *et* $i_m = 0$*.*
- *La cellule* C *est une cellule entre deux graphes de fonctions et* $i_m = 1$*.*

Exemple 4.8. *Les* $(0,1)$*-cellules sont les parties de* R^2 *de la forme* $\{c\} \times (a,b)$ *alors que les* $(1,0)$*-cellules sont les graphes de fonctions continues définissables sur un intervalle* (a,b)*.*

Dans la suite, on fixe une structure o-minimale $(R, <, ...)$.

Proposition 4.9. *On a les propriétés suivantes :*

1. *Toute cellule de* R^m *est, par définition, une* $(i_1, ..., i_m)$*-cellule pour un unique m-uplet* $(i_1, ..., i_m)$*.*
2. *Toute cellule est définissablement connexe.*
3. *Dans le cas* $R = \mathbb{R}$*, une* $(i_1, ..., i_m)$*-cellule est définissablement homéomorphe à un ouvert définissable de* $\mathbb{R}^{\sum i_k}$*.*

Démonstration :

1. Un intervalle ouvert n'étant jamais un singleton dans une structure munie d'un ordre dense, on conlu par récurrence sur la dimension.
2. On raisonne par récurrence., et on considère les deux cas $i_m = 0$ ou $i_m = 1$. Si $i_m = 0$, alors π_{m-1} induit un homéomorphisme définissable de C sur $\pi_{m-1}(C)$, qui est définissablement connexe par hypothèse de récurrence. Si $i_m = 1$, on note $X = \pi_{m-1}(C)$, et soit $f < g$ qui permettent de définir C comme dans la définition 4.5. Soit U et V deux ouverts non vides dont l'union fait C. Par définissable connexité de $\pi_{m-1}(C)$, comme $\pi_{m-1}(U)$ et $\pi_{m-1}(V)$ sont deux ouverts non vides dont l'union est $\pi_{m-1}(C)$, on peut trouver $x \in X, y, z \in R$ tels que $(x,y) \in U$ et $(x,z) \in V$. Mais alors, par définissable connexité de $x \times (f(x), g(x))$, on a $x \times (f(x), g(x)) \subseteq U \cap V$, ce qui fournit une contradiction et conclut.
3. On raisonne par récurrence en remarquant que pour une $(i_1, .., i_m)$-cellule, si $i_m = 0$, alors π_{m-1} induit un homéomorphisme définissable de C sur son image qui est une $(i_1, ..., i_{m-1})$-cellule. Dans le cas où $i_m = 1$, on note $X = \pi_{m-1}(C)$ et $f < g$ deux fonctions continues qui permettent de définir C au-dessus de X. On remarque alors que C est homéomorphe à $X \times (0,1)$ via $(x, (1-t)f(x) + tg(x)) \longmapsto (x,t)$. □

Définition 4.10. *On définit par récurrence la notion de* ***décomposition*** *comme suit : on dit d'une partition* $\{A_1, \ldots, A_r\}$ *en cellules de* R^n *que c'est une décomposition de* R^n *si* $\{\pi_{n-1}(A_1), \ldots, \pi_{n-1}(A_r)\}$ *(sans compter les doublons) est une décomposition de* R^{m-1}*, et on définit une décomposition de* R^1 *comme une partition finie de* R *en intervalles ouverts et en singletons.*

Le théorème suivant décrit précisément les parties définissables de R^n

Théorème 4.11. *(de décomposition cellulaire)* *(i) Soit $E_1, \dots E_r$ sont des sous-ensembles définissables de R^n, alors il existe une décomposition de R^n qui réalise chaque E_i comme union d'ensembles de la décomposition.*

(ii) Soit $f : R^n \longrightarrow R$ une fonction définissable, il existe une décomposition $\{A_1, \dots, A_r\}$ de R^n telle que f est continue sur chaque A_i.

Démonstration : Le théorème est vrai pour $n = 1$ grâce au théorème de monotonie (théorème 4.1). Nous procédons alors par récurrence : supposons le théorème vrai pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et montrons-le pour $n + 1$. La preuve repose sur le lemme suivant, très utile :

Lemme 4.12. *(de finitude)*
Soit E un sous-ensemble définissable de R^{m+1}, où $m \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $x \in R^m$, l'ensemble $E_x = \{y \in R : (x, y) \in E\}$ est fini. Alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in R^m$, $|E_x| < M$.

Démonstration :
La preuve dans le cas général est similaire au cas $m = 1$ mais légèrement plus technique, on se contentera alors de la preuve du cas $m = 1$.

Soit A une partie définissable de R^2, à fibres finies pour la projection sur la première coordonnée. Si $x \in R$, on note A_x l'ensemble des $y \in R$ tels que $(x, y) \in A$.
Si $a \in R$, on définit $f_1(a) < f_2(a) < f_3(a) < \cdots < f_n(a)$ comme les éléments ordonnés de A_a.
Ces fonctions sont alors définies sur leurs domaines respectifs, définissables, et $\mathrm{dom}(f_k)$ est l'ensemble des éléments $a \in R$ tel que $|A_a| \geq k$.
De plus, un point $(a, b) \in R \times (R \cup \{\pm\infty\})$ est dit **normal** lorsqu'il existe un voisinage ouvert I de a et un voisinage ouvert J de b tels qu'une des conditions suivantes est vérifiée :

- L'ensemble A n'intersecte pas $I \times J$.
- L'intersection $A \cap (I \times J)$ est le graphe d'une fonction continue f définie sur I.

Soit $a \in R$, on dit que a est **régulier**, si pour tout $b \in R \cup \{\pm\infty\}$, le point (a, b) est normal. De manière équivalente, a n'est pas régulier s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \in \partial(\mathrm{dom}(f_k))$, puisque les domaines des fonctions f_k sont des unions finies d'intervalles par o-minimalité. Cela montre que l'ensemble des points réguliers est définissable.
Soit B l'ensemble des points irréguliers. On admet dans un premier temps que B est fini - ce qu'on montrera par la suite - et on note $a_1 < \dots < a_r$ ses éléments, avec $a_0 = -\infty$ et $a_{r+1} = +\infty$. Soit $i \in \{0, \dots, r\}$ et $a \in (a_i, a_{i+1})$. Il existe alors un ouvert I contenant a tel que que $x \longmapsto |A_x|$ est constante sur I car $(a_i, a_{i+1}) \subseteq B^c$. Par définissable connexité de (a_i, a_{i+1}), on en déduit que $x \longmapsto |A_x|$ est constante sur cet intervalle. Pour conclure il nous faudra seulement montrer que B est fini.

Pour montrer la finitude de B qui est définissable, on suppose par l'absurde que B contient un intervalle (a, b). Soit $\beta : x \in (a, b) \longmapsto \inf\{y \in R \cup \{\pm\infty\} : (x, y) \text{ n'est pas normal}\}$. On remarque que l'infimum qui définit β est en fait un minimum. On définit de plus les ensembles suivants :

$$B_+ = \{x \in B : \exists y \ (y > \beta(x)) \wedge ((x, y) \in A)\} \ ,$$

$$B_- = \{x \in B : \exists y \ (y < \beta(x)) \wedge ((x, y) \in A)\}$$

ainsi que les fonctions

$$\beta_+ : x \longmapsto \inf\{y : ((x, y) \in A) \wedge (y > \beta(x))\}$$

$$\beta_- : x \longmapsto \sup\{y : ((x, y) \in A) \wedge (y < \beta(x))\} \ .$$

Or B est infini, donc un des ensembles définissables $B_+ \cap B_-$, $B_+ \backslash B_-$, $B_- \backslash B_+$ ou $B \backslash (B_+ \cup B_-)$ est infini.

- Si $B \backslash (B_+ \cup B_-)$ est infini : il contient a fortiori un intervalle ouvert I qu'on peut choisir de sorte que β est continue sur I, cela montre que le point $(x, \beta(x))$ est normal pour tout $x \in I$, ce qui fournit une contradiction.
- Si $B_+ \cap B_-$ est infini : on peut trouver un intervalle $I \subseteq B_+ \cap B_-$ sur lequel β, β_+, β_- sont continues, or comme $\beta_- < \beta < \beta_+$, tout point de I est alors normal, contradiction.
- Si $B_+ \backslash B_-$ est infini, on retrouve un intervalle $I \subseteq B_+ \backslash B_-$ sur lequel β, β_+ sont continues et $\beta < \beta_+$, cela fournit encore une contradiction car cela montre que tout point $(x, \beta(x))$ pour $x \in I$ est normal.
- Si $B_- \backslash B_+$: ce cas est tout à fait analogue au précédent. □

Démontrons maintenant le théorème 4.11.

On note $p = \pi_m$. Le (i) du théorème à l'ordre $(n+1)$ se déduit du lemme de finitude ainsi : soit $E_1, \ldots, E_r$ des sous-ensembles définissables de R^{n+1}. D'après (i) appliqué à l'algèbre engendrée par les E_i, on a une décomposition $A_1, \ldots, A_p$ de R^n donnée par le théorème de décomposition cellulaire. Par ailleurs, pour tout $x \in R^n$, l'ensemble $p^{-1}(x) \cap E$ (où $E = \bigcup_i E_i$) peut être vu comme un sous-ensemble définissable de R et est donc une union finie d'intervalles et de singletons, dont on note $f_1(x) < f_2(x) < \cdots < f_q(x)$ les points de la frontière, où q dépend a priori de x. Mais d'après le lemme de finitude, on peut trouver $q \in \mathbb{N}$ qui convient pour tous les éléments de R^n quitte à prolonger les f_i en des constantes arbitraires là où elles ne sont pas définies. Les f_i étant définissables, on peut alors appliquer le second point du théorème à l'ordre n et aux fonctions $f_1, \ldots, f_q$. Il est possible en affinant les A_i de supposer que chaque fonction f_k est continue sur chaque A_i. Il est alors immédiat que la partition de R^{n+1} donnée par les $\{(x,t) \in R^n \times R,\ f_k(x) < t < f_{k+1}\}$ et les $\{(x,t) \in R^n \times R,\ t = f_k(x)\}$ est une décomposition de R^{n+1} (partition en cellules dont les projetés forment une décomposition de R^n).

Montrons à présent le second point du théorème : soit f une fonction définissable sur R^{n+1}, et A l'ensemble des points $(u,v) \in R^n \times R$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Il existe un pavé $C \times (a,b)$ de R^{n+1} (où C est un pavé ouvert de R^n) contenant (u,v) tel que $f(x,.)$ est continue et monotone sur (a,b) pour tout $x \in C$.

(ii) La fonction $f(.,v)$ est continue en u.

Lemme 4.13. *L'ensemble A est dense dans R^{n+1}.*

Démonstration : On va montrer que A intersecte tout pavé ouvert de R^{n+1}.
Soit $C \times (a,b) \subseteq R^n \times R$ un pavé ouvert de R^{n+1}. Pour tout $x \in C$, on peut trouver, par théorème de monotonie appliqué à $f(x,.)$, un point $b(x) \in (a,b)$ maximal tel que f est continue et monotone sur (a,b).
La fonction $x \longmapsto b(x)$ étant définissable, il est possible d'appliquer le point (ii) du théorème à l'ordre n, ce qui nous permet de trouver une cellule $C' \subseteq C \subseteq R^n$ ouverte dans R^n (car C est ouverte) sur laquelle $x \longmapsto b(x)$ est continue. Quitte à réduire encore plus C' (toujours en gardant C' ouverte), on peut trouver $b' > a$ tel que $\forall x \in C',\ b(x) > b'$.
Enfin, si $(u,v) \in C' \times (a,b')$, on peut appliquer à nouveau le point (ii) du théorème à l'ordre n à $f(.,v)$, on obtient alors une sous-cellule C'' de C' sur laquelle $f(.,v)$ est continue. Ainsi, si $z \in C''$, on a bien $(z,v) \in A$, ce qui conclut la preuve du lemme 4.13.

Lemme 4.14. *f est continue sur tout ouvert de A.*

Nous ommetons la preuve de ce lemme par soucis de concision. Elle peut être trouvée (tout comme la plupart des démonstrations de cette partie) dans le chapitre 3 du livre de Lou van den Dries [9].

Concluons à présent par récurrence avec les lemmes 4.13 et 4.14. D'après le point (i) du théorème à l'ordre $(n+1)$ montré plus haut, on peut trouver une partition de R^{n+1} adaptée à A. Soit D une cellule de la partition.

- Si D est ouverte, D intersecte alors A par densité de A, mais alors $D \subseteq A$ et donc f est continue sur D car f est continue sur A.
- Sinon, l'ensemble D est une $(i_1, \dots, i_{n+1})$-cellule de sorte qu'il existe $k \leq n+1$ vérifiant $i_k = 0$. Soit k une tel entier, alors $q := \pi_{[n+1]\setminus k}$ (la projection sur les coordonnées autres que k) réalise un homéomorphisme définissable de D sur une cellule de R^m. On applique alors le théorème à l'ordre n à cette cellule et on a une décomposition de D qui rend f continue sur chaque élément de la partition, ce qui conclut l'hérédité, et fournit une décomposition finie.

Cela finit la preuve du théorème de décomposition en cellules. □

4.3 Décomposition C^k et conséquences du théorème de décomposition en cellules

Dans cette sous-partie, nous étudions les notions de différentiabilité et de dérivabilité associées aux anneaux o-minimaux. On a notamment montré en 3.13 que ces anneaux sont nécessairement des corps commutatifs. On fixe un anneau o-minimal $(R, <, +, ., \dots)$.

Définition 4.15. *Soit $f : R \longrightarrow R^m$ une fonction et $a \in R$. On dit que la fonction f est **dérivable** en a si la fonction $h_a(t) = \dfrac{f(a+t) - f(a)}{t}$ admet une limite quand $t \underset{t \neq 0}{\longrightarrow} 0$.*

Remarque 4.16. *Dans la définition précédente, si f est une fonction définissable, alors h_a l'est également ; en particulier, d'après le théorème de monotonie appliqué à chaque coordonnée, les limites $\lim\limits_{0^+} h_a$ et $\lim\limits_{0^-} h_a$ existent dans $(R \cup \{\pm\infty\})^m$. Nous les notons alors respectivement $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$.*

Ainsi f est dérivable en a si et seulement si $f'_d(a) = f'_g(a)$ et $f'_d(a) \notin \{\pm\infty\}$.

Le théorème suivant améliore le théorème de monotonie :

Théorème 4.17. *Soit $f : R \longrightarrow R^m$, alors f est dérivable partout, sauf éventuellement en un nombre fini de points.*

Démonstration : Le théorème découle du cas $m = 1$ appliqué aux applications coordonnées. Dans la suite de la preuve, on peut donc supposer que $m = 1$.

Montrons d'abord que $f'(a^+) = f'(a^-)$ pour un ensemble cofini de valeurs de a.

Si, par l'absurde, ce n'était pas le cas, on trouverait par o-minimalité un intervalle I tel que pour tout $x \in I$, on a $f'_d(x) \neq f'_g(x)$, et on peut supposer sans perte de généralité que $\forall x \in I$ $f'(x^+) > f'(x^-)$, la fonction $u = f'_d - f'_g$ est alors définissable et à valeurs dans $(0, +\infty]$.

Quitte à réduire I, et en appliquant le théorème de monotonie, on peut supposer f continue et supposer qu'il existe $\varepsilon, b \in R$ tels que $\forall x \in I$ $f'_d(x) > b + \varepsilon > b - \varepsilon > f'_g(x)$. On peut même supposer que $b = 0$ en remplaçant f par $x \longmapsto f(x) - bx$. Mais alors, la nouvelle fonction f vérifie $f'_g(x) < -\varepsilon < \varepsilon < f'_d(x)$ pour tout $x \in I$ et tout point de I est un minimum local. Soit $a \in I$, l'ensemble $\{f \leq a\}$ est ainsi un ouvert fermé définissable non vide de I. La définissable connexité de I prouve que f est constante, ce qui fournit une contradiction. On conlut que $f'_d(x) = f'_g(x)$ sauf pour un nombre fini de valeurs de $x \in R$.

Nous allons maintenant montrer que f'_d ne peut pas valoir l'infini en une infinité d'éléments de R. Par l'absurde, on peut supposer sans perte de généralité que $f'_d(x) = +\infty$ pour une infinité de $x \in R$. D'après ce qu'on vient de montrer, on peut réduire J de sorte que $f'_g(x) = +\infty$ pour tout $x \in J$, et on peut, en outre, supposer que f est continue sur J d'après le théorème de monotonie. On écrit $J = (a, b)$, soit $C > 0$, on pose $U = \{x \in (a, b) : f(x) > f(a) + C(x - a)\}$. Comme $f'_d(a) = +\infty$, l'ensemble U contient alors un voisinage de a dans (a, b). Par ailleurs, l'ensemble définissable U étant ouvert par continuité de f, on peut écrire U comme une union finie d'intervalles ouverts disjoints.

Soit (a, a') l'intervalle contenant un voisinage à droite de a. On a nécessairement $a' = b$ car sinon

$$f(a') \ > \ f(a' - \delta) + C\delta > f(a) + C(a' - \delta - a + \delta) = f(a) + C(a' - a)$$

et ce, pour $\delta > 0$ suffisamment petit, ce qui impliquerait que $a' \in U$. Ainsi $U = (a, b)$. En particulier, si $x \in (a, b)$, on a $\forall C \ f(x) - f(a) > C(x - a)$, ce qui est absurde car $f(x) \in R$.

La remarque 4.16 conclut alors la preuve du théorème. □

Corollaire 4.18. *Soit $f : R \longrightarrow R^m$ une fonction définissable et $k \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une subdivision de R qu'on note $-\infty = a_0 \ < \ a_1 \ < \ a_2 < \ \ldots \ < a_r \ = \ +\infty$ telle que f est de classe C^k sur (a_i, a_{i+1}) pour tout $i = 0, \ldots, r - 1$.*

Démonstration : Le théorème 4.17 montre que si f est de classe C^k sur $R \backslash E$ pour un ensemble fini E, alors $f^{(k)}$ est aussi de classe C^1 sur $R \backslash F$ pour un ensemble fini F, et on a donc que f est de classe C^{k+1} sur $R \backslash F$. □

Remarque 4.19. *Le théorème précédent se généralise aux dimensions supérieures, tout comme le théorème de monotonie, en le théorème 4.24 ci-dessous. Pour la preuve, voir le livre Tame topology and o-minimal structures [9] : c'est le théorème 3.2 du chapitre 7, page 115. On ne la détaille pas car elle est similaire à la preuve du théorème de décomposition en cellules. Ce théorème, dit théorème de décomposition C^1, servira lors de l'application aux réseaux de neurones*

Définition 4.20. *Une application $f : R^m \longrightarrow R$ est différentiable en un point $a \in R^m$ s'il existe un endomorphisme u de R^m tel que pour tout $\varepsilon \in R_{>0}$, il existe un voisinage ouvert V de a vérifiant*

$$\forall x \in V \ |f(x) - f(a) - u(x - a)| < \varepsilon |x - a| \ .$$

L'application linéaire u est alors notée $d_a f$ et est appelée différentielle de f en a.

Remarque 4.21. *Dans ce qui précède, la notation $|x - a|$ correspond à la norme uniforme sur R^m. En effet, la structure de groupe permet de poser, pour $x \in R$,*

$$|x| = \begin{cases} x & \textit{si } x \geq 0 \\ -x & \textit{sinon} \end{cases}$$

et pour $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$, $|x| = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$. Cette "norme" est compatible avec la topologie produit sur R^n.

Définition 4.22. *Une fonction $f : R^m \longrightarrow R$ est dite de classe C^1 lorsque $a \mapsto d_a f(x)$ est continue, pour tout $x \in R^m$.*

Définition 4.23. *(C^1-cellules et fonctions de classe C^1 sur des parties non ouvertes)*

- *Une cellule de R^m est une C^1-cellule, lorsque toutes les fonctions qui interviennent dans sa définition, suivant la définition 4.2, sont des fonctions de classe C^1.*
- *Si f est une fonction définie sur une partie $E \subseteq R^m$. On dit que f est une application de classe C^1 sur E si f est la restriction d'une application de classe C^1 au sens usuel définie sur un ouvert contenant E.*

Théorème 4.24. *(de décomposition C^1)*

(i) Soit $A_1, \ldots, A_n$ des parties définissables de R^m, alors il existe une décomposition de R^m en C^1-cellules qui réalise chaque A_i comme une union d'ensembles de la décomposition.

(ii) Soit $f : R^m \longrightarrow R$ une fonction définissable, il existe alors une décomposition $\{A_1, \ldots, A_r\}$ en C^1-cellules de R^m telle que f est de classe C^1 sur chaque A_i.

4.4 Sélection de courbes

Dans cette partie, on fixe $(R, <, \mathcal{S})$ une extension o-minimale d'un groupe abélien ordonné $(R, <, +)$. On montre un principe de choix définissable pour cette extension : on peut choisir de manière définissable un élément dans chaque ensemble définissable. Une conséquence de cela et du théorème de monotonie est le lemme de sélection de courbe : l'adhérence d'un ensemble définissable X est constitué de X et des limites de courbes tracées sur X.

On fixe un élément strictement positif de R qu'on note 1.

Proposition 4.25. *(Choix définissable) Soit $X \subset R^{n+m}$ un ensemble définissable, et $\pi : R^{n+m} \to R^n$ la projection sur les n premières coordonées. Alors il existe une fonction définissable $\pi X \to R^m$ dont le graphe est inclu dans X.*

Démonstration : On montre d'abord que l'on peut choisir de manière définissable un élément $e(Y)$ dans tout ensemble définissable $Y \neq \varnothing$. Ce que l'on veut dire par là, c'est que si $A \in R^k \times R^l$ est un ensemble définissable, où $k, l \in \mathbb{N}$, il existe une fonction définissable $h : R^k \to R^l$ telle que $(x, h(x)) \in A$ pour tout $x \in R^k$ tel que $A \cap \{x\} \times R^l \neq \varnothing$.

On procède par récurrence sur la dimension.

- Si $Y \subset R$, notons $a = \inf Y$, $b = \sup\{x : (a, x) \subset Y\}$. On définit alors $e(Y)$ en fonction des valeurs de a et b. Si $a = -\infty$ et $b = +\infty$, on pose $e(Y) = 0$. Si $a \in R$ et $b = +\infty$, on pose $e(Y) = a + 1$. Si $a = -\infty, b \in R$, alors $e(Y) = b - 1$. Enfin si $ab, \in R$, $e(Y) = (a + b)/2$.
- On suppose avoir construit $e(Z)$ pour tout $Z \subset R^n$ définissable non-vide. Si $Y \subset R^{n+1}$, et $p : R^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ est la projection sur les premières coordonées, on pose $a = e(pY)$, et $Y_a = \{y \in \mathbb{R} : (a, y) \in Y\}$. On définit alors $e(Y) = (a, e(Y_a))$.

Maintenant, pour trouver une fonction $f : \pi X \to R^m$ dont le graphe est inclus dans X, on pose $f(x) = e(X_x)$, où $X_x = \{x' \in R^m : (x, x') \in X\}$. $\square$

Corollaire 4.26. *(Sélection de courbe)*

1. *Soit $X \subset R^n$ définissable, et $a \in \overline{X} - X$. Alors il existe une courbe définissable injective continue $\gamma : [0, \varepsilon) \to X$, pour un $\varepsilon > 0$, tel que $\gamma(0) = a$.*

2. *Si de plus $(R, <, \mathcal{S})$ est une extension o-minimale d'un anneau ordonné $(R, <, +, .)$, alors on peut prendre γ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \varepsilon)$.*

Démonstration : Puisque $a \in \overline{X} - X$, l'ensemble définissable $\{|a - x| : x \in X\}$ contient un intervalle $(0, \varepsilon)$. Mais pour tout $r \in (0, \varepsilon)$, il y a un x tel que $|a - x| = r$, donc d'après le choix définissable, il existe $\gamma : (0, \varepsilon) \to X$ tel que $|a - \gamma(r)| = r$ pour tout $r \in (0, \varepsilon)$. Quitte à prendre ε plus petit, le théorème de monotonie donne que γ est injective continue.

Pour le deuxième point, il suffit de composer γ avec une fonction suffisamment plate en 0, par exemple l'inverse de la norme de sa plus grand composante. □

4.5 Stratification de Whitney

Soit $(\mathbb{R}, <, \mathcal{S})$ une extension o-minimale de $(\mathbb{R}, <)$. On s'intéresse dans cette section à une autre décomposition du graphe d'une fonction définissable dans cette extension, qui est particulièrement utile pour l'application aux réseaux de neurones (théorème 6.13).

Définition 4.27. *Soit $A \subset \mathbb{R}^k$.*

1. *Une $\mathcal{C}^p$**-stratification** de A est une partition de A en un nombre fini de sous-variétés de $\mathbb{R}^k$, appelés **strates**, telle que pour deux strates S, T, on a*

$$S \cap \overline{T} \neq \varnothing \implies S \subset \overline{T}.$$

2. *Une $\mathcal{C}^p$-stratification est appellée **stratification de Whitney** si pour toute suite de points (x_n) d'une strate S qui converge vers un point x d'une strate T, pour toute suite de vecteurs normaux (v_n) avec $v_n \in N_{x_n}M$, la limite de (v_n), si elle existe, est normale à T en x.*
3. *On dit qu'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ admet une $\mathcal{C}^p$-stratification de Whitney si son graphe en admet une.*

Remarque 4.28. *Remarquons que la condition qui définit les stratifications de Whitney est équivalente à la condition suivante pour une stratification C^p : si (x_n) est une suite à valeurs dans une strate S qui converge vers un élément x appartenant à une strate T, si la suite des espaces tangents $T_{x_n}S$ converge vers $\mathcal{T}$ au sens de la topologie de la grassmannienne, alors l'espace tangent T_xT est inclus dans $\mathcal{T}$.*

Lemme 4.29. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^k \to R$, avec U ouvert, une fonction localement lipschitzienne admettant une $\mathcal{C}^p$-stratification de Whitney (S_i). Alors, notant $\pi : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^k$ la projection sur les premières coordonnées, on a que (πS_i) est une $\mathcal{C}^p$-stratification de Whitney de U.*

Théorème 4.30. *Toute fonction définissable dans $(\mathbb{R}, <, \mathcal{S})$ admet une C^p-stratification de Whitney pour $p \geq 1$.*

Nous admettons ce théorème. Une preuve se trouve dans l'article *Verdier and strict Thom stratifications in o-minimal structures* [5] : le théorème 1.3 montre l'existence d'une stratification plus forte, la stratification de Verdier, et la proposition 1.10 prouve qu'une telle stratification est une stratification de Whitney.

Enfin, si la fonction est localement lipschitzienne, les stratifications de son graphes vérifient une propriété supplémentaire.

Proposition 4.31. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ définissable dans $(\mathbb{R}, <, \mathcal{S})$ et localement lipschitzienne. Alors toute $\mathcal{C}^p$-stratification de Whitney $(S_i)_{i\in I}$ de f est* ***non-verticale****, c'est-à-dire que pour tout $i \in I$ et tout $x \in S_i$, on a $(0, \dots, 0, 1) \notin T_x S_i$.*

Démonstration : Si $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^k$ est dérivable tel que $f \circ \gamma$ soit dérivable, avec $\gamma'(0) = (0, ..., 0)$, alors, notant K une constante de Lipschitz pour f au voisinage de $\gamma(0)$, on a $|(f \circ \gamma)'(0)| \leq K||\gamma'(0)|| = 0$. □

Remarque 4.32. *Pour une telle stratification, la projection $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ sur les n premières coordonnées réalise un difféomorphisme de S_i sur $\pi(S_i)$ qui est également une sous-variété de même régularité par transversalité. On peut alors définir, pour $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ le gradient $\nabla_R f(x)$ comme le gradient de la restriction de f à la strate contenant x : l'existence de la stratification de Whitney non verticale implique que f est de classe C^1 sur chaque $\pi(S_i)$.*

5 Sous-groupes discrets, partie entière et élimination des quantificateurs

Dans cette section, on s'intéresse à un affaiblissement de l'o-minimalité. L'idée est qu'une extension de $(\mathbb{R}, <)$ qui contient par exemple la fonction sinus n'est plus o-minimale (on peut y définir $\mathbb{Z}$, qui n'est pas une union finie d'intervalles et de points), mais qu'elle reste "uniformément localement o-minimale", dans un sens que l'on va préciser. Dans cette section, on montre que plus généralement, en ajoutant à un groupe ordonné un sous-groupe qui ressemble à $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, on obtient une structure uniformément localement o-minimale.

L'intérêt est que dans une telle structure, les théorèmes de régularités de la section 4 peuvent s'adapter, notamment le théorème 4.1.

5.1 Définitions

Définition 5.1. *(Uniforme locale o-minimalité)*

1. *Une structure $(R, +, <, ...)$ est uniformément localement o-minimale lorsqu'il existe $c \in R_{>0}$ tel que pour toute partie définissable E de R, l'ensemble $E \cap [-c, c]$ est une union finie d'intervalles et de singletons.*
2. *Une théorie est uniformément localement o-minimale si tous ses modèles le sont.*

Définition 5.2. *(Langages et théories des sous-groupes discrets)*

1. *Soit $\mathcal{L} = (0, +, <, Z)$ où Z est une relation unaire.*
   Une $\mathcal{L}$-structure est alors de la forme $(R, +, <, Z)$ où Z est une relation unaire qui indique l'appartenance à un sous-ensemble Z (par abus de notation).
2. *Soit T la $\mathcal{L}$-théorie des groupes ordonnés divisibles sans torsions R (i.e. groupes o-minimaux) munis d'un sous-groupe discret non borné[1] Z et tel que $1 := min(Z \cap (0, +\infty))$ existe et Z intersecte tout intervalle de la forme $[x, x + 1)$.*

1. Ici, dire que Z est non borné signifie $\forall x \in R\ \exists n \in Z\ x < n$, ce qui correspond bien à la définition du caractère non borné pour un sous-groupe. Par ailleurs, cette hypothèse, ainsi que l'hypothèse d'existence d'un élément minimal dans $Z \cap R_{>0}$, évitent beaucoup de cas dégénérés : le théorème de compacité de la logique du premier ordre montre qu'il existe des $\mathcal{L}$-structures $(R, Z, +, <)$ telles que Z est un sous-groupe infini mais borné. Si $(I, <_I)$ est un ensemble ordonné quelconque, on peut même supposer de plus que $\mathbb{Z}^I$ se plonge dans I de sorte qu'en notant c_i l'image par ce plongement de $1_i : I \to Z$, on a $\forall i_1 <_I i_2 \in\ I\ \forall n \in \mathbb{N}\ nc_{i_1} < c_{i_2}$

3. *Soit $\mathcal{L}'$ le langage dont les structures sont de la forme $(R, Z, +, <, \{.\}, (\lambda)_{\lambda\in\mathbb{Q}}, 1)$ où tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ correspondent à une fonction unaire, ainsi que $\{\}$, et où 1 est une constante.*
4. *On note T' la $\mathcal{L}'$-théorie dont les modèles sont exactement les modèles de T dans laquelle chaque $\lambda \in \mathbb{Q}$ correspond à la multiplication par le rationnel λ, telle que 1 est le minimum de $Z \cap (0, +\infty)$ et $\{.\}$ vérifie $\{x\} \in [0, 1)$ et $(x - \{x\}) \in Z$ pour tout x.*
5. *Dans tout modèle R de T', on dispose d'une fonction « partie entière », définissable sans quantificateur par $\forall x \in R\ \lfloor x \rfloor = x - \{x\}$.*

5.2 Élimination des quantificateurs et conséquences

Théorème 5.3.

La $\mathcal{L}'$-théorie T' élimine les quantificateurs.

Démonstration : On veut appliquer le théorème 2.10. Pour cela on se donne deux modèles de T' qu'on note (R_1, Z_1) et (R_2, Z_2). Soit E une sous-structure de R_1 (i.e. un ensemble clos par les fonctions du langages) et f un plongement de E dans R_2. Soit $a \in R_1 \backslash E$. Par compacité de la logique du premier ordre et en utilisant la méthode des diagrammes, il suffit de montrer que si $(\varphi_i)_{1\leq i\leq r}$ sont des formules du premier ordre sans quantificateur à paramètres respectifs $x_i \in E$, et si $R_1 \vDash \varphi_i(a, x_i)$ pour tout $1 \leq i \leq r$, alors on peut trouver $b \in R_2$ tel que $R_2 \vDash \varphi_i(b, f(x_i))$ pour $1 \leq i \leq r$.

Concrètement, les conditions imposées par les φ_i sont des conditions des 3 types suivants :

(i) Si une telle formule ϕ ne fait pas appel à la fonction $\{.\}$, comme il n'y a pas de quantificateurs dans ϕ et que ϕ est une formule dans le langage des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels ordonnés, alors ϕ définit une union finie d'intervalles (ouverts ou fermés) dont les bornes sont des éléments de E. Quitte à choisir un de ces intervalles à bornes dans E, on peut remplacer la condition $\phi(a)$ par une condition plus forte de la forme $x < a < y$ où $x, y \in E$ car $R_2 \vDash \forall b\ \big(x < b < y \to \phi(b)\big)$

(ii) La formule est de la forme $h(a) > 0$ où h est une composée de fonctions affines à pente dans $\mathbb{Q}$ et à constante dans E, de $\{\}$ et de somme de fonctions définies ainsi. Voir la définition 5.6 pour une description plus précise.

(iii) La formule est de la forme $h(a) = 0$.

Remarque 5.4. *On peut se restreindre aux trois cas précédents en remarquant qu'il est possible de remplacer toute formule $g(a) \in Z$ par $\{g(a)\} = 0$ et $g(a) \notin Z$ par $\{g(a)\} > 0$.*

Remarque 5.5. *Les formules sans quantificateur qu'on considère pour l'élimination des quantificateurs sont combinaisons booléennes de formules sans opérateur booléen. On écrit ces formules sous forme normale disjonctive, et pour chacune, on choisit un terme de la disjonction qui est vérifié par a : c'est alors une conjonction de formules élémentaires avec éventuellement des négations. Or la négation de l'appartenance à Z s'écrit avec une inégalité portant sur la partie fractionnaire, la négation de $h(x) > 0$ est $h(x) = 0$ ou $h(x) < 0$ (et on choisit à nouveau quelle sous-formule est vérifiée par a), ainsi il est possible de se passer des disjonctions et négations.*

Comme on l'a fait dans le cas (i), il est essentiel de décrire les ensembles définissables par des formules dans les cas (ii) et (iii).

Commençons d'abord par étudier les fonctions h (du lemme 5.9). L'ensemble $\mathcal{F}$ de ces fonctions est défini par induction de la manière suivante :

Définition 5.6. *L'enseble $\mathcal{F}$ est le plus petit sous ensemble de fonctions $R \to \mathbb{R}$ telles que :*

- *$(x \longmapsto \lambda x + c)$ est un élément de $\mathcal{F}$ dès que $\lambda \in \mathbb{Q}$ et $c \in E$*
- *Si $h, g \in \mathcal{F}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, alors $\lambda h + \mu g \in \mathcal{F}$*
- *Si $h \in \mathcal{F}$ alors $\{h\} \in \mathcal{F}$*

Définition 5.7.

1. *Si U est une union finie d'intervalles et de singletons de R_1 qu'on écrit $(\bigcup_i (x_i, y_i)) \cup (\bigcup_j \{z_j\})$ et si f est un plongement de la sous-structure engendrée par les x_i, y_i, z_j dans R_2, on note f_*U l'ensemble*
$$(\bigcup_i (f(x_i), f(y_i)) \ \cup \ (\bigcup_j \{f(z_j)\}) \ .$$
2. *De même, si $h \in \mathcal{F}$ et si f est un plongement de E dans R_2, on définit f_*h comme l'expression formelle de h où on a remplacé tous paramètres par leurs images par f. Plus précisément, on peut définir f_* par induction sur $\mathcal{F}$ en décrétant que*
   - *Pour tous $\lambda \in \mathbb{Q}$ et $c \in E$, on a $f_*(x \longmapsto \lambda x + c) = (x \longmapsto \lambda x + f(c))$.*
   - *Si $h, g \in \mathcal{F}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, alors $f_*(\lambda h + \mu g) = \lambda f_* h + \mu f_* g$.*
   - *Si $h \in \mathcal{F}$ alors $f_*\{h\} = \{f_*h\}$.*

Définition 5.8. *On appelle* ***E-ensemble périodique*** *toute partie de R de la forme $\lambda Z + U$ pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ et U une union finie d'intervalles à bords dans E et de singletons de E.*

Les lemmes suivants permettent enfin de caractériser les ensembles définissables par des formules sans quantificateur dans les cas (ii) et (iii).

Lemme 5.9. *Si h est une fonction qui apparaît dans (ii), alors, les solutions de $h(x) > 0$ ou de $h(x) = 0$ sont des combinaisons booléennes de E-ensembles périodiques, et il existe $\lambda \in \mathbb{Q}$ et U une union finie d'intervalles de R_1 tels que*

$$R_1 \vDash \forall x \big(h(x) > 0 \leftrightarrow x \in \lambda Z_1 + U \big)$$

ainsi que

$$R_2 \vDash \forall x \big(f_*h(x) > 0 \leftrightarrow x \in \lambda Z_2 + f_*U \big) \ .$$

Lemme 5.10. *Une intersection finie d'E-ensembles périodiques est un E-ensemble périodique*

On cherche alors à satisfaire dans R_2 un nombre fini de contraintes portant sur b qui sont une inégalité ou de la forme $b \in \lambda Z_2 + f_*U$. En prenant l'intersection puis en appliquant le lemme 5.10, on se ramène alors à trouver un élément dans un $(\lambda Z_2 + f_*U) \cap (f(x), f(y))$, pour deux éléments $x, y \in E$ tels que $a \in (\lambda Z_1 + U) \cap (x, y)$. Quitte à réduire U, on peut supposer que U est un intervalle (u, v) en choisissant un sous-intervalle (u, v) tel que $\lambda Z_1 + (u, v) \subseteq \lambda Z_1 + U$ contient a, on suppose également sans perte de généralités que $\lambda \neq 0$ (sinon ce n'est qu'une intersection d'intervalles).

On sait alors que $a \in (\lambda Z_1 + (u, v)) \cap (x, y)$, montrons que $(\lambda Z_2 + (f(u), f(v)) \cap (f(x), f(y))$ est non vide, i.e. que

$$Z_2 \cap \frac{1}{\lambda} \big(f(x) - f(v), f(y) - f(u) \big) \neq \varnothing$$

Or

$$Z_1 \cap \frac{1}{\lambda} (x - v, y - u) \neq \varnothing$$

Donc

$$\left\lfloor \frac{y-u}{\lambda} \right\rfloor > \frac{x-v}{\lambda}$$

Mais $x, y, u, v \in E$ donc on a bien

$$\left\lfloor \frac{f(y)-f(u)}{\lambda} \right\rfloor > \frac{f(x)-f(v)}{\lambda}$$

ce qui conclut. $\square$

Il nous faudrait à ce stade prouver les lemmes 5.9 et 5.10.

Démonstration : On montre d'abord par induction sur $\mathcal{F}$ le fait suivant :

<u>Affirmation:</u>
Toute fonction h de $\mathcal{F}$ s'écrit $x \longmapsto \lambda x + g(\{\mu x\})$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ et g est une fonction affine par morceaux sur $[0,1)$, à paramètres dans E, i.e. il existe une subdivision de $[0,1]$ qu'on note $0 = a_0 < a_1 < ... < a_r = 1$ telle que $g_{|(a_i, a_{i+1})}$ est de la forme $x \mapsto \alpha x + c$ (avec $c \in E, \alpha \in \mathbb{Q}$) et $g(a_i) \in E$.

<u>Preuve de l'affirmation :</u>
Soit $\mathcal{F}'$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ des fonctions qui s'écrivent ainsi. Déjà, pour tous $\lambda \in \mathbb{Q}$ et $c \in E$ on a $(x \longmapsto \lambda x + c) \in \mathcal{F}'$ et si $h \in \mathcal{F}'$ et $\lambda \in \mathbb{Q}$ alors $\lambda h \in \mathcal{F}'$.
On remarque par ailleurs qu'une fonction de la forme $x \mapsto g(\{\mu x\})$ avec g définie comme précédemment peut s'écrire sous la forme $x \mapsto \widetilde{g}(\{\frac{\mu}{n} x\})$ (une fonction affine par morceaux et T-périodique est aussi une fonction affine par morceaux et nT-périodique), cela montre que $\mathcal{F}'$ est stable par somme car si $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{Q}^*$, il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $\dfrac{\mu_1}{m} = \dfrac{\mu_2}{n}$.
Montrons enfin que si $h \in \mathcal{F}'$ alors $\{h\}$ aussi. Pour cela, on écrit

$$h(x) = \lambda x + c + g(\{\mu x\})$$

Donc

$$\{h(x)\} = \big\{\lambda x + c + g(\{\mu x\})\big\} = \big\{\{\lambda x\} + c + g(\{\mu x\})\big\}$$

On peut alors écrire

$$\{h(x)\} = \{\widetilde{g}(\{\alpha x\})\}$$

où $\widetilde{g}$ est une fonction affine par morceaux sur $[0,1)$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $\dfrac{1}{\alpha} \in \dfrac{1}{\lambda}\mathbb{Z} \cap \dfrac{1}{\mu}\mathbb{Z}$.
Or si $\widetilde{g}$ est affine par morceaux sur $[0,1)$ suivant une subdivision $(a_i)_{i \in [p]}$, alors sur un sous-intervalle (a_i, a_{i+1}), on peut écrire $\widetilde{g}(x) = \lambda x + c$. Si $\lambda = 0$, alors $g' := \{\widetilde{g}\}$ est constante et donc affine par morceaux sur (a_i, a_{i+1}). Sinon, $\lambda \neq 0$, on suppose sans perte de généralité que $\lambda > 0$, et comme $0 \leq a_{i+1} - a_i \leq 1$, $\lambda(a_i, a_{i+1}) + c$ coupe Z en un nombre fini de points, entre lesquels g' est affine.
Cela conclut la preuve de l'affirmation et on a bien $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.

Pour finir la preuve du lemme 5.9, il faut déterminer les ensembles définis par une condition $h = 0$ ou $h > 0$ pour une fonction $h \in \mathcal{F}$. On écrit h sous la forme donnée par le fait précédent :

$$h(x) = \lambda x + g(\{\mu x\})$$

Premier cas : $\lambda = 0$: une condition de la forme $h = 0$ (resp. $h > 0$) définit sur $[0, \frac{1}{\mu})$ une union finie d'intervalles ou de singletons à bornes dans E qu'on note U car h est affine par morceaux sur $[0, \frac{1}{\mu})$. La partie de R_1 définie est alors $\dfrac{1}{\mu}Z_1 + U$, cela montre aussi que $R_2 \vDash \forall x \; f_*h(x) = 0$ (resp. $f_*h > 0) \leftrightarrow x \in \dfrac{1}{\mu}Z_2 + f_*U$.

Second cas : $\lambda \neq 0$: on sait que $h(x) = \lambda x + g(\{\mu x\})$, une disjonction de cas portant sur $\{\mu x\}$ en fonction de la subdivision qui définit g montre que $h > 0$ définit une union finie d'intervalles. Cela clôt la preuve du lemme 5.9.
Pour le lemme 5.10, il suffit de le montrer avec deux E-ensembles périodiques, ce qui découle de l'observation suivante :

$$\text{pour tous } q_1, q_2 \in \mathbb{Q}, \text{ il existe } q_3 \in \mathbb{Q} \text{ tel que } T' \models q_1 Z \cap q_2 Z = q_3 Z \ .$$

□

Corollaire 5.11. *On déduit du théorème les corollaires suivants :*

1. *Les ensembles définissables dans un modèle de T forment l'algèbre engendrée par les ensembles de la forme (x, y) ou de la forme $\lambda Z + [a, b]$ où $\lambda \in \mathbb{Q}$.*
2. *Les théories T et T' sont uniformément fortement localement o-minimales.*
3. *La théorie T' est complète.*

Démonstration :

1. Un ensemble définissable dans un modèle R de T l'est aussi en voyant R comme une $\mathcal{L}'$-structure et R est un modèle de T', qui élimine les quantificateurs, le reste a été prouvé dans la démonstration du lemme 5.9.
2. Si R est un modèle de T, alors $c = min(Z \cap (0, +\infty)$ convient.
3. Comme T' élimine les quantificateurs et que toute formule sans quantificateur ne faisant intervenir que 1 et les fonctions du langage est déjà décidée par T', la remarque 2.48 de [7] donne le résultat voulu. □

6 Application aux réseaux de neurones

L'utilisation de l'o-minimalité dans les études de convergence de réseaux de neurones est une technique récente. Elle vient de la difficulté suivante : en pratique, les fonctions utilisées dans ces réseaux ne sont ni lisses ni convexes, et les outils d'optimisation ne s'appliquent pas. La définissabilité dans une structure o-minimale apparaît alors comme une hypothèse suffisament forte pour garantir des convergences, et suffisamment faible pour être vérifiée dans la réalité.

Dans cette section, on suit l'article de Ji et Telgarski, dans lequel l'o-minimalité est utilisée pour prouver la convergence directionelle du vecteur de paramètres. On commence par expliquer le modèle et esquisser la preuve, puis l'objectif est de prouver une inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz, qui donne un contrôle du gradient d'une fonction définissable par une fonction "désingularisante". L'utilisation de l'o-minimalité pour prouver de telles inégalités remonte à Kurdyka en 1998 [4] ; Ji et Telgarski les étendent au cas d'une fonction localement lipschitzienne définie sur un ouvert non-borné.

6.1 Le modèle

Le problème est le suivant : on dispose de données d'entraînement, sous la forme d'un ensemble de couples $(x_i, y_i) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, et l'objectif est de deviner une relation entre eux, du type $y_i \simeq f(x_i)$ pour une certaine fonction $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Ainsi, étant donnée une nouvelle entrée $x \in \mathcal{X}$, on pourra prédire la valeur associée $y = f(x)$.

Le cas qui nous intéresse, appelé *classification supervisée*, est celui dans lequel l'ensemble $\mathcal{Y}$ est fini, que l'on prend même égal à $\{-1, 1\}$. Cela correspond par exemple à un diagnostique médical : 1 pour un patient sain et -1 pour un malade.

La méthode pour approximer f consiste à utiliser un ensemble de paramètres $W \in \mathbb{R}^k$ et une fonction *prédicateur* $\Phi : \mathcal{X} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. L'idée est que le signe de $\Phi(x, W)$ donne $f(x)$, et que la valeur absolue de $\Phi(x, W)$ indique la confiance en cette prédiction. On mesure à quel point W approxime f grâce à la *fonction de perte totale* :

$$\mathcal{L}(W) = \sum_{i=1}^{n} \ell(y_i \Phi(x_i, W))$$

où $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante. Souvent on prend $\ell_{\exp}(t) = e^{-t}$ ou $\ell_{\log}(t) = \ln(1+e^{-t})$. Il faut alors minimiser $\mathcal{L}(W)$. Pour trouver un bon choix de paramètres, on utilise une descente de gradient, ici modélisée par approximation continue : on considère une fonction $W : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ solution de l'équation

$$\frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t} = -\nabla \mathcal{L}(W_t). \tag{1}$$

En fait, on va regarder une version plus faible de cette équation, parce que $\mathcal{L}$ ne sera pas toujours supposée différentiable, mais ce sera expliqué dans la sous-section suivante. La question qui se pose est celle de la convergence du vecteur W_t. Celle-ci n'a pas lieu directement : il a été prouvé dans l'article *Gradient Descent Maximizes the Margin of Homogeneous Neural Networks* [6], que sous les hypothèses faites dans la sous-section suivante, $||W_t||_2 \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$. Cependant, ce que Ji et Telgarsky montrent dans [2], c'est que si Φ est définissable dans une structure o-minimale, alors il y a convergence directionnelle : le vecteur $W_t/||W_t||_2$ converge.

6.2 Hypothèses

Précisons les hypothèses du modèle. Dans toute la suite, pour A vecteur non-nul, on note $\widetilde{A} = A/||A||_2$.

Homogénéité On suppose que Φ est *L-positivement homogène* pour un certain $L > 0$, c'est-à-dire que pour tout $c > 0, x \in \mathcal{X}, W \in \mathbb{R}^k$, on a

$$\Phi(x, cW) = c^L \Phi(x, W).$$

On dit que le réseau de neurone est *homogène*. C'est une hypothèse qui n'est pas vérifiée dans certains cas pratiques, mais qui est utilisée dans les études théoriques. Elle sert notamment à ce que la convergence directionnelle de W_t implique celle des *distributions marginales* $p_i(\widetilde{W}) = y_i \Phi(x_i, W)/||W||_2^L$. Ce résultat est important dans la pratique ; il signifie que le réseau "apprend" bien quelque chose, au moins sur les données d'entraînement.

Régularité de Φ On suppose que pour tout $x \in \mathcal{X}$, la fonction $W \mapsto \Phi(x, W)$ est localement lipschitzienne. Cela implique seulement qu'elle est différentiable presque partout (voir la partie 6.4). Pour donner du sens à la descente de gradient, on utilise la notion de sous-différentiel.

Définition 6.1. *Soit $U \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne. Le **sous-différentiel** de f en $x \in U$ est l'enveloppe convexe des $y \in \mathbb{R}^k$ pour lesquels il existe une suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de points de différentiabilité de f, telle que $x_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$, et $\nabla f(x_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} y$. On le note $\partial f(x)$; ses éléments sont appelés **sous-gradients**.*

Si par exemple f est de classe $\mathcal{C}^1$ en x, alors $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

Proposition 6.2. *Si f est localement lipschitzienne, pour tout $x \in U$, le sous-différentiel de f en x est un convexe compact non-vide.*

Démonstration : L'ensemble

$$\{y : \exists (x_i) \in D^{\mathbb{N}}, x_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x, \nabla f(x_i) \text{ existe}, \nabla f(x_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} y\}$$

est borné car f est localement lipschitzienne, et une extraction diagonale montre qu'il est fermé. De plus, l'enveloppe convexe d'un compact K de $\mathbb{R}^k$ est compacte, car d'après le théorème de Carathéodory, c'est l'image de $K^{n+1} \times \Delta^{n+1}$ (où Δ^{n+1} est le $(n+1)$-simplexe) par l'application continue $(x_1, .., x_{n+1}, \lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \mapsto \sum \lambda_i x_i$. Donc $\partial f(x)$ est compact. Enfin, il est non-vide : puisque f est presque partout différentiable, il existe une suite (x_i) qui tend vers x tel que $\nabla f(x_i)$ existe ; or f étant localement lipschitzienne, la suite $(\nabla f(x_i))$ est bornée, donc elle admet une valeur d'adhérence. □

On remplace alors l'équation (1) par la condition suivante : la fonction $W : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est un arc (voir la partie 6.4), et

$$\frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t} \in \partial \mathcal{L}(W_t) \text{ pour presque tout } t \geq 0. \tag{2}$$

Définissabilité Enfin, on fixe $\mathcal{S}$ une extension o-minimale de $(\mathbb{R}, <, +, \times, \exp)$, et on suppose que pour tout $x \in \mathcal{X}$, l'application $\Phi(x, \bullet)$ est définissable dans cette extension. Le fait qu'une telle extension existe est un résultat de Wilkie [10]. Cela permettra d'utiliser les outils d'o-minimalité pour établir les inégalité de Kurdyka-Lojasiewicz, point clef de la preuve de la convergence directionelle.

Ces trois hypothèses entraînent que la fonction de perte totale $\mathcal{L}$ est aussi localement lipschitzienne, L-positivement homogène et définissable dans cette même extension.

6.3 Résumé de la preuve

Le premier résultat de Ji et Telgarsky est le suivant.

Théorème 6.3. *Sous les hypothèses de la sous-section précédente, $\widetilde{W}_t$ converge lorsque $t \to \infty$.*

Dans cette sous-section, on reprend l'esquisse de la preuve de ce résultats dans [2]

Déjà, remarquons que même si W_t vérifie l'équation (2), il n'est pas définissable dans $\mathcal{S}$; on ne peut pas appliquer directement le théorème de monotonie. Notons ζ_t la longueur du chemin parcouru par $\widetilde{W}_t$ pour $t \in \mathbb{R}_+$; c'est-à-dire $\zeta_t = \displaystyle\int_0^t \left\| \frac{\mathrm{d}\widetilde{W}_s}{\mathrm{d}s} \right\| \mathrm{d}s$. Puisque $\widetilde{W}_t \in \mathbb{S}^n$, le théorème 6.3 est une conséquence du suivant :

Théorème 6.4. *La fonction $t \longmapsto \zeta_t$ est bornée.*

Pour esquisser la preuve de ce résultat, introduisons quelques notations et définitions. Pour une fonction localement lipschitz f et un vecteur non nul W, on note $\overline{\partial} f(W)$ l'unique élément de $\partial f(W)$ de norme euclidienne minimale, bien défini par compacité et convexité de $\partial f(W)$. On note également

$$\overline{\partial}_r f(W) = \langle \overline{\partial} f(W), \widetilde{W} \rangle \widetilde{W} \text{ et } \overline{\partial}_\perp f(W) = \overline{\partial} f(W) - \overline{\partial}_r f(W)$$

les parties radiales et sphériques de $\overline{\partial} f(W)$. On pose aussi

$$\alpha(W) = \ell^{-1}(\mathcal{L}(W)), \widetilde{\alpha}(W) = \frac{\alpha(W)}{||W||^L} \text{ et } \widetilde{\alpha}_t = \widetilde{\alpha}(W_t).$$

Dans leur article [6], Lyu et Li montrent que $t \mapsto \widetilde{\alpha}_t$ est croissante et converge vers une limite strictement positive, que l'on note a. Ils montrent également que $||W_t|| \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Enfin, on dit qu'une fonction $\Psi : [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ est une **fonction désingularisante** si elle est continue sur $[0, \varepsilon)$, dérivable sur $(0, \varepsilon)$, avec $\Psi(0) = 0$ et $\Psi' > 0$. Cette notion intervient dans le lemme ci-dessous.

Lemme 6.5. *Il existe $c > 0, \varepsilon > 0$ et une fonction désingularisante $\Psi : [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ telle que pour presque tout t suffisamment grand, tel que $\widetilde{\alpha}_t > a - \varepsilon$, on a*

$$\frac{d\zeta_t}{dt} \leq -c \frac{d\Psi(a - \widetilde{\alpha}_t)}{dt}.$$

Ce lemme implique directement le théorème : pour t_0 tel que tout $t \geq t_0$ vérifie les conditions du lemme, on obtient $\lim_{t \to \infty} \zeta_t \leq \zeta_{t_0} + c\Psi(a - \alpha_{t_0})$.

Le point de départ de la preuve du lemme 6.5 est la formule suivante, que l'on admet : pour presque tout $t \geq 0$, on a

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\alpha}_t}{\mathrm{d}t} = ||\overline{\partial}_r \widetilde{\alpha}_t|| \; ||\overline{\partial}_r \mathcal{L}(W_t)|| + ||\overline{\partial}_\perp \widetilde{\alpha}_t|| \; ||\overline{\partial}_\perp \mathcal{L}(W_t)||, \text{ et } \frac{\mathrm{d}\zeta_t}{\mathrm{d}t} = \frac{||\overline{\partial}_\perp \mathcal{L}(W_t)||}{[||W_t||]}.$$

De là, on a

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\alpha}_t/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\zeta_t/\mathrm{d}t} = ||W_t|| \left(\frac{||\overline{\partial}_r \mathcal{L}(W_t)||}{||\overline{\partial}_\perp \mathcal{L}(W_t)||} ||\overline{\partial}_r \widetilde{\alpha}(W_t)|| + ||\overline{\partial}_\perp \widetilde{\alpha}(W_t) \right). \tag{3}$$

Pour borner cette équation, il faut distinguer deux cas.

S'il existe une constante c_1 telle que $||\overline{\partial}_\perp \widetilde{\alpha}(W_t)||/||\overline{\partial}_r \widetilde{\alpha}(W_t)||$, alors en affaiblissant 3, on a $\frac{\mathrm{d}\widetilde{\alpha}_t/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\zeta_t/\mathrm{d}t} \geq ||W_t|| \; ||\overline{\partial}_\perp \widetilde{\alpha}(W_t)||$, et le lemme 6.5 vient en appliquant l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz suivante avec $f : x \mapsto a - \widetilde{\alpha}(x)$ et $x = W_t$:

Lemme 6.6. *(Inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne définissable, où $U \subset \{x : ||x|| > 1\}$. Alors pour tous $c, \eta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction définissable désingularisante Ψ sur $[0, \varepsilon)$, telle que pour tout $x \in f^{-1}((0, \varepsilon))$,*

$$\Psi'(f(x))||x|| \; ||\overline{\partial} f(x)|| \geq 1$$

dès que $||\overline{\partial}_\perp f(x)|| \geq c||x||^\eta ||\overline{\partial}_r f(x)||$.

Dans l'autre cas, les auteurs trouvent des constantes $c_2, c_3 > 0$ telles que

$$\frac{||\overline{\partial}_r \mathcal{L}(W_t)||}{||\overline{\partial}_\perp \mathcal{L}(W_t)||} \geq c_2 ||W_t||^{2L/3} \text{ et } \frac{||\overline{\partial}_r \widetilde{\alpha}_t||}{||\overline{\partial}\widetilde{\alpha}_t||} \geq c_3 ||W_t||^{-L/3}.$$

L'équation (3) donne alors que $\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{\alpha}_t/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\zeta_t/\mathrm{d}t} \geq c_2 c_3 ||W_t|^{4L/3} ||\overline{\partial}\widetilde{\alpha}_t||$. Pour conclure, ils utilisent une deuxième inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz :

Lemme 6.7. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne définissable, où $U \subset \{x : ||x|| > 1\}$. Pour tout $\lambda > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction définissable désingularisante Ψ sur $[0, \varepsilon)$, telle que pour tout $x \in f^{-1}((0, \varepsilon))$*

$$\max\{1, 2/\lambda\} \, \Psi'(f(x)) ||x||^{1+\lambda} ||\overline{\partial} f(x)|| \geq 1$$

6.4 Analyse non-lisse

Dans cette sous-partie, on montre des résultats d'analyse utiles dans la suite.

Définition 6.8. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}^n$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, est dite **absolument continue** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $([a_n, b_n])_n$ est une suite de sous-intervalles disjoints de I,*

$$\sum_{n \geq 0} |b_n - a_n| < \delta \implies \sum_{n \geq 0} ||f(b_n) - f(b_n)|| < \varepsilon.$$

*On dit que f est un **arc** si elle est absolument continue sur tout compact de I.*

C'est une notion un peu plus forte que celle d'uniforme continuité. Remarquer que la composition d'un arc et d'une fonction localement lipschitzienne est encore un arc.

Proposition 6.9. *Une fonction absolument continue est presque partout dérivable.*

Le cas particulier d'une fonction lipschitzienne est connu sous le nom de théorème de Rademacher. Pour une preuve dans le cas général, voir le théorème 14 de la section 4 de *Real Analysis* de Royden [8].

Lemme 6.10. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^k$ et $f : U \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne. Alors l'ensemble*

$$\Gamma := \{(x, y) : x \in U, y \in \partial f(x)\}$$

est définissable dans $\mathcal{S}$.

Démonstration : On peut définir une formule $\Phi(x, y)$ qui dit que y est le gradient de f en x par

$$\Phi(x, y) = x \in D \wedge \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall z \; (||z - x|| \leq \delta \to ||f(x) - f(z) - \langle y, x - z \rangle|| \leq \varepsilon ||x - z||).$$

Ensuite, on peut définir une formule $\Psi(x, y)$ qui dit que y est une limite de gradients de f en des points qui convergent vers x par

$$\Psi(x, y) = x \in D \wedge \forall \varepsilon > 0 \; \exists x' \exists y' \; [\Phi(x', y') \wedge (||x - x'|- \leq \varepsilon) \wedge (||y - y'|| \leq \varepsilon)].$$

Aussi, d'après le théorème de Carathéodory, on peut définir Γ par la formule aux deux variables libres x, y suivante :

$$\exists y_1 ... \exists y_{k+1} \exists \lambda_1 ... \exists \lambda_{n+1} \ \left(\bigwedge_{i=1}^{n+1} \Psi(x, y_i) \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n+1} \lambda_i \geq 0 \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i y_i = y \right).$$

$\square$

Le lemme suivant montre que l'on peut utiliser $\overline{\partial} f$ à la place de ∇f dans de nombreux cas.

Lemme 6.11. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x : I \to U$ absolument continue. Si f est définissable (ou même admet une stratification de Whitney), alors pour presque tout $t \in I$, on a*

$$(f \circ x)'(t) = \langle y, x'(t) \rangle$$

pour tout $y \in \partial f(x(t))$.

Démonstration : Soit (S_i) une stratification de Whitney de f (qui existe d'après le théorème 4.30), et (πS_i) sa projection sur $\mathbb{R}^k$, que l'on sait être aussi une stratification de Whitney (lemme 4.29). La preuve part de l'observation suivante : pour $a \in U$ de strate S, pour une fonction $g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ coïncidant avec f sur un voisinage de a dans S et $v \in T_a S$, on a

$$\langle y, v \rangle = \langle \nabla g(a), v \rangle \text{ pour tout } y \in \partial f(a)$$

En effet, soit $v \in \partial f(a)$, et $(a_n)_n$ une suite de $\mathbb{R}^k$ telle que $a_n \to a$, $\nabla f(a_n) \to v$, que l'on peut supposer à valeur dans une seule strate $\pi S'$. Puisque $(\nabla f(a_n), -1)$ est normal à S' en a_n, $(\partial f(a), -1)$ est normal à S en a, ce qui signifie que pour tout $\gamma :]-1, 1[\to \pi S$ dérivable en 0 avec $\gamma(0) = a$, on a

$$\begin{aligned} \langle v, \gamma'(0) \rangle &= D_{\gamma'(0)} f(a) \\ &= D_{\gamma'(0)} g(a) \\ &= \langle \nabla g(a), \gamma'(0) \rangle \end{aligned}$$

ce qui prouve l'affirmation.

Prouvons le lemme. Les fonctions x et $f \circ x$ sont absolument continues, donc différentiables presque partout. On affirme que pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $x(t) \in \pi S_i \implies x'(t)$ existe et $x'(t) \in T_{x(t)} \pi S_i$. En effet, pour i fixé, l'ensemble Ω_i des t en lequels $x'(t)$ existe et ne vérifie pas cette condition est discret, puisque (πS_i) vérifie la condition de Whitney, et donc $\bigcup_i \Omega_i$ est de mesure nulle.

Maintenant, soit $t \in \mathbb{R}_+$ tel que x et $f \circ x$ soient dérivables en t, et tel que $t \notin \bigcup_i \Omega_i$. Soit πS la strate de $x(t)$, et soit $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ coïncidant avec f sur un voisinage de $x(t)$ dans S. Pour utiliser g, on veut prendre une courbe à valeur dans S : d'après ce qui précède, il existe $\gamma :]-1, 1[\to \pi S$ dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = x(t), \gamma'(0) = x'(t)$. Montrons que $(f \circ x)'(t) = (f \circ \gamma)'(0)$. Soit K une constante de lipschitz pour f dans un voisinage de $x(0)$; on a alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x(t+r)) - f(x(t))}{r} - \frac{f(\gamma(r)) - f(\gamma(0))}{r} \right| &= \left| \frac{f(x(t+r) - f(\gamma(r))}{r} \right| \text{ (car } \gamma(0) = x(t)) \\ &\leq K \left\| \frac{x(t+r) - x(t) + \gamma(0) - \gamma(r)}{r} \right\| \\ &\xrightarrow[r \to 0]{} K \|x'(t) - \gamma'(0)\| = 0 \end{aligned}$$

De là, $(f \circ x)'(t) = (f \circ \gamma)'(0) = (g \circ \gamma)'(0) = \langle \nabla g(x(t)), \gamma'(0) \rangle = \langle y, x'(t) \rangle$ pour tout $y \in \partial f$. $\square$

6.5 Valeurs critiques asymptotiques

Cette sous-partie sert à montrer une version o-minimale du théorème de Morse-Sard pour des fonctions définissables. Le résultat principal de cette sous-partie est le théorème 6.13 :

Définition 6.12. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Un point $c \in \mathbb{R}$ est appelé* ***valeur critique asymptotique de Clarke*** *s'il existe des suites $(x_n) \in U^{\mathbb{N}}$ et $(x_n^*) \in (\mathbb{R}^k)^{\mathbb{N}}$ telles que*

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n^* \in \partial f(x_n)$.*
- $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c$.
- $(1 + ||x_n||)||x_n^*|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

On note $K(f)$ l'ensemble des valeurs critiques asymptotiques de Clarke d'une fonction f.

Théorème 6.13. *Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $h : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction définissable localement lipschitzienne. Alors $K(h)$ est un ensemble fini.*

Démonstration : La preuve repose sur l'existence d'une stratification de Whitney non-verticale (théorème 4.30, proposition 4.31 et remarque 4.32), et sur le lemme suivant.

Lemme 6.14. *Soit $f : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction localement lipschitzienne et $(S_i)_i$ une stratification de Whitney du graphe de f. Alors pour tout élément x d'une strate S tel que $f(x) < +\infty$, on a, en notant π_F la projection orthogonale sur un sous-espace F, que*

$$\pi_{T_x\pi(S)}(\partial f(x)) \subseteq \{\nabla_R f(x)\}.$$

Démonstration : (du lemme 6.14) Soit $p \in \partial f(x)$, on dispose alors de suites $(x_k)_k \in U$ et $x_k^* = \nabla g(x_k) \in \partial g(x)$ telles que, en notant $u_k = (x_k, f(x_k))$ et $u = (x, f(x))$,

$$u_k \xrightarrow[n\to\infty]{} u, \text{ et } x_k^* \xrightarrow[n\to\infty]{} p.$$

Par locale finitude de la stratification, on peut supposer que tous les x_k sont dans une même strate S_i. Soit S la strate contenant x, on note $X_i = \pi(S_i)$ et X la projection $\pi(S)$, qui sont des strates de $\pi(U)$. Distinguons deux cas.

Si $S_i = S$, on a que $\pi_{T_{x_k}X}(x_k^*) = \nabla_R f(x_k)$ (ce n'est que la projection du gradient). Par ailleurs, comme X est une variété C^p, on sait que $T_{x_k}X$ converge vers T_xX. Mais f est de classe C^1 sur X, on conclut alors par continuité que $\pi_{T_xX}(p) = \nabla_R f(x)$.

Au contraire, si $S_i \neq S$, alors $\overline{S_i} \cap S \neq \varnothing$ car $(x, f(x))$ est un élément de l'intersection. Comme $(S_i)_i$ est une stratification, cela implique $S \subseteq \overline{S_i}$. En outre, on peut même supposer que la suite des $T_{x_k}S_i$ converge, par compacité de la grassmannienne, vers un sous-space $\mathcal{T}$, qui, par la propriété de Whitney, vérifie $T_uS \subseteq \mathcal{T}$ d'après la remarque 4.28. Or pour tout k, le vecteur $(x_k^*, -1)$ est orthogonal à $T_{u_k}S_i$, donc par passage à la limite on a que $(p, -1)$ est orthogonal à $\mathcal{T}$ et donc orthogonal à T_uS. On en déduit que $(\pi_{TxX}(p), -1)$ est orthogonal à T_uS, donc $\pi_{TxX}(p) = \nabla_R f(x)$ car le gradient $\nabla_R f(x)$ est le seul vecteur vérifiant cette condition d'orthogonalité. Cela clôt la démonstration du lemme. $\square$

Expliquons enfin comment le lemme implique le résultat voulu. Nous ne faisons la démonstration seulement dans le cas où U est borné.

Si g est une fonction définissable continue, on dispose, grâce au théorème 4.30, d'une C^p-stratification de Whitney finie non verticale du graphe de g, qu'on note $(S_i)_{i\leq r}$, avec p suffisamment grand. Le lemme 6.14 implique que pour tout $x \in U$ et tout $x^* \in \partial g(x)$ que $||x^*|| \geq \underline{||\nabla_R g(x)||}$.

Soit c une valeur critique asymptotique de Clarke de g, alors, par définition, $c \in \bigcup_{i\leq r} \overline{E_i(\varepsilon)}$ où

$$E_i(\varepsilon) = \{g(x) : x \in S_i \wedge ||\nabla_R g(x)|| < \varepsilon\}.$$

Or chaque chaque $E_i(\varepsilon)$ est définissable et est donc une union finie d'intervalles et de singletons par o-minimalité.

Donc $\overline{E_i(\varepsilon)}$ est de même mesure que $E_i(\varepsilon)$, mais d'après la démonstration du lemme de Morse-Sard, comme f est C^p sur chaque $\pi(S_i)$, en notant λ la mesure de Lebesgue, on a $\lambda(E_i(\varepsilon)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On en déduit que $\lambda(K(g)) = 0$, mais $K(g)$ étant définissable, c'est alors un ensemble fini. Il suffit ensuite d'appliquer ce résultat aux restrictions de la fonction h du théorème à chaque composante d'une décomposition en cellules C^0 adaptée à h. □

6.6 Une inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz

Dans cette sous-partie, on prouve une inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz, dans le cas d'une fonction définie sur un ouvert borné. Cela donne une idée de la preuve dans le cas d'un domaine non-borné.

Lemme 6.15. *(Inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz, cas borné) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne définissable, avec U un ouvert borné. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et Ψ une fonction désingularisante définissable sur $[0, \varepsilon)$, telle que pour tout $x \in f^{-1}((0, \varepsilon))$, on a*

$$\Psi'(f(x))||\overline{\partial} f(x)|| \geq 1 \ .$$

Démonstration : Puisque l'ensemble $f(U)$ est définissable, c'est une union d'intervalles et de points. S'il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $(0, \varepsilon_1) \cap f(U) = \varnothing$, le résultat est une quantification sur l'ensemble vide ; aussi on peut prendre $\varepsilon_1 > 0$ tel que $(0, \varepsilon_1) \subset f(U)$. On définit alors $\varphi : (0, \varepsilon_1) \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(z) = \inf \left\{ ||\overline{\partial} f(x)|| : f(x) = z \right\} .$$

C'est une fonction définissable, donc d'après le théorème 6.13, on peut prendre $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ tel qu'il n'y ait pas de valeur critique asymptotique sur $(0, \varepsilon_2)$. Puisque U est borné, on a donc $\varphi(z) > 0$ sur $(0, \varepsilon_2)$. Cela permet d'affirmer que l'ensemble définissable

$$A = \{x \in f^{-1}((0, \varepsilon_2)) : ||\overline{\partial} f(x)|| \leq 2\varphi(f(x))\}$$

contient une suite (x_i) telle que $f(x_i) \to 0$. Mais U est borné donc (x_i) admet une valeur d'adhérence y. D'après le lemme 4.26 (sélection de courbes), appliqué au graphe de f, il existe $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\gamma((0, 1]) \subset A$, $\gamma(0) = y$, $f(\gamma(0)) = 0$.

On pose $h = f \circ \gamma$. Puisque c'est une fonction définissable, valant 0 en 0 et strictement positive sur $(0, 1]$, le théorème 4.17 implique qu'il existe $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_2)$ tel que $h' > 0$ sur $(0, \varepsilon_3)$.

De plus, le lemme 6.11 donne que pour presque tout $t \in (0, \varepsilon_3)$, on a

$$h'(t) - \langle \overline{\partial} f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = 0 \tag{4}$$

Puisque le membre de gauche est définissable, il ne peut être non-nul qu'en un nombre fini de points, et donc il existe $\varepsilon_4 \in (0, \varepsilon_3)$ tel que (4) soit vrai sur $(0, \varepsilon_4)$. On a alors que h admet une réciproque sur $(0, \varepsilon_4)$, définie sur $(0, h(\varepsilon_4))$. On a $h^{-1}(z) \underset{z \to 0}{\longrightarrow} 0$, et la formule de la dérivée de l'inverse montre qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ avec une dérivée positive. Son prolongement par continuité est donc une fonction désingularisante.

Maintenant, pour $x \in (0, h(\varepsilon_4))$, on pose $s = h^{-1}(f(x))$, et on a :

$$\begin{aligned}
(h^{-1})'(f(x))||\overline{\partial} f(x)|| &= \frac{||\overline{\partial} f(x)||}{h'(s)} \\
&\geq \frac{||\overline{\partial} f(\gamma(s))||}{2h'(s)} && \text{(car } \gamma(s) \in A\text{)} \\
&\geq \frac{||\overline{\partial} f(\gamma(s))||}{2\langle \overline{\partial} f(\gamma(s)), \gamma'(s)\rangle} && \text{(d'après (4))} \\
&\geq \frac{1}{2||\gamma||_\infty} && \text{(Cauchy-Schwarz)}
\end{aligned}$$

Aussi, en posant $\Psi = 2||\gamma||_\infty h^{-1}$, on a le résultat. □

Ceci conclut l'esquisse de preuve du théorème 6.3. On espère qu'elle aura donné une idée de la façon dont l'o-minimalité peut avoir des applications hors de la théorie des modèles.

Références

[1] Martin Hils et François Loeser. *A First Journey through Logic.* American Mathematical Society, 2019.

[2] Ziwei Ji et Matus Telgarsky. Directional convergence and alignment in deep learning. *CoRR*, abs/2006.06657, 2020.

[3] Alexandre Grothendieck. Esquisse d'un programme. 1998.

[4] Krzysztof Kurdyka. On gradients of functions definable in o-minimal structures. *Annales de l'Institut Fourier*, 48 :769–783, 1998.

[5] Ta Lê Loi. Verdier and strict Thom stratifications in o-minimal structures. *Illinois Journal of Mathematics*, 42(2) :347 – 356, 1998.

[6] Kaifeng Lyu and Jian Li. Gradient descent maximizes the margin of homogeneous neural networks. *CoRR*, abs/1906.05890, 2019.

[7] Silvain Rideau-Kikuchi. *Logique.* polycopié de notes de cours, 2023.

[8] H.L. Royden. *Real Analysis.* Collier Macmillan, third edition, 1988.

[9] Lou van den Dries. *Tame topology and o-minimal structures.* Cambridge University Press, 1998.

[10] A. J. Wilkie. Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted pfaffian functions and the exponential function. *Journal of the American Mathematical Society*, 9 :1051–1094, 1996.