

# Mouvement brownien et problème de Dirichlet

Mémoire de 1ère année du 13 juin 2024  
Sous la direction d'Antoine Mouzard

## Avant-propos :

Le mouvement brownien, processus stochastique modélisant le mouvement erratique d'une particule soumise à des collisions aléatoires, offre un outil puissant pour résoudre des problèmes mathématiques complexes. Dans cet article, nous présenterons tout d'abord une construction du mouvement Brownien, ainsi que certaines de ses propriétés : il s'agit ainsi presque partout d'une fonction continue partout mais dérivable nulle part. Nous explorerons ensuite son application à la résolution du problème de Dirichlet, un problème fondamental en analyse mathématique qui consiste à trouver une fonction harmonique continue sur un domaine donné et prenant des valeurs prescrites sur sa frontière.

En effet, en s'appuyant sur les propriétés du mouvement brownien démontrées dans la première section, nous démontrerons que la solution du problème de Dirichlet peut être représentée comme l'espérance mathématique de la fonction objectif le long d'une trajectoire brownienne issue d'un point quelconque du domaine.

La résolution analytique du problème de Dirichlet n'est possible que pour des domaines simples. Pour des domaines plus complexes, des méthodes numériques sont nécessaires. Parmi les méthodes numériques les plus populaires, on peut citer la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis. La représentation probabiliste présentée dans ce mémoire ouvre la voie à d'autres méthodes numériques pour approcher la solution du problème de Dirichlet, voir par exemple [Mor13].

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Construction du mouvement brownien</b>	<b>2</b>
I.1	Processus aléatoire . . . . .	2
I.2	Construction et propriétés du mouvement brownien . . . . .	4
I.3	Quelques propriétés du mouvement brownien. . . . .	11
<b>II</b>	<b>Mouvement brownien et problème de Dirichlet</b>	<b>14</b>
II.1	Générateur d'un processus markovien . . . . .	14
II.2	Problème de Dirichlet et processus markovien . . . . .	15
II.3	Fonctions harmoniques et intégrale sur les sphères . . . . .	16

---

# I – Construction du mouvement brownien

---

## I.1 Processus aléatoire

On se placera toujours dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

### Définition 1 (Processus aléatoire)

On appelle un processus une famille de variables aléatoires  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ .

Un tel processus est dit Gaussien si pour tout  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$  et tout  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $a_1 X_{t_1} + \dots + a_n X_{t_n}$  est une variable aléatoire gaussienne.

Quitte à remplacer le processus  $X$  par  $X - X_0 - \mathbb{E}(X - X_0)$ , on peut supposer le processus centré et nul en 0 :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \mathbb{E}(X_t) = 0 \quad \text{et} \quad X_0 = 0.$$

On le supposera toujours par la suite, et on traitera dans cette partie uniquement de processus unidimensionnels (on verra pourquoi c'est suffisant dans la partie suivante).

### Proposition 2 (admise)

Si  $X$  est un processus gaussien, la loi de tous les vecteurs de la forme  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est uniquement déterminée par la fonction  $K : (s, t) \mapsto \mathbb{E}(X_s X_t)$ . Plus précisément, posons

$$\Gamma = \begin{pmatrix} K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{pmatrix},$$

alors si  $\Gamma$  est définie positive, la densité de  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2} x (\Gamma^{-1})^T x\right).$$

### Définition 3 (Processus à accroissements indépendants)

Un processus est dit à accroissements indépendants si pour tous  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , les variables  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  sont indépendantes.

**Lemme 4**

Soit  $X$  un processus gaussien, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $X$  est à accroissements indépendants.
2. Pour tous  $0 \leq s_1 < s_2 \leq t_1 < t_2$ , les variables  $X_{s_2} - X_{s_1}$  et  $X_{t_2} - X_{t_1}$  sont indépendantes.
3. Pour tous  $0 \leq s_1 < s_2 \leq t_1 < t_2$ , les variables  $X_{s_2} - X_{s_1}$  et  $X_{t_2} - X_{t_1}$  sont orthogonales.

*Démonstration.*

1  $\Rightarrow$  2 : Le résultat est immédiat.

2  $\Rightarrow$  3 : Soient  $0 \leq s_1 < s_2 \leq t_1 < t_2$ , on a alors

$$\mathbb{E}[(X_{s_2} - X_{s_1})(X_{t_2} - X_{t_1})] = \mathbb{E}[X_{s_2} - X_{s_1}] \mathbb{E}[X_{t_2} - X_{t_1}] = 0.$$

3  $\Rightarrow$  1 : Soient  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , on pose  $Y_1 = X_{t_1}$  et  $Y_i = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ , alors les  $Y_i$  sont des gaussiennes centrées orthogonales. Posons

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(Y_1^2) & \dots & \mathbb{E}(Y_1 Y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{E}(Y_n Y_1) & \dots & \mathbb{E}(Y_n^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

où  $\sigma_i$  désigne la racine de la variance de  $Y_i$ . On obtient alors comme dans la **proposition 2** que la densité de loi jointe de  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2} x(\Gamma^{-1})^T x\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \prod_{i=1}^n \sigma_i}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2} x_i^2\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \rho_{Y_i}(x_i). \end{aligned}$$

Cela signifie que les  $Y_i$  sont indépendantes. □

**Proposition 5**

Soit  $X$  un processus gaussien, notons  $\mathbb{V} : t \mapsto K(t, t) = \mathbb{E}(X_t^2)$  la variance de  $X$ , alors  $X$  est à accroissements indépendants si et seulement si

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+, K(s, t) = \mathbb{V}(s) \wedge \mathbb{V}(t).$$

*Démonstration.*

$\Rightarrow$  : Commençons par montrer le sens direct.

Remarquons tout d'abord que  $\mathbb{V}$  est croissante : si  $s < t$ , les variables  $X_t - X_s$  et  $X_s$  sont orthogonales. On a alors

$$\mathbb{V}(t) = \mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{E}((X_s + X_t - X_s)^2) = \mathbb{E}(X_s^2) + \mathbb{E}((X_t - X_s)^2) \geq \mathbb{E}(X_s^2) = \mathbb{V}(s).$$

Pour deux réels  $s < t$  toujours, on a alors

$$K(s, t) = \mathbb{E}(X_s X_t) = \mathbb{E}(X_s^2) + \mathbb{E}(X_s(X_t - X_s)) = \mathbb{V}(s) = \mathbb{V}(s) \wedge \mathbb{V}(t)$$

car  $\mathbb{V}$  est croissante.

$\Leftarrow$  : Montrons maintenant le sens réciproque.

Supposons maintenant

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+, K(s, t) = \mathbb{V}(s) \wedge \mathbb{V}(t).$$

Pour des réels  $0 \leq s_1 < s_2 \leq t_1 < t_2$ , on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X_{s_2} - X_{s_1})(X_{t_2} - X_{t_1})) &= K(s_2, t_2) - K(s_2, t_1) - K(s_1, t_2) + K(s_1, t_1) \\ &= \mathbb{V}(s_2) - \mathbb{V}(s_2) - \mathbb{V}(s_1) + \mathbb{V}(s_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui signifie d'après le **lemme 4** que  $X$  est à accroissements indépendants. □

## I.2 Construction et propriétés du mouvement brownien

### Définition 6 (Mouvement brownien)

Soit  $B$  un processus, c'est un mouvement brownien (issu de 0) si c'est un processus gaussien centré et nul en 0, tel que  $K(s, t) = s \wedge t$ , et continu : Pour presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $t \mapsto B_t(\omega)$  est continu.

**Remarque : Mouvement brownien et processus gaussien à accroissements indépendants.**

Dans le cas unidimensionnel, on a déjà expliqué que d'un processus on pouvait se ramener à un processus centré nul en 0. De plus, pour  $s < t$ , si  $K(s, s) = K(t, t)$ , alors  $\mathbb{E}((X_t - X_s)^2) = 0$  (d'après la preuve de la proposition précédente), i.e.  $X_t = X_s$  p.s. quitte alors à supprimer les intervalles où le processus est presque sûrement constant, on peut supposer  $t \mapsto K(t, t)$  strictement croissante (et toujours définie sur  $\mathbb{R}_+$  entier avec l'hypothèse  $K(t, t) \rightarrow +\infty$ ). On note alors  $F$  son inverse, et on obtient finalement que le processus  $(X_{F(t)})_t$  a pour variance  $\mathbb{V} = id$ , ou encore  $K(s, t) = s \wedge t$ , d'où l'intérêt de l'étude de ces processus particuliers.

### Théorème 7

Il existe un mouvement brownien.

Commençons par traiter le cas  $d = 1$ , et sur l'intervalle de temps  $[0, 1]$  : On va pour cela montrer quatre lemmes préalables.

### Lemme 8

Il existe une suite de variables de lois normales centrées réduites indépendantes.

*Démonstration.* Considérons  $\Omega = [0, 1] \setminus \mathcal{D}$ , où on a

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{k}{2^n}, n \in \mathbb{N}, k \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket \right\},$$

qu'on munit de sa tribu borélienne (induite par  $\mathbb{R}$ ) et de la mesure de Lebesgue. Tout réel  $x \in \Omega$  admet une unique écriture en base 2 qu'on note

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{2^n}.$$

Il est facile de vérifier que les applications  $\varepsilon_n : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  sont des variables aléatoires indépendantes et suivant des lois de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

On voit que, par la décomposition en base 2 utilisée précédemment, on peut recréer une loi uniforme sur  $]0, 1[$  avec une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre  $\frac{1}{2}$  (car  $\mathcal{D}$  est dénombrable et donc de mesure nulle). Or  $\mathbb{N}^2$  est dénombrable, on peut donc réindexer les  $\varepsilon_n$  par  $\mathbb{N}^2$ . En notant alors pour tout  $\omega \in \Omega$ ,

$$u_k(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,k}(\omega)}{2^n},$$

la variable aléatoire  $u_k : \Omega \rightarrow ]0, 1[$  suit une loi uniforme grâce à la remarque précédente et les  $u_k$  sont indépendantes car les  $\varepsilon_{n,k}$  le sont.

Il faut cependant justifier la mesurabilité de l'application  $u : \omega \mapsto (u_k(\omega))_k$ . Choisissons alors la tribu la plus fine possible sur  $]0, 1[^\mathbb{N}$  : la tribu image réciproque sur  $]0, 1[^\mathbb{N}$  sous l'application  $u$

$$\mathcal{A}_u = \left\{ A \subseteq ]0, 1[^\mathbb{N}, u^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\Omega) \right\}.$$

Cette tribu permet de ne pas se soucier de la tribu dont est muni  $]0, 1[^\mathbb{N}$  et de ne regarder que  $\mathcal{B}(\Omega)$  ou plus simplement les ensembles mesurables induits par les variables  $\varepsilon_{n,k}$ . Par exemple, pour deux réels  $0 \leq a < b \leq 1$ , l'ensemble  $\{a \leq u_k \leq b\}$  est  $\mathcal{A}_u$ -mesurable pour tout entier  $k$ .

Et on munit  $(]0, 1[^\mathbb{N}, \mathcal{A}_u)$  de la mesure (de probabilité) image  $\mathbb{P}_u = u_*\lambda$  pour garder ce lien permettant de ne regarder que les variables  $\varepsilon_{n,k}$ .

Notons maintenant  $F$  la fonction de répartition de la variable gaussienne centrée réduite :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \rho(x) dx,$$

où  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  est la densité de la loi normale centrée réduite.

La fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow ]0, 1[$  est une bijection continue strictement croissante. Notons alors  $g_k$  nos lois normales centrées réduites qu'on définit de la manière suivante :

$$g_k : (x_n)_n \mapsto F^{-1}(x_k).$$

Puisque  $F$  est croissante et continue et que les ensembles de la forme  $\{a \leq u_k \leq b\}$  sont mesurables, alors les applications  $g_k : (]0, 1[^\mathbb{N}, \mathcal{A}_u) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  sont mesurables. Comme on l'a fait avec les applications  $u_k$ , on munit  $\mathbb{R}^\mathbb{N}$  de la tribu image réciproque  $\mathcal{A}$  sous l'application  $g = (g_k)_k$  et de la mesure de probabilité  $\mathbb{P} = g_*\mathbb{P}_u$ .

D'après la remarque sur la mesurabilité de  $g_k$ , la projection canonique sur la  $k$ -ième coordonnée  $\pi_k$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  est mesurable. On peut donc restreindre la tribu  $\mathcal{A}$  et la mesure  $\mathbb{P}$  à la tribu  $\sigma(\bigcup \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{A}$  si seule celle-ci nous intéresse. Dans les faits, pour notre construction, le plus important est de pouvoir se ramener aux fonctions  $u_k$  pour vérifier les mesurabilités facilement et ce changement n'est qu'esthétique.

Vérifions maintenant que  $g_k = \pi_k \circ g : ]0, 1[^\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  suit une loi normale. Pour tout réel  $x$ , on a

$$\mathbb{P}(g_k \leq x) = \mathbb{P}(F^{-1}(\tilde{\pi}_k) \leq x) = \mathbb{P}(\tilde{\pi}_k \leq F(x)) = \mathbb{P}_u(u_k \leq F(x)) = F(x),$$

où  $\tilde{\pi}_k : ]0, 1[ \xrightarrow{\mathbb{N}} ]0, 1[$  est la projection sur la  $k$ -ième coordonnée.

Puisque  $g_k$  a la même fonction de répartition qu'une variable de loi normale centrée réduite alors c'en est une. On remarque alors que les  $g_k$  sont des variables normales centrées réduites car la fonction de répartition détermine la loi. De plus, comme les variables  $u_k$  sont indépendantes, alors les variables  $g_k$  le sont aussi.

**Remarques :**

On aurait pu s'abstenir de construire  $g$  mais il est plus pratique de voir une suite de variables aléatoires comme une variable aléatoire sur des suites.

De plus, puisque la tribu choisie sur les deux espaces intermédiaires construits est la tribu image réciproque à chaque fois, alors on pourrait voir les  $g_k$  comme des variables aléatoires sur le tout premier espace probabilisé mentionné :  $([0, 1] \setminus \mathcal{D}, \mathcal{B}([0, 1] \setminus \mathcal{D}), \lambda)$ . On pourrait d'ailleurs aussi modifier cet espace en l'espace usuel  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$  puisque  $\mathcal{D}$  est dénombrable et donc négligeable.

On considèrera alors les variables aléatoires gaussiennes indépendantes

$$g_k : ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1])) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

□

**Lemme 9**

Si une suite de variables aléatoires gaussiennes converge dans  $L^2(\Omega)$  vers  $Y$ , alors  $Y$  est une variable gaussienne.

*Démonstration.* Soit  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires gaussiennes qui converge dans  $L^2$  vers  $Y$ .

Par Cauchy-Schwartz, on a

$$\mathbb{E}(|Y_n - Y|) \leq \sqrt{\mathbb{E}((Y_n - Y)^2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc  $\mathbb{E}(Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y)$ . Puis, on a aussi

$$|\mathbb{V}(Y_n) - \mathbb{V}(Y)| = |\mathbb{E}(Y_n^2 - Y^2)| = |\mathbb{E}((Y_n - Y)(Y_n + Y))| \leq \sqrt{\mathbb{E}((Y_n - Y)^2)\mathbb{E}((Y_n + Y)^2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Mais puisque la convergence dans  $L^2$  implique la convergence en loi, alors

$$\mathbb{E}(e^{i\xi Y_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{i\xi Y}).$$

Or on sait que

$$\mathbb{E}(e^{i\xi Y_n}) = e^{i\mathbb{E}(Y_n)\xi - \mathbb{V}(Y_n)^2 \xi^2 / 2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{i\mathbb{E}(Y)\xi - \mathbb{V}(Y)^2 \xi^2 / 2},$$

d'où on conclut que  $Y$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(\mathbb{E}(Y), \mathbb{V}(Y))$ . □

**Lemme 10**

Soit  $N$  variable aléatoire de loi normale centrée réduite, alors pour tout  $a \geq 0$ ,  $\mathbb{P}(|N| \geq a) \leq e^{-a^2/2}$ .

*Démonstration.* Pour  $a \geq 0$ , on a  $\mathbb{P}(|N| \geq a) = 2\mathbb{P}(N \geq a)$ . Or, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}\mathbb{P}(N \geq a) &= \int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{(x+a)^2}{2}} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{a^2}{2}} e^{-ax} dx \\ &\leq e^{-\frac{a^2}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-\frac{a^2}{2}} \end{aligned}$$

donc on a bien  $\mathbb{P}(|N| \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2}}$ . □

**Proposition II. Inégalité de Kolmogorov**

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  des variables aléatoires réelles indépendantes telles que

$$\forall n, \mathbb{E}[X_n] = 0 \text{ et } \sum_n \mathbb{E}[X_n^2] < \infty.$$

En notant  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ , on a pour tout réel  $a > 0$ ,

$$\mathbb{P}\left(\sup_n |S_n| > a\right) \leq \frac{1}{a^2} \sum_n \mathbb{E}[X_n^2].$$

*Démonstration.* Considérons le temps d'arrêt

$$\nu_a : \omega \mapsto \begin{cases} +\infty & \text{si } \sup_n |S_n| \leq a \\ \min\{n, |S_n| > a\} & \text{sinon} \end{cases}$$

et les variables aléatoires  $Y_n = X_n \mathbb{1}_{\{n \leq \nu_a\}}$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}$ . On remarque qu'on a

$$\sum_{n=1}^{\min(N, \nu_a)} X_n = \sum_{n=1}^N Y_n$$

et que  $|Y_n| \leq |X_n|$  donc  $\mathbb{E}[Y_n^2] \leq \mathbb{E}[X_n^2]$ . On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{n \leq N} |S_n| > a\right) &= \mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\min(N, \nu_a)} X_n > a\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^N Y_n > a\right) \\ &\leq \frac{1}{a^2} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{n=1}^N Y_n\right)^2\right] \leq \frac{1}{a^2} \sum_{1 \leq n, m \leq N} \mathbb{E}[Y_n Y_m]. \end{aligned}$$

Or pour  $m < n$ , on a

$$\{\nu_a \geq n\} = \left\{ \sup_{1 \leq k \leq n-1} \left| \sum_{j=1}^k X_j \right| \leq a \right\}$$

donc  $\mathbb{1}_{\{\nu_a \geq n\}}$  est indépendant de  $X_n$ .

De plus, on a aussi  $Y_m$  indépendant de  $X_n$  avec l'égalité précédente sur  $m$ . On a alors

$$\mathbb{E}[Y_n Y_m] = \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{\nu_a \geq n\}} Y_m] = \mathbb{E}[X_n] \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\nu_a \geq n\}} Y_m] = 0$$

En utilisant cette égalité avec l'inégalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{n \leq N} |S_n| > a\right) &\leq \frac{1}{a^2} \sum_{1 \leq n, m \leq N} \mathbb{E}[Y_n Y_m] = \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^N \mathbb{E}[Y_n^2] \\ &\leq \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^N \mathbb{E}[X_n^2] \leq \frac{1}{a^2} \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[X_n^2]. \end{aligned}$$

Par limite croissante, on a alors

$$\mathbb{P}\left(\sup_n |S_n| > a\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{n \leq N} |S_n| > a\right) \leq \frac{1}{a^2} \sum_n \mathbb{E}[X_n^2].$$

□

### Lemme 12

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires dans  $L^2(\Omega)$  telles que  $\mathbb{E}[X_n] = 0$  et  $\sum \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$ . Alors la série  $\sum X_n$  converge presque sûrement.

*Démonstration.* On a  $\overline{\lim} S_n - \underline{\lim} S_n = \inf_{m \geq 1} \left( \sup_{n > m} S_n - \inf_{n > m} S_n \right)$ . Soit  $m \geq 1$ , on a pour tous  $n_1, n_2 > m$ ,

$$S_{n_2} - S_{n_1} \leq |S_{n_2} - S_m| + |S_{n_1} - S_m| \leq 2 \sup_{n > m} |S_n - S_m|$$

or, on a  $\sup_{n_1, n_2 > m} S_{n_2} - S_{n_1} = \sup_{n > m} S_n - \inf_{n > m} S_n$  donc on en déduit

$$\sup_{n > m} S_n - \inf_{n > m} S_n \leq 2 \sup_{n > m} |S_n - S_m|.$$

Pour tout  $a > 0$ , on a alors

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n > m} S_n - \inf_{n > m} S_n > 2a\right) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{n > m} |S_n - S_m| > a\right) \leq \frac{1}{a^2} \sum_{n > m} \mathbb{E}[X_n^2].$$

On a alors pour tout  $m$  et tout  $a > 0$

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim} S_n - \underline{\lim} S_n > 2a\right) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{n > m} S_n - \inf_{n > m} S_n > 2a\right) \leq \underbrace{\frac{1}{a^2} \sum_{n > m} \mathbb{E}[X_n^2]}_{\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0}.$$

On a donc  $\mathbb{P}\left(\overline{\lim} S_n - \underline{\lim} S_n > 2a\right) = 0$  et donc par limite croissante

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim} S_n - \underline{\lim} S_n > 0\right) = 0.$$

On a donc

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim} S_n = \underline{\lim} S_n\right) = 1.$$

Il reste à montrer que ces limites sont presque sûrement finies. Or, on sait que  $(S_n)_n$  est presque sûrement bornée car, par limite décroissante, on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_n |S_n| = \infty\right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sup_n |S_n| > a\right) \leq \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a^2} \sum_n \mathbb{E}[X_n^2] = 0.$$

Donc  $(S_n)_n$  est presque sûrement bornée et on a presque sûrement  $\overline{\lim} S_n = \underline{\lim} S_n$  donc  $(S_n)_n$  converge bien presque sûrement.  $\square$

*Démonstration. (du théorème)*

Passons désormais à la démonstration du théorème (pour  $d = 1$  et sur  $[0, 1]$ ),

Posons  $e_0^0 = 1$ , et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq k \leq 2^n - 1$ ,

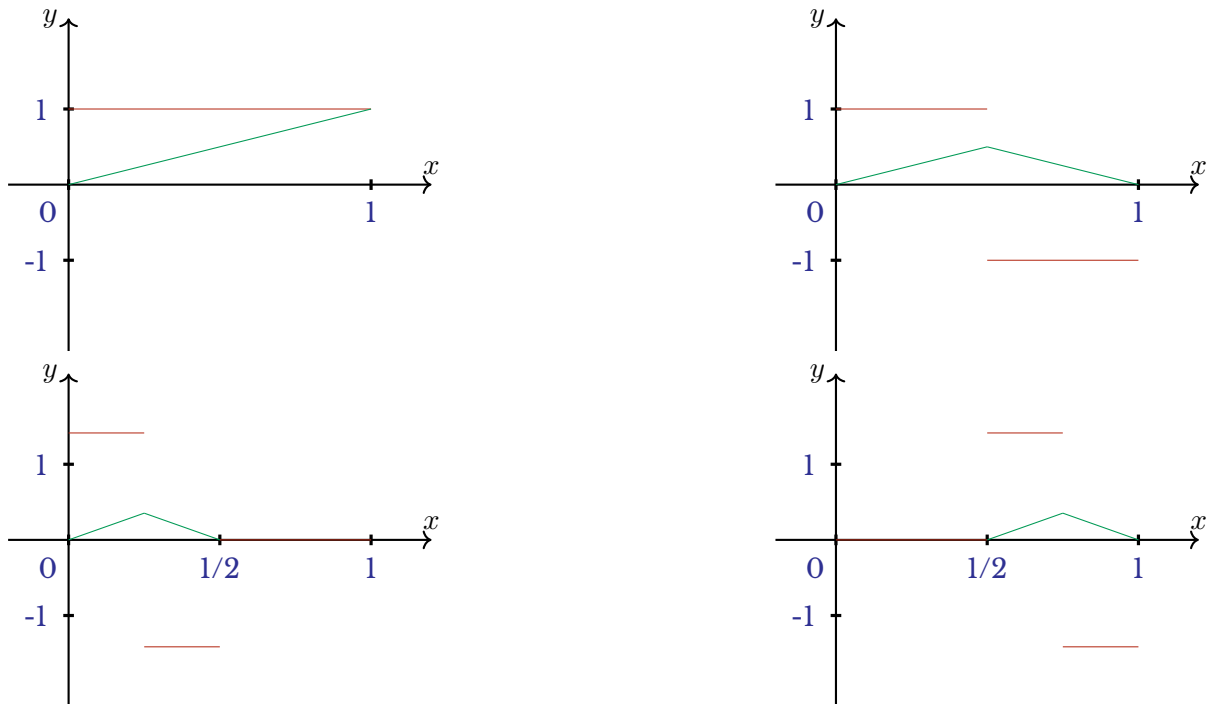
$$e_n^k = 2^{\frac{n-1}{2}} (\mathbb{1}_{[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}[} - \mathbb{1}_{[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}[}).$$

C'est une base orthonormée de  $L^2([0, 1])$ . (on peut faire les indicatrices des intervalles diadique à partir de ces fonctions... qui engendrent un sev dense dans  $L^2$ ).

On pose ensuite

$$E_n^k(s) = \langle \mathbb{1}_{[0,s]}, e_n^k \rangle = \int_0^s e_n^k(t) dt.$$

Figure 1 –  $e_0^0, e_0^1, e_0^2, e_1^2$  et leurs primitives  $E_0^0, E_0^1, E_0^2, E_1^2$



On a alors

$$\mathbb{1}_{[0,s]}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \langle \mathbb{1}_{[0,s]}, e_n^k \rangle e_n^k(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} E_n^k(s) e_n^k(t).$$

(il faudrait écrire  $[2^{n-1} - 1]$  et non  $2^{n-1} - 1$  sur la deuxième somme pour rendre l'expression correcte en  $n = 0$  mais on l'écrira sans pour plus de lisibilité.)

On a ensuite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} E_n^k(s) E_n^k(t) = \langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle = s \wedge t.$$

Posons désormais  $Y_n^k$  une suite de variables de lois normales centrées réduites indépendantes et écrivons enfin notre candidat pour être le mouvement brownien :

$$B_s = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} E_n^k(s) Y_n^k$$

Puisque  $\sum E_n^k(t)^2 = t < \infty$ , on obtient d'après le **lemme 12** que  $B_s$  est bien défini presque partout. De plus, en écrivant

$$B_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n \leq N, k \leq 2^{n-1}-1} E_n^k(s) Y_n^k,$$

et puisque qu'une combinaison linéaire de variables gaussiennes indépendantes reste gaussienne, on obtient par le **lemme 9** que  $B_s$  est une variable gaussienne. Et par indépendance (donc orthogonalité) des  $Y_n^k$ , on a  $\mathbb{E}(B_s B_t) = s \wedge t$

On a ainsi construit un processus gaussien centré nul en 0 ( $E_n^k(0) = 0$ ) tel que  $K(s, t) = s \wedge t$ . Il s'agit en effet d'un processus gaussien car pour  $n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  et  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ , on peut écrire  $a_1 X_{t_1} + \dots + a_n X_{t_n} = b_1 X_{t_1} + b_2 (X_{t_2} - X_{t_1}) + \dots + b_n (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ , et puisque qu'une combinaison linéaire de gaussiennes indépendantes est toujours une gaussienne, on a le résultat voulu.

Il reste à montrer qu'il est continu. Notons

$$Z_n(s) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} E_n^k(s) Y_n^k$$

de telle sorte que  $B_s = \sum_{n=0}^{+\infty} Z_n(s)$ . Remarquons que  $\|E_n^k\|_\infty = 2^{-\frac{n+1}{2}}$ , alors

$$\sup_{t \in [0,1]} |Z_n(t)| \leq 2^{-\frac{n+1}{2}} \sup_{0 \leq k \leq 2^{n-1}-1} |Y_n^k|$$

(car à  $n$  fixé, les  $E_n^k$  sont à supports  $> 0$  disjoints).

Notons

$$A_n = \left\{ \sup_{0 \leq k \leq 2^{n-1}-1} |Y_n^k| > 2^{\frac{n+1}{4}} \right\},$$

alors

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \mathbb{P}(|Y_n^k| > 2^{\frac{n+1}{4}}) \leq \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \exp(-2^{\frac{n+1}{2}-1}) \leq 2^{n-1} \exp(-2^{\frac{n-1}{2}})$$

(d'après le **lemme 10**).

Par Borel-Cantelli, on obtient, en posant  $A = \limsup A_n$ , que  $\mathbb{P}(A) = 0$ , alors, pour tout  $\omega \notin A$  et  $n$  assez grand,

$$\sup_{0 \leq k \leq 2^{n-1}-1} |Y_n^k(\omega)| \leq 2^{\frac{n+1}{4}}$$

d'où

$$\sup_{t \in [0,1]} |Z_n(t)(\omega)| \leq 2^{-\frac{n+1}{2}} \times 2^{\frac{n+1}{4}} \leq 2^{-\frac{n+1}{4}}.$$

Ainsi, pour  $\omega \notin A$ , la série définissant  $B_t(\omega)$  converge uniformément (en  $t$ ) et donc  $t \mapsto B_t$  est continue.

**Remarque :**

Pour que  $B$  soit un mouvement brownien, il faudrait que l'espace des temps soit  $\mathbb{R}_+$  et non juste  $[0, 1]$ . Pour ce faire, on construit de la même manière une suite  $(B_t^i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  de processus gaussiens centrés nuls en  $0$  tels que  $K(s, t) = s \wedge t$  et  $t \mapsto B_t^i$  est continue à partir de  $(Y_n^k)^i$  tous indépendants. Puis on pose, pour  $s \in [n, n + 1]$ ,  $B_s = B_1^1 + \dots + B_1^n + B_{s-n}^{n+1}$ . Le processus  $B$  ainsi défini est bien un mouvement brownien. Pour avoir un mouvement brownien  $d$ -dimensionnel, on prend  $B^1, \dots, B^d$  des mouvements browniens indépendants, et on remarque que  $B : t \mapsto (B_t^1, \dots, B_t^d)$  est un mouvement brownien de dimension  $d$ , c'est à dire qu'il vérifie les trois propriétés suivantes :

1.  $B$  est presque sûrement continu.
2.  $B$  est à accroissements indépendants.
3.  $B_{t+s} - B_t$  a une densité de probabilité égale à  $\rho(x) = \frac{1}{(2\pi s)^{d/2}} e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2/s}$ .

### I.3 Quelques propriétés du mouvement brownien.

**Définition 13 ( $\alpha$ -hölder continuité)**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Une fonction  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$  est dite localement  $\alpha$ -hölder si pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , il existe  $V$  voisinage de  $x$  et  $C > 0$  tel que

$$\forall y \in V, \|f(x) - f(y)\| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Souvenons nous que  $\mathbb{E}((B_s - B_t)^2) = |t - s|$ , i.e.  $\mathbb{E} \left[ \left( \frac{B_s - B_t}{\sqrt{|s-t|}} \right)^2 \right] = 1$ . Cela nous pousse à croire qu'on peut construire un mouvement non seulement continu, mais même localement  $1/2$ -hölder. On a en fait la propriété suivante :

**Proposition 14**

Pour tout  $\alpha \in [0, 1/2[$ , notre construction du mouvement brownien est presque sûrement localement  $\alpha$ -hölder.

*Démonstration.*

Reprenons la preuve du théorème ci-dessus en remplaçant  $E_n^k(s)$  par  $E_n^k(s)/s^\alpha$ , alors  $\|E_n^k(s)/s^\alpha\| \leq 2^{(\alpha-1/2)n}$  et en remplaçant  $A_n$  par  $\{\sup_{0 \leq k \leq 2^{n-1}-1} |Y_n^k| > 2^{\frac{1/2-\alpha}{2}}\}$ , on obtient que pour tout  $\omega \notin A$ ,  $\sup_{t \in [0,1]} |Z_n(t)(\omega)/t^\alpha| \leq 2^{\frac{\alpha-1/2}{2}}$  et donc finalement que  $t \mapsto B_t(\omega)/t^\alpha$  est continue (et nulle en  $0$ ).

Soit  $C > 0$  tel que  $\forall t \in ]0, 1[$ ,  $\|B_t(\omega)/t^\alpha\| \leq C$ , i.e.  $\|B_t(\omega) - B_0(\omega)\| \leq C(t - 0)^\alpha$ , i.e.  $t \mapsto B_t(\omega)$  est  $\alpha$ -hölder au voisinage de  $0$ .

De même, pour  $s \neq 0$ , on considère désormais  $\frac{E_n^k(s+t) - E_n^k(s)}{t^\alpha}$ , on refait les mêmes étapes, et on obtient que  $t \mapsto \frac{B_{s+t}(\omega) - B_s(\omega)}{t^\alpha}$  est continue (et nulle en  $0$ ), et donc que  $t \mapsto B_t$  est  $\alpha$ -hölder au voisinage de  $s$ . □

### Proposition 15 (admise)

Pour tout  $\alpha > 1/2$ , tout mouvement brownien est presque sûrement nulle part  $\alpha$ -hölder.

Cette proposition que l'on admet ici est assez délicate à démontrer, mais combinée avec la proposition précédente, elle nous renseigne beaucoup sur le mouvement Brownien que l'on a construit : presque sûrement, pour tout  $t \geq 0$ , le mouvement brownien croît localement aussi vite que la fonction racine en 0. Cela implique notamment que le mouvement brownien est presque sûrement dérivable nulle part, tout en étant presque sûrement continu.

### Définition 16 (Temps d'arrêt)

Soit  $X$  un processus.

Une variable aléatoire  $\tau$  à valeurs dans  $[0, +\infty]$  est un temps d'arrêt par rapport à  $X$  si pour tout  $t \geq 0$ ,  $(\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$ , où  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$

#### Exemple :

Si on prend  $(X_k)_{k \geq 0}$  un processus discret. Alors  $\mathcal{F}_n$  est l'ensemble des événements ne dépendants que de  $X_0, \dots, X_n$ . Ainsi,  $\tau$  est un temps d'arrêt si et seulement si pour tout  $n \geq 0$ ,  $(\tau \leq n) \in \mathcal{F}_n$  où encore pour tout  $n \geq 0$ ,  $(\tau = n) \in \mathcal{F}_n$ . Ce qui signifie que le décision de s'arrêter à l'étape  $n$  (c'est à dire  $\tau = n$ ) ne dépend que des résultats observés aux étapes précédentes (c'est à dire  $X_0, \dots, X_n$ ).

### Définition 17 (Processus markovien)

Soit  $X$  un processus,  $\tau$  un temps d'arrêt par rapport à  $X$ , on note

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{A}, \forall t \geq 0, A \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t\}.$$

Le processus  $X$  est dit markovien si pour tout temps d'arrêt presque sûrement fini, le processus  $(X_{\tau+s} - X_\tau)_{s \geq 0}$  est indépendant de  $\mathcal{F}_\tau$ .

### Proposition 18

Le mouvement brownien est un processus markovien.  
De plus,  $\tilde{B}_s = B_{\tau+s} - B_\tau$  a même loi que  $B_s$

Le résultat est immédiat si l'on prend un temps d'arrêt constant, c'est à dire  $\tau = t \in \mathbb{R}_+$ . En effet, puisque  $B$  est à accroissement indépendant, nous obtenons d'après le **lemme 4** que pour tout  $s \leq t$  et  $h > 0$ ,  $B_{t+h} - B_t$  et  $B_s$  sont indépendants, et donc  $(B_{t+h} - B_t)_{h \geq 0}$  est indépendant de  $\mathcal{F}_t$  (et il s'agit aussi d'un mouvement brownien).

Le cas général est plus calculatoire, mais on donnera une esquisse de preuve (sans donner les détails sur la mesurabilité des événements) :

On s'intéresse désormais aux temps d'arrêt qui prennent un nombre dénombrable de valeurs distinctes (presque sûrement), c'est à dire qu'il existe  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\sum \mathbb{P}(\tau = t_n) = 1$ . On prend alors  $A \in \mathcal{F}_\tau$  et  $\phi$  mesurable bornée. Par Fubini, on

obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{1}_A \phi(\tilde{B})) &= \sum \mathbb{E}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\tau=t_n} \phi(\tilde{B})) \\
&= \sum \mathbb{E}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\tau=t_n}) \mathbb{E}(\phi(B)) \\
&= \mathbb{E}(\mathbf{1}_A) \mathbb{E}(\phi(B))
\end{aligned}$$

La deuxième égalité venant du fait que sur l'événement  $(\tau = t_n)$ ,  $\tilde{B}_s = B_{t_n+s} - B_{t_n}$ , qui est d'après le paragraphe précédent indépendant de  $\mathcal{F}_{t_n}$  et de même loi que  $B$ .

Enfin, lorsque  $\tau$  est un temps d'arrêt presque sûrement fini, posons

$\tau_n = (\lfloor \tau 2^n \rfloor + 1) 2^{-n}$ . On peut alors vérifier que  $\tau_n$  est bien un temps d'arrêt, qui prend par construction un nombre dénombrable de valeurs distinctes et tel que  $\tau_n \rightarrow \tau$  (uniformément sur  $\Omega$ ). Notons  $B_s^n = B_{\tau_n+s} - B_{\tau_n}$ , d'après le paragraphe précédent,  $B_s^n$  est indépendant de  $\mathcal{F}_{\tau_n}$  et a même loi que  $B$ . De plus, puisque  $\tau_n \geq \tau$ ,  $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\tau_n}$  donc  $B^n$  est indépendant de  $\mathcal{F}_\tau$  et par p.s. continuité de  $B$ , on obtient que  $B^n \rightarrow B$  presque sûrement. Finalement,  $\tilde{B}$  est indépendant de  $\mathcal{F}_\tau$  et a même loi que  $B$ .

# II – Mouvement brownien et problème de Dirichlet

## II.1 Générateur d'un processus markovien

### Définition 19 (Générateur d'un processus markovien)

Soit  $X$  un processus markovien presque sûrement continu et nul en 0. Pour  $t \geq 0$ , on définit  $P^t : L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  par

$$P^t f(x) = \mathbb{E}(f(x + X_t)).$$

On appelle générateur du processus markovien  $X$  l'opérateur  $\mathcal{L}$  défini là où il existe (on nomme son ensemble de définition  $D(\mathcal{L})$ ) par

$$\mathcal{L}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P^h f(x) - f(x)}{h}$$

On supposera par la suite toujours que les processus markoviens sont nul en 0.

**Exemple :**

Le générateur d'un processus constant est l'opérateur nul (en effet,  $P^t f = f$ ).

Pour d'autres générateurs, c'est moins évident, mais nous allons nous intéresser au cas du mouvement brownien.

### Proposition 20

Le générateur du mouvement brownien est  $\frac{1}{2}\Delta$ .

*Démonstration.* Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^3$  telle que  $\|d^3 f\|$  est bornée par une constante  $C > 0$ . On a alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$f(x + t^{1/2}h) = f(x) + t^{1/2}\nabla f(x) \cdot h + \frac{1}{2}th^T H_f(x)h + g(t^{1/2}h),$$

où le terme  $g(t^{1/2}h) = O(t^{3/2}\|h\|^3)$  est inférieure en valeur absolue à  $Ct^{3/2}\|h\|^3$ . Or, en notant  $h = X_t/\sqrt{t}$ , la variable  $h$  suit une loi gaussienne centrée réduite et on a alors

$$\mathbb{E}[\nabla f(x) \cdot h] = \nabla f(x) \cdot \mathbb{E}[h] = 0,$$

$$\mathbb{E}[h^T H_f(x)h] = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_{i,j} f(x) \mathbb{E}[h_i h_j] = \sum_{i=1}^n \partial_{i,i} f(x) = \Delta f(x),$$

et on a aussi

$$\frac{1}{t} \left| \mathbb{E}[g(t^{1/2}h)] \right| \leq \frac{Ct^{3/2}\mathbb{E}[\|h\|^3]}{t} = C\mathbb{E}[\|h\|^3] t^{1/2}.$$

Par ces trois calculs, on a donc

$$\frac{P^t f(x) - f(x)}{t} = \frac{\frac{1}{2}t\Delta f(x) + g(t^{1/2}h)}{t} = \frac{1}{2}\Delta f(x) + O(t^{1/2}).$$

On a donc bien  $\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2}\Delta f(x)$ . □

## II.2 Problème de Dirichlet et processus markovien

Le problème de Dirichlet consiste à considérer un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^d$  et une fonction  $b : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$  et à chercher une fonction  $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$  vérifiant les conditions ci-dessous

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ f|_{\partial U} = b \end{cases}$$

### Définition 21 (Fonctions $\mathcal{L}$ -harmoniques)

Une fonction est dite  $\mathcal{L}$ -harmonique quand on a  $\mathcal{L}f = 0$ . Lorsque  $\mathcal{L} = \Delta$ , on dit simplement que  $f$  est harmonique.

### Lemme 22

Soit  $(X_t)_t$  un processus markovien de générateur  $\mathcal{L}$ . Si  $f$  est une fonction continue  $\mathcal{L}$ -harmonique bornée, alors pour tout  $t \geq 0$  et tout  $x \in E$ , on a

$$\mathbb{E}[f(x + X_t)] = f(x).$$

*Démonstration.* Soit  $f$  une fonction continue  $\mathcal{L}$ -harmonique bornée. Pour tout élément  $x \in E$ , la fonction  $g : t \mapsto P^t f(x)$  est continue et dérivable à droite en 0 par définition du générateur. En admettant la formule

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$$

pour les variables  $X, Y$  qui nous intéressent, on a pour tous  $t, s \geq 0$ ,

$$P^{t+s} f(x) = \mathbb{E}[f(x + X_{t+s})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(x + X_{t+s})|X_s]] = P^s \circ P^t f(x)$$

car  $X_{t+s} - X_s$  a la même loi que  $X_t$ . Donc l'application  $g$  est dérivable à droite en tout  $t$  et sa dérivée à droite  $g'_d$  est nulle. Donc  $g$  est une fonction continue et sa dérivée à droite est nulle. La fonction  $g$  est donc constante. Or, on a aussi

$$g(t) = P^t f(x) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f(x).$$

Donc on a bien

$$\mathbb{E}[f(x + X_t)] = P^t f(x) = f(x).$$

□

### Proposition 23 (admise)

Si  $f$  est une fonction  $\mathcal{L}$ -harmonique bornée, pour  $\tau$  un temps d'arrêt presque sûrement fini, on a

$$\mathbb{E}[f(x + X_\tau)] = f(x).$$

*Démonstration.* On donnera cependant une démonstration dans le cadre du mouvement brownien avec les fonctions harmoniques. □

### Remarque :

Si on cherche à résoudre un problème de Dirichlet mais du type  $\mathcal{L}f = 0$ , alors on peut avoir l'intuition qu'un processus markovien ayant  $\mathcal{L}$  pour générateur permet de trouver un candidat pour avoir une solution à notre problème, en prenant un

bon temps d'arrêt. Ceci va nous aider pour le problème de Dirichlet car le générateur du mouvement brownien est justement  $\frac{1}{2}\Delta$ .

**Lemme 24**

Soit  $U$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . Alors le temps d'arrêt

$$\tau_{U,x} = \inf \{t \geq 0, x + B_t \notin U\}$$

est presque sûrement fini.

*Démonstration.* Supposons  $U \subset B(0, R)$ . Notons  $p = \mathbb{P}(\|X_1\| > 2R) > 0$  et notons enfin

$$p_n = \mathbb{P}(\forall t \leq n, X_t \in U).$$

On a  $p_{n+1} \leq p_n(1-p)$  donc  $p_n \leq (1-p)^n$  et  $p_n \rightarrow 0$ . On obtient alors

$$\mathbb{P}(\tau_{U,x} = +\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0.$$

Donc la variable  $\tau_{U,x}$  est presque sûrement finie. □

**Théorème 25**

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . Définissons l'application  $f$  sur  $U$  par la relation

$$\forall x \in U, \quad f(x) = \mathbb{E}[b(x + B_{\tau_{U,x}})].$$

L'application  $f$  est alors harmonique.

Avant de faire la démonstration de ce théorème, on a besoin d'un peu plus de résultats sur les fonctions harmoniques.

### II.3 Fonctions harmoniques et intégrale sur les sphères

**Définition 26 (Forme volume sur les sphères)**

Pour  $r > 0$ , on définit  $\sigma_r = \frac{x}{\|x\|} \lrcorner \mu$ , avec  $\mu = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$ , la forme volume sur la sphère  $S(0, r)$  induite par la structure de variété riemannienne donnée à la sphère par  $\mathbb{R}^d$ . On notera  $\sigma = \sigma_1$  dans le cas particulier de  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

**Proposition 27 (Changement de variable)**

Soit une fonction  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact. On a alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\lambda = \int_0^{+\infty} \left( \int_{S(0,r)} f \sigma_r \right) dr.$$

*Démonstration.* On a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} f \, d\lambda.$$

Or, l'application  $\phi : (r, x) \mapsto rx$  est un difféomorphisme entre  $M = ]0, +\infty[ \times \mathbb{S}^{d-1}$  et  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . En calculant le pull-back de la forme volume  $\mu = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$  associée à  $\lambda$

sur  $\mathbb{R}^d$ , on a alors

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} f d\mu = \int_M (f \circ \phi) r^{d-1} dr \wedge \sigma = \int_0^{+\infty} \left( \int_{S(0,r)} f \sigma_r \right) dr.$$

Donc on a bien au final

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda = \int_0^{+\infty} \left( \int_{S(0,r)} f \sigma_r \right) dr.$$

□

### Remarque : Intégrale sur les sphères

On peut aussi voir l'intégrale selon  $\sigma_r$  comme une intégrale selon la mesure

$$\tilde{\sigma}_r : A \mapsto dr^{d-1} \lambda([0, 1]A)$$

pour pouvoir se laisser le droit d'intégrer les fonctions seulement mesurables et utiliser les propriétés géométriques lorsqu'elles sont de classe  $C^\infty$  à support compact, propriétés que l'on peut généralement étendre par densité.

(On admet ce résultat mais il peut se démontrer en définissant  $\tilde{\sigma}_r$  sur les borélien de  $S(0, r)$  avec une approximation  $C^\infty$  des indicatrices. Puis avec le lemme des classes monotones et la formule de changement de variable, on vérifie que l'expression coïncide avec celle donnée.)

Par exemple, la proposition précédente s'étend aux fonctions  $L^1$  par densité des fonctions  $C^\infty$  à support compact dans  $L^1(\mathbb{R}^d)$ .

On s'autorisera donc la notation  $d\sigma_r$  dans les intégrales en voyant celles-ci comme des intégrales par rapport à la mesure  $\tilde{\sigma}_r$ .

#### Lemme 28

Soit une fonction  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  localement intégrable définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^d$ . Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout  $x \in U$  et tout  $R > 0$  tels que  $\bar{B}(x, R) \subset U$ ,

$$\varphi(x) = \frac{1}{|B(0, R)|} \int_{B(0, R)} \varphi(x + y) dy$$

2. Pour tout  $x \in U$  et tout  $R > 0$  tels que  $\bar{B}(x, R) \subset U$ ,

$$\varphi(x) = \frac{1}{|S(0, R)|} \int_{S(0, R)} \varphi(x + \cdot) d\sigma_r$$

3. La fonction  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$  et  $\Delta\varphi = 0$ .

*Démonstration.*

1  $\Rightarrow$  2 : En prenant  $\varepsilon_0 > 0$  assez petit, en réécrivant notre égalité avec la formule de changement de variable, on a pour tout  $\varepsilon \in ]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ ,

$$\left( \int_0^{R+\varepsilon} |S(0, r)| dr \right) \varphi(x) = \int_0^{R+\varepsilon} \int_{S(0, r)} \varphi(x + \cdot) d\sigma_r dr.$$

En dérivant alors, en 0, la formule selon  $\varepsilon$ , on obtient le résultat attendu.

2  $\Rightarrow$  1 : Ici aussi il suffit d'écrire le changement de variable pour voir apparaître l'égalité :

$$|B(0, R)|\varphi(x) = \int_0^R |S(0, r)|\varphi(x) dr = \int_0^R \int_{S(0, r)} \varphi(x + \cdot) d\sigma_r dr = \int_{B(0, R)} \varphi(x + y) dy.$$

2  $\Rightarrow$  3 : Commençons par montrer que  $\varphi$  est lisse en la régularisant avec une fonction constante sur les sphères.

Soit  $x \in U$  et  $0 < r < d(x, U^C)$ . Pour  $0 < \varepsilon < d(x, U^C) - r$ , on définit alors la fonction régularisante

$$\Psi_\varepsilon : y \mapsto c(\varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\|y\|^2 - \varepsilon^2}\right) \mathbb{1}_{\{\|y\| < \varepsilon\}},$$

où  $c(\varepsilon)$  est une constante faisant que  $\Psi_\varepsilon$  est d'intégrale 1. On a alors pour  $y \in B(0, r)$ ,  $B(y, \varepsilon) \subset U$  et donc

$$\begin{aligned} \varphi * \Psi_\varepsilon(y) &= \int_{B(0, \varepsilon)} \varphi(y + u) \Psi_\varepsilon(u) du \\ &= \int_0^\varepsilon \left( \int_{S(0, s)} \varphi(y + \cdot) \sigma_s \right) \Psi_\varepsilon(s) ds \\ &= \varphi(y) \int_{B(0, \varepsilon)} \Psi_\varepsilon(z) dz \\ &= \varphi(y), \end{aligned}$$

car la fonction  $\Psi_\varepsilon$  a pour support  $\bar{B}(0, \varepsilon)$  et elle est d'intégrale 1. On a donc  $\varphi * \Psi_\varepsilon = \varphi$  sur  $B(x, r)$ . Donc  $\varphi$  est bien de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Enfin, pour  $\|h\|$  assez petit, on a

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + \nabla\varphi(x) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_\varphi(x) h + o(\|h\|^2).$$

En intégrant cette égalité sur la sphère  $S(0, r)$  pour  $r$  assez petit, on a, grâce aux symétries de la sphère, l'égalité

$$\varphi(x) = \varphi(x) + Kr^2 \Delta\varphi(x) + o(r^2),$$

où la constante  $K$  est définie par

$$K = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} x_1^2 d\sigma = \frac{1}{d} |\mathbb{S}^{d-1}| > 0.$$

On obtient  $\Delta\varphi(x) = 0$  en faisant tendre  $r$  vers 0.

3  $\Rightarrow$  2 : On peut faire comme dans la preuve de 2  $\Rightarrow$  3 en intégrant le développement limité sur des petites boules.

(On n'a pas besoin de montrer cette implication pour la suite donc on se contente d'une ébauche de preuve.)  $\square$

Maintenant que l'on sait qu'on peut montrer qu'une fonction est harmonique avec une de ces trois assertions, revenons à la démonstration du théorème 25.

### Théorème 25

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . Définissons l'application  $f$  sur  $U$  par la relation

$$\forall x \in U, \quad f(x) = \mathbb{E}[b(x + B_{\tau_U, x})].$$

L'application  $f$  est alors harmonique.

*Démonstration.* Soit  $x \in U$  et  $r > 0$  tels que  $\bar{B}(0, r) \subset U$ . Notons

$$\tau_r(x) := \inf \{t \geq 0 : B_t \not\subset B(x, r)\}$$

le temps de sortie de la boule et notons aussi

$$g(x) = \mathbb{E} [b(x + B_{\tau_U, x})].$$

La propriété de Markov forte donne alors

$$g(x) = \mathbb{E} [\mathbb{E} (b(x + B_{\tau_U}) \mid B_{\tau_r}(x))] = \mathbb{E} [\tilde{\mathbb{E}} [b(B_{\tau_r} + \tilde{B}_{\tau_U(B_{\tau_r}(x))})]]] = \mathbb{E} [g(B_{\tau_r})].$$

Donc la fonction  $g$  vérifie la propriété de la moyenne sur les sphères car  $B_{\tau_r}$  a une loi invariante par rotation et est donc la loi uniforme sur le sphère. La fonction  $g$  est donc bien harmonique.  $\square$

**Remarque :**

Lorsque le bord de  $U$  est assez régulier, la fonction définie ci-dessus est continue au bord de  $U$  et vaut  $b$  sur celui-ci. Donc lorsque le calcul le permet, il suffit de calculer celle-ci.

Cette condition de régularité du bord est appelée condition du cône de Zaremba et veut qu'en tout point  $x \in \partial U$ , il existe un demi-cône qui soit d'intérieur non vide et à l'extérieur de  $\bar{U}$ .

Dans le cas où  $\bar{U}$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^d$ , l'ouvert  $U$  vérifie la propriété de Zaremba donc la solution au problème de Dirichlet existe. Mais dans ce cadre, on a aussi son unicité. En effet, on a la proposition suivante.

**Proposition 29**

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  tel que  $\bar{U}$  est une sous-variété compacte de  $\mathbb{R}^d$ . Alors toute fonction  $\varphi : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, nulle sur  $\partial U$  et harmonique sur  $U$  est nulle.

*Démonstration.* Ce résultat vient de la formule de Stokes appliquée à un champs de vecteur  $\xi$  :

$$\int_{\bar{U}} \operatorname{div}(\xi) \mu = \int_{\partial U} \xi \lrcorner \mu,$$

où on prend  $\xi = \varphi \nabla \varphi$ . Dans ce cadre, on a  $\xi = 0$  sur  $\partial U$  et on a

$$\operatorname{div}(\xi) = \varphi \Delta \varphi + \|\nabla \varphi\|^2 = \|\nabla \varphi\|^2,$$

car  $\Delta \varphi = 0$ . On a alors

$$\int_{\bar{U}} \|\nabla \varphi\|^2 d\lambda = 0,$$

donc  $\nabla \varphi = 0$  donc l'application  $\varphi$  est constante. Or, l'application  $\varphi$  est nulle au bord de  $U$  donc  $\varphi = 0$ .  $\square$

Dans ce cadre, en appliquant alors la proposition à la différence entre deux solutions au problème de Dirichlet, on obtient leur égalité.

Donc dans le cas où  $\bar{U}$  est une sous-variété compacte de  $\mathbb{R}^d$ , il existe une unique solution au problème de Dirichlet qui est la fonction du théorème 29.

## Références

- [F M16] D. Chafaï et F. Malrieu. *Recueil de Modèles Aléatoires*. [https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-662-49768-5\\_24](https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-662-49768-5_24). 2016.
- [Gal06] Jean-François Le Gall. *Intégration, probabilités et processus aléatoires*. 2006.
- [Gué] Hélène Guérin. *Le mouvement Brownien en tant que processus de Markov*. <https://perso.univ-rennes1.fr/helene.guerin/enseignement/M2/Brownien2.pdf>.
- [Mor13] Jean-Paul Morillon. *Résolution numérique du problème de Dirichlet  $\Delta u = au^3$  à l'aide du mouvement brownien*. <https://hal.science/hal-00813707/document>. 2013.
- [Pey07] Rémi Peyre. *Autour du mouvement brownien*. <https://www.normalesup.org/~rpeyre/pro/popul/brown.pdf>. 2007.
- [RY99] Daniel Revuz et Marc Yor. *Continuous Martingale and Brownian Motion*. Springer, 1999.
- [WZ31] N. Wiener et A. Zygmund. *Notes on random functions*. 1931.
- [Wik] Wikipédia. *Temps d'arrêt*.