FI-module et représentations du groupe symétrique

Gabrielle–Guéron Robin et Bocquillon Clément

June 10, 2024

L'objectif de ce mémoire est d'introduire la structure de FI-module, et d'étudier les phénomènes de stabilité qu'elle met en lumière.

Définition (C-modules) : Soit R un anneau et C une petite catégorie. Un C-module est un foncteur de C vers la catégorie des R-modules.

Une flèche de C-modules est une transformation naturelle. Les C-modules forment toujours une catégorie abélienne. Par exemple, supposons disposer d'un espace X. Notons D la catégorie de ses ouverts rangés par inclusion. Alors les D^{op} modules sont les préfaisceaux à valeurs dans R.

Définition (FI) : La catégorie FI a comme objets les ensembles finis. Les morphismes sont les injections.

Remarque: FI vient de Finis et Injections.

On s'intéressera aux FI-modules. Un FI-module V donne pour tout n un R-module noté V_n. V_n est l'image de l'ensemble $\{1, ..., n\}$. V_n possède une structure de représentation de S_n; donnée par les images des permutations de $\{1, ..., n\}$; dans la catégorie FI. Les injections non bijectives de la catégorie FI imposent d'autres conditions au FI-module.

L'intérêt des FI-modules provient du fait suivant. La plupart des ensembles des familles de représentations de $S_n, n \in \mathbb{N}$ proviennent en fait d'un FI-module. Le FI-module sera souvent de type fini, notion que nous définissons. On obtient alors du contrôle sur les séquences de représentations, comme le montre le théorème suivant.

Nous rappelons que pour chaque entier k les représentations irréductibles de S_k sont en bijection avec l'ensemble des partitions λ de k. Pour une partition λ de k et un entier $n \geq K + \lambda_1$, on écrit $V(\lambda)_n$ la représentation irréductible associée à la partition de n : $(n - \lambda_1, \lambda_1, ..., \lambda_r)$. On prolonge ainsi naturellement toute représentation irréductible sur S_k à S_n. En terme de diagrammes de Young, on ajoute le nombre de carrés qu'il faut pour arriver à n carrés. On ajoute les carrés haut du diagramme. La condition $n \geq K + \lambda_1$ dit précisément qu'on obtient ainsi un diagramme de Young.

Théorème : Soit W un FI-module de type fini. On décompose pour tout entier n, $W_n = \bigoplus_\lambda c_{\lambda,n} V(\lambda)_n$ W_n en représentations irréductibles. Alors $c_{\lambda,n}$ est àpcr (à partir d'un certain rang) constant.

Autrement dit, lorsque l'on dispose de représentations de S_n reliés par certains liens, l'information qu'elles contiennent provient en fait d'un nombre fini de termes.

Nous donnons dans la section 3 une application. Nous montrons que la cohomologie d'une certaine famille de variétés est un FI-module de type fini. On peut donc lui apliquer le théorème ci dessus.

La section 4 met en lumière la source d'un phénomène de stabilité en combinatoire.

1. **Nombre de polynômes sans facteur carré de degré n dans $\mathbb{F}_q[X]$:**

$$\#\text{Polynômes sans facteur carré de degré } n = q^n - q^{n-1} = q^n(1 - \frac{1}{q})$$

2. **Nombre attendu de facteurs linéaires pour un polynôme de $\mathbb{F}_q[X]$ sans facteurs carrés** :

$$\text{Nombre attendu de facteurs linéaires} = 1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^3} + \cdots \pm \frac{1}{q^{n-2}}$$

3. **Excès attendu des facteurs quadratiques irréductibles par rapport aux facteurs quadratiques réductibles** :

$$\text{Excès attendu} \to \frac{1}{q} - \frac{3}{q^2} + \frac{4}{q^3} - \frac{4}{q^4} + \cdots$$

Lorsque $n \to \infty$. 4. **Nombre attendu de vecteurs propres dans $\mathbb{F}_q^n$ pour une matrice inversible aléatoire** :

$$\text{Nombre attendu de vecteurs propres} = 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^{n-1}}$$

5. **Cardinal de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}$** :

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q} = q^n(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^{n-1})}$$

On observe ici des formules du type :

$$1 + a_{1,n} \times \frac{1}{q} + a_{2,n} \times \frac{1}{q^2} + ... + a_{k,n} \times \frac{1}{q^k} + ...$$

Ces formules se "stabilisent" lorsque n augmente. Les coefficients $a_{k,n}$ sont en fait constants pour n assez grand (en fonction de k). Ici la stabilisation a lieu pour $k = n-2, n-1$ dans les exemples 2 et 4. Cela n'est pas un hasard. Nous relierons suivant [1] ce résultat au résultat précédent sur la cohomologie de variétés. En somme, la stabilité de ces formules provient de la stabilité de FI-modules cachés.

Contents

1 Définitions et propriétés des FI-modules

1.1 Définitions élémentaires

Définition (C-modules) : Soit R un anneau et C une petite catégorie. Un C-module est un foncteur de C vers la catégorie des R-modules.

Définition (FI) : On définit la catégorie FI ayant pour objets les ensembles finis et comme morphismes les injections.

Remarque : Le foncteur allant de la catégorie FI dans la catégorie des ensembles de la forme $\mathbf{n} = [\![1, n]\!]$ pour $n \in \mathbb{N}$ ayant pour morphismes les injections de $\mathbf{n} \hookrightarrow \mathbf{m}$ est une équivalence de catégorie.

Définition (FB) : On définit la catégorie FB ayant pour objets les ensembles finis et comme morphismes les bijections.
Remarque : FB pour Finis et Bijections
De même le foncteur allant de la catégorie FB dans celle des ensembles de la forme $\mathbf{n}$ ayant pour morphismes les bijections $\mathbf{n} \to \mathbf{n}$ est une équivalence de catégories.

Définition (FI-Module, FB-module) : Étant donné un anneau commutatif R, la catégorie des FI-modules est la catégorie des modules sur la catégorie FI. La catégorie des FB-modules est la catégorie des modules sur la catégorie FB.

Soit V un FI-module et S, T des ensembles finis, on note $V_S = V(S)$ le R-module que renvoie le foncteur V évalué en S. Si on a une injection $f : S \hookrightarrow T$, on note alors $f_* = V(f) : V_S \to V_T$ le morphisme de R-module que renvoie le foncteur V évalué en f. Comme on a une équivalence de catégorie entre FI et la catégorie des ensembles de la forme $\mathbf{n}$ muni des injections, on note aussi $V_n = V_{\mathbf{n}}$ le R-module que renvoie le foncteur V évalué en $\mathbf{n}$.

Étant donnés un FI-module ou FB-module V_n, chaque R-module V_n est une représentation du groupe des permutations S_n. En particulier, un morphisme de FI-module $V \to W$ induit pour tout n une application $V_n \to W_n$ compatible à l'action de S_n.

Un FB-module W est une collection $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de représentation de S_n sans lien entre-elles. Un FI-module V nécessite des morphismes de R-module $f_* : V_n \to$ pour $n \leq m$.
Nous vérifions maintenant que les FI-modules forment une catégorie abélienne. Nous remarquerons que les opérations se font terme à terme.
Définition (sous-FI-module) : Soit V un FI-module. On dit que U est un *sous*-FI-module de V si pour tout ensemble fini S, on a l'inclusion de R-module suivante : $U_S \subset V_S$ et si pour toute

injection $f : S \hookrightarrow T$, on a l'inclusion de R-module suivante : $V(f)(U_S) \subset U_T$.
Remarque : Il est équivalent de se donner un sous module de V et une injection de FI-modules, au sens que nous définissons ici, terme à terme.
Définition (noyau, image, quotient de FI-modules) : Pour un morphisme de FI-module $F : V \to W$, on définit :

- le *noyau* $Ker(F)$ le FI-module qui à un ensemble fini S renvoie $Ker(F_S)$ le noyau du morphisme de R-module F_S et qui a une injection $f : S \hookrightarrow T$ renvoie la restriction du morphisme de R-module $V(f)$ à $Ker(F_S)$.
- l'*image* $Im(F)$ le foncteur qui à un ensemble fini S renvoie $Im(F_S)$, l'image du morphisme de R-module F_S et qui à une injection $f : S \hookrightarrow T$ renvoie la restriction du morphisme de R-module $W(f)$ à $Im(F_S)$.

Pour U un sous-FI-module de V, on définit le *quotient* de V par U noté V/U le foncteur qui a un ensemble fini S renvoie le quotient de R-module V_S/U_S et qui a une injection $f : S \hookrightarrow T$ renvoie l'application induite par $V(f)$ allant de $(V/U)_S$ dans $(V/U)_T$. De plus on définit l'*application quotient* q comme la collection des applications quotient de R-module $q_S : V_S \twoheadrightarrow V_S/U_S$ pour tout ensemble fini S.

Proposition (noyau, image, quotient de FI-modules) : Avec les notations précédentes, les foncteurs $Ker(F), Im(F), V/U$ sont bien définis et sont des sous-FI-modules de V. L'application quotient q est un morphisme de FI-modules.

Preuve : Pour le noyau, il suffit de montrer que pour toute injection $f : S \hookrightarrow T$, l'application $Ker(F)(f)$ est à valeurs dans $Ker(F_T)$. Or comme F est un morphisme de FI-module, c'est une transformation naturelle de foncteur qui vérifie donc $V(f) \circ F_S = F_T \circ V(f)$ pour toute injection $f : S \hookrightarrow T$. On en déduit que pour toute injection $f : S \hookrightarrow T$ et tout $x \in Ker(F_S)$, $F_T(Ker(F)(f)(x)) = F_T(V(f)(x)) = V(f)(F_S(x)) = 0$ donc $Ker(F)(f)$ est bien à valeurs dans $Ker(F_T)$.
L'image et le quotient sont laissée au lecteur.

Définition (somme directe, produit tensoriel de FI-modules) : Soit V, W deux FI-modules, on définit :

- leur *somme directe* $V \oplus W$ comme le FI-module qui à un ensemble fini S renvoie la somme directe de R-modules $V_S \oplus W_S$ et qui a une injection $f : S \hookrightarrow T$ renvoie le morphisme de R-module :
$$V(f) \oplus W(f) : x \oplus y \in V_S \oplus W_S \mapsto V(f)(x) \oplus W(f)(y) \in V_T \oplus W_T.$$
- leur *produit tensoriel* $V \otimes W$ comme le FI-module qui à un ensemble fini S renvoie le produit tensoriel de R-modules $V_S \otimes W_S$ et qui a une injection $f : S \hookrightarrow T$ renvoie le morphisme de R-module :
$$V(f) \otimes W(f) : x \otimes y \in V_S \otimes W_S \mapsto V(f)(x) \otimes W(f)(y) \in V_T \otimes W_T.$$

On définit maintenant le foncteur M des FB-modules vers les FI-modules, et le foncteur d'oubli π.

Définition (Foncteur M) : On pose pour tout ensemble fini S : $M(W)_S = \bigoplus_{T \subset S} W_T$. A une injection $f : S \hookrightarrow S'$ on renvoie $M(W)(f) = \bigoplus_{T \subset S} W(f_{|T})$ où $f_{|T} : T \to f(T)$. Ce foncteur associe à $F = (F_S)_{S \in Ob(FI)}$ un morphisme de FB-module, le morphisme de FI-module $(\bigoplus_{T \subset S} F_T)_{S \in Ob(FI)}$.

Définition (Foncteur M, Foncteur d'oubli π) Soit V un FI-module. On pose $\pi(V)_n = V_n$; et pour f une bijection de $\{1, ..., n\}$ on définit l'action de f sur $\pi(V)_n = V_n$ par celle sur V_n.

Proposition (Adjonction) :

- M est l'adjoint à gauche de π. L'unité de l'adjonction donne une injection de R-modules $W_S \hookrightarrow \bigoplus_{T \subset S} W_T$ pour W un FB-module et S un ensemble fini. On a aussi que la co-unité nous fourni une surjection de FI-modules $\bigoplus_n M(V_n) \twoheadrightarrow V$ pour V un FI-module.
- En tant que représentation de S_n, $M(W)_n$ est isomorphe à $\bigoplus_{a \leq n} Ind_{S_a \times S_{n-a}}^{S_n} W_a \boxtimes R$ et si R est un corps on en déduit que $dim(M(W)_n) = \Sigma_{a \leq n} dim(W_a) \binom{n}{a}$

Remarque : Si on considère à d fixé le FB-module D tel que $D_n = R[S_d]$ si $n = d$; 0 sinon; Alors $M(D)_n$ s'identifie au R-module libre engendré par l'ensemble des injections de d dans n. On le note $M(d)$. Tout morphisme de FI-modules $F : M(m) \to V$ est déterminé par le choix de la valeur de $v = F(id_{\mathbf{m}}) \in V_m$. On peut le voir à la main, ou bien utiliser l'adjonction de M. On remarque deux choses : la dimension de $M(d)_n$, égale à $\binom{d}{n}$, est polynomiale en n. Deuxièmement, $M(d)$ est en quelque sorte finie dans le sens où n'importe quelle élément de $M(d)_n$ est l'image d'un élément de $M(d)_d$ par une flèche de $M(d)$. Nous définissons précisément ainsi la finitude.

Définition (FI-module engendré): Si V est un FI-module et $\Sigma \subset \coprod_n V_n$ alors $span_V(\Sigma)$ est le plus petit FI-module inclus dans V contenant Σ. On dit que V *est engendré en degré plus petit que* m si $V = span_V(\Sigma)$ pour $\Sigma \subset \coprod_{n \leq m} V_n$. On dit que V *est engendré en degré* m *ou que son degré d'engendrement est* m s'il est engendré en degré plus petit que m et si Σ contient bien un élément de V_m. On dit que V est *finiment engendré* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $v_1, \ldots, v_k \in V$ tel que $V = span_V(v_1, \ldots, v_k)$.

Lemme (FI-module engendré) : Si $\Sigma = \coprod \Sigma_n$ où $\Sigma_n \subset V_n$ alors

$$span_V(\Sigma) = Im(\bigoplus_n M(n)^{\oplus \Sigma_n} \to V).$$

En particulier, pour un élément $v \in V_n$, $span_V(v) = Im(M(n) \to V)$ qui à $id_{\mathbf{n}}$ associe v.

Preuve : Le cas général se déduit du cas particulier en faisant la somme directe des applications sur chacun des $v_i \in \Sigma_i$. On démontre donc le cas particulier. On pose $g : M(n) \to V$ défini par $g(id_{\mathbf{n}}) = v$, et on pose $W = Im(g)$ qui est un FI-module car image d'un morphisme de FI-module et qui contient v donc $W \subset span_V(v)$. Il reste donc à montrer que $span_V(v) \subset V$. On sait que $M(n)_{\mathbf{m}} = R[Hom_{FI}(\mathbf{n}, \mathbf{m})]$ a pour base l'ensemble des injections $f : \mathbf{n} \hookrightarrow \mathbf{m}$, or $g(f) = f_*(v) \in span_V(v)$ car $span_V(v)$ est un FI-module et il contient v. On a donc par R-linéarité que $span_V(v) \subset W$ ce qui permet de conclure que $W = span_V(v)$. □

On peut s'intéresser aussi aux FI-modules de type fini , et on va utiliser le lemme précédent afin de les décrire plus facilement.

Propriété (FI-module de type fini) : Un FI-module V est de type fini si et seulement si il existe une suite finie d'entier $(m_i)_i$ tel que $\bigoplus_i M(m_i) \twoheadrightarrow V$. *La preuve est immédiate par le lemme précédent.*

1.2 Degré de stabilité, injectivité, surjectivité

Cette section a pour objectif de définir la notion de *degré de stabilité* des FI-modules, qui se définit via une collection de $R[T]$-module gradué associé au FI-module considéré. On va calculer ces degrés pour les FI-module de la forme $M(-)$ et faire des liens avec la notion de degré d'engendrement précédemment vu.

Définition ($R[T]$-module, $R[T]$-module gradué) : Un $R[T]$-module M est un R-module muni d'un morphisme de R-module $T : M \to M$. Un $R[T]$-module gradué est une collection $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de R-modules munie d'une application $T : U_i \to U_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Pour $a \in \mathbb{N}$ on note $\bar{a} = \{-1, \dots, -a\}$.

Pour $a \in \mathbb{N}$ et V un FI-module on construit le quotient coinvariant $(V_{\bar{a}\cup\mathbf{n}})_{S_n}$ c'est-à-dire le plus grand quotient de $V_{\bar{a}\cup\mathbf{n}}$ sur lequel S_n agit trivialement. Toute injection $f : \mathbf{n} \hookrightarrow \mathbf{n+1}$ induit une injection $id \cup f : \bar{a}\cup\mathbf{n} \hookrightarrow \bar{a}\cup\mathbf{n+1}$ qui induit elle même une application $(id\cup f)_* : V_{\bar{a}\cup\mathbf{n}} \to V_{\bar{a}\cup\mathbf{n+1}}$. A partir de cette application, on construit l'application T en prenant les coinvariants de l'ensemble de départ et d'arrivée, ce qui nous donne $T : (V_{\bar{a}\cup\mathbf{n}})_{S_n} \to (V_{\bar{a}\cup\mathbf{n+1}})_{S_{n+1}}$. T ne dépend pas de l'injection f choisie au début de la construction puisque l'image d'un élément par $id \cup f$ est dans la même classe d'équivalence quelque soit le choix de f après l'action de S_{n+1}.

Définition (le $R[T]$-module gradué $\Phi_a(V)$) : Pour $a \in \mathbb{N}$ et V un FI-module on définit le $R[T]$-module gradué $\Phi_a(V)$ par $\Phi_a(V)_n = (V_{\bar{a}\cup\mathbf{n}})_{S_n}$ avec pour tout $n \geq 0$, $T : \Phi_a(V)_n \to \Phi_a(V)_{n+1}$ défini dans la construction précédente. Pour un morphisme de FI-module $F : V \to W$, $\Phi_a(F)$ est le morphisme de FI-module induit par F allant de $\Phi_a(V)$ dans $\Phi_a(W)$.

Proposition (exactitude de Φ_a) : Φ_a est un foncteur de la catégorie des FI-modules vers la catégorie des $R[T]$-module qui est exact à droite. Φ_a est exact à gauche quand R est un corps de caractéristique nulle.

Preuve : Si on note $\coprod_{-a}$ le foncteur de FI dans FI qui à un ensemble fini $\mathbf{n}$ renvoit l'ensemble $\bar{a} \cup \mathbf{n}$ et qui a une injection $f : \mathbf{n} \hookrightarrow \mathbf{m}$ l'injection $\bar{a} \cup \mathbf{n} \hookrightarrow \bar{a} \cup \mathbf{m}$. On peut donc définir le foncteur S_{+a} de FI-module dans FI-module qui à un FI-module V associe $V \circ \coprod_{-a}$. C'est un foncteur exact car pour calculer les noyaux et les conoyaux, on a juste à calculer pour le noyau et le conoyau pour chaque ensemble fini S. On définit aussi τ le foncteur des FI-modules vers les $R[T]$-modules gradués qui a un FI-module V renvoit le $R[T]$-module gradué définit par $(\tau V)_n = (V_n)_{S_n}$ et qui à une application $V(f) : V_n \to V_m$ pour $f : \mathbf{n} \hookrightarrow \mathbf{m}$ renvoit l'application $T : (V_n)_{S_n} \to (V_m)_{S_m}$ induite par $V(f)$, qui ne dépend pas du choix de f comme vu auparavant. Or le foncteur qui a une représentation de S_n notée V_n associe $(V_n)_{S_n}$ est tout le temps exact à droite et est exact à gauche quand $n!$ est inversible dans R, ce qui est toujours le cas quand R est un corps de caractéristique nulle. Comme on a l'égalité $\Phi_a = \tau \circ S_{+a}$, on en déduit que Φ_a est exact à droite quelque soit R et est exact à gauche quand R est un corps de caractéristique nulle.

Définition (degré de stabilité, injectivité, surjectivité) : Avec la convention $inf\ \emptyset = \infty$, on note

- $stab\text{-}deg(V) = inf\{s \geq 0 \mid \forall a \geq 0, \forall n \geq s, T : \Phi_a(V)_n \to \Phi_a(V)_{n+1}\ est\ un\ isomorphisme\ de\ R-module\}$.
- $inj\text{-}deg(V) = inf\{s \geq 0 \mid \forall a \geq 0, \forall n \geq s, T : \Phi_a(V)_n \to \Phi_a(V)_{n+1}\ est\ injective\}$.
- $surj\text{-}deg(V) = inf\{s \geq 0 \mid \forall a \geq 0, \forall n \geq s, T : \Phi_a(V)_n \to \Phi_a(V)_{n+1}\ est\ surjective\}$.

On a donc $stab\text{-}deg(V) = max(inj\text{-}deg(V), surj\text{-}deg(V))$.

Lemme (degré de surjectivité et quotient) : Soit V un FI-module, et un quotient $q : V \twoheadrightarrow W$

alors $surj\text{-}deg(W) \leq surj\text{-}deg(V)$. Si l'anneau R contient $\mathbb{Q}$ alors tout sous-FI-module W vérifie $inj\text{-}deg(W) \leq inj\text{-}deg(V)$.

Preuve : Comme on a une surjection $q : V \twoheadrightarrow W$ et que Φ_a est exact à droite, on a une surjection $\Phi_a(V)_n \twoheadrightarrow \Phi_a(W)_n$ pour tout entier n. Pour $n \geq stab\text{-}deg(V)$, on a une surjection $T_V : \Phi_a(V)_n \twoheadrightarrow \Phi_a(V)_{n+1}$. Or comme $\Phi_a(q)_{n+1} \circ T_V = T_W \circ \Phi_a(q)_n$, et que $T_V : \Phi_a(V)_n \twoheadrightarrow \Phi_a(V)_{n+1}$,$\Phi_a(q)_{n+1} : \Phi_a(V)_{n+1} \twoheadrightarrow \Phi_a(W)_{n+1}$ et $\Phi_a(q)_n : \Phi_a(V)_n \twoheadrightarrow \Phi_a(W)_n$ sont surjectifs, on en déduit que si $z \in \Phi_a(W)_{n+1}$ alors il existe $x \in \Phi_a(V)_n$ tel que $z = (\Phi_a(q)_{n+1} \circ T_V)(x)$ donc avec $y = \Phi_a(q)_n(x)$, $z = (T_W \circ \Phi_a(q)_n)(x) = T_W(y)$ donc $T_W : \Phi_a(W)_n \to \Phi_a(W)_{n+1}$ est bien surjective pour $n \geq stab\text{-}deg(V)$ ce qui prouve que $surj\text{-}deg(W) \leq surj\text{-}deg(V)$.

Le cas où R contient $\mathbb{Q}$ est similaire, on utilise le fait que Φ_a est exact à gauche dans ce cas. □

Lemme (décomposition de $\Phi_a(M(W))_n$ en R-module) : En tant que R-module, $\Phi_a(M(W))_n$ est isomorphe à $\bigoplus_{U\subset\bar{a};\ 0\leq k\leq n}(W_{U\cup\mathbf{k}})_{S_k}$.

Preuve : $M(W)_{\bar{a}\cup\mathbf{n}} = \bigoplus_{S\subset\bar{a}\cup\mathbf{n}} W_S$. Comme $\Phi_a(M(W))_n = (M(W)_{\bar{a}\cup\mathbf{n}})_{S_n}$, il faut s'intéresser à l'action de S_n sur les $S \subset \bar{a}\cup\mathbf{n}$. Chaque S peut s'écrire $S = U \cup V$ avec U, V disjoints, $U \subset \bar{a}$ et $V \subset \mathbf{n}$. Comme S_n n'agit que sur le sous ensemble V de S, on peut représenter l'orbite de S en prenant l'ensemble $U \cup \mathbf{k}$ où $k = |V| \in [\![0, n]\!]$. Les permutations de S_n laissant stable cette orbite agissent comme $S_k \times S_{n-k}$ où S_k agit sur V et S_{n-k} par l'action triviale ce qui implique que $(W_{U\cup\mathbf{k}})_{S_k\times S_{n-k}} = (W_{U\cup\mathbf{k}})_{S_k}$. On en déduit donc la décomposition. □

Proposition (degré des M(-)) : Les degrés de M(-) vérifient les propriétés suivantes :

- Pour tout FB-module W, on a $inj\text{-}deg(M(W)) = 0$.
- Si pour tout $i \geq m,\ W_i = 0$ alors $surj\text{-}deg(M(W)) \leq m$
- Pour tout entier naturel m, on a l'égalité $inj\text{-}deg(M(m)) = 0$
- Pour tout entier naturel m, on a l'égalité $surj\text{-}deg(M(m)) = stab\text{-}deg(M(m)) = m$

Preuve : On reprend la décomposition du lemme précédent : $\Phi_a(M(W))_n \simeq \bigoplus_{U\subset\bar{a};\ 0\leq k\leq n}(W_{U\cup\mathbf{k}})_{S_k}$. T est induite par $id \cup f$ où $f : \mathbf{n} \hookrightarrow \mathbf{n+1}$, or pour $S = U \cup V \subset \bar{a}\cup\mathbf{n}$ où $U \subset \bar{a}$ et $V \subset \mathbf{n}$, on a que $id \cup f(U) = U$ et $|id \cup f(V)| = |f(V)| = |V|$. On en déduit que T agit en préservant la décomposition, puisque le facteur $(W_{U\cup\mathbf{k}})_{S_k}$ de $\Phi_a(M(W))_n$ est envoyé identiquement sur le facteur $(W_{U\cup\mathbf{k}})_{S_k}$ de $\Phi_a(M(W))_{n+1}$. On en déduit que T est tout le temps injective donc cela prouve le premier point.

Si $\forall i \geq m,\ W_i = 0$ alors on a $(W_{U\cup\mathbf{k}})_{S_k} = 0$ dès que $|U| + k \geq m$ donc en particulier pour les $k \geq m$. On a donc pour $n \geq m$ que $\Phi_a(M(W))_n \simeq \bigoplus_{U\subset\bar{a};\ 0\leq k\leq n}(W_{U\cup\mathbf{k}})_{S_k} = \bigoplus_{U\subset\bar{a};\ 0\leq k\leq m}(W_{U\cup\mathbf{k}})_{S_k}$ qui est indépendant de n donc, comme T est l'identité sur chaque facteur, $T : \Phi_a(M(W))_n \to \Phi_a(M(W))_{n+1}$ est surjective pour $n \geq m$ d'où le second point. Le troisième et quatrième point découlent immédiatement du premier et deuxième point et de l'égalité $stab\text{-}deg(V) = max(inj\text{-}deg(V), surj\text{-}deg(V))$.

Proposition (lien entre le degré d'engendrement et le degré de surjectivité) : Si V engendré en degré $\leq d$ alors $surj\text{-}deg(V) \leq d$

Preuve : Le lemme (FI-module engendré) implique que $V = Im(\bigoplus_{0\leq n\leq d} M(n)^{\bigoplus \Sigma_n} \twoheadrightarrow V)$ donc par le lemme précédent (degré de surjectivité et quotient) on obtient l'inégalité $surj\text{-}deg(V) \leq surj\text{-}deg(\bigoplus_{0\leq n\leq d} M(n)^{\bigoplus \Sigma_n})$ et $surj\text{-}deg(\bigoplus_{0\leq n\leq d} M(n)^{\bigoplus \Sigma_n}) \leq d$ via la proposition précédente (degré des M(-)). □

2 Lien avec la théorie des représentations

2.1 Rappel sur les représentation irréductible de S_n

L'objectif de cette section et l'introduction de la notion de *poids* d'un FI-module. Nous ne la définirons que sur un corps k de caractéristique nulle. Nous utiliserons les représentations irréductibles de S_n. Nous rappelons quelques notions à ce propos. Nous verrons ensuite des liens entre degré d'engendrement, degré de stabilité et poids.

Définition (partition) : On note $\lambda \vdash n$ si la partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ vérifie $|\lambda| = \lambda_1 + \dots \lambda_r = n$.

On prend comme convention que les partitions sont ordonnées par ordre décroissant ($\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r$). On peut représenter λ comme un diagramme de Young, où λ_1 est le nombre de cases sur la première ligne, etc... et λ_r est le nombre de cases sur la dernière ligne.

Rappel de faits connus : Les représentations irréductibles de S_n en caractéristique nulle sont en bijection avec les partitions $\lambda \vdash n$. On notera désormais V_λ la représentation de S_n associée à la partition λ.

Définition (partition $\lambda[n]$ et la représentation $V(\lambda)_n$) : Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ une partition. On note pour $n \geq |\lambda| + \lambda_1$ la partition $\lambda[n] = (n - |\lambda|, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$. On note alors la représentation associé $V_{\lambda[n]} = V(\lambda)_n$.

Lemme (représentation induite et restreinte de S_n) : Soit $\lambda \vdash n$ et V_λ la représentation de S_n associée à λ sur un corps k de caractéristique nulle.

- En tant que représentation de S_{n+k}, $Ind_{S_n \times S_k}^{S_{n+k}} V_\lambda \boxtimes k \simeq \bigoplus_{\mu \vdash n+k} V_\mu$ où μ est obtenu à partir de λ en rajoutant une case à k colonnes.
- En tant que représentation de S_{n-k}, $(Res_{S_{(n-k)} \times S_k}^{S_n} V_\lambda)_{S_k} \simeq \bigoplus_{\mu \vdash n-k} V_\mu$ où μ est obtenu à partir de λ en enlevant une case à k colonnes.

2.2 Poids d'un FI-module

Définition (Poids) : Soit V un FI-module sur un corps k. On définit le poids de V noté $weight(V) = max\{|\lambda| \mid \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $V(\lambda)_n$ apparaît dans la S_n représentation de $V_n\}$.
On en déduit que pour W un quotient de V, $weight(W) < weight(V)$.

Proposition (poids de $M(V_\lambda)$) : Soit un corps k de caractéristique nulle. Pour toute partition $\lambda \vdash m$, et V_λ la représentation irréductible prise sur k, alors $weight(M(V_\lambda)) = m$. Si V_m est une représentation de S_m prise sur k alors on a $weight(M(V_m)) \leq m$.

Preuve : On considère le FB-module V_λ qui est vide pour tout n excepté pour $n = m$ où V_m est égal à la représentation V_λ. On a donc $M(V_\lambda)_n = Ind_{S_m \times S_{n-m}}^{S_n} V_\lambda \boxtimes k$. Or par le lemme précédent (représentation induite et restreinte de S_n), on en déduit que $M(V_\lambda)_n$ est isomorphe en tant que représentation de S_n à $\bigoplus_{\mu \vdash n} V_\mu$ où μ est obtenu à partir de λ en ajoutant une case à $n - m$ colonnes.

Comme μ_1 représente le nombre de colonnes de μ, on a $\mu_1 \geq n - m$. On met μ sous la forme $\mu = \nu[n] = (n - |\nu|, \nu_1, \dots, \nu_r)$, donc on a $|\nu| = n - \mu_1$ donc $|\nu| \leq m$. On a donc que $M(V_\lambda)$ est une somme directe de $V(\nu)_n$ pour $|\nu| \leq m$ donc $weight(M(V_\lambda)) \leq m$.

Pour prouver qu'on a l'égalité $weight(M(V_\lambda)) \leq m$, il suffit de voir que pour $n \geq m + \lambda_1$, si l'on ajoute une case aux $n - m$ premières colonnes de λ on obtient une partition $\lambda[n]$ apparaissant dans la somme directe. $V(\lambda)_n$ est donc un terme de la somme d'où $weight(M(V_\lambda)) = m$. La deuxième assertion se déduit de la première. $\square$

Proposition (lien entre engendré en degré fini et poids) : Soit V un FI-module sur un corps k de caractéristique nulle. Si V est engendré en degré $\leq d$ alors $weight(V) \leq d$.

Preuve : Par le lemme (FI-module engendré) on a que $V = Im(\bigoplus_{n \leq d} M(m)^{\oplus \Sigma_m} \to V)$ et comme V est un quotient de $\bigoplus_{m \leq d} M(m)^{\oplus \Sigma_m}$, $weight(V) \leq weight(\bigoplus_{m \leq d} M(m)^{\oplus \Sigma_m})$. Or $weight(M(m)) \leq m$ par la proposition (poids de $M(V_\lambda)$) donc $weight(V) \leq d$. $\square$

On note désormais $(V(\lambda)_n)_{S_k}$ la représentation de S_{n-k} notée précédemment $(Res^{S_n}_{S_{n-k} \times S_k} V(\lambda)_n)_{S_k}$

Lemme (nullité des représentations restreintes) : Soit λ une partition et $n \geq |\lambda| + \lambda_1$ et $a \leq n$. La représentation de S_a notée $(V(\lambda)_n)_{S_{n-a}}$ est nulle si et seulement si $a < |\lambda|$. Si $a = |\lambda|$, alors la représentation de S_a notée $(V(\lambda)_n)_{S_{n-a}}$ est isomorphe à V_λ.

Preuve : Par définition et par le lemme (représentation induite et restreinte de S_n), $(V(\lambda)_n)_{S_{n-a}} = (Res^{S_n}_{S_a \times S_{n-a}} V(\lambda)_n)_{S_{n-a}} = \bigoplus_{\mu \vdash a} V_\mu$ où μ est obtenu à partir de $\lambda[n]$ en enlevant une case à $n - a$ colonnes. Cette somme est vide si et seulement s'il n'existe pas de tel μ et donc comme $\lambda[n]$ a $n - |\lambda|$ colonnes, la somme est vide dès que $n - a > n - |\lambda|$ donc dès que $a < |\lambda|$. La deuxième partie du lemme se trouve avec la même décomposition, puisque $a = |\lambda|$, on doit trouver tous les μ obtenu de $\lambda[n]$ possédant $n - a$ colonnes en enlevant une case à $n - a$ colonnes. Il n'y a qu'une possibilité, $\mu = \lambda$ d'où la deuxième assertion du lemme. $\square$

Proposition (degré de stabilité de $M(V_\lambda)$) : Pour toute partition λ et pour V_λ pris sur un corps de caractéristique nulle, on a $stab-deg(M(V_\lambda)) = \lambda_1$.

Preuve : Comme $\Phi_a(M(W))_n \simeq \bigoplus_{U \subset \bar{a};\ 0 \leq k \leq n} (W_{U \cup \mathbf{k}})_{S_k}$ d'après le lemme (décomposition de $\Phi_a(M(W))_n$ en R-module). Donc pour V_λ, on obtient $\Phi_a(M(V_\lambda))_n = \bigoplus_{k<n; |U|+k=|\lambda|} (V_\lambda)_{S_k}$. L'application $T : \Phi_a(M(V_\lambda)_n \to \Phi_a(M(V_\lambda))_{n+1}$ agit par identité sur chacun des facteurs de la somme directe, donc elle est injective. Il reste donc à montrer qu'elle est surjective à partir de $n > \lambda_1$ et non surjective en $n = \lambda_1 - 1$. Or en écrivant $\lambda = \mu[n]$ et $k = n - a$ et en utilisant le lemme précédent (nullité des représentations restreintes) on obtient que $(V_\lambda)_{S_k} = (V(\mu)_n)_{S_{n-a}}$ est non nulle si et seulement si $a < |\mu|$. Cette dernière condition est équivalente à $k = n - a > n - |\mu| = \lambda_1$ donc T est bien surjective à partir de $n \geq \lambda_1$. La condition $a = |\mu|$ est équivalente à $k = n - a = n - |\mu| = \lambda_1$, donc le terme $(V_\lambda)_{S_{\lambda_1}} \neq 0$ apparait dans la somme pour tous les $n \geq \lambda_1$ donc T n'est pas surjective en $n = \lambda_1 - 1$ ce qui conclue la preuve. $\square$

Proposition (inégalité du degré de stabilité) : Soit V un FI-module sur un corps de caractéristique nulle. On a alors que pour tout $n \geq 0$, chaque composante $V(\lambda)_n$ de la représentation V_n de S_n vérifie $\lambda_1 \leq stab\text{-}deg(V)$.

Preuve : On note $s = stab\text{-}deg(V)$. On va considérer la filtration $F^m V$ défini par $F^m V = span(\cup_{n \leq m} V_n)$. On va prouver que pour tout m et pour chaque irréductible de $W = F^m V / F^{m-1} V$, $\lambda_1 \leq s$, ce qui est équivalent à ce que chaque irréductible de V vérifie $\lambda_1 \leq s$, ce qui est bien ce que l'on veut prouver On va faire cela en plusieurs étapes. On va tout d'abord prouver que chaque V_μ irréductible de $V_m / span(\cup_{n<m} V_n)_m$ vérifie $\mu_1 \leq s$. Dans un second temps on montrera que pour

chaque irréductible $V(\lambda)_n$ de $M(V_\mu)$ satisfait $\lambda_1 \leq \mu_1$.

Tout d'abord, on note $\bar{V} = V/F^{m-1}V$ et on remarque que $\bar{V}_m = V_m/span(\cup_{n<m}V_n)_m$ et que $\bar{(V)}_n = 0$ pour tout $n < m$. Comme c'est un quotient de V, on a par le lemme (degré de surjectivité et quotient) que $surj\text{-}deg(\bar{V}) \leq surj\text{-}deg(V) = s$. Cela implique donc que $T : \Phi_{m-s-1}(\bar{V})_s \to \Phi_{m-s-1}(\bar{V})_{s+1}$ est surjective mais puisque $\Phi_{m-s-1}(\bar{V})_s$ est un quotient de $\bar{V}_{m-1} = 0$, on a donc $0 = \Phi_{m-s-1}(\bar{V})_{s+1} \simeq (\bar{V}_m)_{S_{s+1}}$. On conclue cette étape par le lemme de nullité des représentations restreintes qui donne que pour chaque irréductible V_μ de $\bar{V}_m$, $\mu_1 < s+1$ ce qui donne bien $\mu_1 \leq s$.

On montre maintenant que chaque irréductible $V(\lambda)_n$ de $M(V_\mu)_n$ vérifie $\lambda_1 \leq \mu_1$. Or par le lemme sur les représentations induite et restreinte de S_n, on sait que $M(V_\mu)_n = Ind_{S_m \times S_{n-m}}^{S_n} V_\mu \boxtimes k \simeq \bigoplus_\nu V_\nu$ où les ν sont obtenus à partir de μ en ajoutant une case à $n-m$ colonnes, donc $\nu_2 \leq \mu_1$. Pour $V_\nu = V(\lambda)_n = V_{\lambda[n]}$, on a $\lambda_1 = \nu_2 \leq \mu_1$, ce qui est bien ce qu'on veut prouver.

Il reste à prouver que chaque irréductible $V(\lambda)_n$ de W_n vérifie $\lambda_1 \leq s$. Comme F^mV est généré en degré $\leq m$, W_m l'est aussi donc il existe une surjection $\bigoplus_{n \leq m} M(W_n) \twoheadrightarrow W$. On peut raffiner l'expression en remarquant que pour $n < m$, $W_n = 0$ ce qui réduit à $M(W_m) \twoheadrightarrow W$ et comme $W_m \simeq \bar{V}_m$, on obtient finalement $M(\bar{V}_m) \twoheadrightarrow W$. D'après la première étape, chaque irréductible V_μ de $\bar{V}_m$ vérifie $\mu_1 \leq s$ et donc la deuxième étape nous donne que les irréductibles $V(\lambda)_n$ de $M(\bar{V}_m)_n$ vérifient $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq s$. Enfin W_n est un quotient de $M(\bar{V}_m)_n$, donc chaque irréductible $V(\lambda)_n$ de W_n vérifie aussi $\lambda_1 \leq s$. $\square$

2.3 Noetherianité des FI-modules

Théorème (Noetherianité des FI-modules) : On se place sur un corps k de caractéristique nulle. Soit V un FI-module de type fini . Tout sous FI-module de V est alors de type fini .

Remarque : Ce résultat est vrai sur un anneau noethérien quelconque.

Preuve : L'idée de la preuve est d'utiliser la noetherianité sur les k-modules et sur les $k[T]$-modules gradués pour prouver que $\Phi_a(W)$ est de type fini en tant que $k[T]$ module gradué, ce qui permet de construire un FI-module de type fini $\tilde{W}$ qui va vérifier $\Phi_a(W/\tilde{W})$ pour a assez grand. On va ensuite utiliser une décomposition du $k[S_n]$-module $(W/\tilde{W})_n$ pour conclure que $W = \tilde{W}$.

Utilisation des noetherianités sur les k-modules et $k[T]$-modules gradués : Comme V est de type fini , il est engendré en degré fini, on note a son degré et par la propriété (FI-module de type fini) il existe une suite finie d'entier $(m_i)_i$ tel que $\bigoplus_i M(m_i) \twoheadrightarrow V$. Donc $\bigoplus_i M(m_i)_n \twoheadrightarrow V_n$ et comme les $M(m_i)_n$ sont des k-modules de type fini , on a donc que V_n est de type fini . Par noethérianité des k-modules, W_n est de type fini . Comme Φ_a est exact car le corps k est de caractéristique, on a donc que $\Phi_a(W) \subset \Phi_a(V)$. Par la proposition (lien entre le degré d'engendrement et le degré de surjectivité), on sait que $surj\text{-}deg(V) \leq a$ donc $\Phi_a(V)$ est de type fini en tant que $k[T]$-module gradué. Comme les $k[T]$-modules gradués sont noetherien, le sous module $\Phi_a(W)$ est de type fini en tant que $k[T]$ module gradué.

Construction d'un FI-module $\tilde{W}$ vérifiant l'égalité $\Phi_a(W/\tilde{W}) = 0$: On prend $x_1, \ldots, x_r$ des générateurs de $\Phi_a(W)$ vu en tant que $k[T]$-module gradué avec $x_i \in \Phi_a(W)_{n_i}$. Comme le R-module $\Phi_a(W)_n$ est isomorphe à $(W_{a+n})_{S_n}$ qui est un quotient de W_{a+n}, on prendre des relevés $w_i \in W_{a+n_i}$ tel que la projection de w_i sur le quotient $(W_{a+n})_{S_n}$ donne x_i. On note $\tilde{W}$ le FI-module engendré par les $(w_i)_{1 \leq i \leq r}$. Comme $\tilde{W} \subset W$, $\Phi_a(\tilde{W}) \subset \Phi_a(W)$ or $\Phi_a(\tilde{W})$ contient $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ qui engendre $\Phi_a(W)$ donc $\Phi_a(\tilde{W}) = \Phi_a(W)$. Comme Φ_a est exact sur k, $\Phi_a(W/\tilde{W}) = 0$.

Décomposition de $\mathbf{W/\tilde{W}}$: Pour tout n, en tant que $k[S_n]$-module, $(W/\tilde{W})_n$ est isomorphe à $\bigoplus_\lambda N_\lambda \otimes_{\mathbb{Q}} V(\lambda)_n$, on a décomposé $(W/\tilde{W})_n$ en ses composantes isotypiques, où N_λ est un k-espace vectoriel et $V(\lambda)_n$ est pris comme $\mathbb{Q}[S_n]$-module (irréductible associé à $\lambda[n]$). Comme le poids passe au quotient, $weight(W/\tilde{W}) \leq weight(W)$. Par la proposition (lien entre engendré en degré fini et poids), on sait que $weight(W) \leq a$, d'où le fait que $weight(W/\tilde{W}) \leq a$, donc les seules partitions λ apparaissant dans la décomposition $\bigoplus_\lambda N_\lambda \otimes_\mathbb{Q} \; V(\lambda)_n$ de $(W/\tilde{W})_n$ sont celle vérifiant $|\lambda| \leq a$.

Pour $n \geq a$, $\Phi_a(W/\tilde{W})_{n-a} = (W/\tilde{W})_n \otimes_{k[S_{n-a}]} k \simeq \bigoplus_\lambda N_\lambda \otimes_\mathbb{Q} (V(\lambda)_n \otimes_{\mathbb{Q}[S_{n-a}]} \mathbb{Q})$. Or le lemme (nullité des représentations restreintes) nous donne que $0 \neq (V(\lambda)_n)_{S_{n-a}} = V(\lambda)_n \otimes_{\mathbb{Q}[S_{n-a}]} \mathbb{Q}$. Cependant, $\bigoplus_\lambda N_\lambda \otimes_\mathbb{Q} (V(\lambda)_n \otimes_{\mathbb{Q}[S_{n-a}]} \mathbb{Q}) \simeq \Phi_a(W/\tilde{W}) = 0$ donc $N_\lambda = 0$ pour tout λ (car on est bien en présence d'espace vectoriel). Puisque $(W/\tilde{W})_n \simeq \bigoplus_\lambda N_\lambda \otimes_\mathbb{Q} V(\lambda)_n = 0$, $(W/\tilde{W})_n = 0$ pour tout $n \geq a$. Comme par définition on a que $\tilde{W}_n = W_n$ pour les $n < a$, cela est vrai pour tout n et donc $W = \tilde{W}$. Cela prouve bien que W est de type fini car $\tilde{W}$ l'est. $\square$

2.4 Propriétés de stabilité, polynomialité des caractères

Dans cette section nous étudions les famille de représentation provenant d'un FI-module de type fini . Nous montrons que les représentations sont "stables" dans un sens que nous définissons.

Définition (suite consistante) : On appelle une suite consistante une suite $(V_n, \phi_n)_n$ de représentation de S_n; munies d'applications ϕ_n équivariantes, c'est à dire commutant à l'action de S_n, ou l'on suppose que S_n agit sur V_{n+1} par l'injection $S_n \to S_{n+1}$ de permutation sur les n premiers entiers..

Remarque : Soit V un FI-module. On a alors que l'inclusion $\mathbf{n} \hookrightarrow \mathbf{n+1}$ induit une application équivariante $\phi_n : V_n \to V_{n+1}$. V donne donc lieu à une suite consistante.

Définition (stabilité de représentation) : On dit qu'une suite consistante $(V_n, \phi_n)_n$ de représentation sur un corps de caractéristique nulle est une représentation uniformément stable pour $n \geq N$ si les trois conditions suivantes sont remplies :

- **Injectivité :** L'application $\phi_n : V_n \to V_{n+1}$ est injective pour tout $n \geq N$.
- **Surjectivité :** La représentation engendré par les orbites de $\phi_n(V_n)$ sous l'action de S_{n+1} est égale à tout V_{n+1} pour tout $n \geq N$.
- **Multiplicité :** On utilise la décomposition de V_n en représentation irréductible sous la forme $V_n = \bigoplus_\lambda c_{\lambda,n} V(\lambda)_n$ où les multiplicités $c_{\lambda,n}$ vérifient $0 \leq c_{\lambda,n} \leq \infty$. On demande à ce que pour tout λ, $c_{\lambda,n}$ soit indépendant de n pour tout $n \geq N$.

Nous montrons que ces trois conditions équivalent au fait que le FI-module V_n soit de type fini . D'abord un lemme.

Lemme (indépendance des représentations irréductibles) : Soit λ une partition, k un corps de caractéristique nulle et a un entier vérifiant $a \geq |\lambda|$ et $a \leq n$. La représentation de S_a prise sur k notée $(V(\lambda)_n)_{S_{n-a}}$ est indépendante de n pour $n \geq a + \lambda_1$.

Preuve : On va en fait prouver que la représentation de S_a notée $(V(\lambda)_n)_{S_{n-a}}$ est isomorphe à $Ind_{S_{|\lambda|} \times S_{a-|\lambda|}}^{S_a} V_\lambda \boxtimes k$, ce qui permet bien de conclure puisque l'expression est bien indépendante de n.

D'une part, via le lemme sur les représentations induites et restreintes de S_n, on a que la représentation de S_a notée $Ind_{S_{|\lambda|} \times S_{a-|\lambda|}}^{S_a} V_\lambda \boxtimes k$ est isomorphe à $\bigoplus_{\mu \vdash a} V_\mu$ où les μ sont obtenus à partir de λ en ajoutant une case à $c = a - |\lambda|$ colonnes, donc parmi les $\lambda_1 + c$ premières colonnes (soit on ajoute aux colonnes existantes, soit on ajoute à des nouvelles colonnes adjacentes).

D'autre part, on utilise à nouveau le lemme des représentations restreintes pour dire que la représentation de S_a notée $(V(\lambda)_n)_{S_{n-a}} = (Res^{S_n}_{S_a \times S_{n-a}} V_{\lambda[n]})_{S_{n-a}}$ est isomorphe à $\bigoplus_{\mu' \vdash a} V_{\mu'}$ où les μ' sont obtenus à partir de $\lambda[n]$ en enlevant une case à $n-a$ colonnes.

Or, par définition, $\lambda[n]$ est obtenu à partir de λ en ajoutant une case à chacune des premières $n-|\lambda|$ colonnes. On a donc que μ' est obtenu à partir de λ en ajoutant une case à $n-|\lambda|-(n-a)=c$ colonnes parmi les $n-|\lambda|$ premières colonnes, et pour que l'on ait une partition il faut comme avant que cela soit aussi parmi les $\lambda_1 + c$ premières colonnes.

Or l'hypothèse $n \geq a + \lambda_1$ implique que $n - |\lambda| \geq a - |\lambda| + \lambda_1 = c + \lambda_1$, donc l'ensemble des μ' considérés est en fait le même que l'ensemble des μ considérés, donc il y a égalité entre les deux expressions ce qui prouve que $(V(\lambda)_n)_{S_{n-a}} \simeq Ind^{S_a}_{S_{|\lambda|} \times S_{a-|\lambda|}} V_\lambda \boxtimes k$ pour tout $n \geq a + \lambda_1$. $\square$

Proposition (lien entre le degré de stabilité et la stabilité des représentations) : Soit V un $FI-module$ sur un corps de caractéristique nulle. On a alors que la suite consistante $(V_n, \phi_n)_n$ est une représentation uniformément stable pour $n \geq weight(V) + stab\text{-}deg(V)$.

Preuve : On note $s = stab\text{-}deg(V)$ et $p = weight(V)$. On va montrer que les trois conditions de stabilité sont vérifiées.

Condition d'injectivité : Si on note $K_n = Ker(\phi_n)$, prouver la condition d'injectivité revient à montrer que pour tout $n \geq p+s$, $K_n = 0$. Pour cela on va utiliser le lemme de nullité des représentations restreintes. Comme K est un sous-FI-module de V qui est de poids p, on a que chacune des représentations irréductibles $V(\lambda)_n$ de K_n vérifie $\lambda \leq p$.

D'après le lemme, on a $(V(\lambda)_n)_{S_{n-a}} = 0$ si et seulement si $a < |\lambda|$ et donc pour $a = d$, on obtient cette équivalence pour $n \geq d$: $W_n = 0$ si et seulement si $(W_n)_{S_{n-p}} = 0$. La représentation $(W_n)_{S_{n-p}}$ correspond au noyau de $(\phi_n)_{S_{n-p}} : (V_n)_{S_{n-p}} \to (V_{n+1})_{S_{n-p}}$ car on est sur un corps de caractéristique nulle donc prendre les coinvariants sous l'action de S_{n-p} est exact.

Comme $T : \Phi_d(V_{n-p}) = (V_n)_{S_{n-p}} \to \Phi_d(V_{n+1-p}) = (V_{n+1})_{S_{n-p}}$, on peut factoriser T en deux applications : $(V_n)_{S_{n-p}} \to (V_{n+1})_{S_{n-p}} \to (V_{n+1})_{S_{n+1-p}}$ où la première flèche correspond à $(\phi_n)_{S_{n-p}}$. Or par définition du degré de stabilité, T est un isomorphisme quand $n-p \geq s$, donc $(\phi_n)_{S_{n-p}}$ est injective pour $n \geq p+s$ et donc $(K_n)_{S_{n-p}} = 0$ pour $n \geq p+s$ d'où $K_n = 0$ pour $n \geq p+s$.

Condition de surjectivité : Prouver la condition de surjectivité est assez similaire à prouver la condition d'injectivité une fois qu'on a remarqué qu'elle revient à prouver que pour tout $n \geq p+s$, $\phi'_n = Ind^{S_{n+1}}_{S_n} \phi_n : Ind^{S_{n+1}}_{S_n} V_n \to V_{n+1}$ est surjective, c'est à dire que son conoyau que l'on note C_{n+1} soit nul.

Par le même argument que le paragraphe précédent, prouver que $C_{n+1} = 0$ revient à prouver que $(C_{n+1})_{S_{n+1-p}} = 0$, et cette représentation est le conoyau de l'application :

$$(\phi'_n)_{S_{n+1-p}} : (Ind^{S_{n+1}}_{S_n} V_n)_{S_{n+1-p}} \to (V_{n+1})_{S_{n+1-p}}.$$

De même, on décompose $T : (V_n)_{S_{n-p}} \to (Ind^{S_{n+1}}_{S_n} V_n)_{S_{n+1-p}} \to (V_{n+1})_{S_{n+1-p}}$ où la deuxième flèche correspond à $(\phi'_n)_{S_{n+1-p}}$. Comme T est un isomorphisme pour $n-p \geq s$, on a que $(\phi'_n)_{S_{n+1-p}}$ est surjective pour $n \geq p+s$ ce qui prouve bien la condition de surjectivité.

Condition de multiplicité : Il nous reste la condition de multiplicité à démontrer, c'est à dire que pour $n \geq d+s$, la multiplicité $c_{\lambda,n}$ de $V(\lambda)_n$ est indépendante de n. On va démontrer ce résultat par récurrence forte sur $|\lambda|$, en remarquant qu'il suffit de traiter le cas $|\lambda| \leq p$ par définition du poids p puisque l'on a automatique $c_{\lambda,n} = 0$ pour tout n.

Soit $m \leq p$ tel que pour tout $|\mu| < m$, $c_{\mu,n}$ soit indépendant de n pour $n \geq p+s$. Par définition du degré de stabilité, en tant que représentation de S_m, les $(V_n)_{S_{n-m}}$ sont tous isomorphes entre eux pour $n \geq m+s$. On veut prouver que pour les $|\lambda| = m$, $c_{\lambda,n}$ est indépendant de n pour $n \geq p+s$, donc pour pouvoir appliquer le lemme de nullité de représentations restreintes, il faut que $n \geq |\lambda| + \lambda_1 = m + \lambda_1$. Or d'après la proposition (inégalité du degré de stabilité), on sait que $\lambda_1 \leq s$ donc pour $n \geq s+d$ le lemme de nullité des représentations restreintes est applicable.

On a donc dans la décomposition en irréductible de $(V_n)_{S_{n-m}}$ qu'il n'y a que les partitions d'entiers plus petit que m. La décomposition s'écrit donc

$$(V_n)_{S_{n-m}} = \bigoplus_{|\mu|<m} c_{\mu,n}(V(\mu)_n)_{S_{n-m}} \oplus \bigoplus_{|\lambda|=m} c_{\lambda,n}(V(\lambda)_n)_{S_{n-m}}.$$

Par le lemme d'indépendance des représentations irréductibles, $(V(\mu)_n)_{S_{n-m}}$ est indépendant de n et par hypothèse de récurrence, les $c_{\mu,n}$ le sont aussi, donc la classe d'isomorphisme de la somme directe de gauche est indépendante de n pour $n \geq p+s$.

Par définition du degré de stabilité, pour $n \geq s+m$, $(V_n)_{S_{n-m}}$ est indépendant de n, on en déduit que la classe d'isomorphisme de la seconde somme directe dans la décomposition est aussi indépendante de n pour $n \geq p+s$, mais par le lemme de nullité des représentations restreintes, cette somme vaut en fait $\bigoplus_{|\lambda|=m} c_{\lambda,n} V_\lambda$. L'indépendance en n de cette somme prouve donc l'indépendance en n des multiplicités $c_{\lambda,n}$, ce qui conclue l'hérédité de la récurrence.

On remarque qu'on a traité le cas de base dans cette hérédité, vu qu'il suffit de prendre m=0 et la première somme directe est vide donc on n'utilise aucunement l'hypothèse de récurrence à ce stade. On a donc prouvé par récurrence la condition de multiplicité. □

Théorème (de type fini équivaut à la stabilité des représentations) : Soit V un FI-module sur un corps de caractéristique nulle. Supposons que tous les V_n sont de dimensions finis. Alors, V est de type fini si et seulement si la suite consistante $(V_n, \phi_n)_n$ est une représentation uniformément stable.

Preuve : On suppose V de type fini, engendré en degré supposé $\leq d$ par exemple. On veut obtenir le degré de stabilité de V pour pouvoir utiliser la proposition (lien entre le degré de stabilité et la stabilité des représentations) afin de conclure. Pour se faire, on va utiliser le degré de surjectivité et d'injectivité.

Par la proposition sur le lien entre le degré d'engendrement et le degré de surjectivité, on obtient que $surj\text{-}deg(V) \leq d$. Par le lemme (FI-module engendré) il existe des α_i tel que $M = \bigoplus_{i=0}^{d} M(i)^{\oplus \alpha_i} \twoheadrightarrow V$, on note K le noyau de cette application. Par le théorème de noetherianité des FI-*modules*, K est de type fini donc engendré en degré fini qu'on suppose $\leq d'$. Comme Φ_a est exact sur en caractéristique nulle, $\Phi_a(V)_n \simeq \Phi_a(M)_n / \Phi_a(K)_n$. La proposition sur les degrés des $M(-)$ nous donne que $inj - deg(M) = 0$ donc les applications $T : \Phi_a(M)_n \to \Phi_a(M)_{n+1}$ sont toutes injectives.

La proposition sur le lien entre degré d'engendrement et degré de surjectivité donne $surj\text{-}deg(K) \leq d'$. Les applications $T : \Phi_a(K)_n \to \Phi_a(K)_{n+1}$ sont surjectives pour $n \geq d'$. On en conclue que pour $n \geq d'$, les applications $T : \Phi_a(V)_n \to \Phi_a(V)_{n+1}$ sont injectives donc $inj - deg(V) \leq d'$. On en déduit donc que $stab\text{-}deg(V) = max(d, d')$.

On note alors $D = max(d, d')$. La proposition sur le lien entre le degré de stabilité et la stabilité des représentations nous permet de conclure que $(V_n, \phi_n)_n$ est une représentation uniformément stable pour $n \geq D + d$. Enfin comme l'application $M_n = \bigoplus_{i=0}^{d} M(i)_n^{\oplus \alpha_i} \twoheadrightarrow V_n$ est linéaire et que les $M(i) = M(k[S_i])$ sont de dimensions finis, les V_n sont tous de dimensions finis.

Il reste à montrer la réciproque. On suppose que $(V_n, \phi_n)_n$ est une représentation uniformément stable pour $n \geq N$ et que tous les V_n sont de dimensions finis. La condition de surjectivité implique que les orbites sous S_{n+1} de $\phi_n(V_n)$ engendrent V_{n+1}, donc V_{n+1} est engendré par les images de toutes les f_* où $f : \mathbf{n} \hookrightarrow \mathbf{n+1}$. Par récurrence immédiate, on a $V = span(\cup_{n \leq N} V_n)$. Or chaque V_n

est de dimension fini donc V est bien de type fini . $\square$

Définition (Caractère polynomial) : On définit pour tout $i \geq 1$ et pour tout $n \geq 0$ la fonction $X_i : S_n \to \mathbb{N}$ par $X_i(\sigma) =$ le nombre de cycles de longueur i dans σ. On va donc pouvoir dire qu'un caractère χ est polynomial s'il vérifie $\chi \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, \dots]$ et on définit le degré de χ par $deg(X_i) = i$. On peut donc donner sens au théorème suivant.

Théorème (Polynomialité des caractères) : Soit V un FI-module de type fini sur un corps de caractéristique nulle. Il existe un unique polynôme $P_V \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, \dots]$ tel que $deg(P_V) \leq weight(V)$ et tel que pour tout $n \geq \textit{stab-deg}(V) + weight(V)$ et pour toute permutation $\sigma \in S_n$, le caractère associée à la représentation V_n vérifie $\chi_{V_n}(\sigma) = P_V(\sigma)$.

En particulier, les caractères sont des polynômes à partir d'un certain rang.

Preuve : La proposition (lien entre le degré de stabilité et la stabilité des représentations) et la condition de multiplicité de la définition de stabilité des représentations nous donne que pour V un FI-module de type fini , il existe des multiplicités c_λ tel que V_n en tant que représentation de S_n est isomorphe à $\bigoplus_\lambda c_\lambda V(\lambda)_n$ pour tout $n \geq \textit{stab-deg}(V) + weight(V)$.

Pour chaque partition λ tel que $c_\lambda \neq 0$, on a la définition du poids qui implique directement que $|\lambda| \leq weight(V)$ et la proposition sur l'inégalité du degré de stabilité nous donne que $\lambda_1 \leq stab - deg(V)$.

On va utiliser un fait connu sur les partitions pour conclure : pour tout λ, il existe $P_\lambda \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, \dots]$ de degré $|\lambda|$ tel que $\chi_{V(\lambda)_n}(\sigma) = P_\lambda(\sigma)$ pour tout $n \geq |\lambda| + \lambda_1$.

On a alors que le polynôme $P_V = \Sigma_\lambda c_\lambda P_\lambda$ convient puisque $n \geq \textit{stab-deg}(V) + weight(V) \geq \lambda_1 + |\lambda|$. $\square$

Corollaire : Sous les mêmes hypothèses, la fonction $dim(V_n)$ est éventuellement polynomiale.

Preuve : On évalue le caractère polynomial en le type cyclique de $id \in S_n$. $\square$

3 Application à la cohomologie de l'espace de configuration

Dans cette section nous montrons qu'une certaine cohomologie est une FI-algèbre graduées de type fini.

3.1 FI-objets gradués

Nous définissons les FI-objets gradués, et les notions de finitude dessus. Observons le FI-module $V_n = k[x_1, ..., x_n]$. Les injections associent x_i à $x_{\sigma(i)}$. V n'est pas un FI-module de type fini mais toutes ses "coordonnées" - les polynômes homogènes de degré k à n variables - le sont (le lecteur est encouragé à le vérifier).

3.1.1 FI-modules graduées

Définition : Un FI-Module gradué $V^n, n \in \mathbb{N}$ est la donné d'un foncteur de FI dans la catégorie des R-modules gradués - ici il s'agit de graduations par $\mathbb{N}$.

Autrement dit, un FI-module gradué est la donnée, pour tout n, d'un FI-module V^n : le FI-module de degré n induit.

Un FI-module gradué n'est pas naturellement un FI-module. On peut obtenir un FI-Module en posant $W_k = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_k^n$ mais cela n'est souvent pas la manière de penser naturelle quand aux FI-Module gradués.

Remarque : Il y a ici deux indices. Un FI-module gradué est la donnée, pour tout n, d'un FI-module V^n. Ici V_k^n est donc le k-ème R module de V^n. La notion de finitude pour un module gradué V n'est pas celle induite en considérant le FI-module $W_k = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} V_k^n$. Elle demanderait que chaque W_k soit de type fini comme R module, et donc que chaque V_n ne contienne qu'un nombre fini de degrés non nuls. Se représenter un FI-module comme un module classique offre un gros gain conceptuel. Il peut être profitable au lecteur de parfois "déplier" les opérations cachées par les FI-modules, et de s'assurer que tout marche comme on le pense.

Exemple : La notion de FI-module de type fini dépend elle des flèches du FI-module, ou bien uniquement des R-modules V_n associés ?

Définition : Un FI-module gradué est de type fini si chacune de ses FI-modules coordonnées V^n est de type fini.

Cette propriété passe aux quotients, et aux sous modules lorsque R est noethérien. La finitude se vérifie terme à terme . On peut définir un produit tensoriel pour les FI-modules gradués. Il préserve la finitude.

Définition : Soit V et W deux FI-modules gradués. On pose alors $T^n = \bigoplus_{i=0}^{n} V^i \bigotimes W^{n-i}$.

Ici T^n est le FI-module "degré n-ème" de T. Concrètement, $T_k = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{i=0}^{n} V_k^i \bigotimes W_k^{n-i}$

Lemme : Soit V et W deux FI-modules gradués. Si V et W sont de types finis, leur produit tensoriel aussi.

Preuve : La finitude se vérifie degré par degré. A degré fixé; T est une somme finie de FI-modules de type fini.

3.1.2 FI-algèbres graduées

Définition : Une FI-Algèbre graduée V est un foncteur de FI dans la catégorie des R-algèbres graduées (par convention on suppose que les morphismes préservent la graduation).

Ainsi une FI-algèbre V est un FI-module gradué, avec pour chaque n une structure d'algèbre sur V_n compatible à la graduation, et aux FI-flèches de V_n dans V_m. La bonne propriété de finitude est la suivante :

Définition : Une FI-Algèbre graduée V est dite de type fini si elle l'est en tant que FI-module gradué.

Exemple : le FI-module $V_n = k[x_1, ..., x_n]$ l'est.

3.1.3 FI-algèbres bi-graduées

Définition : Une FI-Algèbre bigraduée E est un foncteur de FI dans la catégorie des R-algèbres bigraduées.

On dispose alors naturellement d'une FI-algèbre graduée en posant pour tout n, $V^n = \bigoplus_{i=0}^{n} E^{i,n-i}$. Il est alors équivalent d'avoir :

$i)V$ de type fini et $ii)$ pour tous $p,q; E^{p,q}$ est de type fini . On dira que E est de type fini.

Proposition : (L'algèbre et le module) . Soit V une FI-algèbre graduée et W un sous FI-module gradué de V- cela signifie simplement que $W \to V$ est un monomorphisme dans la catégorie des FI-modules gradués, ce qui ne signifie rien d'autre que $\forall n, W^n$ sous FI-module de V^n. Supposons que pour tout k, W_k engendre V_k (ici il s'agit d'engendrer en tant qu'algèbre) Alors si W est de type fini, Vaussi.

Preuve: Posons pour tout k, $B_k = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} V_i^{\bigotimes n}$. B est la FI-algèbre graduée engendrée par W. La graduation sur B_k se déduit de celle de W : $deg\ w_1 \bigotimes ... \bigotimes w_n = deg(w_1) + ... + deg(w_n)$ On vérifie que B est un FI-module.

Il faut se convaincre de trois faits triviaux : 1) B est encore de type fini si W l'est - se rappeler que la finitude pour les modules gradués se vérifie "degré par degré" 2) l'hypothèse de l'énoncé dit exactement que B se surjecte dans V. 3) Le fait d'être un FI-module gradué de type fini passe aux quotients. Ces trois faits concluent la preuve.

3.2 Cohomologie de l'espace des configurations

Soit M une variété. On considère alors pour tout entier n la sous variété ouverte de M^n:
$\mathbf{PConf}_n(M) = \{(x_1, ..., x_n) \in M; \forall i \neq j; x_i \neq x_j\}$

La cohomologie de ces variétés est compliquée lorsque n est grand. Nous allons en faire un FI-module. Si je dispose d'une injection de n dans m, je dispose d'une flèche naturelle de $\mathbf{PConf}_m(M)$ dans $\mathbf{PConf}_n(M)$.

Par contravariance de la cohomologie, si je fixe i, j'obtiens une flèche de $H^i(M_n)$ dans $H^i(M_n)$. Cela fait (toujours à i fixé) de $H^i(M_*)$ un FI-module. On obtient maintenant une FI-algèbre $H^*(\mathbf{PConf}_*(M); \mathbb{Q})$.

Théorème : Soit M une variété connexe compacte orientée de dimension ≥ 2. Alors la FI-algèbre graduée $H^*(\mathbf{PConf}_*(M); \mathbb{Q})$ est de type fini.

La preuve nous occupera jusqu'à la fin de la section. Fixons n. Il existe une suite spectrale qui converge vers $H^*(\mathbf{PConf}_n(M); \mathbb{Q})$, dont on explicitera plus bas la deuxième page. Une suite spectrale est un gadget permettant de calculer l'homologie de certains espaces en partant de $\mathbb{N}^2$ modules. Le tout sera de prolonger les résultats aux FI-modules.

En effet, cette séquence est fonctorielle en la variété, ici M^n, donc une injection de n dans m offre naturellement -via la flèche naturelle $M^n \to M^m$- un morphisme de séquence de n vers m.

Cela nous permet de considérer cette séquence non comme une simple séquence d'algèbres bi-graduées, mais comme une séquence de FI-algèbres bigradués $(E_2^{*,*}(*))$, convergeante vers la FI-algèbre $H^*(\mathbf{PConf}_*(M); \mathbb{Q})$.
Explicitons. Chaque terme de la k ème page $E_k^{p,q}(n)$ donne en faisant varier n lieu à un FI-module

$E_k^{p,q}$. L'ensemble de ces FI-modules donne lieu à une suite spectrale, convergeante vers la FI-algèbre $H^*(\mathbf{PConf}_*(M);\mathbb{Q})$.

La convergence est à comprendre au sens suivant (terme à terme). Fixons à nouveau n, regardons ce qu'il se passe sur une seule suite spectrale. Lorsque l'on tourne la k-ème pages, l'algèbre bigraduée $E_k^{*,*}(n)$ s'obtient comme sous-quotient de l'algèbre bigraduée $E_{k-1}^{*,*}(n)$ (les sous-quotients s'opérant terme à terme). Lorsque l'on considère l'algèbre *simplement* graduée $B_k = E_k^{*,*}(*) = \bigoplus_{d=0}^{+\infty} \bigoplus_{p=0}^{+d} E_k^{p,d-p}(n)$; elle converge lorsque k grandit vers $H^*(\mathbf{PConf}_n(M);\mathbb{Q})$, au sens ou à chaque degré d fixé, le termes de degré d de l'algèbre B_k stationne vers celui de degré d de $H^*(\mathbf{PConf}_n(M);\mathbb{Q})$ (i.e $H^d(\mathbf{PConf}_n(M);\mathbb{Q})$). Cela par définition d'une suite spectrale convergeante.

Mais le rang à partir duquel ce terme de degré d stationne est $\leq d+1$(on a affaire à des suites spectrales sur un quart de l'espace). Il est en particulier borné à d fixé. On peut interpréter l'ensemble de ces convergences pour n entier comme une convergence de FI-objets.

Cette convergence préserve la finitude. Si une page ne contient que des FI-modules de type fini, toutes les pages auront cette propriété (la finitude passe aux sous-quotients) et donc l'algèbre limite sera de type fini.

La finitude se vérifie degré par degré, et le degré d de l'algèbre limite est une somme de FI-modules d'une page assez grande.

Il nous reste à montrer que la deuxième page est une FI-algèbre bigraduée de type fini. Fixons n. Un article [5] identifie la deuxième page, considérée comme une algèbre bigradué, où $E_2^{p,q}(n)$ est de degré p,q, à un quotient de l'algèbre bi-graduée polynomiale $H^*(M^n)[G_{i,j}]_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$.

La bi-graduation est la suivante - sur l'algèbre polynomiale -: Soit $h \in H^k(M^n)$.Alors $deg(h \times G_{i,j}) = (k, d-1)$. Cette bi-graduation se propage à toute l'algèbre. En particulier cette algèbre est engendrée par son sous module $H^*(M^n)\bigotimes(G_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$.Ce pour tout n nous donne que la FI-algèbre $E_2^{p,q}$ est engendrée par son sous module $H^*(M^*)\bigotimes(G_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$. D'après la proposition : l'algèbre et le module, il nous suffit de s'intéresser à ce module. Il suffit de montrer que les deux facteurs sont de type fini.
Maintenant, Une des relations sur les$G_{i,j}$ est $G_{i,j} = G_{j,i}$ pour tous i,j. Le FI-module $(G_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$ est donc quotient du FI-module $M(2)$; donc de type fini.

Fixons k. Les formules de Künneth nous donnent pour tout n entier,
$H^k(M^n) = \bigoplus_{i_1+\ldots+i_n=k} H^{i_1}(M)\bigotimes \ldots \bigotimes H^{i_n}(M)$
Dans une telle somme, seuls k indices seront non nuls. On en déduit que cette FI-algèbre est engendrée en degré $\leq k$, donc de type fini.

Ce théorème permet de montrer que la FI-algèbre graduée $V = H^*(\mathbf{PConf}_n(M);\mathbb{Q})$ vérifie la propriété d'uniforme stabilité des représentations via la section 2. On peut par exemple en déduire que pour $n \geq$ *stab-deg*$(V) + weight(V)$, $dim(V_n) = \chi_{V_n}(id) = P(n, 0, \ldots, 0)$ est polynomiale.

Autre exemple : si $M = \mathbb{C}$; On remarque que l'ensemble des points fixes par S_n de $\mathbf{PConf}_n(\mathbb{C})$ s'identifie à $\widetilde{\mathbf{Conf}}_n(\mathbb{C}) = \{x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}; x_i \neq x_j \forall i \neq j\}$ Ici la seule différence avec $\mathbf{PConf}_n(\mathbb{C})$ est que les points ne sont *pas* ordonnés. De plus la stabilité de la multiplicité de la représentation triviale pour la séquence de représentations de S_n $H^i(\mathbf{PConf}_n(\mathbb{C}))$ donne la stabilité de la séquence de représentations de S_n $H^i(\widetilde{\mathbf{Conf}}_n(\mathbb{C})$. Nous ne le prouvons pas ici.

4 Un phénomène de comptage

Le but de cette section est de comprendre l'égalité élémentaire sur $\mathbb{F}_q[X]$:

#Polynômes de degré n sans facteurs carrés $= q^n - q^{n-1}$

Plus précisément, on observe un phénomène de stabilité. Cette formule ne dépend essentiellement pas de n. Le but de cette section est de relier cette stabilité à celle montrée juste avant sur $H^i(P\mathbf{Conf}_n(\mathbb{C}))$.

4.1 Lien avec l'espace de configurations

Le premier point est le suivant. Compter le nombre de polynômes de degré n sans facteurs carrés revient à compter les $\mathbb{F}_q$ points de

$\mathbf{Conf}_n(\overline{\mathbb{F}_q}) = \{a_0, ..., a_{n-1} \in \overline{\mathbb{F}_q}; X^n + ... + a_0$ sans facteur carré $\}$. C'est un sous schéma ouvert (lieu ou le discriminant ne s'annule pas) de $\mathbb{A}^n_{\overline{\mathbb{F}_q}}$.

Les $\mathbb{F}_q$ points de cette variété s'identifient aux $\overline{\mathbb{F}_q}$ points de la variété invariants par Frob_q : $\mathbf{Conf}_n(\overline{\mathbb{F}_q}) \to \mathbf{Conf}_n(\overline{\mathbb{F}_q})$. C'est ici le fait suivant : $\mathbb{F}_q = \{x \in \overline{\mathbb{F}_q}; \mathrm{Frob}_q(x) = x\}$. On est donc ramené à compter le nombre de points fermés fixes d'un morphisme d'une variété sur un corps algébriquement clos.

On dispose ici de la formule du point fixe suivante. C'est la formule de la trace de Grothendieck-Lefschetz.

$$\#\mathrm{Fix}\ (\ \mathrm{Frob}_q : \mathbf{Conf}_n(\overline{\mathbb{F}_q}) \to \mathbf{Conf}_n(\overline{\mathbb{F}_q})) = q^{dim \mathbf{Conf}_n(\overline{\mathbb{F}_q})} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i tr(\mathrm{Frob}_q : H^i_{et}(\mathbf{Conf}_n(\overline{\mathbb{F}_q}); \mathbb{Q}_l)^\vee)$$

Dans notre cas, cela se simplifie en la formule :

$$\mathrm{Fix}\ (\ \mathrm{Frob}_q : \mathbf{Conf}_n(\overline{\mathbb{F}_q}) \to \mathbf{Conf}_n(\overline{\mathbb{F}_q})) = q^n \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i q^{-i} dim H^i(\mathbf{Conf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Q}_l)$$

Trois choses se passent. Un théorème d'Artin donne un isomorphisme entre $H^i_{et}(X; \mathbb{Q}_l)$ et $H^i(X(\mathbb{C}; \mathbb{Q}_l)$.

De plus, Frob agit sur H^i par q^{-i} fois l'identité, sa trace est donc $q^{-i} \times dim(H^i(X(\mathbb{C}; \mathbb{Q}))$

Enfin $\mathbf{Conf}_n(\mathbb{C}) = \{a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}; X^n + ... + a_0$ sans facteurs carrés$\}$ s'identifie (en prenant les racines) topologiquement à $\widetilde{\mathbf{Conf}}_n(\mathbb{C}) = \{x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}; x_i \neq x_j \forall i \neq j\}$.

4.2 Interprétation

Cette formule nous permet de comprendre le phénomène de stabilité. La stabilité du nombre de polynômes sans facteurs carrés vient de celle sur la cohomologie de $\widetilde{\mathbf{Conf}}_n(\mathbb{C})$, Ici, on vérifie que l'on a

$dim H^i(\mathbf{Conf}_n(\mathbb{C}); (Q_l) = dim H^i(\mathbf{Conf}_n(\mathbb{C}); (Q) = 1$ si $i = 0, 1$ et 0 sinon .

On obtient bien
#Polynômes de degré n sans facteurs carrés $= q^n - q^{n-1}$

Cette méthode s'applique en plus grande généralité. Le calcul ci dessus s'applique à d'autres variétés, et à d'autres cohomologies. En calculant la cohomologie de certains faisceaux sur les FI-variétés; on élargit les applications. L'idée est la même. On établit un lien entre le cardinal recherché et l'action de Frob sur les germes des points fixes d'un certain faisceau. Dans cette section le faisceau était le faisceau constant. On utilise la formule de la trace de Grothendieck-Lefschetz.

La formule Grothendieck-Lefschetz identifie (lorsque le faisceau est le faisceau constant) le cardinal à une somme $q^{dim(X_n)}(dim(H^0(X_n(\mathbb{C};\mathbb{Q}) + \frac{1}{q}dim(H^1(X_n(\mathbb{C};\mathbb{Q}) + ... +)$. Lorsque les variétés forment des FI-coespaces (c'est à dire un foncteur contravariant de FI vers Top), la cohomologie stabilise de la même manière d'après la section (2). C'est le cas avec l'espace de configurations. On comprend la stabilisisation évoquée. Dans [1], les exemples de l'introduction sont traités (et plus encore). En conclusion, certains aspects "polynomiaux" de formules combinatoires peuvent cacher des FI-objets.

References

[1] Thomas Church, Jordan Ellenberg, and Benson Farb. "Representation stability in cohomology and asymptotics for families of varieties over finite fields". In: *Contemporary Mathematics* 620 (2014), pp. 1–54.

[2] Thomas Church, Jordan S Ellenberg, and Benson Farb. "FI-modules and stability for representations of symmetric groups". In: (2014).

[3] Thomas Church, Jordan S Ellenberg, and Benson Farb. "FI-modules: a new approach to stability for Sn-representations". In: *arXiv preprint arXiv:1204.4533* (2012).

[4] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory: a first course*. Vol. 129. Springer Science & Business Media, 2013.

[5] Burt Totaro. "Configuration spaces of algebraic varieties". In: *Topology* 35.4 (1996), pp. 1057–1067.

[6] Jenny Wilson. "An introduction to FI–modules and their generalizations". In: *Michigan Representation Stability Week* (2018).