

# **Le groupe fondamental étale**

Justin Carel et Alexander Zenkovich

Encadré par Antoine Ducros

Mémoire de première année

Département de mathématiques et applications

École normale supérieure de Paris

May 31, 2024

# Table des matières

I Morphismes de schémas	<b>1</b>
1.1 Premières définitions . . . . .	1
1.2 Quelques propriétés locales des morphismes étales . . . . .	3
II Groupe fondamental étale	<b>6</b>
2.1 Catégories galoisiennes . . . . .	6
2.2 Les revêtements finis étales d'un schéma . . . . .	9
2.3 Morphismes de catégories galoisiennes . . . . .	11
III Prolongement des courbes lisses	<b>13</b>
3.1 Algébrisation des schémas formels . . . . .	13
3.2 La construction de proche en proche . . . . .	15
IV Suites exactes et groupe fondamental	<b>18</b>
4.1 Le morphisme de spécialisation . . . . .	18
4.2 Le groupe fondamental étale d'une courbe . . . . .	20
A Rappels de cohomologie cohérente	<b>21</b>

# Introduction

En topologie, le groupe fondamental est un invariant homotopique d'une grande utilité. Les schémas étant ce qu'ils sont, il n'y a que très peu d'espoir de pouvoir répliquer en géométrie algébrique une définition par les lacets. Cependant, sous des conditions raisonnables pour un espace topologique pointé  $(X, x)$ , on dispose d'une équivalence de catégories

$$\text{Cov}_X \longleftrightarrow \pi_1(X, x)\text{-Set}$$

induite par le foncteur fibre. Ceci déterminant canoniquement le groupe fondamental de  $(X, x)$ , on peut aussi bien l'utiliser comme définition. Ainsi, si l'on trouve en géométrie algébrique une notion raisonnable de revêtements qui induise une équivalence similaire, on arrivera à obtenir un analogue de ce dernier.

Il nous faut déjà un analogue aux homéomorphismes locaux, les morphismes étales. Bien qu'ils ne satisfassent pas la condition de trivialisatation locale dans la topologie de Zariski, trop grossière, on peut montrer qu'ils se comportent bien comme des revêtements vis-à-vis de la topologie étale (à une hypothèse de finitude près). La catégorie des revêtements étales finis d'un schéma a donc des propriétés très similaires à la catégorie des revêtements finis d'un espace topologique, suffisamment pour obtenir l'équivalence espérée

$$\text{FinEt}/X \longleftrightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})\text{-FinSet.}$$

Encore faut-il pouvoir comprendre ce groupe. En caractéristique 0, grâce à des théorèmes d'algébrisation des revêtements, on dispose de résultats ramenant à l'étude du groupe classique, du type

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) = \hat{\pi}_1(X(\mathbb{C}), x)$$

pour une  $\mathbb{C}$ -variété. En caractéristique  $p$ , la situation se complique; il existe un grand nombre de nouveaux revêtements étales finis spécifiques à cette situation qui, puisqu'il sont classifiés par le groupe fondamental étale, l'agrandissent.

On s'intéresse dans ce mémoire à la définition du groupe fondamental étale suivant le texte de Lenstra [Len], puis au calcul de sa partie première à  $p$  pour une courbe (lisse, propre)  $X$  sur un corps algébriquement clos  $k$  de caractéristique  $p$  tel que décrit à l'exposé X de [SGA1]. La stratégie pour ce faire imite une propriété du  $\pi_1$  classique; il est localement constant sur toute famille d'objets paramétrée par les fibres d'une submersion propre. De même, le langage algèbro-géométrique permet de voir un schéma lisse  $X$  sur un anneau noethérien local complet  $A$  (tel que par exemple  $\mathbb{Z}_p$ ), de corps résiduel  $k$  comme une famille possédant deux objets particulièrement intéressants pour nos besoins:

- La fibre générique provenant de  $A \rightarrow \text{Frac } A$ , de caractéristique 0.
- La fibre associée à l'unique point fermé de  $A \rightarrow k$ , de caractéristique  $p$ .

Lorsque  $X$  est également propre sur  $A$ , la partie première à  $p$  du groupe fondamental est constante sur ces fibres. Ce résultat demande beaucoup de théorie, dont on esquissera les principales idées sans donner beaucoup de preuves au chapitre IV.

Afin de pouvoir mettre en place l'approche par déformations, il faut auparavant s'assurer que la courbe que l'on considère provient bien par réduction d'un tel schéma  $Y$ . On démontre au chapitre III, avec la construction de proche en proche, que le prolongement des schémas lisses de  $k$  à  $A$  est un problème purement cohomologique dont l'obstruction se trouve dans le  $H^2$  d'un certain faisceau abélien. Puisque les courbes sont des objets de dimension 1, il n'y a pas de problème.

Pour des raisons de concision, on est obligé de supposer le lecteur familier avec le langage des schémas, et dans une moindre mesure avec la cohomologie cohérente (bien que les résultats utiles concernant cette dernière soient rappelés en annexe A). Le chapitre I rappelle les définitions importantes, avec quelques exemples, mais sans trop de preuves. Le seul résultat qui y soit réellement démontré est la trivialisatation locale des revêtements étales. Le chapitre II introduit le formalisme des catégories galoisiennes et les utilise pour définir le groupe fondamental étale. Il développe aussi les premières propriétés des morphismes entre groupes fondamentaux, qui seront employées au chapitre IV.

Finalement, nous tenons à remercier chaleureusement Antoine Ducros pour son encadrement, ses excellents conseils, sa relecture minutieuse, et sa disponibilité permanente.

# Chapitre I.

## Morphismes de schémas

### 1.1 Premières définitions

**Définition 1.1.** Soit  $Y/X$  un morphisme localement de présentation finie. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- $\Omega_{Y/X} = 0$ .
- $\Delta_{Y/X}$  est une immersion ouverte.
- Pour tout  $y \in Y$ , il existe un voisinage Zariski  $U$  de  $y$  dont le morphisme  $U \rightarrow X$  se factorise à travers une immersion fermée  $U \hookrightarrow \mathbb{A}_X^n$ , définie par l'annulation de polynômes  $g_1 \dots g_r$ , dont les différentielles engendrent  $\Omega_{\mathbb{A}^n/X}$ .

Dans ce cas,  $Y$  est dit **non ramifié** sur  $X$ .

**Exemple 1.2.**

- Les immersions sont non ramifiées.
- La composée de morphismes non ramifiés est non ramifiée.
- Le changement de base d'un morphisme non ramifié est non ramifié.

**Proposition 1.3.** Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme localement de présentation finie,  $y \in Y$  et  $x = f(y)$ . Alors sont équivalents:

- $f$  est non ramifié en  $y$ .
- $Y_x \rightarrow \text{Spec } \kappa(x)$  est non ramifié en  $y$ .
- Il existe dans  $Y_x$  un voisinage affine  $\text{Spec } k_i$  de  $x$  où  $k_i/k$  est finie séparable.
- $\Omega_{Y/X,y} = 0$ .
- $\Omega_{Y_x/x,y} = 0$ .
- $\Omega_{Y/X,y} \otimes_{\mathcal{O}_y} \kappa(x) = 0$ .
- $\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_y = \mathfrak{m}_y$  et  $\kappa(y)/\kappa(x)$  est finie séparable.

**Exemple 1.4.** Étant donné un corps  $k$ , un  $k$ -schéma  $X$  est non ramifié si et seulement si  $X = \coprod_I \text{Spec } k_i$  pour des extensions finies séparables  $k_i/k$ . En particulier, si  $Y \rightarrow X$  est non ramifié alors pour tout  $x \in X$  la fibre  $Y_x$  est réunion disjointe de spectres d'extensions finies séparables de  $\kappa(x)$ .

**Définition 1.5.** Soit  $Y/X$  un morphisme localement de présentation finie. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- $Y$  est plat sur  $X$  et  $\Omega_{Y/X}$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -module localement libre de rang fini égal à la dimension relative.
- Pour tout  $y \in Y$  d'image  $x$ , il existe un voisinage Zariski  $U$  de  $y$  dont le morphisme  $U \rightarrow X$  se factorise à travers une immersion fermée  $U \hookrightarrow \mathbb{A}_X^n$ , définie par l'annulation de polynômes  $g_1 \dots g_r$  dont les différentielles forment une famille libre de  $\Omega_{\mathbb{A}^n/X} \otimes_{\mathcal{O}_x} \kappa(x)$ .

Dans ce cas,  $Y$  est dit **lisse** sur  $X$ .

**Exemple 1.6.**

- Les immersions ouvertes sont lisses, mais en général pas les immersions fermées.
- Une extension de corps est lisse si et seulement si elle est finie séparable.
- Le morphisme  $\mathbb{A}_X^n \rightarrow X$  est lisse.
- Soit  $S$  l'algèbre  $R[x_1 \dots x_n]/(f_1 \dots f_r)$ . Si le jacobien  $g = \det[\partial_i f_j]_{1 \leq i, j \leq r}$  est inversible dans  $S$ , alors  $S$  est lisse sur  $R$ . Le morphisme induit est dit lisse standard.
- Tout morphisme lisse est Zariski-localement (sur la source) lisse standard.
- Un morphisme est lisse si et seulement s'il est plat, localement de présentation finie, et à fibres lisses.
- Un morphisme plat localement de présentation finie est universellement ouvert. C'est en particulier le cas des morphismes lisses.
- La composée de morphismes lisses est lisse.
- Le changement de base d'un morphisme lisse est lisse.

**Définition 1.7.** Un morphisme  $Y/X$  est **étale** s'il est plat et non ramifié.

**Exemple 1.8.**

- Un morphisme est étale si et seulement s'il est lisse de dimension relative 0.
- Les immersions ouvertes sont étales, mais en général pas les immersions fermées.
- Une extension de corps est lisse si et seulement si elle est finie séparable..
- Le morphisme induit par  $R \rightarrow R[x]_h/g$  avec  $g$  unitaire est étale si et seulement si  $g'$  est inversible dans  $R[x]_h/g$ . Un tel morphisme est dit étale standard.
- Tout morphisme étale est Zariski-localement (sur la source) étale standard.
- Si  $Y \rightarrow X$  est un morphisme entre deux  $\mathbb{C}$ -schémas de type fini, il est étale si et seulement si  $Y(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$  est un isomorphisme analytique local.
- La composée de morphismes étales est étale.
- Le changement de base d'un morphisme étale est étale.
- Les morphismes entre deux schémas étales sont étales.

**Proposition 1.9.** *Pour un morphisme de schémas  $f : Y \rightarrow X$ , les propriétés d'être quasi-compact, quasi-séparé, séparé, localement de type fini, localement de présentation finie, plat, une immersion ouverte, affine, une immersion fermée, fini, lisse, non ramifié, étale, et un monomorphisme sont toutes fpqc-locales sur la base. En d'autres termes, ces propriétés sont stables par changement de base plat et  $f$  vérifie l'une d'elles si et seulement si il existe un recouvrement fpqc  $(X_i) \rightarrow X$  tel que  $f_{X_i}$  vérifie cette propriété pour tout  $i$ .*

Preuve [Stacks, 02Y]. Admis. □

## 1.2 Quelques propriétés locales des morphismes étales

Lorsque  $X$  est un schéma et  $S$  un ensemble discret, on entendra par  $S \times X$  le schéma  $\coprod_S X$ . Il s'agit ici de démontrer que les morphismes étales finis  $X \rightarrow Y$  sont étale-localement triviaux, c'est à dire qu'en tout point de  $y$  il existe un morphisme étale  $U/Y$  d'image contenant  $y$ , à travers lequel  $X_U \simeq S \times U$  pour un certain ensemble fini  $S$ . Ce résultat, qui peut justifier l'appellation *revêtement étale fini* d'un morphisme étale fini surjectif, n'est pas surprenant. Déjà dans le cas des corps, si  $L/k$  est une extension finie séparable alors

$$\mathrm{Spec}(L \otimes_k L) = \mathrm{Gal}(L/k) \times \mathrm{Spec} L.$$

On va ceci dit devoir beaucoup plus travailler pour pouvoir établir le théorème en toute généralité.

**Lemme 1.10.** *Soit  $R$  un anneau,  $\mathfrak{p}$  un idéal premier, et  $f \in R[x]$  un polynôme unitaire. On suppose que  $f$  se factorise dans  $\kappa(\mathfrak{p})[x]$  sous la forme  $\bar{f} = \bar{g}\bar{h}$ , avec  $\bar{g}$  et  $\bar{h}$  premiers entre eux. Alors il existe un voisinage étale élémentaire<sup>1</sup>*

$$(\mathrm{Spec} R', \mathfrak{q}) \rightarrow (\mathrm{Spec} R, \mathfrak{p})$$

dans lequel on peut relever la factorisation de  $f$ . En d'autres termes, il existe des polynômes  $g', h' \in R'[x]$  premiers entre eux vérifiant  $f = gh, \bar{g} = \bar{g}',$  et  $\bar{h} = \bar{h}'$ .

Preuve [Stacks, 00UH]. Appelons  $(a_i), (b_j),$  et  $(c_k)$  les coefficients respectifs de  $f, \bar{g},$  et  $\bar{h}$ . Considérons l'algèbre

$$S = R[B_j, C_k] \left/ \left( a_i - \sum_{j+k=i} B_j C_k \right) \right.,$$

qui possède un  $R$ -morphisme vers  $\kappa(\mathfrak{p})$  donné par l'évaluation de  $B_j$  et  $C_k$  en  $b_j$  et  $c_k$ . Alors  $\mathfrak{q} = \ker(S \rightarrow \kappa(\mathfrak{p}))$  est un idéal premier de  $S$  vivant au dessus de  $\mathfrak{p}$ . Encore faut-il s'assurer que  $S$  est étale sur  $R$ , ce que l'on peut faire par le critère jacobien (il y a autant d'inconnues que d'équations). Ici, la jacobienne n'est autre que la matrice de Sylvester des polynômes

$$G = \sum B_j x^j \quad \text{et} \quad H = \sum C_j x^j.$$

Son déterminant  $\Delta$  est le résultant  $\mathrm{Res}(G, H)$ , qui n'est pas nécessairement inversible. En revanche le localisé  $R' = S[\Delta^{-1}]$  est bien étale sur  $R$ , et par construction  $\Delta(\mathfrak{q}) \neq 0$  soit  $\mathfrak{q} \in D(\Delta)$ . De plus  $G$  et  $H$  sont premiers entre eux dans  $R'$  puisque leur résultant est inversible. □

**Remarque 1.11.** C'est la première propriété formelle qui nous permet de dire que les voisinages étales sont « analytiques ». Une grande différence entre la géométrie différentielle et la géométrie algébrique est la présence des théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites.

Le plus naïf modèle d'un « voisinage analytique » est le spectre de l'anneau local complété  $\widehat{\mathcal{O}}_x$ . On peut en effet imaginer ses éléments comme les séries de Taylor des fonctions définies au voisinage de  $x$ . Bien qu'il ne s'agisse pas d'un voisinage au sens d'une topologie de Grothendieck, il possède néanmoins des propriétés à fort goût différentiel comme le lemme de Hensel, analogue algébrique du théorème des fonctions implicites. Le lemme nous dit que l'on retrouve cette propriété pour les voisinages étales.

<sup>1</sup>C'est à dire qu'il existe un unique  $\mathfrak{q}$  au dessus de  $\mathfrak{p}$ , et il vérifie  $\kappa(\mathfrak{q}) = \kappa(\mathfrak{p})$ .

**Lemme 1.12.** Si  $X \rightarrow Y$  est un morphisme fini, le « cardinal géométrique avec multiplicité » d'une fibre est invariante par changement de base. Plus précisément, soient  $Y'/Y$  un schéma,  $X' = X \times_Y Y'$ , et  $y' \in Y'$  un point au dessus de  $y \in Y$ . Pour n'importe quel voisinage affine  $V$  de  $y$  — dont la préimage  $U$  est encore affine — on définit

$$m_{X/Y}(y) = \dim_{\kappa(y)} \Gamma(U) \otimes_{\Gamma(V)} \kappa(y).$$

Alors  $m_{X/Y}(y) = m_{X'/Y'}(y')$ .

*Preuve.* Sans perte de généralité, les schémas en jeu sont tous affines. On en déduit un calcul explicite

$$\begin{aligned} m_{X'/Y'}(y') &= \dim_{\kappa(y')} \Gamma(X') \otimes_{\Gamma(Y')} \kappa(y') \\ &= \dim_{\kappa(y')} \Gamma(X) \otimes_{\Gamma(Y)} \Gamma(Y') \otimes_{\Gamma(Y')} \kappa(y') \\ &= \dim_{\kappa(y')} \Gamma(X) \otimes_{\Gamma(Y)} \kappa(y) \otimes_{\kappa(y)} \kappa(y') \\ &= \dim_{\kappa(y)} \Gamma(X) \otimes_{\Gamma(Y)} \kappa(y) \\ &= m_{X/Y}(y). \end{aligned} \quad \square$$

**Lemme 1.13.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un revêtement étale fini de  $Y$ ,  $y \in Y$  un point. Alors il existe un voisinage étale  $U$  de  $y$  pour lequel  $X_U = U \sqcup Z$ , où  $Z$  est un revêtement étale fini de  $U$ .

*Preuve* [Stacks, 00UJ, 02LM, 04DG]. Sans perte de généralité,  $Y$  et  $X$  sont tous deux affines d'anneaux respectifs  $R$  et  $S$ . Soit  $x \in X_y$  un point. Puisque  $f$  est étale, le corps résiduel  $\kappa(x)$  est contenu dans une extension galoisienne  $L$  de  $\kappa(y)$  de la forme

$$L = \kappa(y)[\alpha] = \kappa(y)[t]/f.$$

Quitte à bien choisir le générateur, on peut également supposer que  $f$  provient d'un polynôme unitaire de  $R[t]$ . Alors l'algèbre

$$R' = R[t]_{f'}/f$$

est étale standard sur  $R$ . Elle possède un point  $y'$  au dessus de  $y$  de corps résiduel  $\kappa(y') = L$ , donné par le noyau du morphisme d'évaluation  $x \mapsto \alpha$ . Qui plus est, les points de  $S' = S \otimes_R R'$  dans la fibre de  $y'$  correspondent au spectre de

$$S' \otimes_{R'} L = \kappa(x) \otimes_{\kappa(y)} L \simeq L^n,$$

et sont à nouveau de corps résiduel  $L$ . Ainsi, quitte à remplacer  $(R, S, y)$  par le changement de base étale  $(R', S', y')$ , on s'est ramené au cas où  $X_y \simeq \text{Spec } \kappa(y)^n$ .

Soit  $s_0 = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \in \Gamma(X_y)$  la fonction vérifiant  $s_0(x) = 1$  et  $s_0(x') = 0$  en tout autre point de la fibre. On peut relever  $s_0$  à  $\tilde{s} \in S \otimes_R R_y$ , qui possède un nombre fini de dénominateurs. Quitte à multiplier par un inversible de  $R_y$ , on trouve une fonction  $s \in S$  valant zéro en tout point de  $X_y$  sauf  $x$ . Comme  $S$  est fini sur  $R$ , il existe un polynôme annulateur unitaire  $f \in R[t]$  de  $s$ . Quitte à multiplier par  $t$ , on peut supposer que  $f$  s'annule également en 0.

Considérons la factorisation  $\tilde{f} = t^e \tilde{h}$  dans  $\kappa(y)[t]$ . Le lemme 1.10 nous donne une  $R$ -algèbre étale élémentaire  $R'$  pour laquelle  $f = ih$  dans  $R'[t]$  avec  $(i, h) = 1$ . Soit  $a, b$  tels que  $ai + bh = 1$ . Écrivons par changement de base  $S' = S \otimes_R R'$ ,  $X' = \text{Spec } S'$ ,  $Y' = \text{Spec } R'$  et  $y'$  l'unique point de  $Y'$  au dessus de  $y$ . Par construction, on a dans  $S'$  les égalités

$$i(s)h(s) = f(s) = 0 \quad \text{et} \quad a(s)i(s) + b(s)h(s) = 1,$$

ce qui implique que  $a(s)i(s)$  et  $b(s)h(s)$  sont idempotents. Ils décomposent ainsi  $X'$  en une somme directe  $U \sqcup Z$ . Puisque c'est une condition Zariski-locale sur la source, les schémas  $U$  et  $Z$  sont encore des revêtements finis étales de  $Y'$ . Remarquons également que

$$\Gamma(Z \times_{Y'} \kappa(y')) = \frac{S'}{a(s)i(s)} \otimes_{R'} \kappa(y') = \frac{\kappa(y)^n}{\bar{a}(\bar{s})\bar{s}^e} \simeq \kappa(y)^{n-1}.$$

Ainsi  $U$  possède un unique point  $u$  sur  $y'$  et  $\kappa(u) = \kappa(y')$ .

Il reste à trouver un voisinage Zariski  $V$  de  $y'$  tel que  $U \times_{Y'} V$  est isomorphe à  $V$ . Notons  $B$  et  $A$  les anneaux correspondants respectivement à  $U$  et  $Y'$ , ainsi que  $\mathfrak{q}$  et  $\mathfrak{p}$  les idéaux associés aux points  $u$  et  $y$ . Soit  $\varphi : A \rightarrow B$  le morphisme induit.

Par construction,  $B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}} = \kappa(\mathfrak{p})$ . Soit  $\mathfrak{q}'$  un point de  $B_{\mathfrak{p}}$ . On voit que  $\mathfrak{q}' \cap A \leq \mathfrak{p}$ , et par finitude de  $U/Y'$  il existe un idéal  $\mathfrak{q}''$  de  $B$  contenant  $\mathfrak{q}'$  et se réduisant vers  $\mathfrak{p}$ . Par unicité, nécessairement  $\mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}$  d'où  $\mathfrak{q}'$  est un point de  $B_{\mathfrak{q}}$ . Alors le morphisme naturel  $\varphi : \text{Spec } B_{\mathfrak{q}} \rightarrow \text{Spec } B_{\mathfrak{p}}$  est un homéomorphisme, tous les éléments de  $B \setminus \mathfrak{q}$  sont inversibles dans  $B_{\mathfrak{p}}$ , et enfin  $B_{\mathfrak{q}} = B_{\mathfrak{p}}$ . Par Nakayama  $\varphi(A_{\mathfrak{p}}) = B_{\mathfrak{p}}$ .

Comme  $B$  est un  $A$ -module fini, il existe un  $g \in A$  tel que  $\varphi(A_g) = B_g$ . Alors  $f \times_Y D(g)$  est une immersion fermée dans  $D(g)$ , c'est le voisinage voulu. Finalement on se souvient qu'une immersion fermée étale est aussi ouverte, donc un isomorphisme sur son image  $W$ . En changeant de base par cet ouvert, on obtient

$$U \times_{Y'} W \xrightarrow{\sim} Y' \times_{Y'} W. \quad \square$$

**Théorème 1.14.** *Les voisinages finis étales sont étale-localement triviaux. Plus précisément, soit  $X \rightarrow Y$  un morphisme étale fini et  $y \in Y$ . Alors il existe un voisinage étale  $(U, u) \rightarrow (Y, y)$  et un ensemble fini  $S$  tel que  $X_U \simeq S \times U$  en tant que  $U$ -schéma.*

*Preuve* [Stacks, 04HN]. Soit  $(U, u) \rightarrow (Y, y)$  le voisinage étale donné par le lemme 1.13. On peut alors calculer

$$m_{X/Y}(y) = m_{X_U/U}(u) = m_{U/U}(u) + m_{Z/U}(u) > m_{Z/U}(u) \quad (\text{cf 1.12}).$$

Appliquant par récurrence ces lemmes à  $Z$  on finit par obtenir  $X_U = (S \times U) \sqcup Z$  avec  $m_{Z/U}(u) = 0$ , ce qui est possible uniquement dans le cas où  $Z = \emptyset$ . □

**Remarque 1.15.** Ce théorème est l'analogie algébrique du théorème d'inversion locale en géométrie différentielle, une propriété plus forte que le théorème des fonctions implicites pour les schémas sur les corps non algébriquement clos. Par exemple, on ne peut pas trouver un ouvert Zariski de  $\text{Spec } \mathbb{Q}$  tel que la corestriction de  $\text{Spec } \mathbb{Q}(i) \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Q}$  admette une section, mais c'est possible avec un ouvert étale.

# Chapitre II.

## Groupe fondamental étale

En topologie algébrique, il existe un fort lien entre le groupe fondamental d'un espace topologique et ses revêtements. Étant donné un groupe profini  $\pi$ , on notera  $\pi\text{-FinSet}$  la catégorie des  $\pi$ -ensembles finis munis d'une action continue – au sens où la flèche induite  $\pi \times X \rightarrow X$  est continue lorsque  $X$  possède la topologie discrète – à stabilisateurs ouverts. On obtient alors le résultat suivant:

**Théorème 2.1.** *Si  $X$  est un espace topologique connexe et  $x$  un point de  $X$ , il existe un unique groupe profini  $\hat{\pi}_1(X, x)$  tel que les catégories  $\hat{\pi}_1(X, x)\text{-FinSet}$  et  $\text{FinCov}_X$  soient équivalentes.*

Le groupe  $\hat{\pi}_1(X)$  n'est pas sans lien avec le groupe fondamental usuel, qui classe tous les revêtements de  $X$ ; il s'en agit en fait de la complétion profinie. Dans cette section, nous allons démontrer le résultat analogue pour la topologie étale. Nous suivrons pour ce faire de près la structure de [Len].

**Théorème 2.2.** *Si  $X$  est un schéma connexe et  $x$  un point géométrique<sup>1</sup>, il existe un unique groupe profini  $\pi_1(X, x)$  tel que les catégories  $\pi_1(X, x)\text{-FinSet}$  et  $\text{FinEt}/X$  soient équivalentes. On appelle  $\pi_1(X, x)$  le **groupe fondamental étale** de  $X$ .*

### 2.1 Catégories galoisiennes

**Définition 2.3.** *Une catégorie (essentiellement petite)  $\mathcal{C}$  munie d'un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{FinSet}$  est **galoisienne** si*

- elle est finiment (co)complète,
- tout morphisme  $u : Y \rightarrow X$  admet une factorisation  $u = ip$  avec  $i$  monique et  $p$  épique,
- tout monomorphisme est un facteur direct,
- $F$  commute aux (co)limites finies, et
- $F$  est conservatif<sup>a</sup>.

Dans ce cas, on appelle  $F$  le **foncteur fondamental** de  $\mathcal{C}$ .

<sup>a</sup>Il détecte les isomorphismes. Ou encore,  $Ff$  est un isomorphisme seulement si  $f$  l'est.

<sup>1</sup> $\mathcal{C}$  est à dire un morphisme  $x \rightarrow X$  avec  $x = \text{Spec } k$  le spectre d'un corps algébriquement clos.

**Remarque 2.4.** On arrivera à démontrer le théorème fondamental des catégories galoisiennes avec des hypothèses un peu plus faibles: au lieu d'admettre toutes les colimites finies, on se contentera des sommes finies ainsi que les quotients par un groupe fini. De même on utilisera seulement que  $F$  commute aux sommes finies, quotients par un groupe fini, et préserve les épimorphismes. Puisque le théorème établit une équivalence avec la catégorie  $\pi$ -FinSet qui vérifie la définition plus forte ci-dessus, ces deux jeux d'hypothèses sont en fait équivalents.

**Exemple 2.5.**

- Si  $\pi$  est un groupe profini, la catégorie  $\pi$ -FinSet est galoisienne pour le foncteur d'oubli.
- Si  $X$  est un espace topologique, la catégorie  $\text{FinCov}_X$  est galoisienne pour le foncteur fibre associé à un point.
- Si  $k$  est un corps, la catégorie  $\text{FinEt}/k$  est galoisienne pour l'oubli.
- Nous montrerons plus généralement que pour un schéma connexe  $X$ , la catégorie  $\text{FinEt}/X$  est galoisienne pour le foncteur fibre associé à un point géométrique.

On fixe désormais une catégorie galoisienne  $\mathcal{C}$  et  $F$  son foncteur fondamental, ainsi qu'un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ .

**Définition 2.6.** Un *sous-objet* de  $X$  est la classe d'isomorphisme dans  $\mathcal{C}/X$  d'un monomorphisme  $Y \rightarrow X$ . On confondra souvent  $Y$ , le monomorphisme, et la classe.

Étant donné un sous-objet  $Y \rightarrow X$ , on a une décomposition de  $X$  en somme directe qui à travers  $F$  identifie  $FY$  à un sous-ensemble de  $FX$ . Si  $Z \rightarrow X$  est un autre sous-objet, alors

$$F(Y \times_X Z) = FY \times_{FX} FZ = FY \cap FZ \subseteq FX.$$

On ne se privera donc pas d'appeler  $Y \times_X Z$  l'*intersection* de  $Y$  et  $Z$ . En outre, comme  $F$  détecte les isomorphismes on a  $Y =_X Z$  si et seulement si  $FY = FZ$ .

**Définition 2.7.** Un objet  $A$  est *connexe* s'il n'a pour sous-objets que 0 et lui-même. Par convention, on supposera que 0 n'est pas connexe. L'ensemble  $FX$  étant fini,  $X$  se décompose en somme directe d'objets connexes que l'on nomme *composantes connexes* de  $X$ .

Si  $A$  est un objet connexe, alors  $\text{End } A$  agit librement sur  $FA$ . En effet, étant donné deux flèches  $f, g : A \rightarrow A$  ainsi que leur égaliseur  $E$ , la commutation de  $F$  aux limites finies fait de  $FE$  l'égaliseur de  $Ff$  et  $Fg$ . Mais par connexité on a nécessairement  $FE$  vide ou égal à  $FA$ , c'est à dire que si  $Ff$  et  $Fg$  coïncident en un point elles coïncident partout. Remarquons également que tous les endomorphismes de  $A$  sont inversibles, puisqu'ils se factorisent en épimorphismes et que  $FA$  est fini. En particulier, on en déduit que

$$|\text{Aut } A| = |\text{End } A| \leq |FA|;$$

on peut donc considérer le quotient de  $A$  par  $\text{Aut } A$ . Remarquons également que si  $a \in FA$ , alors l'application  $\text{Hom}(A, X) \rightarrow FX$  donnée par  $f \mapsto (Ff)a$  est injective par le même argument que précédemment.

**Définition 2.8.** Soit  $A$  un objet connexe. On dit que  $A$  est *galoisien* si  $A/\text{Aut } A = 1$ . En d'autres termes,  $X$  est galoisien si  $\text{Aut } A$  agit transitivement sur  $FA$ . Autrement dit,  $\text{Aut } A \simeq FA$  par l'application décrite au paragraphe précédent. Ou encore,  $FA$  est un  $(\text{Aut } A)$ -torseur.

### Exemple 2.9.

- Une extension finie de corps  $L/k$  est galoisienne si et seulement si  $\text{Spec } L$  est un revêtement étale galoisien de  $\text{Spec } k$ .
- Un  $\pi$ -ensemble est galoisien si et seulement si l'action est transitive, c'est à dire s'il est isomorphe à un quotient de  $\pi$  par un sous-groupe ouvert.
- Un revêtement fini d'un espace topologique pointé est galoisien si et seulement si pour tout lacet, le fait que son relèvement soit ou non un lacet ne dépend pas du point de la fibre depuis lequel on relève.

**Lemme 2.10.** Soit  $X$  un objet quelconque. Il existe un objet galoisien  $A$  tel que  $|\text{Hom}(A, X)| = |FX|$ .

*Preuve.* Soit  $a \in FX^{FX}$  l'élément diagonal, c'est à dire que  $a_x = x$  pour tout  $x \in FX$ . Étudions la composante connexe  $A \rightarrow X^{FX}$  pour laquelle  $a \in FA$ . On a une application

$$\phi: \begin{array}{ccc} \text{Hom}(A, X) & \longrightarrow & FX \\ f & \longmapsto & (Ff)a \end{array}$$

qu'on sait injective par connexité de  $A$ . Considérer les projections  $p_x : A \rightarrow X$  fournit un antécédent à tout point  $x$  de  $X$ , et il suit que  $\phi$  est une bijection; en outre tout flèche de  $A$  vers  $X$  est une projection.

Tout autre élément  $b$  de  $FA$  induit similairement une injection entre  $\text{Hom}(A, X)$  et  $X$ , dont l'égalité des cardinaux assure qu'il s'agit d'une bijection. Ainsi les coordonnées de  $b$  sont permutation de celles de  $a$ . Cette permutation se relève naturellement en un automorphisme de  $X^{FX}$ , et par suite de  $A$ . On a ainsi montré que  $\text{Aut } A$  agit transitivement sur  $FA$ , ou encore que  $A$  est galoisien.  $\square$

**Remarque 2.11.** Pour tout objet galoisien  $A$  muni d'un point  $a \in FA$ , on dispose d'une injection naturelle  $\text{Hom}(A, -) \rightarrow F$ . Si  $I$  désigne l'ensemble des paires  $(A, a \in A)$  avec  $A$  galoisien — dont on peut vérifier qu'il est filtrant *via* le lemme précédent appliqué à un produit — on en déduit un monomorphisme<sup>2</sup>

$$\varinjlim_I \text{Hom}(A, -) \rightarrow F.$$

En outre, si  $X$  est un objet fixé, *loc. cit.* assure que l'application est déjà surjective en un certain  $(A, a) \in I$ . On a ainsi démontré que  $F \cong \varinjlim_I \text{Hom}(A, -)$ . En particulier, cette caractérisation intrinsèque de  $F$  force tout autre foncteur fondamental à lui être isomorphe.

Le groupe  $\text{Aut } F$  possède des surjections naturelles vers  $\text{Aut } FX$  pour tout objet  $X$ . Ces derniers groupes étant finis, on les munit de la topologie discrète et  $\text{Aut } F$  de la topologie initiale.

**Théorème 2.12.** Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie galoisienne essentiellement petite et  $F$  son foncteur fondamental, alors:

- Le groupe  $\text{Aut } F$  est profini, et  $F$  se relève en une équivalence  $\tilde{F} : \mathcal{C} \rightarrow (\text{Aut } F)\text{-FinSet}$ .
- Si  $G$  est un autre foncteur faisant de  $\mathcal{C}$  une catégorie galoisienne, alors  $F \simeq G$ .
- Si  $\pi$  est un groupe profini muni d'une équivalence entre  $\mathcal{C}$  et  $\pi\text{-FinSet}$  vérifiant  $F = (\mathcal{C} \rightarrow \pi\text{-FinSet} \rightarrow \text{FinSet})$ , alors  $\pi \cong \text{Aut } F$ .
- Si  $\pi$  est un groupe profini muni d'une équivalence entre  $\mathcal{C}$  et  $\pi\text{-FinSet}$ , alors  $\pi \simeq \text{Aut } F$ . Cet isomorphisme est canonique à un automorphisme intérieur près.

*Preuve* [Len, pp. 43-46]. Soit  $(A, a) \geq (B, b)$  dans  $I$ , et  $f : A \rightarrow B$  l'unique morphisme envoyant  $a$  sur  $b$ . Comme  $B$  est galoisien, pour tout  $\sigma \in \text{Aut } A$  il existe un unique  $\tau \in \text{Aut } B$  tel que  $F\tau b = F(f\sigma)a$ . Dans l'autre sens  $Ff$  est nécessairement surjective par connexité, et le caractère galoisien de  $A$  assure l'existence d'une préimage de  $\tau$  dans

<sup>2</sup>La colimite n'a de sens uniquement car  $\mathcal{C}$  est essentiellement petite.

Aut  $A$ . Ceci détermine un épimorphisme de groupes  $\text{Aut } A \rightarrow \text{Aut } B$  et plus généralement un système projectif cofiltrant indexé par  $I$ . Posons

$$\pi := \varprojlim_I \text{Aut } A \cong \text{Aut} \left[ \varinjlim_I \text{Hom}(A, -) \right] \cong \text{Aut } F,$$

où le second isomorphisme a été vu en remarque 2.11. Le premier est défini de manière purement formelle de gauche à droite, et provient encore de *loc. cit.* évalué en  $(B, b) \in I$  ainsi que de l'isomorphisme naturel  $\text{Aut } B \rightarrow FB$ .

À  $X$  fixé, le groupe  $\pi$  agit de manière compatible aux restrictions sur  $\text{Hom}(A, X)$  par  $\sigma \cdot f = f\sigma^{-1}$ . Ainsi obtient on une action continue de  $\pi$  sur la limite inductive, c'est à dire  $FX$ , qui est bien sûr compatible avec l'isomorphisme  $\pi \cong \text{Aut } F$ . Cette action est naturelle au sens où elle est fonctorielle. En outre, le stabilisateur de tout point  $f \in \text{Hom}(A, X) \simeq FX$  (pour  $A$  bien choisi) est l'ouvert-fermé des éléments  $\sigma \in \pi$  qui se spécialisent en  $\sigma|_A = 1_A$ . On a ainsi montré que  $\bar{F}$  se relève en un foncteur

$$\bar{F}: \begin{array}{c} \mathcal{C} \longrightarrow \pi\text{-FinSet} \\ X \longmapsto FX \end{array}.$$

Assurons nous que  $\bar{F}$  est essentiellement surjectif. Puisque tout objet  $Y$  de  $\pi\text{-FinSet}$  se décompose en somme de ses orbites, on peut supposer  $Y$  connexe. Alors si  $G \leq \pi$  est le stabilisateur (ouvert, donc d'indice fini) d'un point on a un isomorphisme  $\pi/G \simeq Y$ . Mais  $\pi$  étant profini ce quotient se factorise à travers  $(\text{Aut } A)/G$  pour un certain objet galoisien  $A$  de  $\mathcal{C}$ , et on a des isomorphismes de  $\pi$ -ensembles

$$F(A/G) = (FA)/G \simeq (\text{Aut } A)/G \simeq \pi/G \simeq Y.$$

Vérifions maintenant que  $\bar{F}$  est pleinement fidèle. Soient  $f, g : X \rightarrow Y$  deux morphismes de  $\mathcal{C}$  pour lesquels  $\bar{F}f = \bar{F}g$ . Alors  $f$  et  $g$  coïncident sur toutes composantes connexes de  $X$ , donc sur  $X$  entier. Soit maintenant  $\bar{f} : \bar{F}X \rightarrow \bar{F}Y$ . En décomposant sur les composantes connexes on a

$$\text{Hom}_\pi(\bar{F}X, \bar{F}Y) = \text{Hom}_\pi \left( \prod_{i=1}^n \bar{F}X_i, \bar{F}Y \right) = \prod_{i=1}^n \text{Hom}_\pi(\bar{F}X_i, \bar{F}Y),$$

et on suppose désormais  $X$  connexe. Sous cette hypothèse  $\bar{F}X$  est encore connexe, et son image sous  $\bar{f}$  coïncide avec une composante de  $\bar{F}Y$ . Ainsi suppose-t-on  $Y$  connexe également. Alors quitte à choisir  $(A, a) \in I$  suffisamment large on peut écrire  $X = A/G_1$  et  $Y = A/G_2$  où  $G_1, G_2 \leq \text{Aut } A$ , d'où on déduit le carré gauche du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \bar{F}X & \longrightarrow & (\text{Aut } A)/G_1 & \longleftarrow & \text{Aut } A \\ \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \tau \\ \bar{F}Y & \longrightarrow & (\text{Aut } A)/G_2 & \longleftarrow & \text{Aut } A. \end{array}$$

Or  $\bar{g}$  étant  $\pi$ -équivariant il est également  $(\text{Aut } A)$ -équivariant, ce qui force  $\bar{g}(\sigma G_1) = \sigma \bar{g} G_1 = \sigma \tau G_2$  pour un certain  $\tau \in \text{Aut } A$ . Inversement, une telle formule détermine un  $\pi$ -morphisme si et seulement si  $G_1 \tau \subseteq \tau G_2$ . Alors le morphisme  $A \xrightarrow{\tau} A \rightarrow A/G_2$  est invariant sous l'action de  $G_1$  et induit le relevé voulu  $A/G_1 \rightarrow A/G_2$ . Ainsi  $\bar{F}$  est bien une équivalence de catégories.

L'unicité est plus simple à démontrer. Le second point a été vu à la remarque 2.11. Si  $\pi$  vérifie les hypothèses du troisième point alors  $\text{Aut } F \cong \text{Aut } U \cong \pi$  où  $U : \pi\text{-FinSet} \rightarrow \text{FinSet}$  est le foncteur d'oubli. Si  $\pi$  vérifie les hypothèses du dernier point alors le foncteur  $F' : \mathcal{C} \rightarrow \pi\text{-FinSet} \rightarrow \text{FinSet}$  est fondamental, d'où isomorphe à  $F$ , soit  $\text{Aut } F \simeq \text{Aut } F' \cong \pi$  canoniquement à un automorphisme intérieur près.  $\square$

## 2.2 Les revêtements finis étales d'un schéma

Fixant  $X$  un schéma connexe muni d'un point géométrique  $x$ , on s'assure ci-après que la catégorie  $\text{FinEt}_X$  des revêtements finis étales d'un schéma  $X$  est bien galoisienne pour le foncteur fibre  $F_x = - \times_X x$ . Il nous faut vérifier un certain nombre de points:

- $\text{FinSet}_X$  est stable par (co)limites finies.
- Ses morphismes admettent une factorisation épi-monique.
- Ses monomorphismes sont des facteurs directs.
- $F_x$  est exact.
- $F_x$  détecte les isomorphismes.

### Existence des limites finies

Les morphismes étales sont stables par rétrotirette et composition. En particulier, si  $Y, Z, T$  sont trois  $X$ -schémas finis étales munis de flèches  $Y \rightarrow T$  et  $Z \rightarrow T$ , alors  $Y \times_T Z \rightarrow Y \rightarrow X$  est encore étale.

### Existence des sommes finies

Les caractères fini et étale sont des conditions Zariski-locales sur le domaine. En particulier, si  $Y_1 \dots Y_n$  sont des  $X$ -schémas finis étales, alors  $\coprod Y_i$  est encore fini étale.

### Existence des coégaliseurs

Soit  $Y, Z$  deux  $X$ -schémas finis étales et  $Y \rightrightarrows Z$  deux morphismes entre eux. Ces schémas s'écrivent respectivement  $Y = \text{Spec } \mathcal{B}$  et  $Z = \text{Spec } \mathcal{C}$  pour deux algèbres quasicohérentes  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . Alors l'égaliseur  $\mathcal{A}$  des morphismes d'algèbres  $\mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{B}$  est encore quasicohérent. Ceci démontre que le coégaliseur schématique  $W = \text{Spec } \mathcal{A} \rightarrow X$  existe.

Il faut encore vérifier qu'il est fini étale, ce que l'on peut faire localement sur un recouvrement fpqc de  $X$  (cf 1.9). On peut donc supposer que  $Y$  et  $Z$  sont respectivement de la forme  $Y = S \times X$  et  $Z = T \times X$  pour de certains ensembles finis  $S$  et  $T$  (cf 1.14). Il suit que les flèches  $Y \rightrightarrows Z$  proviennent de  $S \rightrightarrows T$ , dont le coégaliseur ensembliste  $E$  vérifie  $W = E \times X$ .

### Les monomorphismes sont des facteurs directs

Soit  $f : Y \rightarrow Z$  un monomorphisme de  $\text{FinEt}/X$ . Dire que  $f$  est facteur direct revient à dire qu'il s'agit d'une immersion ouverte et fermée, deux propriétés qui sont fpqc-locales (cf 1.9). On peut donc supposer que  $f$  provient d'une application ensembliste entre ensembles finis  $S$  et  $T$  pour lesquels  $Y = S \times X$  et  $Z = T \times X$  (cf 1.14). Alors nécessairement  $S \rightarrow T$  est injective, d'où  $f$  un facteur direct.

### Exactitude à gauche

Soit  $Y, Z, W$  des  $X$ -schémas finis étales et  $T = Y \times_W Z$  une rétrotirette. Si  $x$  est un point géométrique de  $X$  alors le cube

$$\begin{array}{ccccc}
 & & T_x & \longrightarrow & Z_x \\
 & \swarrow & \downarrow & & \swarrow \downarrow \\
 Y_x & \longrightarrow & W_x & & Z_x \\
 \downarrow & \lrcorner & \downarrow & & \downarrow \\
 & & T & \longrightarrow & Z \\
 & \swarrow & \downarrow & & \swarrow \downarrow \\
 Y & \longrightarrow & W & & Z
 \end{array}$$

assure que  $- \times_X x$  préserve la rétrotirette. Puis comme  $x$  est le spectre d'un corps séparablement clos, le foncteur d'oubli induit une équivalence  $\text{FinEt}/x \leftrightarrow \text{FinSet}$ . Il est en particulier exact à gauche.

### Exactitude à droite

En réutilisant les notations du paragraphe concernant l'existence des coégaliseurs, il faut s'assurer que

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \kappa(x) = \text{Eq} \left[ \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \kappa(x) \rightrightarrows \mathcal{C} \otimes_{\mathcal{O}_X} \kappa(x) \right].$$

Or les morphismes étales sont plats et localement de présentation finie, ce qui implique que les modules  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  sont localement libres de rang fini. Ainsi le changement de base par  $x$  commute bien au noyau dans ce cas.

### Détection des isomorphismes

Soit  $f : Y \rightarrow Z$  un morphisme dans  $\text{FinEt}/X$  pour lequel  $f_x : Y_x \rightarrow Z_x$  est un isomorphisme. On veut vérifier que  $f$  est un isomorphisme. En décomposant sur les composantes connexes on peut supposer  $Y$  et  $Z$  connexes. Alors comme  $f$  est localement libre, par connexité  $[Y : Z] = [Y_x : Z_x] = 1$  donc  $f$  est un isomorphisme.

**Théorème 2.13.** La catégorie des revêtements finis étales d'un schéma connexe  $X$  est galoisienne, pour le foncteur fibre associé à un point géométrique  $x$ . En particulier, il existe un unique groupe

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, x) = \text{Aut}(- \times_X x)$$

pour lequel on dispose d'une équivalence de catégories

$$\text{FinEt}/X \longleftrightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, x)\text{-FinSet}.$$

On appelle  $\pi_1^{\text{ét}}(X, x)$  le **groupe fondamental étale** de  $X$  au point  $x$ . Si  $x'$  est un autre point, le groupe fondamental en  $x'$  est isomorphe non canoniquement à celui en  $x$ . Lorsque cela n'a pas d'importance, on écrira donc parfois  $\pi_1^{\text{ét}}(X)$ .

**Exemple 2.14.** Si  $k$  est un corps et  $k_{\text{sep}}$  le choix d'une clôture séparable, alors  $\pi_1^{\text{ét}}(k) = \text{Gal}(k_{\text{sep}}/k)$ .

## 2.3 Morphismes de catégories galoisiennes

Dans cette section, on entendra par  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux catégories galoisiennes (essentiellement petites) de foncteurs fondamentaux respectifs  $F, F'$ . D'après les résultats de 2.1, ces catégories sont équivalentes à celles des ensembles finis munis d'une action continue du groupe fondamental. On se donne également un foncteur  $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  pour lequel  $F = F'H$ . Alors le tirage en arrière induit un morphisme de groupes

$$\varphi = - \circ H : \begin{array}{l} \pi' = \text{Aut } F' \rightarrow \text{Aut } F = \pi \\ \eta \mapsto (X \mapsto \eta_{HX}). \end{array}$$

Le foncteur d'oubli  $\pi\text{-FinSet}$  détectant les (co)limites finies, l'équation de définition de  $H$  le rend exact. Il s'agit en fait d'une condition suffisante.

**Lemme 2.15.** Soit  $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur exact entre catégories galoisiennes. Si  $F' : \mathcal{C}' \rightarrow \text{FinSet}$  est un foncteur fondamental de  $\mathcal{C}'$ , alors  $F = F'H$  est un foncteur fondamental de  $\mathcal{C}$ . En particulier,  $H$  est conservatif.

*Preuve.* Répliquant les arguments menant à la remarque 2.11, on observe que  $F$  est pro-représentable par des objets galoisiens, et par suite détecte les isomorphismes. L'argument n'est pas circulaire ! On emploie *loc. cit.* la détection des isomorphismes pour démontrer la décomposition en somme de connexes: ici  $\mathcal{C}$  étant supposée galoisienne, cette décomposition est déjà fournie.  $\square$

**Lemme 2.16.** Le morphisme  $\varphi : \pi' \rightarrow \pi$  est continu, d'image fermée, et ouvert sur son image.

*Preuve.* On dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi' \subseteq \prod_{X': \mathcal{C}'} \text{Aut}(F'X') =: G & & \\ \varphi \downarrow & & \downarrow v \\ \pi \subseteq \prod_{X: \mathcal{C}} \text{Aut}(F'HX) =: G' & & \end{array}$$

où  $v$  est le morphisme obtenu en envoyant diagonalement  $A = \text{Aut}(F'X')$  sur  $A^{H^{-1}X'}$ . Ainsi  $\varphi$  est continu en tant que restriction-corestriction d'un morphisme continu. Comme par ailleurs  $\pi$  et  $\pi'$  sont compacts,  $\varphi$  est fermé. En outre, les sous-groupes ouverts des groupes topologiques sont les fermés d'indice fini. Il suit que  $\varphi$  est ouvert sur son image.  $\square$

De ce lemme on voit que  $\varphi$  détermine encore un foncteur  $\varphi^* : \pi\text{-FinSet} \rightarrow \pi'\text{-FinSet}$ . En fait, à travers les identifications mentionnées au premier paragraphe on peut même démontrer l'égalité  $H = \varphi^*$ . Ainsi tout foncteur

<sup>2</sup> $\mathcal{C}'$  est à dire qu'il commute aux (co)limites finies.

exact entre catégories galoisiennes provient de, et induit, un unique morphisme entre leurs groupes fondamentaux. Cela donne lieu à l'équivalence contravariante

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = \mathrm{Hom}(\pi', \pi).$$

**Lemme 2.17.** Soit  $U$  un sous-groupe ouvert de  $\pi$ . Alors il contient le sous-groupe normal engendré par  $\mathrm{im} \varphi$  si et seulement si  $\pi'$  agit trivialement sur  $H(\pi/U)$ . En particulier, lorsque  $U$  est normal, la première condition se réduit à  $\mathrm{im} \varphi \leq U$ .

*Preuve.* C'est une conséquence de  $H = \varphi^*$ . □

**Lemme 2.18.** Soit  $V$  un sous-groupe ouvert de  $\pi'$ . Alors le noyau de  $\varphi$  est contenu dans  $V$  si et seulement s'il existe un sous-groupe ouvert  $U$  de  $\pi$  ainsi qu'un morphisme de  $\pi'$ -ensembles

$$H(\pi/U)^\circ \rightarrow \pi'/V,$$

où  $H(\pi/U)^\circ$  désigne la composante neutre de  $H(\pi/U)$ . Si de plus  $\varphi$  est surjectif, il s'agit d'un isomorphisme.

*Preuve.* Soit  $U$  un sous-groupe ouvert de  $\pi$ . La composante neutre de  $H(\pi/U)$  est donnée par

$$H(\pi/U)^\circ = \varphi(\pi')U/U \cong \mathrm{im} \varphi / (\mathrm{im} \varphi \cap U) \cong \pi' / \varphi^{-1}U.$$

Par voie de conséquence, on a  $\ker \varphi \leq \varphi^{-1}U \leq V$  si et seulement s'il existe un morphisme

$$H(\pi/U)^\circ \cong \pi' / \varphi^{-1}(U) \rightarrow \pi' / V.$$

Dans l'autre sens, le caractère ouvert de  $\varphi$  nous donne un  $U$  pour lequel  $(\mathrm{im} \varphi) \cap U \leq \varphi(V)$ . Alors si  $\ker \varphi \leq V$  on obtient  $\varphi^{-1}U \leq V$ , donc le morphisme évoqué. Si par ailleurs  $\varphi$  est surjectif on peut prendre  $U = \varphi(V)$ . □

**Lemme 2.19.** Les assertions suivantes sont équivalentes:

- (a) Le morphisme  $\varphi$  est surjectif.
- (b) Le foncteur  $H$  préserve la connexité.
- (c) Le foncteur  $H$  est pleinement fidèle.

*Preuve.*

- (a)  $\Leftrightarrow$  (b) Le groupe  $\pi'$  agit sur  $F'HX = FX$  à travers  $\varphi$ . En particulier pour tout sous-groupe normal ouvert  $N \triangleleft \pi$ , il revient au même de dire que l'image du quotient  $\pi/N$  est connexe et que  $\pi' \rightarrow \pi/N$  est surjective. Passer à la limite projective fournit l'équivalence souhaitée.
- (a)  $\Rightarrow$  (c) Le foncteur  $H$  est toujours fidèle car  $F$  l'est. Si  $\varphi$  est surjectif alors l'application ensembliste sous-jacente à un morphisme  $f : HX \rightarrow HY$  est bien  $\pi$ -équivariante. Ainsi  $H$  est plein.
- (a)  $\Leftarrow$  (c) Dans l'autre sens, supposons  $\varphi$  non surjectif; il existe un sous-groupe ouvert  $\mathrm{im} \varphi \leq U < \pi$ . Choisissons n'importe quelle fonction  $f : \pi/U \rightarrow \pi/U$  qui n'est pas un  $\pi$ -morphisme. Alors  $f$  est  $\pi'$ -équivariante car ce groupe agit trivialement, ce qui contredit la plénitude de  $H$ . □

**Remarque 2.20.** On appliquera la discussion qui suit au groupe fondamental étale. Si  $Y \rightarrow X$  est un morphisme de schémas et  $y \rightarrow Y$  un point géométrique d'image  $x$  dans  $X$ , le foncteur  $H = - \times_X Y$  vérifie l'équation

$$(Z \times_X Y) \times_Y y = Z \times_X y$$

pour tout schéma  $Z/X$ . Il définit ainsi un morphisme  $\pi_1^{\mathrm{ét}}(Y, y) \rightarrow \pi_1^{\mathrm{ét}}(X, x)$  dont l'étude des propriétés permettra d'établir des suites exactes.

# Chapitre III.

## Prolongement des courbes lisses

Afin de calculer le groupe fondamental d'une courbe (lisse, propre)  $X$  en caractéristique positive, on va chercher à comparer ce cas avec celui de la caractéristique nulle. Suivant l'exposé III de [SGA1], notre stratégie emploiera des méthodes cohomologiques pour établir l'existence d'un prolongement à une courbe  $X'$  de caractéristique 0, c'est à dire que si  $X$  est définie sur  $k$  corps résiduel d'un anneau local complet, alors  $X'$  se *réduit sur  $k$  suivant  $X$*  au sens où  $\bar{X} = X' \otimes_A k = X$ .

Malheureusement, la construction de proche en proche du prolongement ne fournit en général qu'un schéma formel. Nous étudierons donc brièvement ces espaces à la prochaine section, où nous démontrerons en particulier un théorème d'algébrisation de Grothendieck assurant que dans certains cas, le prolongement formel provient en fait d'un véritable schéma.

### 3.1 Algébrisation des schémas formels

Fixons un anneau adique noetherien  $A$  d'idéal de définition  $I$ , c'est à dire que  $A$  est séparé complet pour la topologie  $I$ -adique. On note  $S = \text{Spec } A$  et  $S_n = \text{Spec } A/I^n$  pour tout  $n \geq 1$ . Un  $A$ -schéma formel est la colimite, dans les espaces localement annelés<sup>1</sup>, d'un système compatible de  $S_n$ -schémas. De manière moins informelle, si pour tout  $n$  strictement positif  $X_n$  est un  $S_n$ -schéma et si  $X_n = X_{n+1} \times_S S_n$ , alors on peut construire le schéma formel  $\mathfrak{X}$  par

$$|\mathfrak{X}| = |X_1| \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} = \varprojlim \mathcal{O}_{X_n}.$$

Remarquons que comme les applications  $S_n \rightarrow S_{n+1}$  sont toutes des immersions fermées nilpotentes, c'est également le cas pour  $X_n \rightarrow X_{n+1}$ . Ainsi les espaces topologiques sous-jacents restent constants et il revient au même de poser  $|\mathfrak{X}| = |X_1|$  ou  $|\mathfrak{X}| = |X_n|$  pour  $n \geq 1$ . Par suite, on peut voir tous les faisceaux de structures  $\mathcal{O}_{X_n}$  comme définis sur  $X_1$ , ce qui donne sens à la limite dans la définition de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ .

**Exemple 3.1.** Si  $X$  est un  $S$ -schéma, poser  $X_n = X \times_S S_n = X \otimes_A A/I^n$  définit un système compatible au sens du paragraphe précédent. Le schéma formel  $\widehat{X}$  ainsi obtenu, appelé *complétion de  $X$  le long de  $I$* , peut être imaginé comme le « voisinage infinitésimal » de  $X_1$  dans  $X$ . En effet  $\mathcal{O}_{\widehat{X}} = \widehat{\mathcal{O}}_X$ , et si par exemple  $I$  est un idéal maximal de  $A$ , alors l'application naturelle  $\mathcal{O}_X \rightarrow i_* \mathcal{O}_{\widehat{X}}$  envoie une fonction régulière  $f \in \Gamma(U)$  sur sa « série de Taylor » au point  $I$ .

Un  $A$ -schéma formel est dit *algébrique* s'il est isomorphe à la complétion d'un  $A$ -schéma. Si par ailleurs  $\mathfrak{X}$  est un  $S$ -schéma formel quelconque et  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module, on écrira par la suite

$$X_n = \mathfrak{X} \otimes_A A/I^n = \mathfrak{X} \times_S S_n \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_n = \text{gr}^n \mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes_A A/I^n = \mathcal{F}/I^n \mathcal{F}$$

afin d'alléger les notations.

On admettra pour nos besoins le théorème de géométrie formelle analogue au GAGA de Serre. Un lecteur ne voulant rien admettre pourra trouver une preuve dans [Stacks, 01X6, sects. 30.24 à 30.28] ou le texte séminal [EGA3, sects. 5.2 à 5.3].

<sup>1</sup>Attention, un schéma formel n'a en général aucune raison d'être un schéma !

**Théorème 3.2** (Théorème d'existence de Grothendieck). Soit  $A$  un anneau  $I$ -adique noethérien,  $X$  un  $A$ -schéma séparé de type fini. Alors la complétion le long de  $I$  induit une équivalence de catégories

$$\begin{aligned} \mathrm{Coh}_A(\mathcal{O}_X) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Coh}_A(\widehat{\mathcal{O}_X}) \\ \mathcal{F} &\longrightarrow \widehat{\mathcal{F}}, \end{aligned}$$

où  $\mathrm{Coh}_A(\mathcal{O}_X)$  et  $\mathrm{Coh}_A(\widehat{\mathcal{O}_X})$  désignent respectivement les catégories des  $\mathcal{O}_X$ - et  $\widehat{\mathcal{O}_X}$ -modules cohérents à support propre sur  $A$ .

Armés de ce puissant marteau, il nous est désormais possible d'écraser des clous.

**Lemme 3.3.** Soit  $X/S$  un schéma séparé de type fini, et  $j : \mathfrak{Y} \rightarrow \widehat{X}$  un morphisme tel que  $j_1$  soit une immersion fermée et  $Y_1/S_1$  propre. Alors il existe une immersion fermée  $Y \subseteq X$ , avec  $Y/S$  propre, pour laquelle  $\mathfrak{Y} = \widehat{Y}$ .

*Preuve* [Stacks, 0899]. Le poussé en avant  $j_*\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  est un  $\widehat{\mathcal{O}_X}$ -module cohérent dont le support est propre sur  $A$ , ce qui permet d'appliquer le théorème d'existence pour trouver une  $\mathcal{O}_X$ -algèbre cohérente  $\mathcal{A}$  se complétant en  $j_*\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$ . Or les  $j_n$  étant tous des immersions fermées (voir par exemple [Stacks, 0896]) la flèche naturelle

$$\widehat{\mathcal{O}_X} = \varprojlim \mathcal{O}_{X_n} \rightarrow j_*\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} = \varprojlim j_n\mathcal{O}_{Y_n}$$

est un quotient. Par exactitude c'est également le cas de  $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{A}$ , donc  $Y = \mathrm{Spec} \mathcal{A}$  définit un sous-schéma fermé de  $X$ . Par construction on a bien  $\widehat{Y} = \mathfrak{Y}$  et  $Y/S$  propre.  $\square$

**Théorème 3.4** (Algébrisation de Grothendieck). Soit  $\mathfrak{X}$  un  $S$ -schéma formel muni d'un faisceau inversible  $\mathfrak{L}$ . Si  $X_1 \rightarrow S_1$  est propre et  $\mathfrak{L}_1$  ample sur  $X_1$ , alors il existe un  $S$ -schéma propre  $X$  muni d'un faisceau inversible ample  $\mathcal{L}$ , vérifiant  $\mathfrak{X} = \widehat{X}$  et  $\mathfrak{L} = \widehat{\mathcal{L}}$ .

*Preuve* [Stacks, 089A]. Soit  $\mathcal{F}_n = \ker(\mathcal{O}_{X_{n+1}} \rightarrow \mathcal{O}_{X_n}) = I^n\mathcal{O}_{X_{n+1}}$  et  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{O}_{X_1}$ , que l'on considère comme des  $\mathcal{O}_{X_1}$ -modules. Pour  $m \geq n_1 + n_2 + 1$ , le diagramme suivant détermine une multiplication

$$\begin{array}{ccc} I^{n_1}\mathcal{O}_{X_m} \otimes_{\mathcal{O}_{X_m}} I^{n_2}\mathcal{O}_{X_m} & \longrightarrow & I^{n_1+n_2}\mathcal{O}_{X_m} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_{n_1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} \mathcal{F}_{n_2} & \dashrightarrow & \mathcal{F}_{n_1+n_2} \end{array}$$

qui fait de  $\mathcal{F} = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$  une  $\mathcal{O}_{X_1}$ -algèbre graduée. Si par ailleurs

$$\mathcal{B} = (X_1 \rightarrow S_1)^* \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n/I^{n+1} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n/I^{n+1} \otimes_{A/I} \mathcal{O}_{X_1},$$

la projection naturelle  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}$  fait de  $\mathcal{F}$  une  $\mathcal{B}$ -algèbre graduée cohérente. Par finitude de la cohomologie (lemme A.5), il existe un  $d_0$  à partir duquel  $H^1(X_1, \mathcal{F} \otimes \mathfrak{L}_1^{\otimes d}) = 0$ . Le lemme A.4 prédit l'existence de  $d \geq d_0$  et  $s_1, \dots, s_N \in H^0(X_1, \mathfrak{L}_1^{\otimes d})$  induisant une immersion

$$\psi_1 : X_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_{A/I}^N.$$

Comme  $X_1$  est propre sur  $S_1$ , le morphisme  $\psi_1$  est propre également et en particulier fermé. En tensorisant la définition de  $\mathcal{F}_n$  par  $\mathfrak{L}_{n+1}^{\otimes d}$  on obtient la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_n \otimes \mathfrak{L}_1^{\otimes d} \rightarrow \mathfrak{L}_{n+1}^{\otimes d} \rightarrow \mathfrak{L}_n^{\otimes d} \rightarrow 0,$$

qui en cohomologie garantit que l'on peut relever  $s_1, \dots, s_N$  à  $\mathfrak{L}_{n+1}^{\otimes d}$ . Ceci donne un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \hookrightarrow & X_2 & \hookrightarrow & X_3 & \hookrightarrow & \dots & \mathfrak{X} \\ \psi_1 \downarrow & \lrcorner & \psi_2 \downarrow & \lrcorner & \psi_3 \downarrow & \lrcorner & & \psi \downarrow \\ \mathbb{P}_{S_1}^N & \hookrightarrow & \mathbb{P}_{S_2}^N & \hookrightarrow & \mathbb{P}_{S_3}^N & \hookrightarrow & \dots & \widehat{\mathbb{P}}_S^N \end{array}$$

qui rentre dans les conditions du lemme précédent pour  $(\mathfrak{Y}, X) = (\mathfrak{X}, \mathbb{P}_S^N)$ .  $\square$

## 3.2 La construction de proche en proche

Après cette très rapide excursion en géométrie formelle, on revient au problème principal de ce chapitre : le prolongement d'une courbe projective lisse de la caractéristique  $p$  vers la caractéristique 0. On suit grossièrement l'exposition de [SGA1, Exposé III sects. 5 à 7], que l'on a débarrassé d'une certaine lourdeur au prix de résultats un peu moins généraux.

**Lemme 3.5.** Soient  $X$  et  $Y$  des  $S$ -schémas,  $Y_0 \subseteq Y$  le sous-schéma fermé défini par un idéal de carré nul  $\mathcal{I}$ , et  $g_0 : Y_0 \rightarrow X$ . Si  $\mathcal{P}$  désigne le faisceau des prolongements de  $g_0$  à des ouverts de  $Y$ , alors  $\mathcal{P}$  est un  $\mathcal{G}$ -pseudotorseur<sup>2</sup> pour

$$\mathcal{G} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(g_0^* \Omega_{X/S}^1, \mathcal{I}).$$

En particulier, s'il existe des prolongements locaux alors l'existence d'un prolongement global est garantie par l'annulation de  $H^1(Y_0, \mathcal{G})$ .

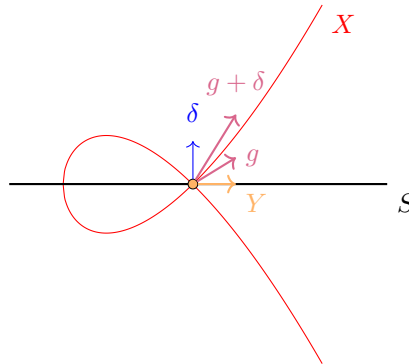
*Preuve.* Pour  $U \subseteq Y$  ouvert et  $i : U_0 = U \cap Y_0 \subseteq Y_0$ , on peut calculer par adjonction

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(U) &= \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{U_0}}(i^* g_0^* \Omega_{X/S}^1, \mathcal{I}_U) \\ &= \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(g_0^* \Omega_{X/S}^1, \mathcal{I}|_U) \\ &= \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/S}^1, g_{0,*} \mathcal{I}|_U) \\ &= \underline{\mathrm{Der}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X, g_{0,*} \mathcal{I}|_U). \end{aligned}$$

Soit donc  $\delta \in \mathcal{G}(U)$  une  $\mathcal{O}_S$ -dérivation, et  $g : U \rightarrow X$  un prolongement. On pose  $g' = \delta + g : U \rightarrow X$  le morphisme déterminé topologiquement par  $g_0$  et algébriquement par  $g'^{\#} = \delta + g^{\#}$ . On peut vérifier que  $g'^{\#}$  est bien un morphisme local de  $\mathcal{O}_S$ -algèbres; on a défini une action libre. Si par ailleurs  $g, g'$  sont deux prolongements, alors la différence  $\delta = g'^{\#} - g^{\#}$  est clairement une dérivation à valeur dans  $\mathcal{I}$ .  $\square$

**Remarque 3.6.** Ce lemme est absolument central. C'est la clef qui démarre la machine cohomologique; une fois lancée, plus rien ne l'arrête.

**Remarque 3.7.** Bien que sa preuve soit purement algébrique, ce lemme est en fait très géométrique.



Fixons maintenant  $A$  un anneau local noethérien complet de corps résiduel  $k$ ,  $I$  son idéal maximal,  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Y}$  des schémas formels lisses<sup>3</sup> sur  $A$ . On s'intéresse au problème du prolongement d'un  $A$ -morphisme  $Y_n \xrightarrow{g_n} X_n$  en  $Y_{n+1} \xrightarrow{g_{n+1}} X_{n+1}$ . L'application du lemme 3.5 à l'idéal de carré nul  $I^n \mathcal{O}_{Y_{n+1}}$  et la composée  $ig_n : Y_n \rightarrow X_{n+1}$  nous informe que l'espace des solutions est un  $\mathcal{G}_n$ -pseudotorseur, où

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n &= \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{Y_n}}(g_n^* i^* \Omega_{X_{n+1}/S}, I^n \mathcal{O}_{Y_{n+1}}) \\ &= \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{Y_1}}(g_1^* i^* \Omega_{X_{n+1}/S}, I^n \mathcal{O}_{Y_{n+1}}) \\ &= \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{Y_1}}(g_1^* \Omega_{X_1/k}, I^n \mathcal{O}_{Y_{n+1}}). \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Un faisceau d'ensembles muni d'une  $\mathcal{G}$ -action transitive libre. On parle de torseur si de plus aucune fibre n'est vide.

<sup>3</sup>C'est à dire que  $X_n$  et  $Y_n$  sont lisses sur  $A/I^n$  pour tout  $n$ .

Comme par ailleurs  $X_1$  est lisse sur  $k$ , on peut construire explicitement des relevés locaux, ce qui fait de  $\mathcal{P}$  un  $\mathcal{G}$ -torseur. La locale liberté de  $\Omega_{X/S}^1$  permet également d'écrire

$$\mathcal{G}_n = g_1^*(\mathfrak{g}_{X_1/k}) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_1}} I^n \mathcal{O}_{Y_{n+1}},$$

où l'on entend par  $\mathfrak{g}_{X/S}$  le dual  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/S}^1, \mathcal{O}_X)$  des différentielles. En outre,  $\mathfrak{Y}$  étant plat sur  $S$ , l'égalité

$$\mathcal{O}_{Y_1} \otimes_k \text{gr}^n(A) = \mathcal{O}_{Y_{n+1}} \otimes_A \text{gr}^n(A) = \mathcal{O}_{Y_{n+1}} \otimes_A I^n = I^n \mathcal{O}_{Y_{n+1}}$$

donne lieu à une ultime simplification

$$\mathcal{G}_n = g_1^*(\mathfrak{g}_{X_1/k}) \otimes_k \text{gr}^n(A).$$

Cette dernière forme est particulièrement attrayante, puisque  $\text{gr}^n(A)$  est nécessairement plat sur  $k$  qui est un corps. La tensorisation par cette gradation commute donc avec la cohomologie, c'est à dire que

$$H^i(Y_1, \mathcal{G}_n) = H^i(Y_1, \mathcal{G}_1) \otimes_k \text{gr}^n(A).$$

On a ainsi montré le

**Lemme 3.8.** Soient  $X_i$  (resp.  $Y_i$ ) des  $S_i$ -schémas lisses pour lesquels  $X_{i+1}$  (resp.  $Y_{i+1}$ ) se réduit suivant  $X_i$  (resp.  $Y_i$ ). Étant supposés construits jusqu'à l'indice  $n$  des morphismes compatibles  $g_i : Y_i \rightarrow X_i$ , le problème du prolongement à  $Y_{n+1} \rightarrow X_{n+1}$  détermine une classe d'obstruction dans

$$H^1(Y_1, g_1^*(\mathfrak{g}_{X_1/k}) \otimes_k \text{gr}^n(A)).$$

Au cas où elle s'annule, l'ensemble des solutions est un toseur sous  $H^0(X_1, g_1^*(\mathfrak{g}_{X_1/k}) \otimes_k \text{gr}^n(A))$ .

N'oublions pas que notre but original est de prolonger une courbe, pas un morphisme. Soit donc  $X_i$  des  $S_i$ -schémas lisses pour lesquels  $X_{i+1}$  se réduit suivant  $X_i$ , étant supposés construits jusqu'à l'index  $n$ . On cherche à étudier la condition d'existence d'un prolongement  $X_{n+1}$ .

Le caractère lisse de  $X_n$  nous indique que Zariski-localement, il s'agit d'un sous-schéma fermé  $U \subseteq \mathbb{A}_{S_n}^d$  défini par l'annulation de

$$I = \langle g_1, \dots, g_{d-r} \rangle \subseteq (A/I^n)[X_1, \dots, X_d],$$

dont les différentielles forment une famille libre de  $\Omega_{U/S_n}^1 \otimes_A k$ . Choisir n'importe quels relevés  $g'_i$  des  $g_i$  à coefficients dans  $A/I^{n+1}$  n'altère pas la condition d'indépendance linéaire, ce qui assure la lissité de  $U' \rightarrow S_{n+1}$  dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} U' & \xrightarrow{I'} & \mathbb{A}_{S_{n+1}}^d & \longrightarrow & S_{n+1} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ U & \xrightarrow{I} & \mathbb{A}_{S_n}^d & \longrightarrow & S_n. \end{array}$$

On dispose ainsi de prolongements locaux de  $X_n$ . Quitte d'ailleurs à supposer  $U$  affine, le faisceau quasicohérent  $\mathfrak{g}_{U_1/k}$  est acyclique (voir A.1). Autrement dit les prolongements de  $U$  sont tous isomorphes.

Fixons  $\mathcal{U} = (U_i)$  un recouvrement affine de  $X_n$  définissant des prolongements  $X^i$ , et supposons pour alléger les notations<sup>4</sup> que les intersections  $U_{ij} = U_i \cap U_j$  soient toutes affines. Alors le paragraphe précédent fournit des isomorphismes

$$f_{ji} : X^i|_{U_{ij}} \simeq X^j|_{U_{ij}}.$$

Il n'y a aucune raison bien sûr que ces flèches soient compatibles, c'est à dire qu'on ne peut pas nécessairement recoller les  $U'_i$  en un schéma  $X_{n+1}$ . En revanche, l'obstruction se caractérise par le 2-cocycle

$$c_{ijk} = f_{kj} f_{ji} f_{ki}^{-1} \in \text{Aut}(X^k|_{U_{ijk}}; 1_{U_{ijk}}) \cong \mathcal{G}_n|_{U_{ijk}} \quad (\text{cf 3.5}),$$

dont l'annulation de la classe qu'il définit dans  $\check{H}^2(\mathcal{U}, \mathcal{G}_n) = H^2(X_1, \mathcal{G}_n)$  est nécessaire et suffisante pour procéder au prolongement.

<sup>4</sup>On adapte ce qui suit en recouvrant chaque  $U_{ij}$  par des affines  $V_{ijk}$ .

**Lemme 3.9.** Soient  $X_i$  des  $S_i$ -schémas lisses pour lesquels  $X_{i+1}$  se réduit suivant  $X_i$ , étant supposés construits jusqu'à l'index  $n$ . Le problème du prolongement à  $X_{n+1}$  détermine une classe d'obstruction dans

$$H^2(X_1, \mathfrak{g}_{X_1/k}) \otimes_k \text{gr}^n(A).$$

Au cas où elle s'annule, l'ensemble des solutions à isomorphisme près est un toreur sous  $H^1(X_1, \mathfrak{g}_{X_1/k}) \otimes_k \text{gr}^n(A)$ .

*Preuve.* Il ne reste à montrer que le dernier point. Si  $X_{n+1}$  est un prolongement de  $X$ , il provient par recollement d'une famille  $(f_{ji})$  telle que ci-dessus. Si de plus  $(g_{ji})$  est un 1-cocycle de  $\mathcal{G}$ , on définit son action sur  $X_{n+1}$  comme le recollement de  $(g_{ji}f_{ji})$  — où  $g_{ji}$  s'identifie naturellement à un automorphisme de  $X_{n+1}|_{U_{ji}}$  induisant  $1_{U_{ji}}$ . On peut vérifier que ce nouveau schéma est isomorphe à  $X_{n+1}$  si et seulement si  $(g_{ji})$  était en fait un cobord, et pour deux prolongements les isomorphismes locaux permettent de vérifier la transitivité de l'action.  $\square$

**Lemme 3.10.** Soit  $\mathfrak{X}$  un  $S$ -schéma formel lisse. Étant supposés donnés jusqu'à l'indice  $n$  des faisceaux inversibles compatibles  $\mathcal{L}_i$  sur  $X_i$ , le problème du prolongement en un faisceau  $\mathcal{L}_{n+1}$  détermine une classe d'obstruction dans

$$H^2(X_1, \mathcal{O}_{X_1}) \otimes_k \text{gr}^n(A).$$

Au cas où elle s'annule, l'ensemble des solutions à isomorphisme près est un toreur sous  $H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1}) \otimes_k \text{gr}^n(A)$ .

*Preuve.* On travaille similairement, à ceci près que l'on remplace  $\mathcal{G}_n$  par le faisceau abélien

$$\text{End}_{\mathcal{O}_{X_n}}(\mathcal{L}_n) \cong \mathcal{O}_{X_n} \cong \mathcal{O}_{X_1} \otimes_k \text{gr}^n(A).$$

$\square$

**Théorème 3.11.** Soit  $A$  un anneau local complet de corps résiduel  $k$  et  $X_1$  un schéma projectif lisse sur  $k$ . Alors

- (a) Si  $H^2(X_1, \mathcal{O}_{X_1}) = H^2(X_1, \mathfrak{g}_{X_1/k}) = 0$ , il existe un schéma projectif lisse  $X$  sur  $A$  se réduisant suivant  $X_1$ .
- (b) Si de plus  $H^1(X_1, \mathfrak{g}_{X_1/k}) = 0$ , le prolongement  $X$  est unique à isomorphisme près.
- (c) Si encore  $H^0(X_1, \mathfrak{g}_{X_1/k}) = 0$ , il est même unique à unique isomorphisme près.

*Preuve.* Sous ces hypothèses,  $X_1$  se prolonge à un  $A$ -schéma formel  $\mathfrak{X}$ . Il en est de même pour le faisceau ample  $\mathcal{L}$  fourni par le caractère projectif de  $\mathfrak{X}/k$ . On conclut par le théorème d'algébrisation de Grothendieck (3.4).

**Corollaire 3.12.** Toute courbe lisse projective sur  $k$  provient par réduction d'une courbe lisse projective sur  $A$ .

*Preuve.* Se déduit du théorème précédent et du lemme A.2.  $\square$

# Chapitre IV.

## Suites exactes et groupe fondamental

Dans ce chapitre, on va examiner l'exactitude de certaines suites de groupes fondamentaux qui, combinées avec les résultats du numéro précédent, permettront de calculer la partie première à  $p$  du groupe fondamental d'une courbe lisse propre en caractéristique  $p$ . La majorité des théorèmes employés possèdent des preuves qui, bien que très jolies, prennent du temps à comprendre et beaucoup de place à écrire. N'ayant malheureusement ni le temps ni la place, on admettra la plupart d'entre eux. Afin d'alléger les notations, on écrira désormais  $\pi_1(X, x)$  au lieu de  $\pi_1^{\text{ét}}(X, x)$ .

### 4.1 Le morphisme de spécialisation

**Théorème 4.1.** Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme propre et  $t \in S$ , où  $S$  est connexe et localement noethérien. Supposons que  $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ . On note  $\bar{t} = \text{Spec } \kappa(\bar{s})$ . Si  $\bar{a} \rightarrow X_{\bar{t}}$  est un point géométrique, on a une suite exacte d'homotopie

$$\pi_1(X_{\bar{t}}, \bar{a}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{a}) \rightarrow \pi_1(S, \bar{a}) \rightarrow 1.$$

*Preuve* [SGA1, Exposé X, Corollaire 1.4]. Comme à la remarque 2.20, les deux flèches de la suite — notées respectivement  $i$  et  $p$  ci-après — proviennent du foncteur de changement de base. Assurons nous en premier lieu que  $\text{im } i \leq \ker p$ .

Comme  $\ker p$  est l'intersection de tous les sous-groupes ouverts le contenant, cela revient à montrer d'après le lemme 2.17 que pour tout revêtement étale fini  $Z/S$ , l'action de  $\pi_1(X_{\bar{t}}, \bar{a})$  sur le produit fibré  $\bar{Z} = Z \times_S X_{\bar{t}}$  est triviale. Autrement dit, on veut vérifier que  $\bar{Z} = T \times X_{\bar{t}}$  pour un certain ensemble fini  $T$ . Or on peut calculer

$$\begin{aligned} X_{\bar{t}} \times_S Z &= (X \times_S \bar{t}) \times_S Z \\ &= X \times_S (\bar{t} \times_S Z) \\ &= X \times_S \coprod \bar{t} \\ &= \coprod X_{\bar{t}}. \end{aligned}$$

Vérifions maintenant que  $p$  est surjective. Par le lemme 2.19 on doit s'assurer que pour chaque revêtement étale connexe  $Z$  de  $S$ , la rétroflet  $W = Z \times_S X$  est encore un revêtement connexe. Notons les flèches de même que dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f'} & Z \\ g' \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S. \end{array}$$

Le morphisme  $f'$  est encore propre, et on peut calculer

$$f'_*\mathcal{O}_W = f'_*g'^*\mathcal{O}_X = g^*f_*\mathcal{O}_X = g^*\mathcal{O}_S = \mathcal{O}_Z.$$

Ainsi  $f'$  est sa propre factorisation de Stein (cf A.6), et en particulier à fibres connexes. Puisqu'il est également surjectif,  $W$  doit être connexe.

Il ne reste qu'à voir que  $\ker p \leq \text{im } i$ , ce qu'on va admettre. Il n'y a en effet pas de nouvelle idée (il faut encore traduire puis résoudre le problème dans le monde des revêtements), mais la preuve est plus longue et fastidieuse.  $\square$

**Proposition 4.2.** Soit  $X$  un schéma propre et connexe sur un corps algébriquement clos  $k$ ,  $K$  une extension algébriquement close de  $k$ ,  $\bar{a}$  un point géométrique de  $X_K$ . Alors le morphisme canonique

$$\pi_1(X_K, \bar{a}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{a})$$

est un isomorphisme.

Preuve [SGA1, Exposé X cor. 1.8]. Admis.  $\square$

À partir de maintenant, on note  $S$  le spectre d'un anneau local noethérien complet  $A$  de corps résiduel  $k$ ,  $X$  un  $S$ -schéma propre se réduisant suivant  $X_1$ , et  $t \in S$  un point quelconque. On note également  $s$  l'unique point fermé de  $S$ , ainsi que

$$X_{\bar{s}} = X \otimes_A \bar{k} = X_1 \otimes_k \bar{k} \quad \text{et} \quad X_{\bar{t}} = X \otimes_A \overline{\kappa(t)}.$$

On se donne encore  $\bar{a} \rightarrow X_{\bar{s}}$  et  $\bar{b} \rightarrow X_{\bar{t}}$  des points géométriques.

**Théorème 4.3.** Si  $X_{\bar{s}}$  est connexe, on a une suite exacte courte d'homotopie

$$1 \rightarrow \pi_1(X_{\bar{s}}, \bar{a}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{a}) \rightarrow \pi_1(S, \bar{a}) \rightarrow 1.$$

Preuve [SGA1, Exposé X cor. 2.2]. Admis.  $\square$

**Corollaire 4.4.** Si  $X_{\bar{s}}$  est connexe, il existe un **morphisme de spécialisation** de groupes fondamentaux:

$$\pi_1(X_{\bar{t}}, \bar{b}) \rightarrow \pi_1(X_{\bar{s}}, \bar{a}),$$

défini canoniquement à un automorphisme intérieur de  $\pi_1(X)$  près. Si de plus  $X$  est séparable sur  $S$ , c'est à dire plat à fibres géométriquement réduites, alors ce morphisme est surjectif.

Preuve [SGA1, Exposé X § 269]. Le théorème 4.3 assure l'exactitude de la seconde ligne du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(X_{\bar{s}}, \bar{b}) & \longrightarrow & \pi_1(X, \bar{b}) & \longrightarrow & \pi_1(S, \bar{b}) & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow \text{sp} & & \downarrow f & & \downarrow g & & \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(X_{\bar{t}}, \bar{a}) & \longrightarrow & \pi_1(X, \bar{a}) & \longrightarrow & \pi_1(S, \bar{a}) \longrightarrow 1. \end{array}$$

Comme  $- \times_X \bar{b}$  et  $- \times_X \bar{a}$  sont des foncteurs fondamentaux d'une même catégorie galoisienne, il existe un isomorphisme naturel<sup>1</sup> entre eux. Celui induit une flèche

$$f : \pi_1(X, \bar{b}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, \bar{a}).$$

Il descend *via* le changement de base  $- \times_S X$  en un isomorphisme des foncteurs fondamentaux  $- \times_S \bar{b}$  et  $- \times_S \bar{a}$ , induisant là encore  $g$  compatiblement avec  $f$ . Enfin,  $f$  est défini canoniquement à un automorphisme intérieur de  $\pi_1(X, a)$  près.

Remarquons dans la preuve du théorème 4.1, que la composée des flèches du milieu est nulle sans hypothèse sur les schémas. Vu l'exactitude de la suite du bas, c'est suffisant pour construire le morphisme de spécialisation. Dans le cas où  $X/S$  est séparable les hypothèses de *loc. cit.* sont pleinement respectées, la suite du haut est exacte, et une chasse au diagramme donne la surjectivité.  $\square$

Soit  $p$  la caractéristique de  $k$ . On définit la **partie première à  $p$**  d'un groupe profini  $G$  par  $G^{(p)} = G/N$ , où  $N$  est l'intersection de tous les sous-groupes ouverts d'indice premier à  $p$ .

<sup>1</sup>Qu'il est de bon goût d'interpréter comme un chemin de  $\bar{b}$  vers  $\bar{a}$ .

**Théorème 4.5.** *Le morphisme de spécialisation est un isomorphisme en dehors de  $p$ . Plus précisément,*

$$\mathrm{sp}^{(p)} : \pi_1(X_{\bar{t}}, a')^{(p)} \xrightarrow{\simeq} \pi_1(X_{\bar{s}}, a)^{(p)}.$$

*Preuve* [SGA1, Exposé X cor. 3.9]. Admis. □

**Remarque 4.6.** C'est un résultat difficile, qui est l'objet de l'entièreté de l'exposé X sect. 3 de [SGA1]. Il fait appel à beaucoup d'algèbre commutative.

## 4.2 Le groupe fondamental étale d'une courbe

À partir de maintenant, on notera  $X$  une courbe lisse, propre et connexe de genre  $g$  sur un corps algébriquement clos  $k$ . En topologie, on montre que les points  $\mathbb{C}$ -rationnels d'une courbe lisse et propre sur  $\mathbb{C}$  de genre  $g$  forment une surface de Riemann de genre  $g$ , et que son groupe fondamental est engendré par  $2g$  générateurs  $s_1, t_1, \dots, s_g, t_g$  ainsi qu'une relation  $[s_1, t_1] \cdots [s_g, t_g] = 1$ . Dernièrement, des résultats d'algébrisation des revêtements — très similaires à ce qu'on a pu voir en géométrie formelle — donnent le

**Théorème 4.7.** *Soit  $X$  une courbe algébrique lisse propre sur  $\mathbb{C}$ , et  $x$  un point fermé de  $X$ . Alors le groupe fondamental étale est donné par la complétion profinie du groupe fondamental topologique :*

$$\pi_1(X, \bar{x}) = \widehat{\pi}_1(X(\mathbb{C}), x).$$

*Preuve.* Admis. □

On a en mains tous les outils pour calculer le groupe fondamental de  $X$ , ou sa partie première à  $p$  en caractéristique positive. Tout d'abord, occupons nous du cas de la caractéristique nulle. On sait d'après [Stacks, 0A26] que  $X$  est projective. En d'autres termes, il existe une immersion fermée  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$  à travers laquelle  $X$  est défini par un idéal homogène finiment généré  $I = (f_1 \dots f_n)$ . Soit  $F$  la clôture algébrique du corps généré par les coefficients des  $f_i$ , dont le degré de transcendance sur  $\mathbb{Q}$  est fini. En choisissant une injection de  $F$  dans  $\mathbb{C}$ , et en considérant  $Z \hookrightarrow \mathbb{P}_F^n$  le sous-schéma fermé défini par  $I$ , on dispose alors du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}_k^n & \longrightarrow & \mathbb{P}_F^n & \longleftarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ X & \longrightarrow & Z & \longleftarrow & Z_{\mathbb{C}} \end{array}$$

Conjuguant avec la proposition 4.2, on obtient

$$\pi_1(X, \bar{a}) = \pi_1(Z, \bar{a}) \simeq \pi_1(Z, \bar{x}) = \pi_1(Z_{\mathbb{C}}, \bar{x}) = \widehat{\pi}_1(Z_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}), b) =: \Gamma_g$$

pour tous points géométrique  $\bar{a} \rightarrow X$  et fermé  $x \in Z_{\mathbb{C}}$ .

En second lieu, on s'intéresse au cas de la caractéristique  $p$ . On peut démontrer l'existence d'un anneau  $A = W(k)$  de caractéristique 0 et corps résiduel  $k$ , dit des vecteurs de Witt, qui est un domaine local complet noethérien lorsque  $k$  est parfait (voir par exemple [MB66, p. 179]). D'après les résultats du chapitre III, la courbe  $X$  provient par réduction d'un schéma propre et lisse  $Y/A$ . Soit  $S$  le spectre de  $A$ , dont l'on note  $t$  le point générique et  $s$  l'unique point fermé. Alors pour tous points géométriques  $\bar{b} \rightarrow Y_{\bar{t}}$  et  $\bar{a} \rightarrow Y_{\bar{s}}$ , le théorème 4.5 assure que la spécialisation est un isomorphisme en dehors de  $p$ , soit

$$\pi_1(X, \bar{a})^{(p)} = \pi_1(Y_{\bar{s}}, \bar{a})^{(p)} \simeq \pi_1(Y_{\bar{t}}, \bar{b})^{(p)} \simeq \Gamma_g^{(p)}.$$

On peut tout de même dire une chose sur le groupe fondamental étale tout entier : en vertu du corollaire 4.4,  $\pi_1(X, a)$  est un *quotient* de  $\Gamma_g$ , et en particulier topologiquement engendré par  $2g$  générateurs.

# Annexe A.

## Rappels de cohomologie cohérente

On recense ici quelques résultats de cohomologie cohérente qui nous seront utiles dans le texte principal. Il s'agit principalement d'avoir un endroit où les énoncés sont écrits dans la forme précise sous laquelle on les emploie. À cet effet, et pour des soucis de concision, aucune preuve ne sera donnée; on fournit en revanche des références.

**Théorème A.1** (Annulation de Serre). *Si  $X$  est un schéma quasi-compact, les énoncés suivants sont équivalents:*

- (a)  $X$  est affine.
- (b) Tout faisceau quasicohérent sur  $X$  est  $\Gamma$ -acyclique.
- (c) Pour tout idéal quasicohérent  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ , on a  $H^1(X, \mathcal{I}) = 0$ .

Preuve [Stacks, 01XF]. Admis. □

**Lemme A.2.** *Soit  $X$  un schéma quasicompact de diagonale affine (par exemple  $X$  séparé), et  $d$  la taille minimale d'un recouvrement affine. Alors pour tout  $n \geq d$  et faisceau quasicohérent  $\mathcal{F}$ , on a  $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ .*

Preuve [Stacks, 01XI]. Admis. □

**Définition A.3.** *Si  $\mathcal{L}$  est un module inversible sur un espace localement annelé  $X$  et  $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ , on note*

$$X_s = \{x \in X \mid s(x) \neq 0\}$$

*l'ouvert des points pour lesquels  $s_x$  est une base de  $\mathcal{L}_x$ . On dit que  $\mathcal{L}$  est **ample** si  $X$  est quasicompact et tout point  $x \in X$  possède un voisinage affine de la forme  $X_s$  pour des certains  $n$  et  $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ .*

**Lemme A.4.** *Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme de type fini avec  $S$  affine, et  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible. Sont équivalents:*

- (a)  $\mathcal{L}$  est ample.
- (b) Pour un  $d \geq 1$  il existe  $n \geq 1$  et une immersion  $i : X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$  vérifiant  $\mathcal{L}^{\otimes d} \simeq i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S^n}(1)$ .
- (c) Pour tout  $d \gg 1$  il existe  $n \geq 1$  et une immersion  $i : X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$  vérifiant  $\mathcal{L}^{\otimes d} \simeq i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S^n}(1)$ .

Preuve [Stacks, 01VT]. Admis. □

**Lemme A.5.** *Soit  $A$  un anneau noethérien,  $B$  une  $A$ -algèbre graduée de type fini, et  $f : X \rightarrow \text{Spec } A$  un morphisme propre. Si  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{B}$ -module gradué quasicohérent fini pour  $\mathcal{B} = f^* \tilde{B}$ , alors:*

- Pour tout  $p \geq 0$ , le  $p$ -ième groupe de cohomologie  $H^p(X, \mathcal{F})$  est un  $B$ -module fini.
- Pour tout  $\mathcal{O}_X$ -module ample  $\mathcal{L}$ , il existe un entier  $d_0$  tel que  $H^p(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes d}) = 0$  pour tout  $p \geq 1$  et  $d \geq d_0$ .

Preuve [Stacks, 0897]. Admis. □

**Théorème A.6** (Factorisation de Stein). Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme propre, où  $S$  est localement noethérien. Alors il existe une factorisation

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f'} & S' \\ & \searrow f & \swarrow \pi \\ & S & \end{array}$$

avec les propriétés suivantes:

- Le morphisme  $f'$  est propre de fibres géométriquement connexes.
- Le schéma  $S'$  est fini sur  $S$ .
- On a  $f'_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{S'}$ .
- En particulier,  $S' = \text{Spec}(f_* \mathcal{O}_X)$ .
- De plus,  $S'$  est la normalisation de  $S$  dans  $X$ .

Preuve [[Stacks, 03H0](#)]. Admis.

□

# Bibliography

- [EGA3] Alexander Grothendieck. “Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie”. fr. In: *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 11 (1961), pp. 5–167. URL: [http://www.numdam.org/item/PMIHES\\_1961\\_\\_11\\_\\_5\\_0/](http://www.numdam.org/item/PMIHES_1961__11__5_0/).
- [Len] Hendrik Willem Lenstra. *Galois theory for schemes*. URL: <https://websites.math.leidenuniv.nl/algebra/GSchemes.pdf>.
- [MB66] David Mumford and G. M. Bergman. *Lectures on Curves on an Algebraic Surface*. (AM-59). Princeton University Press, 1966. ISBN: 9780691079936. URL: <http://www.jstor.org/stable/j.ctt1b9x2g3> (visited on 05/31/2024).
- [SGA1] Alexander Grothendieck and Michele Raynaud. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. 2004. arXiv: [math/0206203](https://arxiv.org/abs/math/0206203) [math.AG].
- [Stacks] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>. 2018.