

# Diagramme de Dynkin et correspondance de McKay

Esteban Montealegre et Romane Legrain, sous la tutelle de Gaëtan Chenevier

Mai 2024

Le but de ce mémoire est de se familiariser avec les diagrammes de Dynkin. Ces objets, bien qu'ils puissent être construits de manière tout à fait abstraite, apparaissent dans des questions de classification des systèmes de racines. Les systèmes de racines étant étroitement liés aux algèbres de Lie semi-simples, leur classification a de nombreuses applications en algèbre. On commence donc par introduire les systèmes de racines, on montre que leur étude se réduit à celle des racines simples (Théorème 1 et 2) puis qu'on peut leur associer des diagrammes de Dynkin. On établit ensuite la classification des diagrammes de Dynkin (Théorème 4) et des diagrammes de Dynkin affines. Pour conclure quant à la classification des systèmes de racines irréductibles, on montrera que tout diagramme de Dynkin peut s'obtenir à partir d'un système de racines (Théorème 3). Pour finir, on étudiera un autre point de vue sur les diagrammes de Dynkin en étudiant la correspondance de McKay ([Rei97]). Cette correspondance associe à chaque sous groupe fini de  $SU(2)$  un diagramme de Dynkin affine en passant par sa table de caractères (Théorème 5). Nous exposerons finalement les cas de  $A_n$  (Section 5),  $D_n$  (Section 6) et  $E_8$  (Section 7) en guise d'exemple.

## 1 Systèmes de racines

Avant d'entamer le sujet principal du mémoire, à savoir les diagrammes de Dynkin, on motive leur introduction par la classification des systèmes de racines, suivant [Kir]. On commence par introduire les systèmes de racines 1, puis on montre à l'aide du groupe de Weyl que leur études se réduit à celle des racines simples (Théorème 2). On associe finalement à un ensemble de racines simples d'un système de racines un diagramme de Dynkin 7 et 3.

### 1.1 Premières définitions et observations en degré 2 :

**Définition 1.** Soit  $E$  un espace euclidien réel. On appelle système de racines sur  $E$  un ensemble fini  $R$  de vecteurs vérifiant :

1.  $R$  engendre  $E$ .
2. Pour  $\alpha, \beta \in R$ ,  $(\alpha, \beta)$  est entier .
3. Pour tout  $\alpha \in R$ , si  $s_\alpha$  désigne la symétrie orthogonale par rapport à  $\alpha$ , alors  $s_\alpha$  préserve  $R$ .
4. Tout élément de  $R$  est de longueur 2.

Les éléments  $\alpha \in R$  sont appelés des racines et la dimension de  $E$  est appelé le rang du système.

**Remarque 1.** La réflexion  $s_\alpha$  s'écrit alors  $s_\alpha(\beta) = \beta - (\alpha, \beta)\alpha$ .

Notre but est d'obtenir une classification des systèmes de racines, à isomorphisme près dans le sens suivant :

**Définition 2.** Un isomorphisme entre deux systèmes de racines  $R$  et  $\tilde{R}$  est une isométrie  $\varphi : E \rightarrow \tilde{E}$  envoyant bijectivement  $R$  sur  $\tilde{R}$  et tel que pour toutes racines  $\alpha, \beta \in R$  on ait :

$$(\alpha, \beta) = (\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$$

**Remarque 2.** *Étant donné deux systèmes de racines  $R_1, R_2$  de rang  $n$  et  $m$ , on peut définir le système de racines  $R_1 \sqcup R_2$  de rang  $n + m$  comme étant  $R_1 \cup R_2$  dans la somme orthogonale de  $E_1$  avec  $E_2$*

On commence par quelques observations en degré 2. Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux racines, on note  $\varphi$  l'angle qu'elles forment. Alors  $(\alpha, \beta) = 2 \cos \varphi \in \{\pm 2, \pm 1, 0\}$ , et  $\varphi \in \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$ . Ce fait permet alors d'obtenir tous les systèmes de racines de dimension 2 :

**Proposition 1.** *Tout système de racine de rang 2 est isomorphe soit à  $A_1 \sqcup A_1$ , soit à  $A_2$ .*



*Démonstration.* Soit  $R$  un système de racines bidimensionnel et  $\varphi$  l'angle maximal (en valeur absolue) entre deux racines. En appliquant successivement l'invariance par symétries orthogonales à une des racines du système, on retrouve  $A_1 \sqcup A_1$  ou  $A_2$  dans  $R$ . Si il reste une racine non atteinte, alors elle forme un angle strictement plus petit que  $\pi/2$  ou que  $\pi/3$  (selon  $\varphi$ ) avec une certaine racine  $\alpha$  et donc un angle strictement plus grand que  $\varphi$  avec  $-\alpha$  ce qui est impossible par hypothèse.  $\square$

Partant d'un système de racines, on cherche à réduire son étude à des objets plus simples : les racines positives, puis les racines simples.

**Définition 3.** *Soit  $R \subset E$  un système de racines, et  $p \in E$  tel que pour toute racine  $\alpha \in R$  on ait  $(\alpha, p) \neq 0$ .*

- On note alors  $R_+$  les racines positives, c'est à dire telles que  $(\alpha, p) > 0$ , et  $R_-$  les racines négatives, c'est à dire telles que  $(\alpha, p) < 0$ . Un tel sous ensemble  $R_+$  est appelée une polarisation de  $R$  (suivant  $p$ ).
- Parmi les racines positives celles qui ne peuvent s'écrire comme une somme positive de deux autres racines positives sont dites simples.

**Remarque 3.** *L'ensemble des racines simple dépend du vecteur polarisant  $p$ .*

**Lemme 1.** *Soit  $R$  un système de racines,  $R_+$  une polarisation. Alors toute racine positive est somme de racines simples.*

*Démonstration.* C'est bien le cas pour les racines simples. Si maintenant  $\gamma = \alpha + \beta \in R_+$ ,  $\alpha, \beta \in R_+$  n'est pas simple, alors  $(\gamma, p) = (\alpha, p) + (\beta, p) < \infty$ , avec  $(\alpha, p) > 0$  et  $(\beta, p) > 0$ . Si  $\alpha$  ou  $\beta$  n'est pas simple, on peut réétirer le même processus jusqu'à n'avoir qu'une somme de racines simples. On est assuré de la terminaison par le fait que  $R_+$  étant fini,  $(R_+, p)$  possède un minimum.  $\square$

Il s'en suit que les racines simples engendrent  $R_+$ , et  $E$  a fortiori.

**Lemme 2.** *Soit  $R$  un système de racines,  $R_+$  une polarisation. Deux racines simples distinctes  $\alpha, \beta \in R$  vérifient  $(\alpha, \beta) \leq 0$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $(\alpha, \beta) > 0$ , alors  $\alpha - \beta \in R = R_+ \sqcup R_-$  (c'est vrai en degré 2, ce qui suffit à le prouver en général en se restreignant au plan engendré par les deux racines). Si  $\alpha - \beta \in R_+$  alors il en est de même de  $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$ . Mais alors  $\alpha$  n'est pas simple. Si  $\alpha - \beta \in R_-$ , alors on aboutit à la même contradiction en inversant les rôles de  $\alpha$  et  $\beta$ .  $\square$

**Corollaire 1.** *Les racines simples forment une base de  $E$ .*

*Démonstration.* On sait déjà que les racines simples engendrent  $E$ . De plus comme la famille constituée des racines simples et du vecteur  $-p$  est obtuangle, elle possède donc au plus  $\dim(E) + 1$  vecteurs. On en déduit qu'il y a au plus  $\dim(E)$  racines simples.  $\square$

## 1.2 Action du groupe de Weyl :

Parmi les automorphismes de systèmes de racines, on distingue en particulier les symétries orthogonales issues des racines. Ces dernières engendrent un sous groupe de  $Aut(R)$  appelé groupe de Weyl.

**Définition 4.** *Le groupe de Weyl est le sous groupe de  $O(E)$  engendré par les réflexions  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in R$ .*

La partie précédente permet donc d'obtenir, via un choix de polarisation, l'ensemble des racines simples à partir d'un système de racines. Pour poursuivre la classification des systèmes de racines à partir des racines simples, on montre que  $R$  peut être retrouvé à partir de ses racines simples, et donc que l'on ne perd pas d'information. On introduit à cette fin  $H_\alpha$  l'hyperplan orthogonal à  $\alpha \in R$ .

**Définition 5.** *Soit  $R$  un système de racine sur  $E$ . Une chambre de Weyl est une composante connexe de  $E \setminus \bigcup_{\alpha \in R} H_\alpha$ .*

Par définition, tout vecteur dans une chambre de Weyl induit une polarisation. À titre d'illustration, on hachure ci dessous une chambre de Weyl pour chaque système de racine  $A_1 \sqcup A_2$  et  $A_2$  :



**Lemme 3.** *Soit  $C$  une chambre de Weyl, et  $p, \tilde{p} \in C$ . Alors  $p$  et  $\tilde{p}$  définissent une même polarisation. C'est même une condition suffisante : il y a autant de polarisations possibles pour  $R$  que de chambres de Weyl.*

*Démonstration.* On commence par montrer que  $p$  et  $\tilde{p}$  définissent la même polarisation. Puisque  $(\alpha, \cdot)$  est continue, et qu'elle est partout non nulle sur  $E \setminus \bigcup_{\alpha \in R} H_\alpha$ , alors  $sign((\alpha, \cdot))$  est constante sur  $C$ , ce qui revient à dire que  $p$  et  $\tilde{p}$  induisent la même polarisation.

Maintenant si  $p$  et  $\tilde{p}$  définissent la même polarisation  $R_+$ , on a pour  $\alpha \in R_+$  et pour  $t \in [0, 1]$  :  $(tp + (1-t)p, \alpha) > 0$ . Ainsi il existe un chemin dans  $E \setminus \bigcup_{\alpha \in R} H_\alpha$  reliant  $p$  à  $\tilde{p}$ . Les deux vecteurs sont dans la même chambre de Weyl.

Il existe donc une bijection entre les polarisations d'un système de racines et ses chambres de Weyl.  $\square$

On en vient aux résultats importants de cette section :

**Théorème 1.** *L'action naturelle du groupe de Weyl sur  $E$  induit une action transitive sur l'ensemble des chambres de Weyl.*

*Démonstration.* Soient  $C$  et  $\tilde{C}$  deux chambres de Weyl, alors on peut construire une séquence  $C_0 = C, C_1, \dots, C_n = \tilde{C}$  de chambres adjacentes (c'est-à-dire dont la frontière possède une face d'hyperplan en commun). Or deux chambres adjacentes  $C_{i-1}, C_i$  s'envoie l'une sur l'autre via une symétrie orthogonale  $s_{\alpha_i}$ . Donc en composant on obtient  $\tilde{C} = s_{\alpha_n} \circ \dots \circ s_{\alpha_1} \cdot C$ , avec  $s_{\alpha_n} \circ \dots \circ s_{\alpha_1} \in W$ .  $\square$

Il s'en suit que le groupe de Weyl agit transitivement sur les polarisations, et donc sur les familles de racines simples.

**Corollaire 2.** *Soient  $S$  et  $\tilde{S}$  deux ensembles de racines simples pour un système  $R$ , alors il existe un élément  $w \in W$  du groupe de Weyl tel que  $\tilde{S} = w \cdot S$ .*

**Corollaire 3.** *Étant donné  $S$  un ensemble de racines simples issues de  $R$ , on a  $R = W(S)$ .*

*Démonstration.* Toute racine est simple pour une polarisation bien choisie. On en déduit le résultat par la transitivité de l'action du groupe de Weyl sur les familles de racines simples.  $\square$

Ainsi, le groupe de Weyl et les racines simples d'un système de racines caractérisent le système de racines. Cependant, pour trouver le groupe de Weyl  $W$  d'un système de racines, il faut *a priori* connaître l'ensemble des racines. Le théorème ci-dessous nous apprend que la connaissance des racines simples suffit à retrouver le groupe de Weyl.

**Théorème 2.** *Le groupe de Weyl est engendré par les réflexions issues des racines simples (dites réflexions simples) pour une polarisation donnée.*

*Démonstration.* Comme évoqué dans la preuve du précédent théorème 1.2, on peut reconstruire  $C_{R_+}$  à partir des racines simples. Alors on montre que toute chambre s'écrit  $C = s_{\beta_1} \circ \dots \circ s_{\beta_n} \cdot C = w \cdot C$  où  $\beta_i \in S$  est une simple racine :

On procède de proche en proche. En partant de  $C_{R_+}$  et en regardant une chambre adjacente  $C$ , accessible via une symétrie d'hyperplan l'un des murs de  $C_{R_+}$ , on conclut en rappelant que  $C_{R_+}$  ne possède que des faces dont les hyperplans proviennent de racines simples.

On poursuit en prenant  $C$  adjacent à  $\tilde{C}$ , lui même adjacent à  $C_{R_+}$ . Alors soit  $H_\alpha \subset \tilde{C}$  la frontière les séparant c'est à dire telle que  $C = s_\alpha(\tilde{C})$ . Puisque  $\tilde{C} = s_{\beta_1} \cdot C_{R_+}$  on a  $H_\alpha = s_{\beta_1}(H_{\beta_2})$  où  $\beta_2$  est une racine simple. Alors  $\alpha = \pm s_{\beta_1}(\beta_2)$  et  $s_\alpha = s_{\beta_1} s_{\beta_2} s_{\beta_1}^{-1}$ , d'où finalement  $C = s_{\beta_1} \circ s_{\beta_2} C_{R_+}$ . On termine le raisonnement par induction.

En reprenant les arguments de la précédente démonstration, en particulier que pour  $\alpha \in R$  quelconque,  $\alpha = \pm w(\beta)$ , on a alors  $s_\alpha = w \circ s_\beta \circ w^{-1}$ . Donc toute réflexion est engendrée par de simples réflexions.  $\square$

### 1.3 Classification des systèmes de racines :

La section précédente nous fait entrevoir que la classification des systèmes de racines peut se réduire à l'étude des racines simples. Avant de les classifier, on cherche une description commode des racines simples. L'information sur la répartition dans l'espace de ces racines étant essentiellement (à isomorphisme près) contenue dans les  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ , on dresse alors un analogue à la matrice de Gram, appelée matrice de Cartan.

**Définition 6.** *Étant donné  $S = (\alpha_i)_i$  l'ensemble des racines simples d'un système, la matrice de Cartan associée est la matrice  $C_R = (c_{ij})_{i,j}$  avec  $c_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ .*

Puisque les racines simples sont toutes équivalentes sous l'action du groupe de Weyl (composé d'isométries), la matrice de Cartan dépend uniquement de la classe d'isomorphie de  $R$ .

**Proposition 2.** *Pour  $S, \tilde{S}$  deux ensembles de racines simples sur  $R$ , les matrices de Cartan associées sont égales.*

*Démonstration.* On dispose de  $w \in W$  tel que  $\tilde{S} = w \cdot S$ , d'où  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle w \cdot \alpha_i, w \cdot \alpha_j \rangle$ .  $\square$

Il découle de la classification des systèmes de racines en degré 2 que la matrice de Cartan possède des 2 uniquement sur sa diagonale, et des 0 et  $-1$  partout ailleurs (les racines simples forment nécessairement des angles droits ou obtus entre elles). On construit alors un graphe associé au système de racine, de la manière suivante :

**Définition 7.** *Soit  $R$  un système de racine,  $C_R$  sa matrice de Cartan. Le graphe associé à  $R$  est le graphe  $\Gamma_R$  dont la matrice d'adjacence est  $A_{\Gamma_R} = 2 - C_R$ .*

Avant de poursuivre, on introduit la notion de système de racines irréductible, afin de se restreindre à la classification de ces derniers.

**Définition 8.** *Un système de racine  $R$  est dit réductible s'il peut s'écrire  $R = R_1 \sqcup R_2$  où  $R_1$  et  $R_2$  engendrent des espaces orthogonaux non nuls. Un système de racine irréductible est un système de racine pour lequel une telle écriture est impossible.*

Le graphe associé à un système de racine contient donc autant d'information que la matrice de Cartan associée au même système, et donc ne dépend que de la classe d'isomorphie de  $R$ . Il est équivalent de ce donner l'un ou l'autre. On remarque les faits suivants :

**Proposition 3.** *Soit  $\Gamma_R$  le graphe associé à un système de racine  $R$  :*

- $\Gamma_R$  ne possède pas de boucle interne.
- $\Gamma_R$  possède une matrice de Cartan  $C_R$  (associée à  $R$ ) définie positive.
- $\Gamma_R$  est connexe si et seulement si  $R$  est irréductible.

*Démonstration.* Le premier fait est évident en raison du fait que  $(C_\Gamma)_{ii} = 2$ .

De plus,  $C_\Gamma$  est la matrice de Gram de la base correspondant aux racines simples donc est définies positives.

Enfin, si  $R = R_1 \sqcup R_2$  alors le graphe  $\Gamma_R$  est composé de la réunion de  $\Gamma_{R_1}$  et  $\Gamma_{R_2}$ . Réciproquement si  $\Gamma_R = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ , alors on peut extraire de  $R$  deux systèmes orthogonaux  $R_1$  et  $R_2$  (ceux dont les racines sont celles associées aux sommets de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ) tels que  $\Gamma_i = \Gamma_{R_i}$ .  $\square$

Ce sont ces critères que l'on choisit pour définir les diagrammes de Dynkin en général (sans les associer *a priori* à un système de racine particulier). Par anticipation de la classification, nous verrons que l'on peut faire correspondre un système de racine irréductible à chaque diagramme de Dynkin (retenu par la classification), et donc qu'un diagramme de Dynkin *est* un graphe associé à un système de racine irréductible, et ce de manière biunivoque, à isomorphisme près (il suffira de vérifier que les systèmes de racines construits sont tous non isomorphes).

**Théorème 3.** *L'ensemble des diagrammes de Dynkin et l'ensemble systèmes de racines irréductibles (à isomorphisme près) sont en bijection.*

## 2 Classification des diagrammes de Dynkin

Dans cette section on introduit les diagrammes de Dynkin de manière théorique (Définition 9) et on établit leur classification (Théorème 4).

### 2.1 Énoncé et première définition

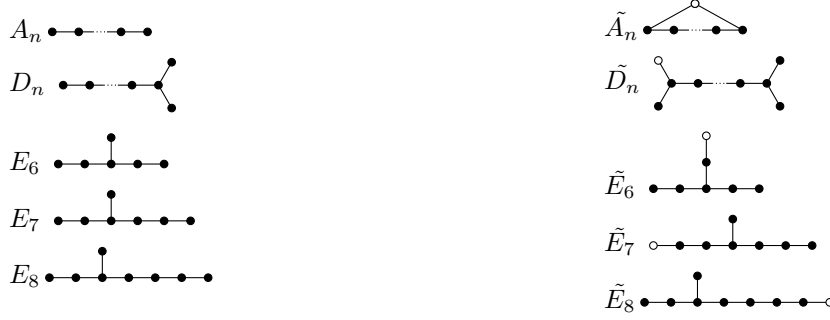
On commence par définir les diagrammes de Dynkin et les diagrammes de Dynkin affines.

**Définition 9.** *Soit  $\Gamma$  un graphe connexe sans boucle, dont la matrice d'adjacence est noté  $A_\Gamma$ . On dira que :*

- v)  $\Gamma$  est de Dynkin lorsque la forme quadratique associée à la matrice définie par  $B_\Gamma = 2 - A_\Gamma$  est définie positive.*
- u)  $\Gamma$  est de Dynkin affine lorsque la forme quadratique est seulement positive.*

L'objectif de cette partie est d'obtenir la classification complète des diagrammes de Dynkin, à savoir :

**Théorème 4.** *Un graphe est de Dynkin lorsqu'il est parmi les suivants à gauche, et est de Dynkin affine lorsqu'il est de Dynkin ou qu'il est parmi les suivants à droite.*



## 2.2 Préliminaires

On commence par établir le critère de Sylvester, pour ramener le problème de classification des diagrammes de Dynkin à des calculs de déterminants.

**Lemme 4.** (Entrelacement des spectres) Soit  $A$  une matrice symétrique et  $B$  sa mineure principale d'ordre  $n - 1$ . Si l'on note  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  et  $\beta_1 \leq \dots \leq \beta_{n-1}$  les valeurs propres de  $A$  et  $B$  on a

$$\lambda_1 \leq \beta_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \beta_{n-1} \leq \lambda_n$$

*Démonstration.* Si l'on note  $E_k(F)$  l'ensemble des sous espaces de  $F$  de dimension  $k$  on a

$$\lambda_k = \min_{V \in E_k(\mathbf{R}^n)} \max_{X \in V, \|x\|=1} \langle AX, X \rangle$$

$$\beta_k = \min_{V \in E_k(\mathbf{R}^{n-1})} \max_{X \in V, \|x\|=1} \langle BX, X \rangle$$

On déduit directement que  $\lambda_k \leq \beta_k$ . Maintenant si  $V \in E_k(\mathbf{R}^n)$  on a  $\dim(V \cap \mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}) \geq k - 1$  et

$$\max_{X \in V, \|x\|=1} \langle AX, X \rangle \geq \max_{X \in V \cap (\mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}), \|x\|=1} \langle BX, X \rangle$$

Comme tout espace de dimension  $k - 1$  de  $\mathbf{R}^{n-1}$  s'écrit comme une intersection  $V \cap (\mathbf{R}^{n-1} \times \{0\})$  avec  $V$  de dimension  $k$  dans  $\mathbf{R}^n$  et que  $\beta_{k-1} \leq \beta_k$ , on en déduit que  $\lambda_k \geq \beta_{k-1}$ .  $\square$

**Proposition 4.** (Critère de Sylvester) Une matrice est définie positive ssi toutes ses mineures principales sont de déterminant strictement positif.

*Démonstration.* Le sens direct est clair car cela revient juste à restreindre la forme bilinéaire. Pour le sens réciproque, on procède par récurrence sur la dimension. Si  $n = 1$  le déterminant est la seule valeur propre de la matrice. Donc la matrice ne possède que des valeurs propres strictement positives : elle est définie positive.

Soit  $n \in \mathbf{N}$  tel que la propriété soit vraie jusqu'au rang  $n - 1$  et  $A \in S_n(\mathbf{R})$  tel que ses mineures principales soient de déterminant strictement positif. Alors sa mineure principale d'ordre  $n - 1$ ,  $B$  est définie positive donc toutes ses valeurs propres sont strictement positives. De plus par le lemme d'entrelacement des spectres ??, on a

$$\lambda_1 \leq \beta_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \beta_{n-1} \leq \lambda_n$$

Il s'en suit que  $\lambda_i > 0$  pour  $1 < i \leq n$ . Comme  $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n > 0$  par hypothèse on en déduit que  $\lambda_i > 0$  pour  $1 \leq i \leq n$  et donc  $A$  définie positive.  $\square$

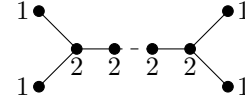
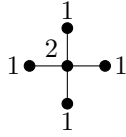
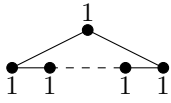
## 2.3 Classification

On commence par la remarque suivante, utilisée dans toute la suite de l'exposé :

**Remarque 4.** *Les matrices d'adjacence des sous-diagrammes sont des mineurs principaux (à renommérotation des sommets près). Les sous-diagrammes correspondent à des mineurs principaux : par excision de sommets, la nouvelle matrice caractéristique  $B_\Gamma$  est un mineur principal.*

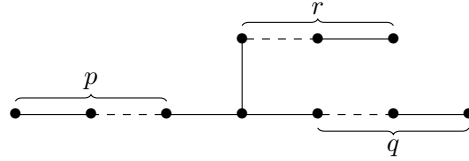
Le critère de Sylvester permet de savoir si un diagramme est de Dynkin en calculant l'ensemble de ses mineurs principaux. Mieux encore, on peut donc rejeter tout diagramme ayant un sous diagramme qui n'est pas de Dynkin, par la remarque 4. Inversement un diagramme est alors de Dynkin lorsqu'il est de déterminant strictement positif, et que tous ses sous graphes sont de Dynkin. Cette approche va nous permettre de raisonner par induction sur la taille du graphe, et établir à la classification du théorème 4.

Commençons déjà par éliminer les cycles et les doubles fourches (et son cas dégénéré, la croix), en remarquant que le vecteur constitué des pondérations associées à chaque sommet est dans le noyau de la matrice  $B_\Gamma$  caractéristique du graphe :



De plus, tout sous diagramme de ces derniers étant de Dynkin (en anticipant le résultat de la classification des diagrammes de Dynkin non affine), on en déduit qu'il s'agit de diagrammes de Dynkin affines. Puisqu'il est établi que les diagrammes de Dynkin ne peuvent contenir de cycles ou de doubles fourches, on s'intéresse maintenant au calcul du déterminant de la matrice associée au diagramme  $\Gamma$  de type  $(p, q, r)$  (cf infra). En notant  $\alpha_i^t = (-1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{Z}^i$  et  $\omega_i = (1, \dots, 1, 0) \in \mathbf{Z}^i$ , on a alors :

$$B_\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & \alpha_p^t & \alpha_q^t & \alpha_r^t \\ \alpha_p & A_p & 0 & 0 \\ \alpha_q & 0 & A_q & 0 \\ \alpha_r & 0 & 0 & A_r \end{pmatrix}$$



En développant selon les colonnes et en remarquant que  $\det A_n = n + 1$  on a alors :

$$\det B_\Gamma = 2(p+1)(q+1)(r+1)$$

$$+ \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{p-1} & 0 & 0 \\ \alpha_q & 0 & A_q & 0 \\ \alpha_r & 0 & 0 & A_r \end{vmatrix} + (-1)^p \begin{vmatrix} \alpha_p & A_p & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & A_{q-1} & 0 \\ \alpha_r & 0 & 0 & A_r \end{vmatrix} + (-1)^{p+q} \begin{vmatrix} \alpha_p & A_p & 0 & 0 \\ \alpha_r & 0 & A_q & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & A_{r-1} \end{vmatrix}$$

On détaille le calcul de la seconde matrice pour l'exemple, les indices  $p, q, r$  jouant un rôle symétrique :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \alpha_p & A_p & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & A_{q-1} & 0 \\ \alpha_r & 0 & 0 & A_r \end{vmatrix} &= (-1)^p \left( -p(q+1)(r+1) + \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{p-2}^t & 0 & 0 \\ 0 & A_{p-2} & 0 & 0 \\ \alpha_q & 0 & A_q & 0 \\ \alpha_r & 0 & 0 & A_r \end{vmatrix} \right) \\ &= (-1)^p (-p(q+1)(r+1)) \end{aligned}$$

car  $(0, \omega_{p-2}, 0, 0)^t$  est dans le noyau de la matrice du membre droit. Il en résulte alors que :

$$\det B_\Gamma = 2(p+1)(q+1)(r+1) - p(q+1)(r+1) - (p+1)q(r+1) - (p+1)(q+1)r$$

**Lemme 5.** *Un diagramme du type  $(p, q, r)$  est de Dynkin si et seulement si  $2 - \frac{p}{p+1} + \frac{q}{q+1} + \frac{r}{r+1} > 0$ . De plus en passant à l'inégalité large on obtient les diagrammes de Dynkin affines de type  $(p, q, r)$ .*

Il est immédiat que les diagrammes de Dynkin de type  $(p, q, r)$  sont les seuls envisageables. Sans perte de généralité on prendra  $p \leq q \leq r$ . On obtient alors la classification suivante pour les diagrammes de Dynkin :

p	q	r	Diagramme associé
1	$\forall$	$\forall$	$A_{q+r}$
1	1	$\forall$	$D_r$
1	2	$\{2, 3, 4\}$	$\{E_6, E_7, E_8\}$
1	$\geq 3$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\geq 2$	$\geq 2$	$\emptyset$	$\emptyset$

On dresse alors un tableau similaire pour les diagrammes de Dynkin affines de type  $(p, q, r)$ .

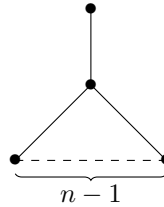
p	q	r	Diagramme associé
1	$\forall$	$\forall$	$A_{q+r}$
1	1	$\forall$	$D_r$
1	2	$\{2, 3, 4, 5\}$	$\{E_6, E_7, E_8, \tilde{E}_8\}$
1	3	3	$\tilde{E}_7$
1	$\geq 4$	$\emptyset$	$\emptyset$
2	2	2	$\tilde{E}_6$
$\geq 2$	$\geq 3$	$\emptyset$	$\emptyset$

À ces derniers il faut rajouter les simples cycles (diagrammes de type  $\tilde{A}_n$ ) et les simples doubles fourches (diagrammes du type  $\tilde{D}_n$ ) et uniquement ceux là. En effet on constate qu'un cycle non simple  $\Gamma$  (cf infra) n'est pas de Dynkin :

$$\det B_\Gamma = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \beta_{n-1} \\ 0 & \beta_{n-1}^t & A_{n-1} \end{vmatrix}, \quad \beta_i = (-1, 0, \dots, 0, -1) \in \mathbf{Z}^i$$

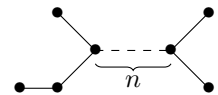
$$= \begin{vmatrix} -1 & \beta_{n-1} \\ 0 & A_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= -\det A_{n-1} = -n$$



Il en résulte que tout diagramme de Dynkin comportant un cycle est nécessairement de type  $\tilde{A}_n$ . De même un diagramme comportant une double fourche est nécessairement de type  $\tilde{D}_n$ .

Considérons pour cela le diagramme ci dessous. Pour  $n \geq 5$ , on se ramène à un sous diagramme du type  $(1, 2, n+1)$ , que l'on sait déjà impossible par la classification déjà effectuée. Les cas  $n = \{1, 2, 3, 4\}$  quant à eux fournissent des déterminants négatifs, ce que l'on vérifie aisément.



### 3 Retour sur les systèmes de racines

Nous allons voir maintenant que chaque diagramme de Dynkin peut être associé un système de racines. Nous aurons ainsi réduit le problème de classification des systèmes de racines à celui des diagrammes de Dynkin.

On note  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ .

#### 3.1 Le système de racines $A_n$ :

On considère  $V$  l'hyperplan de  $\mathbf{R}^{n+1}$  constitué des points dont la somme des coordonnées est nulle.

**Lemme 6.** *L'ensemble de vecteurs  $R = \{e_i - e_j, 1 \leq i, j \leq n+1, i \neq j\}$  est un système de racines sur  $V$ .*

*Démonstration.* On vérifie les propriétés 1,2 et 4 de la définition 1. Pour la stabilité de  $R$  par réflexion orthogonale par rapport  $e_i - e_j$  il suffit de vérifier que  $S_{e_i - e_j}(e_i - e_k) \in R$  pour  $k \neq j$ . Et en faisant le calcul on trouve que

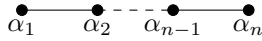
$$S_{e_i - e_j}(e_i - e_k) = e_j - e_k \in R$$

ce qui nous permet de conclure. □

Si on choisit  $p = e_1 + \dots + (n+1)e_{n+1}$  comme polarisation, les racines positives sont les vecteurs  $\{e_i - e_j, 1 \leq j < i \leq n+1\}$ .

**Proposition 5.** *Les racines simples sont les  $\{\alpha_i = e_{i+1} - e_i, 1 \leq i \leq n\}$ .*

On en déduit alors que  $\alpha_i$  est liée à  $\alpha_k$  si et seulement si  $k \in \{i-1, i+1\} \cap \{1, \dots, n\}$  et on obtient le diagramme  $A_n$  :



#### 3.2 Le système de racine $D_n$ :

On considère cette fois ci  $V = \mathbf{R}^n$ .

**Lemme 7.** *L'ensemble de vecteurs  $R = \{\pm e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq n\}$  est un système de racines sur  $V$ .*

*Démonstration.* On le montre en vérifiant le point 3 et en observant que si  $j \neq k$

$$S_{e_i \pm e_j}(e_i \pm e_k) = \pm e_j \pm e_k \in R$$

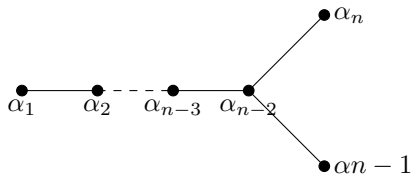
□

Si l'on choisit  $p = e_1 + \dots + ne_n$  comme polarisation, les racines positives sont les vecteurs  $\{e_i + e_j, e_i - e_j, 1 \leq j < i \leq n\}$ .

**Proposition 6.** *Les racines simples sont les vecteurs suivants :*

- $\alpha_i = e_{i+1} - e_i$  pour  $1 \leq i \leq n$
- $\alpha_n = e_n + e_{n-1}$

On obtient alors de diagramme  $D_n$  :



### 3.3 Le système de racines $E_8$ :

On commence par définir le système de racines  $E_8$  à partir duquel on construira  $E_7$  puis  $E_6$ .

On considère ici  $V = \mathbf{R}^8$ .

**Lemme 8.** *L'ensemble  $R_8 = \{\pm e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq 8\} \cup \{\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^8 (-1)^{\epsilon_i} e_i), \sum \epsilon_i \in 2\mathbf{Z}\}$  est un système de racines.*

On vérifie que cet ensemble vérifie bien la définition donnée en 1.1.

Avec comme choix de polarisation  $p = (1, 2, \dots, 2^8)$  on trouve que les racines positives sont les  $\{\pm e_i + e_j, 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\frac{1}{2}(e_8 + \sum_{i=1}^7 (-1)^{\epsilon_i} e_i), \sum \epsilon_i \in 2\mathbf{Z}\}$ .

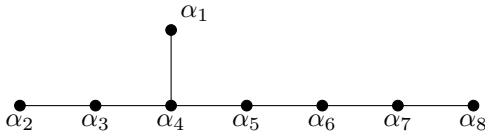
**Proposition 7.** *Les racines simples sont les vecteurs suivants :*

- $\alpha_1 = e_1 + e_2$
- $\alpha_2 = \frac{1}{2}(e_8 + e_1 - \sum_{i=2}^7 e_i)$
- $\alpha_{i+2} = e_{i+1} - e_i$ , pour  $i \in \{1, \dots, 6\}$

**Remarque 5.** *Décomposons par exemple  $e_8 - e_7$  sur cette base. On a*

$$e_8 - e_7 = 2\alpha_6 + \alpha_7 + 2\alpha_4 + 3\alpha_3 + 4\alpha_2 + 3\alpha_1 + 2\alpha_5$$

On observe alors que les racines  $\alpha_i$  sont liées aux racines  $\alpha_{i+1}$  pour  $3 \leq i \leq 7$ . La racine  $\alpha_1$  est seulement liée à la racine  $\alpha_4$  et  $\alpha_2$  est liée à  $\alpha_3$ . On obtient finalement le graphe  $E_8$  :



### 3.4 Le système de racines $E_7$ :

On considère  $V_7$  l'hyperplan de  $\mathbf{R}^8$  orthogonal à  $e_7 + e_8$ .

**Lemme 9.** *L'ensemble*

$$R_7 = \{\pm e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\pm(e_7 - e_8)\} \cup \{\pm \frac{1}{2}(e_8 - e_7 + \sum_{i=1}^6 (-1)^{\epsilon_i} e_i), \sum \epsilon_i \in 2\mathbf{Z}\}$$

*est un système de racines.*

*Démonstration.* C'est  $R_8$  intersecté avec  $V_7$ . Les points 1, 2, 4 de la définition sont donc immédiatement vérifiés. De plus une symétrie orthogonale par rapport à un vecteur de  $V_7$  préserve  $V_7$  donc  $R_7$  est bien un système de racines.  $\square$

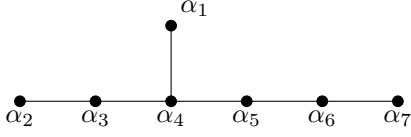
Avec comme choix de polarisation  $p = (1, \dots, 2^8)$  on trouve que les racines positives sont les  $\{\pm e_i + e_j, 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{e_8 - e_7\} \cup \{\frac{1}{2}(e_8 - e_7 + \sum_{i=1}^6 (-1)^{\epsilon_i} e_i), \sum \epsilon_i \in 2\mathbf{Z}\}$ .

**Proposition 8.** *Les racines simples sont les vecteurs suivants :*

- $\alpha_1 = e_1 + e_2$
- $\alpha_2 = \frac{1}{2}(e_8 + e_1 - \sum_{i=2}^7 e_i)$
- $\alpha_{i+2} = e_{i+1} - e_i$ , pour  $i \in \{1, \dots, 5\}$

**Remarque 6.** On remarque que ce sont les racines simples de  $R_8$  auxquelles on a enlevé  $\alpha_8$

On obtient donc le graphe correspondant à  $R_8$  auquel on a enlevé la racine simple  $\alpha_8$ . C'est  $E_7$ .



### 3.5 Le système de racines $E_6$ :

On considère  $V_6$  l'hyperplan de  $V_7$  orthogonal à  $e_6 - e_7$ .

**Lemme 10.** L'ensemble  $R_6 = \{\pm e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \{\pm \frac{1}{2}(e_8 - e_7 - e_6 + \sum (-1)^{\epsilon_i} e_i), \sum \epsilon_i \in 2\mathbf{Z}\}$  est un système de racines.

*Démonstration.* On remarque de même que  $R_6$  est  $R_7$  intersecté avec  $V_6$ . On a donc directement que c'est un système de racines.  $\square$

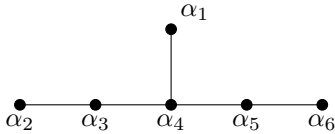
Avec comme choix de polarisation  $p = (1, \dots, 2^8)$  on trouve que les racines positives sont les  $\{\pm e_i + e_j, 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \{\frac{1}{2}(e_8 - e_7 - e_6 + \sum (-1)^{\epsilon_i} e_i), \sum \epsilon_i \in 2\mathbf{Z}\}$ .

**Proposition 9.** Les racines simples sont les vecteurs suivants :

- $\alpha_1 = e_1 + e_2$
- $\alpha_2 = \frac{1}{2}(e_8 + e_1 - \sum_{i=2}^7 e_i)$
- $\alpha_{i+2} = e_{i+1} - e_i$ , pour  $i \in \{1, \dots, 4\}$

**Remarque 7.** Ce sont les racines simples de  $R_7$  auxquelles on a enlevé la racine simple  $\alpha_7$

Le diagramme obtenue est celui correspondant à  $R_7$  auquel on a retiré la racine  $\alpha_7$ . On obtient donc  $E_6$  :



## 4 Correspondance de McKay

Le but de ce paragraphe est de voir que l'on peut associer à tout sous groupe fini de  $SU(2)$  un diagramme de Dynkin affine. Ce résultat est particulièrement spectaculaire car il ne fonctionne qu'avec les sous-groupes finis de  $SU(2)$ . On considère  $G$  un sous groupe fini de  $SU(2)$ . On note  $V$  sa représentation bidimensionnelle qui vient de son inclusion dans  $SU(2)$ ,  $V_i$  les représentations irréductibles de  $G$  et  $r_{i,j}$  la multiplicité de  $V_i$  dans  $V \otimes V_j$ .

On peut alors construire un graphe, noté  $M(G)$ , dans lequel les sommets sont les représentations irréductibles de  $G$  et où deux sommets  $i, j$  sont reliés par  $r_{i,j}$  arrêtes. Le résultat intéressant est le suivant :

**Théorème 5.** Le diagramme  $M(G)$  est un diagramme de Dynkin affine.

Pour démontrer ce théorème, il faut vérifier que le graphe ainsi défini n'est pas orienté 4.1, qu'il est connexe 4.2 puis qu'il correspond à un diagramme de Dynkin affine 4.3. On notera  $\chi$  le caractère de la représentation  $V$ , et  $\chi_i$  les caractères irréductibles.

### 4.1 Non orientation des arrêtes

Premièrement, comme  $\chi$  est à valeurs réelles, on trouve que  $r_{ij} = r_{ji}$ . En effet :

$$r_{ij} = \langle \chi_{V \otimes V_j} | \chi_{V_i} \rangle = \langle \chi \chi_j | \chi_i \rangle = \langle \chi \chi_i | \chi_j \rangle$$

### 4.2 Connexité de $M(G)$

Montrons que  $M(G)$  est connexe en utilisant le lemme (que l'on admettra) suivant :

**Lemme 11.** *Si  $V$  est une représentation fidèle de  $G$  alors pour toute représentation irréductible  $V_i$  de  $G$  il existe  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $V_i$  apparaît dans la décomposition de  $V^{\otimes n}$ .*

Une représentation irréductible  $V_i$  vérifie alors  $\langle \chi_i | \chi^n \rangle > 0$  pour un certain  $n$ , donc il existe un chemin (dans le diagramme) de longueur  $n$  entre  $V_i$  et la représentation triviale (puisque  $\langle \chi_i | \chi^n \rangle = \langle \chi_i \chi | \chi^{n-1} \rangle > 0$ , il existe donc un reliant  $\chi_i$  à une irréductible de  $\chi^{n-1}$ . En réitérant  $n$  fois on obtient un chemin jusqu'à une représentation irréductible de  $\chi^0 = \chi_{triv}$ , c'est à dire la représentation triviale elle-même). Le graphe est donc connexe.

### 4.3 Le graphe $M(G)$ est un diagramme de Dynkin affine

Il nous reste maintenant à montrer que  $M(G)$  est un diagramme de Dynkin affine. Pour cela, on montre que la matrice  $b_{ij} = 2\delta_{ij} - r_{ij}$  est semi-définie positive et non définie. Soit  $x = (x_1, \dots, x_p)$  et  $f = \sum x_i \chi_i$ . Étant donné que  $\langle \chi_i | \chi_j \rangle = \delta_{ij}$ , on a :

$$\langle (2 - \chi)f | f \rangle = 2\langle f | f \rangle - \langle \chi f | f \rangle = \sum_{i,j} (2\langle \chi_i | \chi_j \rangle - r_{ij}) x_i x_j = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j$$

Il nous suffit donc de montrer que  $\langle (2 - \chi_V)f | f \rangle \geq 0$ .

Si l'on note  $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ , on a  $\chi_V(g) = 2Re(\alpha)$  donc

$$\langle (2 - \chi_V)f | f \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_g 2(1 - Re(g)) |f(g)|^2$$

Comme  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  on a  $Re(\alpha) \leq 1$  avec égalité ssi  $g = id$ . On en déduit que le produit scalaire est toujours positif et s'annule quand  $f$  est proportionnelle à la représentation de permutation.

Développons maintenant quelques exemples qui illustrent cette correspondance.

### 4.4 Le revêtement $SU(2) \twoheadrightarrow SO(3)$

Pour étudier les sous groupes de  $SU(2)$  il est intéressant de les voir comme l'image réciproque de sous groupes de  $SO(3)$

On rappelle tout d'abords deux propositions 1, 2

**Propriété 1.** *Tout élément de  $SO(3)$  s'écrit  $R_{\mathbf{n}, \varphi}$  matrice de rotation d'angle  $\varphi$  de vecteur unitaire directeur  $\mathbf{n}$ .*

**Propriété 2.** *Tout élément de  $SU(2)$  s'écrit  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$  pour  $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ ,  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .*

En notant  $\hat{i} = i\sigma_1$ ,  $\hat{j} = i\sigma_2$ ,  $\hat{k} = i\sigma_3$  où les  $\sigma_i$  désignent les matrices de Pauli, on observe les relations de commutations  $\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = \hat{i}\hat{j}\hat{k} = -1$ , ce qui pousse à la remarque suivante :

**Corollaire 4.** *Les éléments de  $SU(2)$  se réécrivent comme  $a + \hat{i}b + \hat{j}c + \hat{k}d$ , avec  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ . On établit ainsi un isomorphisme  $SU(2) \simeq Sp(1)$ , où  $Sp(1) \subset \mathbf{H}$  désigne le groupe des quaternions unitaires.*

**Remarque 8.** *On identifie par la suite  $SU(2)$  et  $Sp(1)$*

Le groupe  $Sp(1)$  agit naturellement par conjugaison sur  $\mathbf{H}$  ( $h \mapsto uhu^{-1}$ ). Pour étudier son action, on écrit  $u = e^{n\varphi} = \cos \varphi + \sin \varphi \cdot (n_1 + jn_2 + kn_3) \in Sp(1)$ . Le calcul montre alors que :

**Propriété 3.** *L'action de conjugaison de  $u = e^{n\varphi}$  sur  $h$  est donnée par*

$$h \mapsto \operatorname{Re} h + R_{n,2\varphi} \cdot \operatorname{Im} h$$

**Corollaire 5.** *On obtient la suite exacte courte :*

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \hookrightarrow SU(2) \twoheadrightarrow SO(3) \rightarrow 1$$

*Puisque  $SU(2) \simeq Sp(1) \simeq \mathbf{S}^3$  est simplement connexe, on obtient alors le revêtement universel de  $SO(3)$ .*

## 5 Graphe de McKay d'un groupe cyclique

Soit  $G$  un sous-groupe cyclique d'ordre  $n$  de  $SU(2)$ .

**Proposition 10.** *Le diagramme  $M(G)$  est  $\tilde{A}_n$*

*Démonstration.* Un caractère d'un groupe cyclique d'ordre  $n$  dépend uniquement de sa valeur en un générateur  $g_0$ . Comme  $g_0^n = Id$ , la matrice est diagonalisable donc stabilise tout sous espace de dimension 1. Ses représentations irréductibles sont donc toutes unidimensionnelles. Si l'on note  $\varepsilon$  le caractère qui envoie un générateur sur  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$  les caractères irréductibles du groupe sont exactement les puissances  $\varepsilon^k$  de  $\varepsilon$ , pour  $0 \leq k < n$ .

De plus si  $g_0$  est un générateur du groupe dans  $SU(2)$  alors  $G$  est isomorphe au groupe de  $SU(2)$  engendré par  $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \bar{\omega} \end{pmatrix}$ . Donc sa représentation bidimensionnelle est réductible et  $V = \varepsilon \oplus \varepsilon^{-1}$ . Ainsi

$$V \otimes \varepsilon^k = \varepsilon^{k+1} \oplus \varepsilon^{k-1}$$

On en déduit que le diagramme associé est  $\tilde{A}_n$ . □



## 6 Graphe de McKay du groupe diédral binaire

Le but de cette section est de trouver de Graphe de McKay du groupe diédral binaire. On commence par introduire le groupe diédral binaire 6.1, puis on décrit ses classes de conjugaisons 13 et on établit la liste de ses caractères unidimensionnels 6.2 et bidimensionnels 6.3. Cela nous permet de construire sa table de caractère 6.4 et d'en déduire le diagramme de Dynkin associé 6.5.

## 6.1 Groupe dihédral binaire et représentation standard

On définit le groupe dihédral  $D_{2n} = \langle r, s \rangle$  comme étant engendré par la rotation  $r = R_{x, 2\pi/n}$  et le renversement  $s = R_{y, \pi} = \text{Diag}(-1, 1, -1)$ .

**Proposition 11.** *Le groupe dihédral  $D_n = \langle r, s \rangle$  est une présentation du groupe en engendré par générateur et relations :*

$$\langle \sigma, \tau | \sigma^n, \tau^2, \tau\sigma\tau^{-1}\sigma \rangle$$

*Démonstration.* On commence par rappeler que  $D_n$  est un présentation de  $\langle G|R \rangle$  lorsqu'il existe un isomorphisme  $D_n \simeq L(G)/N(R)$ , où  $L(G)$  est le groupe libre engendré par  $G$  et  $N(R)$  le plus petit sous groupe normal de  $L(G)$  contenant  $R$ . Les éléments de  $N(R)$  s'écrivent alors  $g_1 r_1^{\epsilon_1} g_1^{-1} \dots g_n r_n^{\epsilon_n} g_n^{-1}$ , avec  $\epsilon_k = \pm 1$ .

On définit alors :

$$\begin{aligned} \varphi : L(G) &\rightarrow D_n \\ \sigma^{\mu_1} \tau^{\nu_1} \dots \sigma^{\mu_n} \tau^{\nu_n} &\mapsto s^{\mu_1} r^{\nu_1} \dots s^{\mu_n} r^{\nu_n} \end{aligned}$$

Quitte à prendre éventuellement  $\nu_n = 0$ , on définit bien une application sur  $L(G)$ . La surjectivité de  $\varphi$  est immédiate, ainsi que le fait que  $N(R) \subset \ker \varphi$ . On cherche à établir l'inclusion inverse, et ainsi montrer que  $\ker \varphi \subset N(R)$  : alors par le théorème d'isomorphie, on obtient  $\ker \varphi = N(R)$  et un isomorphisme  $\tilde{\varphi} : L(G)/N(R) \xrightarrow{\simeq} D_n$ .

Par surjectivité de  $\varphi$ , on a un isomorphisme  $\langle \sigma, \tau \rangle / \ker \varphi \simeq D_n$ , et donc l'indice de  $\ker \varphi$  dans  $\langle \sigma, \tau \rangle$  vaut  $2n$ . Ainsi :

$$2n = [\langle \sigma, \tau \rangle : \ker \varphi] = \frac{|\langle \sigma, \tau | \sigma^n, \tau^2, \tau\sigma\tau^{-1}\sigma \rangle|}{[\ker \varphi : N(R)]}$$

d'où  $[\ker \varphi : N(R)] = 1$  et l'égalité  $\ker \varphi = N(R)$ . □

Soit  $\pi : SU(2) \twoheadrightarrow SO(3)$  le double revêtement introduit en première partie. Alors  $\pi^{-1}(r) = \{\pm e^{i\pi/n}\} = \{\pm\sigma\}$  et  $\pi^{-1}(s) = \{\pm e^{j\pi/2}\} = \{\pm j\} = \{\pm\tau\}$ . Et puisque  $\tau^2 = \sigma^n = -1$ , on en déduit :

**Proposition 12.** *Le groupe dihédral binaire  $D_n = \langle e^{i\pi/n}, j \rangle$  est une présentation du groupe en engendré par générateur et relations :*

$$\langle \sigma, \tau | \sigma^{2n}, \tau^4, \tau\sigma\tau^{-1}\sigma \rangle$$

On en déduit que les éléments de  $\tilde{D}_{2n}$  sont de la forme :

$$\tau^\varepsilon \sigma^k, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1 \text{ et } 0 \leq k \leq 2n - 1$$

*Démonstration.* On reprend les mêmes arguments que pour le groupe dihédral en l'adaptant aux nouvelles relations. □

On repart de la propriété ?? pour établir que :

**Proposition 13.** *(Classes de conjugaisons dans  $\tilde{D}_{2n}$ )*

$$\begin{array}{l|l|l} \text{Conj}(1) = \{1\} & \text{Conj}(\tau) = \{\tau, \tau\sigma^2, \dots, \tau\sigma^{2n-2}\} & \text{Conj}(\sigma^k) = \{\sigma^k, \sigma^{-k}\} \\ \text{Conj}(-1) = \{-1\} & \text{Conj}(\tau\sigma) = \{\tau\sigma, \tau\sigma^3, \dots, \tau\sigma^{2n-1}\} & \end{array}$$

### 6.2 Caractères unidimensionnels

Les caractères de dimension 1 (nécessairement irréductibles) sont entièrement déterminés par l'image de  $\sigma$  et  $\tau$ . On cherche donc les images possibles.

Comme  $\sigma$  et  $\sigma^{-1}$  sont conjugués, un caractère  $\chi$  de dimension 1 vérifie  $\chi(\sigma) = \chi(\sigma)^{-1}$ , donc  $\chi(\sigma) = \pm 1$ . Les relations de commutations observées sur  $\tilde{D}_{2n}$  imposent alors que  $\chi(\tau)^2 = \chi(\sigma)^n$  soit égale à 1 ou à  $(-1)^n$ , donc que  $\chi(\tau)$  soit égale à  $\pm 1$ , ou à  $\pm i^n$ .

Les caractères possibles sont donc ceux pour lesquels  $(\chi(\sigma), \chi(\tau))$  vaut  $(1, 1)$  (la trivial),  $(1, -1)$  (notée  $\chi_\tau$ ),  $((-1)^n, i^n)$  (notée  $\chi_\sigma$ ) ou  $((-1)^n, -i^n)$  (notée  $\chi_{\tau\sigma}$ ).

### 6.3 Caractères bidimensionnels

On considère les représentations bidimensionnelles suivantes, indexées par  $0 < l < n$  :

$$\rho_l : \tau \mapsto j, \sigma \mapsto e^{i l \pi / n}$$

où les images appartenant à  $Sp(1)$  sont vues comme éléments de  $SU(2)$  via l'isomorphisme mentionné en introduction.

**Remarque 9.** On reconnaîtra la représentation standard  $\rho_1 = \rho_{std}$ .

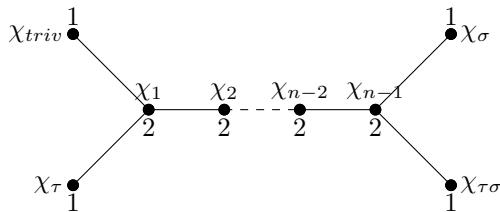
Les caractères associés à ces représentations sont alors les  $\chi(\sigma) = 2 \cos(\frac{l\pi}{n})$  et  $\chi(\tau) = 0$ . On montre que ces représentations sont irréductibles : les valeurs propres de l'endomorphisme  $\rho_l(\sigma) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  étant  $e^{\pm i l \pi / n}$ , et la représentation étant bidimensionnelle, les deux seules sous-espaces strictes stables de  $\rho_l(\sigma)$  sont les sous-espaces propres, à savoir les deux droites complexes  $Vect((1, \pm 1))$ . Mais ces dernières ne sont pas stable par  $\rho_l(\tau) : Vect((1, \pm 1)) \rightarrow Vect((1, \mp 1))$ , ce qui conclut quant à l'irréductibilité de  $\rho_l$ .

### 6.4 Table de caractères de $\tilde{D}_{2n}$

	1	1	2	$n$	$n$
	1	-1	$\sigma^k$	$\tau$	$\tau\sigma$
$\chi_{triv}$	1	1	1	1	1
$\chi_\sigma$	1	$(-1)^n$	$(-1)^k$	$-i^n$	$i^n$
$\chi_\tau$	1	1	1	-1	-1
$\chi_{\tau\sigma}$	1	$(-1)^n$	$(-1)^k$	$i^n$	$-i^n$
$\chi_l$	2	$2 \cdot (-1)^l$	$2 \cos(\frac{kl\pi}{n})$	0	0

### 6.5 Diagrammes de Dynkin associés

Le diagramme de Dynkin associé au groupe diédral binaire  $\tilde{D}_{2n}$  est alors le diagramme étendu  $\tilde{D}_{n+2}$ , où les représentations irréductibles apparaissent comme ci dessous (les poids correspondent aux dimensions des représentations) :



## 7 Graphe de Mckay de $\tilde{A}_5$

On définit  $\tilde{A}_5$  comme étant l'image réciproque de  $A_5$  (que l'on voit comme groupe des isométries positives du dodécaèdre régulier dans  $SO(3)$ ) par  $\pi : SU(2) \rightarrow SO(3)$

### 7.1 Table de caractère de $A_5$

On rappelle la table de caractère de  $A_5$

$\frac{ G }{ C_x }$	60	4	3	5	5
$ C_x $	1	15	20	12	12
représentant	id	(12)(34)	(123)	(12345)	(12354)
1	1	1	1	1	1
$\chi$	3	-1	0	$\phi$	$\bar{\phi}$
$\chi'$	3	-1	0	$\bar{\phi}$	$\phi$
$\chi_H$	4	0	1	-1	-1
$\chi_Y$	5	1	-1	0	0

### 7.2 Classes de conjugaisons dans $\tilde{A}_5$ :

Pour construire une table de caractère de  $\tilde{A}_5$ , on commence par regarder ses classes de conjugaisons.

**Proposition 14.** *Il y a 9 classes de conjugaison dans  $\tilde{A}_5$  dont un système de représentant est*

$$\{id, -id, (12)(34), (123), -(123), (12345), -(12345), (12354), -(12354)\}$$

Toutes matrices conjuguées dans  $\tilde{A}_5$  sont conjuguées dans  $A_5$ . Réciproquement si  $\pi(h_1)$  et  $\pi(h_2)$  sont conjuguées on a  $h_1$  conjugué à  $\pm h_2$ . Or les matrices conjuguées à leur inverse dans  $SU(2)$  vérifient  $Spect(P) = Spect(-P)$  et leur spectre est de la forme  $\{\mu, \bar{\mu}\}$  avec  $\mu \in \mathbf{U}$ . Elles sont donc conjuguées à  $I$ .

On vérifie par le calcul que  $I$  est envoyée sur une double transposition et que l'image réciproque des doubles transpositions forment une classe de conjugaison dans  $\tilde{A}_5$ .

### 7.3 Action de $\tilde{A}_5$ sur $\mathbf{C}^2$

Comme  $\tilde{A}_5$  est un sous groupe de  $SU(2)$ , il est naturel de considérer son action sur  $\mathbf{C}^2$ . Pour mieux la comprendre, il faut déjà étudier l'action de  $A_5$  sur  $\mathbf{R}^3$ . Pour cela on regarde son action sur les 5 cubes inscrits dans un dodécaèdre régulier, suivant [Bou]. On remarque que :

- les doubles transpositions correspondent à une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  selon l'axe passant par le milieu de deux arêtes opposées.
- les 3-cycles à des rotations de  $\frac{2\pi}{3}$  selon l'axe passant entre deux sommets opposés.
- les 5-cycle correspondent aux rotations d'angles  $\frac{2\pi}{5}$  et  $\frac{4\pi}{5}$  par rapport à l'axe passant par deux faces opposées.

Maintenant, il s'agit de comprendre quels sont les antécédents de ces rotations. Par les formules établies précédemment, on voit que la trace de l'image réciproque d'une rotation d'angle  $\psi$  est  $2 \cos(\frac{\psi}{2})$ . On en déduit donc une représentation bidimensionnelle  $\psi$  du groupe et on en obtient même une seconde en prenant son conjugué algébrique. Comme un caractère de  $A_5$  se factorise en un caractère de  $\tilde{A}_5$ , on a déjà :

$\frac{ G }{ C_x }$	120	120	4	6	6	10	10	10	10
$ C_x $	1	1	30	20	20	12	12	12	12
représentant	id	-id	(12)(34)	(123)	-(123)	(12345)	-(12345)	(12354)	-(12354)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi$	3	3	-1	0	0	$\phi$	$\phi$	$\bar{\phi}$	$\bar{\phi}$
$\chi'$	3	3	-1	0	0	$\bar{\phi}$	$\bar{\phi}$	$\phi$	$\phi$
$\chi_H$	4	4	0	1	1	-1	-1	-1	-1
$\chi_Y$	5	5	1	-1	-1	0	0	0	0
$\psi$	2	-2	0	1	-1	$\bar{\phi}$	$-\bar{\phi}$	$-\phi$	$\phi$
$\bar{\psi}$	2	-2	0	1	-1	$\phi$	$-\phi$	$-\bar{\phi}$	$\bar{\phi}$

#### 7.4 Table de caractère de $\tilde{A}_5$

**Proposition 15.** *Le groupe  $\tilde{A}_5$  possède deux représentations irréductibles  $\chi_4$  et  $\chi_6$  de dimension 4 et 6 respectivement*

Comme le groupe  $\tilde{A}_5$  possède 9 représentations irréductibles et que la somme des carrés de leurs dimensions vaut 120 on en déduit l'existence de  $\chi_4$  et  $\chi_6$  représentations irréductibles de dimension 4 et 6. On peut les déterminer entièrement grâce à des relations d'orthogonalité.

On remarque tout d'abord que si un caractère de  $\tilde{A}_5$  est constant sur  $\pm id$  alors il se factorise en un caractère de  $A_5$ . De plus comme les doubles transpositions sont conjuguées à leur opposé dans  $\tilde{A}_5$ , un caractère non trivial sur  $-id$  est forcément nul sur la classe de conjugaison des doubles transpositions (on peut le voir aussi en faisant le produit scalaire de sa colonne avec elle-même). On a donc :

$\chi_4$	4	-4	0	a	-a	b	-b	c	-c
$\chi_6$	6	-6	0	a'	-a'	b'	-b'	c'	-c'

En faisant le produit scalaire de  $\chi_4$  avec  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  et  $\chi_4$  on trouve

$$\begin{cases} 2 + 5a + 3b\phi - 3c\bar{\phi} = 0 \\ 2 + 5a + 3b\bar{\phi} - 3c\phi = 0 \\ 4 + 5a^2 + 3b^2 + 3c^2 = 15 \end{cases}$$

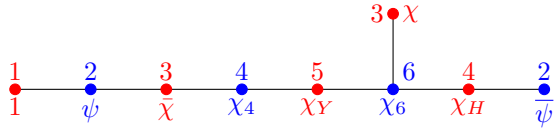
On en déduit directement de  $b = -c$  et on obtient par substitution  $13b^2 + 4b - 17 = 0$ . Cette équation du second degré possède 1 et  $-\frac{17}{13}$  comme solutions. Comme les caractères sont à valeurs dans les entiers algébriques on en déduit que  $b = 1$  et alors  $a = -1$ . Finalement en utilisant des relations d'orthogonalité, on obtient les valeurs de  $a', b', c'$  et donc la table de caractère complète :

$\frac{ G }{ C_x }$	120	120	4	6	6	10	10	10	10
$ C_x $	1	1	30	20	20	12	12	12	12
représentant	id	-id	(12)(34)	(123)	-(123)	(12345)	-(12345)	(12354)	-(12354)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi$	3	3	-1	0	0	$\phi$	$\phi$	$\bar{\phi}$	$\bar{\phi}$
$\chi'$	3	3	-1	0	0	$\bar{\phi}$	$\bar{\phi}$	$\phi$	$\phi$
$\chi_H$	4	4	0	1	1	-1	-1	-1	-1
$\chi_Y$	5	5	1	-1	-1	0	0	0	0
$\psi$	2	-2	0	1	-1	$\bar{\phi}$	$-\bar{\phi}$	$-\phi$	$\phi$
$\bar{\psi}$	2	-2	0	1	-1	$\phi$	$-\phi$	$-\bar{\phi}$	$\bar{\phi}$
$\chi_4$	4	-4	0	-1	1	1	-1	-1	1
$\chi_6$	6	-6	0	0	0	-1	1	1	-1

### 7.5 Diagramme de Dynkin associé à $\tilde{A}_5$

**Proposition 16.** *Le diagramme  $\tilde{E}_8$  est le graphe de Dynkin associé à  $\tilde{A}_5$*

On calcul simplement les  $\langle \chi\chi_i, \chi_j \rangle$  et on note en rouge les représentations héritées de  $A_5$ , en bleu les nouvelles



## 8 Conclusion

L'étude des systèmes de racines irréductibles nous a amené à construire des diagrammes de Dynkin. Après avoir classifié ces derniers, nous avons pu vérifier que chacun d'entre eux se ramenait à un système de racines irréductible, établissant ainsi leur classification. Nous nous sommes ensuite penché sur les sous-groupes finis de  $SU(2)$ , et, suivant McKay ([Rei97]), avons établi une correspondance avec les diagrammes de Dynkin. Enfin, nous avons exposé les cas de  $A_n$ ,  $D_n$  et  $E_8$  à titre d'exemple.

## A Appendice : carquois de type finis et théorème de Gabriel :

On présente finalement une autre manifestation des diagrammes de Dynkin, dans la classification des carquois de type finis. On commence par quelques définitions :

**Définition 10.** *Un carquois est un quadruplet  $Q = (\mathcal{P}, \mathcal{F}, s, b)$  où :*

- $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{F}$  sont des ensembles (resp. les points et les flèches).
- $s, b : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{P}$  sont des applications (resp. la source et le but).

En ajoutant les morphismes identité et la composition des flèches, on obtient une catégorie, la catégorie libre sur  $Q$ , notée  $\mathcal{L}(Q)$ .

**Remarque 10.** *Dans la suite on ne considère que des carquois finis, c'est-à-dire dont les ensembles  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{F}$  sont finis.*

**Définition 11.** *Une représentation d'un carquois  $Q$  est un foncteur  $\rho : \mathcal{L}(Q) \rightarrow \text{Vect}_k$  de la catégorie libre sur  $Q$  vers la catégorie des  $k$ -espaces vectoriels.*

Une représentation de carquois peut alors être vue comme une collection  $(V_p, \alpha_f)_{p \in \mathcal{P}, f \in \mathcal{F}}$  où les  $V_p$  sont des espaces vectoriels et les  $\alpha_f$  des applications linéaires de  $V_{s(f)}$  dans  $V_{b(f)}$ . L'unique représentation envoyant chaque point sur l'objet zéro de  $Vect_k$  est dite triviale. On définit alors par analogie avec la théorie des représentations de groupes, la notion de somme directe de représentations et de représentation indécomposable :

**Définition 12.** La somme directe de deux représentations  $\rho, \rho'$  d'un carquois  $Q$  est la représentation donnée par :

- pour l'objet de  $\mathcal{L}(Q)$  issu d'un point  $p \in \mathcal{P}$  (que l'on assimile au point lui même), on fait correspondre l'espace  $\rho(p) \oplus \rho'(p)$ .
- pour le morphisme de  $\mathcal{L}(Q)$  issu d'une flèche  $f \in \mathcal{F}$  (que l'on assimile à la flèche elle même), on fait correspondre l'application linéaire :

$$\rho(f) \oplus \rho'(f) = (\rho(f), \rho'(f)) : \rho(s(f)) \oplus \rho'(s(f)) \rightarrow \rho(b(f)) \oplus \rho'(b(f))$$

Une représentation est dite indécomposable si elle ne peut être écrite comme somme directe non triviale (c'est à dire qu'aucune sous représentation n'est triviale) de représentations.

Puis viennent les notions de morphismes de représentation, et en particulier les isomorphismes de représentation :

**Définition 13.** Un morphisme de représentations de carquois est une collection  $\varphi = (\varphi_p)_{p \in \mathcal{P}}$  rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V_{s(f)} & \xrightarrow{\alpha_f} & V_{b(f)} \\ \varphi_{s(f)} \downarrow & & \downarrow \varphi_{b(f)} \\ W_{s(f)} & \xrightarrow{\beta_f} & W_{b(f)} \end{array}$$

où  $(V_p, \alpha_f)_{p \in \mathcal{P}, f \in \mathcal{F}}, (W_p, \beta_f)_{p \in \mathcal{P}, f \in \mathcal{F}}$  désignent deux représentations d'un carquois  $Q$ . Si de plus les  $\varphi_p$  sont des isomorphismes alors on parle d'isomorphisme de représentations, ou encore de représentations équivalentes.

**Remarque 11.** Si une représentation est indécomposable, il en va de même de toute représentation équivalente, ce qui justifie de classer les carquois à travers leurs représentations prises à isomorphisme près, comme c'est le cas dans la définition qui suit.

**Définition 14.** Un carquois est de type fini lorsqu'il possède un nombre fini de représentations indécomposables non équivalentes.

**Théorème 6.** Un carquois connexe est de type fini si et seulement si le graphe non orienté correspondant est de Dynkin.

On ne prouvera que le « seulement si » ici, c'est à dire que les carquois de type fini sont de Dynkin, en s'inspirant de [Eti+11]. Dans le sens inverse, on pourra se référer à [BGP73].

Considérons pour cela  $V$  l'espace des représentations  $(V_p, \alpha_f)_{p, f}$  d'un carquois  $Q$  de type fini, où chaque espace vectoriel  $V_p$  est de dimension fixée  $n_p$ , que l'on peut voir comme l'espace des applications linéaires  $\alpha_f : V_{s(f)} \rightarrow V_{b(f)}$ .

Remarquons que l'on peut interpréter les éléments  $\varphi = (\varphi_p)_p$  de  $\prod_p GL_{n_p}(k)$  comme des isomorphismes de carquois, et ainsi munir  $V$  d'une action de  $\prod_p GL_{n_p}(k)$  héritée de la définition des isomorphismes de représentations :

$$\begin{array}{ccc}
 V_{s(f)} & \xrightarrow{\alpha_f} & V_{b(f)} \\
 \varphi_{s(f)} \downarrow & & \downarrow \varphi_{b(f)} \\
 V_{s(f)} & \xrightarrow{\varphi \cdot \alpha_f} & V_{b(f)}
 \end{array}$$

où  $\varphi \cdot \alpha_f = \varphi_{b(f)} \circ \alpha_f \circ \varphi_{s(f)}^{-1}$ . Mais puisque  $Q$  est de type fini, et que la dimension des sous-espaces des carquois de  $V$  est fixée, il vient que les orbites de  $\prod_p GL_{n_p}(k)$ , qui sont les classes de représentations dans  $V$  équivalentes, sont en nombre fini. En remarquant de plus que  $((V_p, \alpha_f)_{p,f}, 1)$  et  $((V_p, \alpha_f)_{p,f}, \lambda)$  sont dans la même orbite (via l'action de  $\lambda^{1/n} id_n, n = \sum n_p$ ), on conclut que  $\prod_p GL_{n_p}(k)$  agit avec un nombre fini d'orbites sur  $V \oplus k$ .

**Lemme 12.** *Si  $GL_n(k)$  agit sur un  $k$ -espace vectoriel  $V$  avec un nombre fini d'orbites alors  $\dim V < n^2$ .*

Ainsi on obtient que  $\dim V \oplus k < \sum_p n_p^2$ . En se rappelant que les éléments de  $V$  sont les applications linéaires  $\alpha_f : V_{s(f)} \rightarrow V_{b(f)}$ , on a alors que  $\dim V = \frac{1}{2} \sum_{p,q} a_{pq} n_p n_q$  où  $a_{pq}$  désigne le nombre de liens entre les sommets  $p$  et  $q$  correspondants dans le graphe non orienté au carquois considéré. On récupère ainsi l'inégalité :

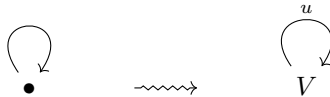
$$q((n_p)_p) = \sum_p n_p^2 - \frac{1}{2} \sum_{p,q} a_{pq} n_p n_q > 0 \text{ (car } \geq 1)$$

La construction  $V$  étant valable quelque soit la valeur des  $n_p$ , la forme quadratique  $q$  est donc définie positive sur  $\mathbf{N}$ . Mais puisque :

$$q((n_p)_p) - q((\pm n_p)_p) = \frac{1}{2} \sum_{p,q} (1 + (\pm 1)) a_{pq} n_p n_q \geq 0$$

on peut alors étendre la propriété sur  $\mathbf{Z}$ . Il vient alors que  $q$  est définie positive sur  $\mathbf{Q}$ , puis sur  $\mathbf{R}$  par densité.

Reste à montrer qu'un carquois de type fini ne peut posséder de boucle interne, ainsi on aura démontré que les seuls carquois de type finis correspondent à des diagrammes de Dynkin. Considérons pour cela le carquois formé d'une simple boucle interne : son seul cas suffit puisque s'il possède un nombre infini de représentations indécomposables, il suffira de les adjoindre aux triviales sur n'importe quel diagramme ayant une boucle interne. Alors une représentation d'un tel carquois est la donnée d'un endomorphisme  $u$  sur un espace vectoriel  $V$ .



Si  $Q$  est de type fini alors par définition il possède un nombre fini d'indécomposables. On choisit la représentation nilpotente donnée sur la base  $(e_i)_{i \leq \dim V}$  par  $u(e_i) = e_{i+1}$  pour  $i < \dim V$  et 0 sinon. Si  $u$  stabilise un sous espace  $V_1 \neq 0$ , on peut supposer que  $e_1 \in V_1$ . Alors  $(e_1, u(e_1) \dots u^{n-1}(e_1))$  est à valeurs dans  $V_1$  et c'est une base, donc  $V_1 = V$ . On construit ainsi une infinité de représentations indécomposables (en itérant sur la dimension de  $V$ ).

## Références

[BGP73] I N BERNSTEIN, I M GEL'FAND et V A PONOMAREV. "COXETER FUNCTORS AND GABRIEL'S THEOREM". In : *Russian Mathematical Surveys* 28 (1973), p. 17-32. URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:250762677>.

- 
- [Rei97] Miles REID. “McKay correspondence”. In : (1997). arXiv : alg-geom/9702016 [alg-geom].
- [Eti+11] P.I. ETINGOF et al. *Introduction to Representation Theory*. American Mathematical Society, 2011. URL : <https://math.mit.edu/~etingof/representationtheorybook.pdf>.
- [Bou] Maxime BOUCHEREAU. *Groupe d’isométries du dodécaèdre*. URL : <https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~mbouc892/isodode.pdf>.
- [Kir] Alexandre KIRILLOV. *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. URL : [https://wiki.math.ntnu.no/\\_media/ma8402/2013v/kirillov.pdf](https://wiki.math.ntnu.no/_media/ma8402/2013v/kirillov.pdf).