INÉGALITÉ DE HARNACK

LUCAS NISTOR, PAVEL MARTYNYUK

sous la direction de Cyril Imbert

TABLE DES MATIÈRES

1. INTRODUCTION

L'objet de ce mémoire est de présenter une preuve d'une généralisation de l'inégalité de Harnack due à Caffareli et Cabré [1]. Originellement, l'inégalité de Harnack est un résultat portant sur les fonctions harmoniques, i.e. les solutions de l'EDP de Laplace

$$-\Delta u = 0.$$

Elle stipule que pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert connexe et $K \subset \Omega$ compact, il existe une constante $C > 0$ telle que si u est une fonction harmonique positive sur Ω, le supremum de u sur K est majoré par C fois son infimum sur K. La preuve usuelle de cette inégalité -telle qu'on la trouve dans de nombreuses références ([3] et [4] par exemple)- repose de manière essentielle sur la formule de la moyenne, et par conséquent sur la linéarité de l'équation de Laplace. Nous présenterons cette démonstration ainsi que quelques conséquences et résultats classiques sur les fonctions harmoniques dans la section 2.

L'inégalité de Harnack se généralise cependant à une classe bien plus grande d'équations comprenant des équations non linéaires, et impose des contraintes fortes sur les solutions. Nous nous pencherons dans ce mémoire sur une classe d'EDP appelées équations uniformément elliptiques non linéaires, qui englobe de nombreuses équations apparaissant dans des contextes divers (voir section 3). Ces équations n'ont pas toujours de solutions au sens usuel, mais il apparaît qu'en exploitant une propriété de croissance de notre opérateur, on peut définir une classe plus large de solutions, appelées solutions de viscosité, qui sont caractérisées par des fonctions test régulières qui les touchent par au dessus et par en dessous (voir section 3). Cette classe de solutions a des propriétés de stabilité que les solutions usuelles n'ont pas et il existe des méthodes générales pour en construire, de sorte qu'elle apparaît naturellement quand on s'intéresse aux solutions usuelles des équations uniformément elliptiques non linéaires. L'inégalité de Harnack s'avère alors un outil puissant pour étudier ces solutions, qui peuvent a priori ne même pas être dérivables. La preuve de cette version de l'inégalité de Harnack est nettement plus ardue que dans la cas des équations harmoniques et occupe les sections 4 et 5. Dans la section 6, on explore quelques conséquences ; notamment des principes du maximum et le caractère α-höldérien des solutions.

Notre source principale pour ce mémoire est le livre de Caffareli et Cabré [1]. Nous nous sommes aussi basés sur Gilbard-Trudinger [3] et Han-Lin [4] notamment pour la section 2. Une liste complète des source se trouve à la fin du texte.

Remerciements. Nous tenons à remercier M. Cyril Imbert de nous avoir accompagné et d'avoir nourri notre enthousiasme dans notre découverte de ces jolies mathématiques.

Notations. On utilisera les notations suivantes

— $|\cdot|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$,
— $\|\cdot\|$ est la norme d'opérateur sur $M_n(R)$ où $\mathbb{R}^n$ est muni de $|.|$
— $B_r(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r \}$. Si $x_0 = 0$, on juste écrit B_r,
— $\bar{B}_r(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| \leqslant r \}$. Si $x_0 = 0$, on juste écrit $\bar{B}_r$
— $\partial B_r(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| = r \}$. Si $x_0 = 0$, on écrit juste ∂B_r,
— $\mathcal{SYM}$ est l'ensemble de matrices symétriques,
— ω_n est l'aire de la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$,
— Du est le gradient de u et D^2u est la matrice hessienne de u,
— $\mathcal{C}(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles sur Ω.
— Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, $\mathcal{C}^{m,\alpha}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^m$ sur Ω dont les dérivées d'ordre m sont α-höldérienne. On munit cet ensemble de la norme

$$\|u\|_{m,\alpha} = \sum_{|\beta| \leqslant m} \left\| \partial^\beta u \right\|_\infty + \sum_{|\beta| = m} \left| \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{\partial^\beta u(x) - \partial^\beta u(y)}{|x - y|^\alpha} \right|.$$

Dans le cas où $m = 0$, on l'omet et écrit seulement. $\mathcal{C}^\alpha$
— $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω
— $\operatorname{dist}(x, X)$ est la distance de x à X,
— $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$,
— On utilise le multi-indice pour noter les dérivés et les puissances :

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial (x^1)^{\alpha_1} \ldots \partial (x^n)^{\alpha_n}} \quad \text{et} \quad x^\alpha = (x^1)^{\alpha_1} \ldots (x^n)^{\alpha_n},$$

— $u^-(x) = \max(-u(x), 0)$ et $u^+(x) = \max(u(x), 0)$,
— λ est la mesure de Lebesgue
— $Q_l(x_0) = \prod_{i=1}^n \left(x_0^i - \frac{l}{2}, x_0^i + \frac{l}{2} \right)$ est le cube de centre x_0 et de côté l dont les côtés sont parallèles aux axes du repère. Si $x_0 = 0$, on juste écrit Q_l,

2. Le cas des fonctions harmoniques

2.1. **Inégalité de Harnack classique.** L'une des équations aux dérivées partielles les plus connues est l'équation de Laplace

$$-\Delta u = 0, \tag{1}$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} + \ldots \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2}$ est l'opérateur de Laplace. Par exemple, les parties réelles et imaginaires de fonctions holomorphes satisfont cette équation.

Définition 1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert connexe. La fonction $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est dite harmonique si $\Delta u = 0$ dans Ω.*

Les fonctions harmoniques sont très régulières. Dans la définition on a juste supposé que u est de classe $\mathcal{C}^2$, cependant il apparaît que les fonctions harmoniques sont analytiques. C'est une conséquence du théorème suivant.

Théorème 1. *Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ une fonction harmonique dans Ω. Alors pour tout $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\bar{B}_r(x_0) = \{ x \in \Omega \mid |x - x_0| \leqslant r \} \subset \Omega$, on a*

$$u(x_0) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{\bar{B}_r(x_0)} u(x) dx,$$

où ω_n est l'aire de la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$, donc $\frac{\omega_n r^n}{n} = \operatorname{volume}(B_r(x_0))$.

Démonstration. Pour tout $\rho \in (0, r)$, par le théorème de la divergence,

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\bar{B}_\rho(x_0)} \Delta u(x) dx &= \int_{\partial B_\rho(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \\ &= \rho^{n-1} \int_{\partial B_1} \frac{\partial u}{\partial \rho}(x_0 + \rho y) dS_y \\ &= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\partial B_1} u(x_0 + \rho y) dS_y. \end{aligned}$$

Donc,

$$0 = \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\partial B_1} u(x_0 + \rho y) dS_y,$$

i.e.

$$0 = \int_0^r \frac{\partial}{\partial r} \left(\int_{\partial B_1} u(x_0 + \rho y) dS_y \right) d\rho = \int_{\partial B_1} u(x_0 + r y) dS_y - \omega_n u(x_0).$$

Par conséquent,

$$\int_{\bar{B}_r(x_0)} u(x) dx = \int_0^r \rho^{n-1} \left(\int_{\partial B_1} u(x_0 + \rho y) dS_y \right) d\rho = \int_0^r \rho^{n-1} \omega_n u(x_0) d\rho = \frac{\omega_n r^n}{n} u(x_0)$$

Q.E.D.

En fait, la réciproque est également vraie :

Théorème 2. *Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ et pour tout $x_0 \in \Omega$, $r > 0$ tel que $\bar{B}(x_0, r) \subset \Omega$ on a*

$$u(x_0) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{\bar{B}_r(x_0)} u(x) dx,$$

alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $\Delta u = 0$.

Démonstration. On va suivre la preuve qui peut être trouvée dans le livre [4].

Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, 1[)$ telle que

$$\omega_n \int_0^1 r^{n-1} \psi(r) dr = 1.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on considère $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(B_\varepsilon(0))$, où $\varphi_\varepsilon(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} \psi\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)$. Alors,

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1,$$

et pour tout $x \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\varepsilon < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$

$$\begin{aligned} u * \varphi_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x - y) \varphi_\varepsilon(y) dy \\ &= \int_{B_\varepsilon(0)} u(x - y) \varphi_\varepsilon(y) dy \\ &= \int_{B_1(0)} u(x - \varepsilon z) \varphi_1(z) dz \\ &= \int_0^1 \psi(r) r^{n-1} \int_{\partial B_r(0)} u(x - \varepsilon z) dS_z \\ &= \int_0^1 \psi(r) r^{n-1} \omega_n u(x) dr \\ &= u(x). \end{aligned}$$

Donc, $u(x) = (u * \varphi_\varepsilon)(x)$ pour tout $x \in \{ y \in \Omega \colon \operatorname{dist}(y, \partial\Omega) > \varepsilon \}$. Par conséquent, u est lisse.

Par théorème de Stokes, pour tout $B_\rho(x_0) \subset \Omega$

$$\begin{aligned}\int_{\bar{B}_\rho(x_0)} \Delta u(x)dx &= \int_{\partial B_\rho(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \\ &= \rho^{n-1} \int_{\partial B_1} \frac{\partial u}{\partial \rho}(x_0+\rho y)dS_y \\ &= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\partial B_1} u(x_0+\rho y)dS_y = 0.\end{aligned}$$

On en déduit que u est harmonique. Q.E.D.

Corollaire 1. *Si une suite de fonctions harmoniques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$ vers u (avec Ω ouvert connexe), alors u est harmonique.*

Démonstration. Soit $\bar{B}(y_0, r) \subset \Omega$, alors on a

$$\begin{aligned}\frac{n}{\omega_n r^n} \int_{\bar{B}_r(y_0)} u(x)dx &= \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{\bar{B}_r(y_0)} \lim_{m\to\infty} u_m(x)dx \quad (2)\\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{\bar{B}_r(y_0)} u_m(x)dx \quad (3)\\ &= \lim_{m\to\infty} u_m(y_0) \quad (4)\\ &= u(y_0), \quad (5)\end{aligned}$$

où l'égalité (3) est vraie car u_m converge vers u uniformément sur $\bar{B}(y_0, r)$. Donc, par théorème 2, u est harmonique. Q.E.D.

Théorème 3 (Inégalité de Harnack pour les fonctions harmoniques)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert connexe. Alors pour tout $K \subset \Omega$ compact il existe une constante C qui ne dépend que de Ω et K telle que pour toute u fonction harmonique positive (i.e. $\forall x \in \Omega$ $u(x) \geqslant 0$) on a*

$$\sup_{x\in K} u(x) \leqslant C \inf_{x\in K} u(x)$$

Démonstration. Supposons que $\bar{B}_{4r}(x_0) \in \Omega$. Si $a, b \in \bar{B}_r(x_0)$, alors

$$\begin{aligned}u(a) &= \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{\bar{B}_r(a)} u(x)dx && \text{(par Théorème 1)}\\ &\leqslant \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{\bar{B}_{2r}(x_0)} u(x)dx && \text{(car } u \geqslant 0 \text{ et } \bar{B}_r(a) \subset \bar{B}_{2r}(x_0))\\ &\leqslant \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{\bar{B}_{3r}(b)} u(x)dx && \text{(car } u \geqslant 0 \text{ et } \bar{B}_{2r}(x_0) \subset \bar{B}_{3r}(b))\\ &= 3^n u(b). && \text{(par Théorème 1)}\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sup_{\bar{B}_r(x_0)} u(x) \leqslant 3^n \inf_{\bar{B}_r(x_0)} u(x)$.

Prenons $r > 0$ tel que $4r < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$. Puisque K est compact, il existe $x_1, \ldots, x_N$ tels que $\bigcup_{i=1}^N B_r(x_i) \supset K$ et $\bigcup_{i=1}^N B_r(x_i)$ est connexe. Soient $a, b \in K$. Alors il existe un sous-ensemble $\{i_1, \ldots, i_k\}$ de $\{1, \ldots, N\}$ tel que $a \in B_r(x_{i_1})$, $b \in B_r(x_{i_k})$ et l'intersection $B_r(x_{i_j}) \cap B_r(x_{i_{j+1}})$ est non vide pour tout $1 \leqslant j \leqslant k-1$. Par récurrence sur j,

$$\forall x \in B_r(x_{i_j}) \quad u(a) \leqslant 3^{nj} u(x)$$

Ainsi $u(a) \leqslant 3^{nk} u(b) \leqslant 3^{nN} u(b)$, et comme c'est vrai pour tous $a, b \in K$, on a bien

$$\sup_{x\in K} u(x) \leqslant 3^{nN} \inf_{x\in K} u(y).$$

Q.E.D.

Ce résultat a des conséquences importantes sur la structure de l'espace des fonctions harmoniques. On a par exemple le résultat suivant :

Théorème 4 (Principe de Harnack)**.** *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert connexe et $u_1, u_2 \ldots$ une suite croissante de fonctions harmoniques (au sens où $u_1(x) \leqslant u_2(x) \leqslant \ldots$ pour tout $x \in \Omega$). Alors on est dans l'un des deux cas suivants :*

(1) $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction harmonique uniformément sur tout compact.

(2) $\lim_{k\to+\infty} u_k(x) = +\infty$ *pour tout* $x \in \Omega$

Démonstration. Supposons que $\lim_{k\to+\infty} u_k(x_0) < +\infty$ pour un certain $x_0 \in \Omega$.
Montrons que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact. Soit $K \subset \Omega$ un compact contenant x_0. L'équation de Laplace étant linéaire, les fonctions $u_k - u_m$ $(m, k \in \mathbb{N}, m \leqslant k)$ sont harmoniques. Elles sont positives car $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante. Par l'inégalité de Harnack, il existe donc $C > 0$ telle que

$$\sup_{x\in K}(u_k - u_m)(x) \leqslant C \inf_{x\in K}(u_k - u_m)(x) \leqslant C(u_k - u_m)(x_0)$$

pour tous $m, k \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant k$. Comme $(u_k(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée, c'est une suite de Cauchy. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$C(u_k - u_m)(x_0) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tous}\, k, m \geqslant N \,\text{avec}\, k \geqslant m.$$

On a donc $\sup_{x\in K}(u_k - u_m)(x) \leqslant \varepsilon$ pour tous $k, m \geqslant N$ avec $k \geqslant m$, donc $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact contenant x_0, donc sur tout compact quitte à ajouter x_0. Notons $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ sa limite. Par le corollaire 1, u est harmonique. Q.E.D.

3. Équations elliptiques non linéaires

3.1. **Exemples d'EDP non linéaires.** L'équation de Laplace (1) est un exemple classique d'EDP linéaire. Cependant, de nombreux objets mathématiques et physiques importants sont décrits par des équations non linéaires. Voici quelques exemples.

(1) Équation de Monge-Ampère :

$$\det\left(D^2 u\right) = f.$$

(2) Équation des surfaces minimales :

$$\left(1 + u_y^2\right) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0.$$

(3) Équation de courbure de Gauss prescrite :

$$\det\left(D^2 u\right) - K(x)(1 + |Du|^2)^{\frac{(n+2)}{2}} = 0,$$

où $K(x)$ est la courbure de Gauss d'un graphe de $u(x)$ en un point $(x, u(x))$.

(4) Équation de Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0,$$

où S est la fonction d'action et H est le Hamiltonien, qui représente l'énergie totale du système.

Il faut donc développer des techniques pour travailler avec de telles équations. On se concentrera sur le cas des équations elliptiques non linéaires d'ordre 2.

Considérons l'équation

$$F(D^2 u(x), x) = f(x), \tag{6}$$

où $x \in \Omega$, u et f sont des fonctions définies sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et F est une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathcal{SYM} \times \Omega$. On considère $\mathcal{SYM}$ comme un espace vectoriel normé muni de la norme opérateur.

Définition 2. *F est uniformément elliptique s'il existe $\lambda, \Lambda > 0$ tels que $\lambda \leqslant \Lambda$ et pour tout $M \in \mathcal{SYM}$ et $x \in \Omega$*

$$\lambda\|N\| \leqslant F(M + N, x) - F(M, x) \leqslant \Lambda\|N\| \quad \forall N \geqslant 0. \tag{7}$$

Remarque 1. *Les nombres λ et Λ sont appelés constantes d'ellipticité.*

Remarque 2. *On appellera dans la suite constante universelle tout nombre ne dépendant que des constantes d'ellipticité et de n (la dimension de l'espace).*

Exemple 1 (Opérateurs extrémaux de Pucci)**.** *Soit* $0 < \lambda \leqslant \Lambda$. *Pour* $M \in \mathcal{S}$ *on définit les opérateurs extrémaux de Pucci comme suit :*

$$\mathcal{M}^-(M, \lambda, \Lambda) \overset{def}{=} \lambda \sum_{e_i>0} e_i + \Lambda \sum_{e_i<0} e_i, \tag{8}$$

$$\mathcal{M}^+(M, \lambda, \Lambda) \overset{def}{=} \Lambda \sum_{e_i>0} e_i + \lambda \sum_{e_i<0} e_i, \tag{9}$$

où e_i *sont les valeurs propres de* M.

Lemme 1. *On a*

$$\mathcal{M}^-(M, \lambda, \Lambda) = \inf_{\lambda I_n \leqslant A \leqslant \Lambda I_n} \mathrm{Tr}(AM)$$

et

$$\mathcal{M}^+(M, \lambda, \Lambda) = \sup_{\lambda I_n \leqslant A \leqslant \Lambda I_n} \mathrm{Tr}(AM)$$

Démonstration. La deuxième égalité découle de la première en remplaçant M par $-M$. Écrivons $M = M^+ + M^-$ avec $M^+ \geqslant 0, M^- \leqslant 0$ symétriques et $M^+M^- = 0$. Alors $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$ pour $V_1 \subset \ker M^-$ et $V_2 \subset \ker M^+$ orthogonaux. Notons p la projection orthogonale sur V_1. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AM) &= \mathrm{Tr}(AM^+) + \mathrm{Tr}(AM^-)\\ &= \mathrm{Tr}(ApM^+p) + \mathrm{Tr}(A(1-p)M^-(1-p))\\ &= \mathrm{Tr}(pApM^+) + \mathrm{Tr}((1-p)A(1-p)M^-).\end{aligned}$$

pAp restreint à V_1 a toutes ses valeurs propres plus grandes que λ et $(1-p)A(1-p)$ restreint à V_2 a toutes ses valeurs propres plus petites que Λ. Ainsi $\mathrm{Tr}(pApM^+) \geqslant \lambda \mathrm{Tr}(M^+)$, car si $v_1, .., v_m$ est une base orthogonale de V_1 dans laquelle pAp est diagonale, alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(pApM^+) &= \sum_i \left\langle pApM^+v_i \middle| v_i \right\rangle\\ &= \sum_i \left\langle M^+v_i \middle| pApv_i \right\rangle\\ &\geqslant \lambda \sum_i \left\langle M^+v_i \middle| v_i \right\rangle\\ &= \lambda \mathrm{Tr}(M^+)\end{aligned}$$

et de même $\mathrm{Tr}((1-p)A(1-p)M^-) \geqslant \Lambda \mathrm{Tr}(M^-)$, de sorte que

$$\mathcal{M}^-(M, \lambda, \Lambda) \leqslant \inf_{\lambda I_n \leqslant A \leqslant \Lambda I_n} \mathrm{Tr}(AM).$$

Pour avoir l'inégalité inverse, il suffit de prendre $A = \lambda p + \Lambda(1-p)$. Q.E.D.

Lemme 2. $\mathcal{M}^-$ *et* $\mathcal{M}^+$ *sont uniformément elliptiques.*

Démonstration. Le lemme précédent donne pour toutes $M, N \in \mathcal{SYM}$

$$\mathcal{M}^+(M, \lambda, \Lambda) + \mathcal{M}^-(N, \lambda, \Lambda) \leqslant \mathcal{M}^+(M+N, \lambda, \Lambda) \leqslant \mathcal{M}^+(M, \lambda, \Lambda) + \mathcal{M}^+(N, \lambda, \Lambda)$$
$$\mathcal{M}^-(M, \lambda, \Lambda) + \mathcal{M}^-(N, \lambda, \Lambda) \leqslant \mathcal{M}^-(M+N, \lambda, \Lambda) \leqslant \mathcal{M}^+(M, \lambda, \Lambda) + \mathcal{M}^-(N, \lambda, \Lambda)$$

Par ailleurs, on a pour $N \geqslant 0$ que

$$\mathrm{Tr}(AN) = \mathrm{Tr}(\lambda N) + \mathrm{Tr}((A - \lambda I_n)N) \geqslant \lambda \mathrm{Tr}(N) \geqslant \lambda \|N\|$$

et

$$\mathrm{Tr}(AN) \leqslant \|N\| \mathrm{Tr}(A) \leqslant n\Lambda \|N\|,$$

de sorte que

$$\lambda \|N\| \leqslant \mathcal{M}^-(N) \leqslant \mathcal{M}^+(N) \leqslant n\Lambda \|N\|.$$

En combinant ces trois dernières inégalités, on obtient que $\mathcal{M}^+$ et $\mathcal{M}^-$ sont uniformément elliptiques. Q.E.D.

Définition 3. *L'équation (6) est dite équation elliptique uniformément d'ordre* 2 *totalement non linéaire, si* F *est uniformément elliptique.*

On a défini les opérateurs de Pucci car ils sont plus faciles à manier qu'un opérateur uniformément elliptique quelconque (par exemple ils sont homogènes). On montrera plus loin dans le texte une propriété d'universalité qui permettra de ramener la preuve des résultats qui nous intéressent au cas particulier de ces opérateurs.

3.2. **Les solutions de viscosité.** Il se trouve que certaines EDPs n'ont pas de solution suffisamment régulières (i.e. $\mathcal{C}^2$ par exemple). Même si la solution classique existe, il n'est pas facile de la trouver. C'est pourquoi on veut affaiblir la notion de solution d'une équation. Pour les équations linéaires, chercher des solutions faibles peu signifier chercher des solutions dans l'espace des distributions ; dans le cas totalement non linéaire cependant cela ne fonctionne plus. Pour les équations uniformément elliptiques, un bon cadre est celui des solutions de viscosité.

Définition 4. *On dit que $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ est une sous-solution de viscosité (resp. sur-solution de viscosité) de l'equation (6) dans Ω, si $\forall x_0 \in \Omega$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tels que $u - \varphi$ a un minimum local (resp. un maximum local) en x_0 on a*

$$F(D^2\varphi(x_0), x_0) \geqslant [\textit{resp.} \leqslant] f(x_0).$$

Si u est à la fois une sous-solution et une sur-solution, on dit que u est une solution de viscosité.

Lemme 3. *Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, u est une sur-solution de viscosité [resp. sous-solution, solution] si et seulement si $F(D^2u, x_0) \leqslant [\textit{resp.} \geqslant, =] f(x_0)$ pour tout $x_0 \in \Omega$.*

Démonstration. Si u est une sous-solution de viscosité, alors u est une fonction $\mathcal{C}^2$ telle que $u-u$ admet un maximum local en x_0. Ainsi

$$F(D^2u, x_0) \leqslant f(x_0),$$

Supposons à présent $F(D^2u, x_0) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x_0 \in \Omega$. Si $u - \phi$ a un minimum local en x_0, alors $D(u - \phi)(x_0) = 0$ et $D^2(u - \phi)(x_0) \geqslant 0$, i.e.

$$Du(x_0) = D\varphi(x_0) \text{ et } D^2u(x_0) \geqslant D^2\varphi(x_0),$$

or F est croissante selon sa première variable et $F(D^2u, x_0) \leqslant f(x_0)$, donc

$$F(D^2\varphi, x_0) \leqslant f(x_0).$$

La preuve pour les sous-solutions fonctionne pareil. Le résultat pour les solutions de viscosité découle alors des deux résultats précédents. Q.E.D.

Remarque 3. *On dit que $F(D^2u, x) \geqslant [\textit{resp.} \leqslant, =] f(x)$ au sens de la viscosité dans Ω, si u est la sous-solution [resp. sur-solution, solution] de viscosité de (6). Le lemme précédent justifie cette terminologie.*

Rappelons, qu'on a déjà vu que $\mathcal{M}^+$ et $\mathcal{M}^-$ sont uniformément elliptiques. On a défini les opérateurs de Pucci car ils sont plus faciles à manier qu'un opérateur uniformément elliptique quelconque (par exemple ils sont homogènes). La propriété d'universalité suivante permet de montrer que, quitte à modifier λ et Λ, les sur/sous-solutions de toute équation uniformément elliptique se trouvent incluses dans les sur/sous-solutions de l'équation associée à un opérateur de Pucci. Pour les résultats que l'on montrera plus tard, il suffira donc de traiter le cas des opérateurs de Pucci.

Définition 5. *Soient $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ et $0 < \lambda \leqslant \Lambda$ des constantes. On pose*

$$\underline{\mathcal{S}}(\lambda, \Lambda, f) \stackrel{def}{=} \{\, u \in \mathcal{C}(\Omega) \colon \mathcal{M}^+(D^2u, \lambda, \Lambda) \geqslant f(x) \text{ au sens de viscosité dans } \Omega \,\}.$$

$$\overline{\mathcal{S}}(\lambda, \Lambda, f) \stackrel{def}{=} \{\, u \in \mathcal{C}(\Omega) \colon \mathcal{M}^-(D^2u, \lambda, \Lambda) \leqslant f(x) \text{ au sens de viscosité dans } \Omega \,\}.$$

$$\mathcal{S}(\lambda, \Lambda, f) \stackrel{def}{=} \overline{\mathcal{S}}(\lambda, \Lambda, f) \cap \underline{\mathcal{S}}(\lambda, \Lambda, f).$$

$$\mathcal{S}^*(\lambda, \Lambda, f) \stackrel{def}{=} \overline{\mathcal{S}}(\lambda, \Lambda, |f|) \cap \underline{\mathcal{S}}(\lambda, \Lambda, -|f|).$$

Lemme 4. *Soit F uniformément elliptique avec des constantes d'ellipticité λ et Λ. Pour toute u, si $F(D^2u, x) \geqslant [\textit{resp.} \leqslant] f(x)$ au sens de la viscosité, alors*

$$u \in \underline{\mathcal{S}}\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, f(x) - F(0,x)\right) \left[\textit{resp.} u \in \overline{\mathcal{S}}\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, f(x) - F(0,x)\right)\right] \quad \textit{dans } \Omega.$$

Démonstration. Nous traitons seulement le cas des sur-solutions, l'autre cas fonctionnant pareil. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ qui touche u par au dessus u en x_0, c'est-à-dire $\varphi(x_0) = u(x_0)$ et $\varphi(x) \geqslant u(x)$ au voisinage de x_0. Notons $e_1, ..., e_m$ les valeurs propres de $D^2\varphi(x_0)$. Alors

$$\begin{aligned} f(x_0) &\leqslant F(D^2\varphi(x_0), x_0) \\ &\leqslant F(0, x_0) + \Lambda \| D^2\varphi(x_0)^+ \| + \lambda \| D^2\varphi(x_0)^- \| \\ &\leqslant F(0, x_0) + \Lambda \sum_{i\colon e_i>0} e_i + \frac{\lambda}{n} \sum_{i\colon e_i<0} e_i \\ &= F(0, x_0) + \mathcal{M}^+ \left(D^2\varphi(x_0), \frac{\lambda}{n}, \Lambda \right). \end{aligned}$$

Ainsi, $u \in \overline{\mathcal{S}}(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, f(x) - F(0, x))$. Q.E.D.

Ce dernier lemme donne une propriété d'universalité de $\mathcal{S}$: quitte à changer f et les constantes d'ellipticité, les sur-solutions d'une EDP uniformément elliptique quelconque sont sur-solution pour l'opérateur de Pucci, et de même pour les sous-solutions. Donc, dans un certain sens, $\mathcal{S}$ est la classe de toutes les solutions de toutes les équations elliptiques associées à un terme source f. Notre objectif immédiat est de prouver certaines propriétés de $\mathcal{S}$, $\overline{\mathcal{S}}$, $\underline{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{S}^*$.

Lemme 5. *Si $\lambda' \leqslant \lambda \leqslant \Lambda \leqslant \Lambda'$, alors $\underline{\mathcal{S}}(\lambda, \Lambda, f) \subset \underline{\mathcal{S}}(\lambda', \Lambda', f)$.*

Démonstration. Supposons que $u \in \underline{\mathcal{S}}(\lambda, \Lambda, f)$. Fixons $x_0 \in \Omega$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ telle que $u - \varphi$ a un minimum local dans x_0. Par définition de sous-solution,

$$\mathcal{M}^+(D^2\varphi(x_0), \lambda, \Lambda) \geqslant f(x_0).$$

Cependant, $\mathcal{M}^+(D^2\varphi(x_0), \lambda', \Lambda') \geqslant \mathcal{M}^+(D^2\varphi(x_0), \lambda, \Lambda)$ car $\lambda' \leqslant \lambda$ et $\Lambda \leqslant \Lambda'$. Par conséquent,

$$\mathcal{M}^+(D^2\varphi(x_0), \lambda', \Lambda') \geqslant f(x_0),$$

i.e. $u \in \underline{\mathcal{S}}(\lambda', \Lambda', f)$. Q.E.D.

Lemme 6. *Supposons que $u \in \overline{\mathcal{S}}(\lambda, \Lambda, f)$, $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ et $\mathcal{M}^-(D^2\varphi(x), \lambda, \Lambda) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Alors $u - \varphi \in \overline{\mathcal{S}}(\lambda, \Lambda, f - g)$.*

Démonstration. Fixons $x_0 \in \Omega$. Soit $\psi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ telle que $u - \varphi - \psi$ a un maximum local dans x_0. Puisque u est une sur-solution,

$$\mathcal{M}^-(D^2(\varphi + \psi)(x_0), \lambda, \Lambda) \leqslant f(x_0).$$

Notons que

$$\mathcal{M}^-(D^2\varphi(x_0), \lambda, \Lambda) + \mathcal{M}^-(D^2\psi(x_0), \lambda, \Lambda) \leqslant \mathcal{M}^-(D^2(\varphi + \psi)(x_0), \lambda, \Lambda)$$

Donc,

$$\mathcal{M}^-(D^2\psi(x_0), \lambda, \Lambda) \leqslant f(x_0) - \mathcal{M}^-(D^2\psi(x_0), \lambda, \Lambda) \leqslant f(x_0) - g(x_0).$$

Par conséquent, $u - \varphi \in \overline{\mathcal{S}}(\lambda, \Lambda, f - g)$. Q.E.D.

4. Estimée d'Alexandrov-Bakelman-Pucci

Le but de cette section est de prouver l'estimation d'Alexandrov-Bakelman-Pucci pour les sur-solutions de viscosité.

Théorème 5 (Alexandrov-Bakelman-Pucci)**.** *Soit $u \in \overline{\mathcal{S}}(\lambda, \Lambda, f)$ dans $B_d \subset \mathbb{R}^n$ où $f \in \mathcal{C}(B_d)$. On prolonge u par 0 en dehors de B_d. Supposons que $u \in \mathcal{C}(\bar{B}_d)$ et $u|_{\partial B_d} \geqslant 0$. Alors*

$$\sup_{B_d} u^- \leqslant Cd \left(\int_{B_d \cap \{ u = \Gamma_u \}} (f^+)^n \right)^{\frac{1}{n}},$$

où Γ_u est l'enveloppe convexe de $-u^- \stackrel{def}{=} \min(u, 0)$ dans B_{2d} et C est une constante universelle.

Remarque 4. *Notons que $u^- \in \mathcal{C}(B_{2d})$ car $u|_{\partial B_d} \geqslant 0$ et $u \in \mathcal{C}(\bar{B}_d)$. C'est la raison pour laquelle Γ_u est bien définie.*

Pour faciliter la lecture, rappelons rapidement la définition de l'enveloppe convexe d'une fonction et quelques propriétés.

Définition 6. *Une fonction $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite affine si*

$$L(x) = l_0 + l(x),$$

où $l_0 \in \mathbb{R}$ et l est une fonction linéaire.

Définition 7. *On appelle paraboloïde une fonction de la forme* $P(x) = L(x) + \frac{M}{2}|x|^2$ *où* L *est affine. On appelle ouverture de* P *le nombre* $|M|$.

Le lemme suivant est une formulation géométrique du théorème de Hahn-Banach.

Lemme 7. *Supposons que* A *est un ouvert convexe et* $w\colon A \to \mathbb{R}$ *est une fonction convexe. Alors* $\forall x_o \in A$ *il existe une fonction affine* L *telle que* $L(x_0) = w(x_0)$ *et* $L(x) \leqslant w(x)$ *pour tout* $x \in A$. *Le graphe de* L *est appelé un hyperplan d'appui de* w *en* x_0 *dans* B_{3d}.

Définition 8. *Soit* $v \in \mathcal{C}(A)$ *où* A *est un ouvert convexe. L'enveloppe convexe de* v *dans* A *est définie par*

$$\Gamma(v)(x) \overset{def}{=} \sup\{\, w(x)\colon w \leqslant v \text{ dans } A,\ w \text{ est convexe dans } A\,\},$$

où $x \in A$.

Remarque 5. $\Gamma(v)$ *est convexe car le supremum d'une famille de fonctions convexes est convexe.*

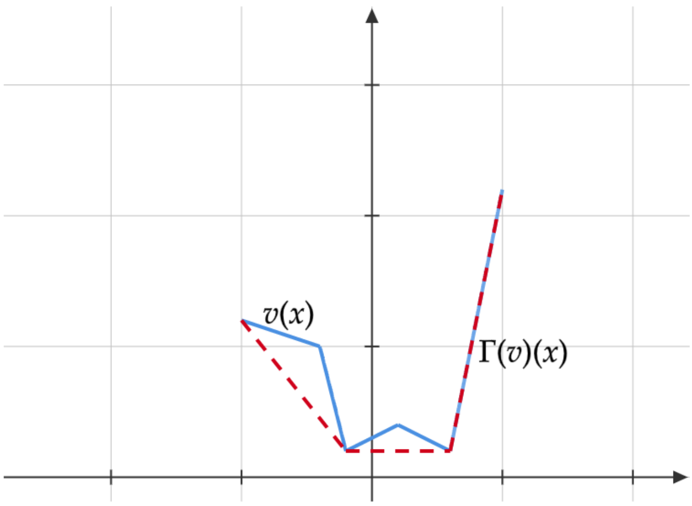

FIGURE 1. Enveloppe convexe $\Gamma(v)(x)$

Remarque 6. *D'après le lemme 7,*

$$\Gamma(v)(x) = \sup\{\, L(x)\colon L \leqslant v \text{ dans } A,\ L \text{ est affine}\,\}$$

.

Définition 9. *L'ensemble* $\{v = \Gamma(v)\,\} \overset{def}{=} \{\, x \in A\colon v(x) = \Gamma(v)(x)\,\}$ *est appelé l'ensemble de contact. Les points de* $\{v = \Gamma(v)\,\}$ *sont appelés les points de contact.*

Nous allons procéder en deux temps : nous donnons d'abord l'argument, de nature géométrique, qui permet d'obtenir le résultat sous des hypothèses de régularité sur $D^2\Gamma_u$. Nous démontrerons ensuite que Γ_u est en effet suffisamment régulière pour que l'argument géométrique qui suit puisse être appliqué.

Lemme 8. *Dans le cadre du théorème précédent, supposons que* $\Gamma_u \in \mathcal{C}^{1,1}(\bar{B}_d)$. *Alors* $\exists A \subset B_d$ *tel que* $B_d \backslash A$ *est négligeable (par rapport a la mesure de Lebesgue),* Γ_u *est deux fois différentiable en* x *pour tout* $x \in A$ *et*

$$\sup_{B_d} u^- \leqslant Cd \left(\int_A \det D^2\Gamma_u \right)^{\frac{1}{n}}, \tag{10}$$

où C *est une constante qui ne dépend que de* n.

Démonstration. Si $u^- \equiv 0$, alors $\Gamma_u \equiv 0$ et donc l'inégalité (10) est vérifiée. C'est pourquoi on peut supposer que $u^- \not\equiv 0$. Aussi $u^-|_{\partial B_d} = 0$ et $u^- \in \mathcal{C}(\bar{B}_d)$ (voir remarque 4). On en déduit que

$$M \overset{\text{def}}{=} \sup_{\bar{B}_d} u^- = \sup_{B_d} u^- = u^-(x_0)$$

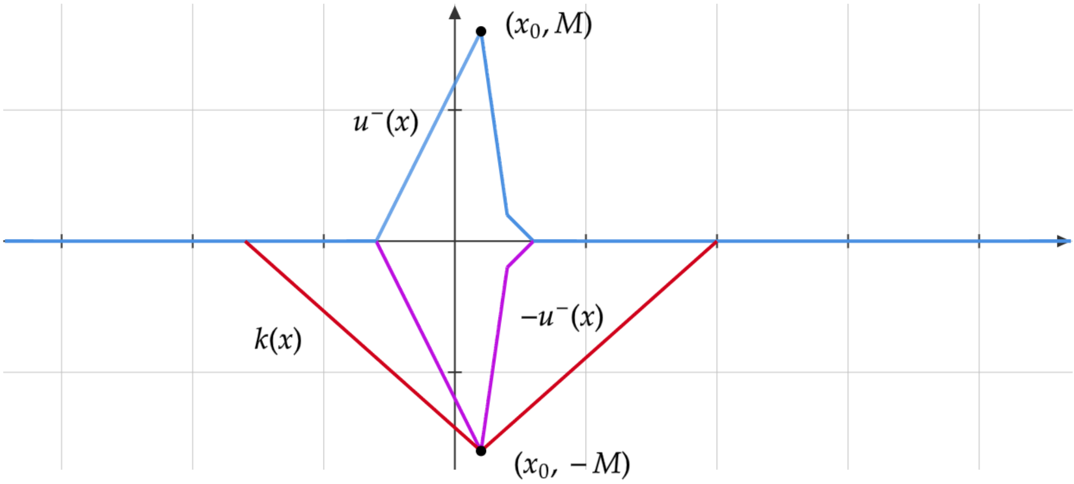

FIGURE 2. Les graphes de $k(x)$ et de u^-.

pour un certain $x_0 \in B_d$. Notons que $u^-(x_0) > 0$ car $u^- \not\equiv 0$ et $u^- \geqslant 0$.

On considère la fonction k dont le graphe est le cône dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de sommet $(x_0, -M)$ et de base $\partial B_{3d} \times \{ 0 \}$ (voir figure (2)).

Notons que $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $|\xi| < \frac{M}{3d}$ l'hyperplan $H_\xi = \{ (x, -M + \xi(x - x_0)) \colon x \in \mathbb{R}^n \}$ est un hyperlan d'appui de k en x_0 dans $B_{3d}(x_0)$.

Puisque $|\xi| < \frac{\sup u^-}{3d}$, $\bar{B}_d \subset B_{3d}(x_0)$ et $u^-|_{\bar{B}_{2d} \setminus B_d} \equiv 0$, il existe un hyperplan H'_ξ tel que H'_ξ et H_ξ sont parallèles et H'_ξ est un hyperlan d'appui de $-u^-$ dans B_{2d} en certain point $x^* \in B_d$.

Cependant, H'_ξ est aussi un hyperplan d'appui de Γ_u en x^* dans B_{2d} (voir remarque 6 et lemme 7). Par hypothèse, $\Gamma_u \in \mathcal{C}^{1,1}(\bar{B}_{2d})$, c'est pourquoi H'_ξ est un hyperplan tangent de Γ_u en x^*. On en déduit que $\xi = \boldsymbol{\nabla}\Gamma_u(B_d)$, i.e.

$$B_{\frac{M}{3d}} \subset \boldsymbol{\nabla}\Gamma_u(B_d).$$

En comparant les volumes, cela donne $\exists C > 0$ qui ne dépend que de n tel que

$$C\frac{M^n}{d^n} \leqslant \lambda\left(\boldsymbol{\nabla}\Gamma_u(B_d)\right).$$

Par théorème de Rademacher (voir [2], théorème 3.2), $\boldsymbol{\nabla}\Gamma_u$ est dérivable presque partout, i.e. $\exists A \subset B_d$ un ensemble mesurable tel que $\lambda(B_d \setminus A) = 0$ et $\boldsymbol{\nabla}\Gamma_u$ est dérivable en tout $x \in A$. Comme Γ_u est convexe, $\det D^2\Gamma_u$ est positif.

D'après la formule de l'aire pour une application lipschitzienne (voir [2], théorème 3.8), on obtient que

$$\lambda(\boldsymbol{\nabla}\Gamma_u(B_d)) \leqslant \int_A \left|\det D^2\Gamma_u\right| d\lambda = \int_A \det D^2\Gamma_u d\lambda.$$

Donc,

$$C\left(\frac{\sup u^-}{d}\right)^n = C\frac{M^n}{d^n} \leqslant \lambda(\boldsymbol{\nabla}\Gamma_u(B_d)) \leqslant \int_A \det D^2\Gamma_u d\lambda.$$

Remarque 7. *On n'a pas utilisé le fait que u est une sur-solution de viscosité. En effet, il suffit de supposer que u est continue.*

Pour démontrer le théorème 5 il nous reste à prouver que $\Gamma_u \in \mathcal{C}^{1,1}(\bar{B}_d)$, $\det D^2\Gamma_u(x) = 0$ pour presque tout $x \in B_d \setminus \{ u = \Gamma_u \}$ et $\det D^2\Gamma_u(x) \leqslant Cf^+(x)^n$ pour presque tout $x \in B_d \cap \{ u = \Gamma_u \}$ Q.E.D.

Notre stratégie pour montrer que Γ_u est régulière est de commencer par les points de contact avec u, puis d'étendre la régularité partout en exprimant les autres points comme combinaison barycentrique de points de contacts. Le lemme suivant permet d'obtenir un contrôle au niveau des points de contact :

Lemme 9. *Soient $d > 0$, f une fonction bornée sur B_d, $u \in \bar{S}(\lambda, \Lambda, f)$ et $0 \leqslant \varphi \leqslant u$ convexe telles que $0 = \varphi(0) = u(0)$. Il existe des constantes universelles $C > 0$, $0 < \nu < 1$ telles que*

$$\varphi(x) \leqslant C(\sup_{B_d} f^+)|x|^2$$

pour tout $x \in B_{\nu d}$.

Démonstration. Fixons $0 < r < \frac{d}{4}$. Nous cherchons à majorer

$$\bar{C} = \frac{1}{r^2} \sup_{B_r} \varphi.$$

Comme φ est convexe, le supremum de φ sur B_r est égal à son supremum sur ∂B_r, et comme c'est un compact, il existe $x_0 \in \partial B_r$ tel que $\varphi(x_0) = r^2 \bar{C}$. Quitte à faire une rotation par exemple, on peut supposer que $x_0 = (0, \ldots, 0, r)$.

Par lemme 7, il existe une fonction affine $l_0 + l(x)$ (avec $l_0 \in \mathbb{R}$ et $l(x)$ linéaire) qui touche par en dessous en x_0 le graphe de φ. On a donc

$$l(x_0) + l_0 = r^2 \bar{C} \quad \text{et} \quad l(x) + l_0 \leqslant r^2 \bar{C} \quad \text{pour tout } x \in B_r,$$

i.e. $l(x_0 - x) \geqslant 0$ pour tout $x \in B_r$, donc $\ker l$ est $H = \{x \colon x^n = 0\}$ l'hyperplan tangent à B_r en x_0, de sorte que $\varphi(x) \geqslant r^2 \bar{C}$ pour tout $x \in H \cap B_d$. Notons

$$A = B_{\frac{d}{2}} \cap \{x : -r < x^n < r\}.$$

On a $\partial A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \bar{B}_{\frac{d}{2}} \cap \{\, x \colon x^n = r \,\}, \\ A_2 &= \bar{B}_{\frac{d}{2}} \cap \{\, x \colon x^n = -r \,\}, \\ A_3 &= \left\{\, x \colon |x| = \frac{d}{2}, -r \leqslant x^n \leqslant r \,\right\}. \end{aligned}$$

Posons

$$P(x) = \frac{\bar{C}}{8}(x^n + r)^2 - 4\bar{C}\frac{r^2}{d^2}|x'|^2$$

avec $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $x = (x', x^n)$. On a $P \leqslant \varphi \leqslant u$ sur ∂A : en effet on a toujours $\varphi \leqslant u$, et

$$\begin{aligned} &\varphi(x)|_{A_1} \geqslant \bar{C}r^2 \quad \text{tandis que} \quad P(x)|_{A_1} = \frac{\bar{C}r^2}{2} - 4\bar{C}\frac{r^2}{d^2}|x'|^2 \leqslant \frac{\bar{C}r^2}{2} \\ &P(x)|_{A_2} = -4\bar{C}\frac{r^2}{d^2}\left|x'\right|^2 \leqslant 0 \leqslant \varphi(x)|_{A_2} \end{aligned}$$

Donc, $\varphi \geqslant P$ sur $A_1 \cup A_2$. Notons que

$$\frac{d^2}{4} = |x|^2\Big|_{A_3} = \left(\left|x'\right| + (x^n)^2\right)\big|_{A_3} \leqslant \left(\left|x'\right|^2 + r^2\right)\Big|_{A_3} \leqslant \left(\left|x'\right|^2 + \frac{d^2}{16}\right)\Big|_{A_3} \quad \left[\text{car } r < \frac{d}{4}\right]$$

donc $4\left|x'\right|^2 \geqslant \frac{3}{4}d^2$. C'est la raison pour laquelle $P(x) \leqslant \frac{1}{2}\bar{C}r^2 - \frac{3}{4}\bar{C}r^2 \leqslant 0 \leqslant \varphi(x)$

Cependant, $P(0) = \frac{\bar{C}}{8}r^2 > 0 = u$ et $0 \in A$, donc en translatant convenablement le graphe de P verticalement, on obtient un paraboloïde de la forme $P + k$ ($k \in \mathbb{R}$) qui touche u par en dessous en un point $y \in A$. Puisque $u \in \overline{S}(\lambda, \Lambda, f)$,

$$\mathcal{M}^-(D^2P(y), \lambda, \Lambda) \leqslant f(y) \leqslant \sup_{B_d} f^+,$$

Or

$$D^2P = \bar{C}\begin{pmatrix} -\frac{8r^2}{d^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8r^2}{d^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{8r^2}{d^2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathcal{M}^-(D^2P, \lambda, \Lambda) = \bar{C}\left(\frac{\lambda}{4} - 8\Lambda(n-1)\frac{r^2}{d^2}\right).$$

Avec $r \leqslant \frac{d}{8}\sqrt{\frac{\lambda}{(n-1)\Lambda}}$ on a donc $\mathcal{M}^-(D^2P, \lambda, \Lambda) \geqslant \frac{\lambda \bar{C}}{8}$, donc

$$\bar{C} \leqslant \frac{8}{\lambda} \sup_{B_d} f^+,$$

i.e.

$$\sup_{B_r} \varphi \leqslant \frac{8r^2}{\lambda} \sup_{B_d} f^+,$$

et on peut donc prendre $\nu = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\lambda}{(n-1)\Lambda}}$ Q.E.D.

En fait, un tel contrôle au niveau des points de contact suffit pour obtenir que $\Gamma_u \in \mathcal{C}^{1,1}$ et $\det D^2\Gamma_u = 0$ presque partout comme le montre le lemme qui suit. Par ailleurs, lorsque $D^2\Gamma_u(x)$ est défini, on a donc

$$D^2\Gamma_u(x) \leqslant C(\sup_{B_d} f^+) I_n$$

pour l'ordre associé aux formes quadratiques. Ainsi, toutes les valeurs propres de $D^2\Gamma_u(x)$ sont inférieures à $C(\sup_{B_d} f^+)$, donc $\det D^2\Gamma_u(x) \leqslant C^n(\sup_{B_d} f^+)^n$, de sorte que le lemme suivant permet de conclure.

Lemme 10. *Soit $u \in \mathcal{C}(\bar{B}_d)$ positive sur ∂B_d. Supposons qu'il existe $C, \varepsilon > 0$ tels que pour tout $x_0 \in \bar{B}_d \cap \{ u = \Gamma_u \}$, il existe une paraboloïde d'ouverture $2K$ qui touche Γ_u par au dessus en x_0 sur $B_\varepsilon(x_0)$, i.e. une fonction affine L telle que $\Gamma_u(x_0) = L(x_0)$ et $\Gamma_u(x) \leqslant L(x) + K|x - x_0|^2$ pour tout $x \in B_\varepsilon(x_0)$. Alors*

$$\Gamma_u \in \mathcal{C}^{1,1}(\bar{B}_d) \quad \textit{et} \quad \det D^2\Gamma_u = 0 \textit{ presque partout dans } B_d \setminus \{ u = \Gamma_u \}$$

Démonstration. Si $u^- \equiv 0$, alors $\Gamma_u \equiv 0$ et le résultat est vrai ; on supposera donc dans la suite $u^- \not\equiv 0$. En chaque point x_0 de $\{ u = \Gamma_u \}$, il existe une paraboloïde $L_1(x) + K|x - x_0|^2$ (avec L_1 affine) au dessus du graphe de Γ_u et, comme c'est une fonction convexe, un hyperplan $L_2(x)$ (avec L_2 affine) en dessous du graphe de Γ_u qui le touchent en x_0 (voir lemme 7). L'hyperplan et la paraboloïde sont donc tangents, i.e. $L_1 = L_2$, et on a donc $0 \leqslant \Gamma_u(x) - L_1(x) \leqslant K|x - x_0|^2$ pour tout $x \in B_\varepsilon(x_0)$.

Soient à présent $x_0 \in \bar{B}_d \setminus \{ u = \Gamma_u \}$ et L un hyperplan d'appui de Γ_u en x_0 dans $\bar{B}_{2d}$. Il existe alors $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ tels que $\Gamma_u = L$ partout sur l'enveloppe convexe de $\{ x_1, ..., x_{n+1} \}$ et cette enveloppe convexe contient x_0. Montrons que tous ces sommets sont dans $B_d \cap \{ u = \Gamma_u \}$ sauf au plus un, disons x_{n+1}, qui peut alors se trouver dans ∂B_{2d}.

En effet, Γ_u est le supremum des fonctions affines en dessous de u sur $\bar{B}_{2d}$ (voir remarque 6), $L \leqslant u$ sur $\bar{B}_{2d}$ et $L(x_0) = \Gamma_u(x_0)$. Ainsi, L est optimal en x_0, donc toute translation vers le haut de L donne une fonction qui dépasse u ; comme $\bar{B}_{2d}$ est compact, L et u ont donc un point de contact. De plus, x_0 est dans l'enveloppe convexe de l'ensemble de ces points de contacts ; sinon, par théorème de Carathéodory, comme $\{ L = u \}$ est compact, son enveloppe convexe aussi, donc par théorème de séparation des convexes il existe un hyperplan qui sépare strictement $\{ x_0 \}$ de cette enveloppe convexe, i.e. une fonction affine L' telle que $L'(x_0) > 0$ et $L'(x) < 0$ pour tout x dans l'enveloppe convexe des points de contact de L avec u. Alors comme $\bar{B}_{2d}$ est compact il existe $a > 0$ tel que $aL' \leqslant u - L$ sur $\{ L' \geq 0 \} \cap B_{2d}$, et comme $u - L \geqslant 0$, on a

$$aL' \leqslant u - L \quad \text{sur } B_{2d}.$$

Mais alors $L + aL' \leqslant u$ et $(L + aL')(x_0) > L(x_0)$, ce qui contredit la maximalité de L, absurde. Ainsi, x_0 est dans l'enveloppe convexe de $\{L = u\}$. Par théorème de Carathéodory, x_0 est donc combinaison barycentrique d'au plus $n+1$ éléments de $\{L = u\}$. Notons que comme on a prolongé u^- par 0 sur $\bar{B_{2d}} \setminus \bar{B}_d$,

$$\{ L = 0 \} \cap (B_{2d} \setminus \bar{B}_d) = \varnothing$$

En effet, $(B_{2d} \setminus \bar{B}_d)$ est un ouvert sur lequel $L \leqslant -u^- = 0$, donc s'il y avait égalité en un point de l'ouvert, L devrait être identiquement nulle car c'est une fonction affine, mais alors $0 \leqslant -u^- \leqslant 0$, absurde. De même, si L s'annule en deux points distincts $a, b \in \partial B_{2d}$, alors en prenant $t \in [0, 1]$ tel que

$$ta + (1 - t)b \in B_{2d} \setminus \bar{B}_d,$$

on aurait que

$$L(ta + (1 - t)b) = tL(a) + (1 - t)L(b) = 0,$$

absurde comme vu plus haut.

Cela justifie l'existence de points $x_1, ..., x_{n+1} \in \{L = u\}$ (potentiellement non distincts) dont l'enveloppe convexe contient x_0 et avec au plus un point hors de $\bar{B}_d$, qui se trouve alors dans ∂B_d.

Écrivons

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$$

avec $\lambda_i \in [0, 1]$ et $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Alors il existe i tel que $x_i \in B_d$ et $\lambda_i \geqslant \frac{1}{3n}$. En effet, si $x_i \in B_d$ pour tout i, cela suit du fait que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, et sinon, en prenant $x_{n+1} \in \partial B_{2d}$, on a que si $\lambda_i < \frac{1}{3n}$ pour tout $i \in \{ 1, \dots, n \}$, alors $\lambda_{n+1} > \frac{2}{3}$, et donc

$$|x_0| \geqslant |x_{n+1}| - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < \frac{4d}{3} - \frac{nd}{3n} = d,$$

absurde.

Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer $x_1 \geqslant \frac{1}{3n}$ et $x_1 \in B_d$. L'idée est à présent d'utiliser la régularité en x_1 pour montrer celle en x_0.

Comme $u(x_1) = L(x_1)$, L est l'hyperplan qui touche Γ_u par en dessous en x_1 (qui est unique car c'est l'hyperplan tangent à la paraboloïde qui touche Γ_u par au dessus en x_1), de sorte que $\Gamma_u(x) \leqslant L(x) + K|x - x_0|^2$ pour tout $x \in B_\varepsilon(x_0)$. On a donc pour tout $h \in B_{\varepsilon/(3n)}$ que

$$\begin{aligned}
L(x_0 + h) &\leqslant \Gamma_u(x_0 + h) \\
&= \Gamma_u \left(\lambda_1 \left(x_1 + \frac{h}{\lambda_1} \right) + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_{n+1} x_{n+1} \right) \\
&\leqslant \lambda_1 \Gamma_u \left(x_1 + \frac{h}{\lambda_1} \right) + \lambda_2 \Gamma_u(x_2) + \ldots + \lambda_{n+1} \Gamma_u(x_{n+1}) \\
&\leqslant \lambda_1 \left(L \left(x_1 + \frac{h}{\lambda_1} \right) + K \left| \frac{h}{\lambda_1} \right|^2 \right) + \lambda_2 \Gamma_u(x_2) + \ldots + \lambda_{n+1} \Gamma_u(x_{n+1}) \\
&= \lambda_1 \left(L \left(x_1 + \frac{h}{\lambda_1} \right) + K \left| \frac{h}{\lambda_1} \right|^2 \right) + \lambda_2 L(x_2) + \ldots + \lambda_{n+1} L(x_{n+1}) \\
&= L(x_0 + h) + \frac{K}{\lambda_1} |h|^2 \\
&\leqslant L(x_0 + h) + 3nK|h|^2
\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $K' = 3nK$ et $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3n}$ on a que la condition du lemme 11 qui suit est vérifiée (le domaine B_{2d} est convexe) ; Γ_u est donc $\mathcal{C}^{1,1}$.

Par théorème de Rademacher (voir [2], théorème 3.2), $D\Gamma_u$ est différentiable presque partout. On a montré plus haut que pour tout $x_0 \in \bar{B}_d \setminus \{ u = \Gamma_u \}$, en notant $L = D\Gamma_u(x_0)$, x_0 est combinaison barycentrique de points de $\{ L = u \}$, de sorte qu'il existe un segment ouvert passant par x_0 sur lequel $D\Gamma_u = L$. Il en résulte que si $D\Gamma_u$ est différentiable en x_0, $\det D^2\Gamma_u(x_0) = 0$, donc $\det D^2\Gamma_u = 0$ presque partout dans $B_d \setminus \{ u = \Gamma_u \}$. Q.E.D.

Lemme 11. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $u \in \mathcal{C}(\Omega)$. Supposons qu'il existe deux constantes positives ε et K tels que pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe L une fonction affine telle que $|u(x) - L(x)| \leqslant K|x - x_0|^2$ pour tout $x \in B_\varepsilon(x_0)$. Alors $u \in \mathcal{C}^{1,1}(\Omega)$.*

Démonstration. Montrons que $D^2u \in L^\infty(\Omega)$ où D^2u est prise au sens des distributions. Pour $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, notons

$$\Delta_h v(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v(x+h) - v(x)}{|h|}$$

pour $v \in \mathcal{C}(\Omega)$ (que l'on étend par 0 sur $\mathbb{R}^n$) et $x \in \Omega$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. L'objectif est de montrer que pour tous $i, j \in \{ 1, \dots, r \}$, $\left| \int_\Omega u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right|$ est majoré par une constante indépendante de φ fois $\|\varphi\|_{L^1}$.

Remarquons que pour tout $x_0 \in \Omega$, en prenant L une fonction affine telle que

$$|u(x) - L(x)| \leqslant K|x - x_0|^2 \quad \text{pour tout } x \in B_\varepsilon(x_0),$$

on a dès que $0 < \delta < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \left|\Delta_{\delta e_i}\Delta_{\delta e_j}u(x_0)\right| &= \left|\frac{u(x_0+\delta(e_i+e_j))+u(x_0)-u(x_0+e_i)-u(x_0+e_j)}{\delta^2}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{L(x_0+\delta(e_i+e_j))+L(x_0)-L(x_0+e_i)-L(x_0+e_j)}{\delta^2}\right| \\ &+ \frac{K}{\delta^2}(|x_0+\delta(e_i+e_j)-x_0|^2+|x_0+\delta e_i-x_0|^2+|x_0+\delta e_j-x_0|^2) \\ &= 4K. \end{aligned}$$

On a donc

$$\left|\int_\Omega u\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}\right| = \left|\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega u\Delta_{\delta e_i}\Delta_{\delta e_j}\varphi\right| = \left|\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega(\Delta_{\delta e_i}\Delta_{\delta e_j}u)\varphi\right| \leqslant \lim_{\delta\to 0}\int_\Omega\left|\Delta_{\delta e_i}\Delta_{\delta e_j}u)\right||\varphi| \leqslant 4K\|\varphi\|_{L^1}.$$

Comme le dual de $L^1(\Omega)$ est $L^\infty(\Omega)$, on a $D^2u \in L^\infty(\Omega)$. Montrons que Du est une fonction continue Lipschitz. Pour tous $x, y \in \Omega$, comme Ω est convexe,

$$|Du(x)-Du(y)| \leqslant \int_x^y \left|D^2u\right| \leqslant 4nK|x-y|$$

où l'on intègre sur le segment joignant x à y. Ainsi, $u \in \mathcal{C}^{1,1}(\Omega)$. Q.E.D.

5. Inégalité de Harnack

Dans cette section on va démontrer l'inégalité de Harnack pour les solutions de viscosité.

Théorème 6 (Inégalité de Harnack)**.** *Soit $u \in \mathcal{S}^*(\lambda,\Lambda,f)$ dans $Q_1(0)$ telle que $u \geqslant 0$, où f est continue et bornée dans $Q_1(0)$. Alors,*

$$\sup_{Q_{\frac12}} u \leqslant C\left(\inf_{Q_{\frac12}} u + \|f\|_{L^n(Q_1)}\right), \tag{11}$$

où C est une constante universelle.

Pour prouver ce théorème, on utilisera le résultat suivant

Lemme 12. *Soit $u \in \mathcal{S}^*(\lambda,\Lambda,f)$ dans $Q_{4\sqrt{n}}$ telle que $u \in \mathcal{C}\left(\bar{Q}_{4\sqrt{n}}\right)$ et $u|_{Q_{4\sqrt{n}}} \geqslant 0$, où $f \in \mathcal{C}\left(Q_{4\sqrt{n}}\right)$ est bornée. Alors il existe deux constantes universelles ε_0 et C telles que*

$$\left[\inf_{Q_{\frac14}} u \leqslant 1 \text{ et } \|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} \leqslant \varepsilon_0\right] \Longrightarrow \sup_{Q_{\frac14}} u \leqslant C.$$

On a besoin de deux outils suivants.

Lemme 13 (Existence d'une fonction barrière)**.** *Il existe une fonction lisse φ dans $\mathbb{R}^n$ et deux constantes universelles positives C et $M > 1$ telles que*

$$\varphi|_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2\sqrt{n}}} \geqslant 0, \quad \varphi|_{Q_3} \leqslant -2 \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^-(D^2\varphi,\lambda,\Lambda) \leqslant C\xi \text{ dans } \mathbb{R}^n,$$

où $\xi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}(\xi) \subset \bar{Q}_1$ et $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. De plus, $\varphi(x) \geqslant -M$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. La fonction φ est appelée une fonction barrière.

Soit Q_1 le cube unité. Nous le divisons en 2^n cubes de demi-côté. Nous répétons ce processus avec chacun de ces 2^n cubes et itérons cette opération. Les cubes obtenus de cette manière sont appelés cubes dyadiques. Si Q est un cube dyadique différent de Q_1, nous disons que $\tilde{Q}$ est le prédécesseur de Q si Q est l'un des 2^n cubes obtenus en divisant $\tilde{Q}$.

Lemme 14. *Si $A \subset B \subset Q_1$ sont les ensembles mesurables et $0 < \delta < 1$ tels que*

(1) $\lambda(A) \leqslant \delta$

(2) Si Q est un cube dyadique tel que $\lambda(A \cap Q) > \delta\lambda(Q)$, alors $\tilde{Q} \subset B$.

Alors, $\lambda(A) \leqslant \delta\lambda(B)$.

Démonstration. Les cubes dyadiques sont en nombre dénombrable et si deux cubes dyadiques sont incomparables pour l'inclusion, leur intersection est de mesure nulle. On peut donc considérer une suite de cubes dyadiques (Q_n) finie ou dénombrable qui énumère les cubes dyadiques maximaux pour l'inclusion pour lesquels $\lambda(Q_n \cap A) > \delta\lambda(Q_n)$. Si $x \notin \bigcup Q_n$, il existe des cubes arbitrairement petits qui contiennent x tels que $\frac{\lambda(Q\cap A)}{\lambda(Q)} < \delta$. Par théorème de différentiation de Lebesgue appliqué à la fonction caractéristique de A, on a donc que pour presque tout x, $x \notin \bigcup Q_n \Rightarrow x \notin A$, donc à un ensemble de mesure nulle près $A \subset \bigcup \tilde{Q}_n$. Par hypothèse (2), comme $\lambda(Q_n \cap A) > \delta\lambda(Q_n)$, $\bigcup \tilde{Q}_n \subset B$. Quitte à extraire une sous famille de $(\tilde{Q}_n)$ on peut supposer qu'ils sont disjoints à un ensemble de mesure nulle près. On a alors

$$\lambda(A) \leqslant \sum \lambda(A \cap \tilde{Q}_n) \leqslant \delta \sum \lambda(\tilde{Q}_n) = \delta\lambda(\bigcup \tilde{Q}_n) \leqslant \delta\lambda(B).$$

Q.E.D.

Lemme 15. *Il existe trois constantes universelles $\varepsilon_0 > 0$, $0 < \mu < 1$ et $M > 1$ telles que si $u \in \overline{\mathcal{S}}(|f|, \lambda, \Lambda)$ dans $Q_{4\sqrt{n}}$ (f est continue est bornée dans $Q_{4\sqrt{n}}$), $u \in \mathcal{C}(\bar{Q}_{4\sqrt{n}})$ et f satisfont*

$$u|_{Q_{4\sqrt{n}}} \geqslant 0, \quad \inf_{Q_3} u \leqslant 1 \quad \textit{et} \quad \|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} \leqslant \varepsilon_0,$$

Alors

$$\lambda(\{\, u \leqslant M \,\} \cap Q_1) > \mu.$$

Démonstration. Soit φ une fonction barrière qui existe par le lemme 13. Considérons $w \stackrel{\text{def}}{=} u + \varphi$. Notons que $w \in \overline{\mathcal{S}}(|f| + C\xi, \lambda, \Lambda)$ dans $B_{2\sqrt{n}}(0)$. Par hypothèse, $w \in \mathcal{C}(\bar{B}_{2\sqrt{n}})$, $w|_{\partial B_{2\sqrt{n}}(0)} \geqslant 0$ et $\inf_{Q_3} w \leqslant -1$. Par le théorème (5),

$$1 \leqslant C \left(\int_{\{\, w=\Gamma_w \,\}\cap B_{2\sqrt{n}}(0)} (|f| + C\xi)^n \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant C\|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}}} + C^2\|\xi\|_{L^n(\{\, w=\Gamma_w \,\}\cap Q_1},$$

car $\xi \geqslant 0$ et $\operatorname{supp}(\xi) \subset Q_1$.

Puisque $\xi \leqslant 1$,

$$1 \leqslant C\|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} + C^2 \left(\lambda(\{\, w = \Gamma_w \,\} \cap Q_1)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

En prenant ε_0 suffisamment petit, on obtient que

$$\frac{1}{2} \leqslant C^2 \left(\lambda(\{\, w = \Gamma_w \,\} \cap Q_1)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Cependant, si $w(x) = \Gamma_w(x)$, alors $w(x) \leqslant 0$, c'est pourquoi $u(x) \leqslant M$. Donc,

$$\frac{1}{2} \leqslant C^2 \left(\lambda(\{\, w = \Gamma_w \,\} \cap Q_1)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant C^2 \left(\lambda(\{\, u \leqslant M \,\} \cap Q_1)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

D'où le résultat. Q.E.D.

Lemme 16. *Supposons que u vérifie des conditions du lemme précédent. Alors pour tout $k \geqslant 1$*

$$\lambda(\{\, u > M^k \,\} \cap Q_1) \leqslant (1-\mu)^k. \tag{12}$$

Démonstration. On va raisonner par récurrence. On a déjà démontré (12) quand $k = 1$. Supposons que (12) est vraie pour $k = m$.

Posons $A \stackrel{\text{def}}{=} \{\, u > M^{m+1} \,\} \cap Q_1$ et $B \stackrel{\text{def}}{=} \{\, u > M^m \,\} \cap Q_1$. On a envie d'appliquer le lemme (14) pour $A \subset B \subset Q_1$.

Tout d'abord, $\lambda(A) \leqslant \lambda(\{\, u > M \,\}) \leqslant (1-\mu)$. Donc il reste à montrer juste la deuxième assertion du lemme.

Soit $Q = Q_{\frac{1}{2^i}}(x_0)$ un cube dyadique tel que $\lambda(Q \cap A) \geqslant (1-\mu)\lambda(Q)$. Supposons qu'il existe $\tilde{Q}$ tel que $\tilde{Q} \not\subset B$. Alors $\exists \tilde{x} \in \tilde{Q}$ tel que $u(\tilde{x}) \leqslant M^{k-1}$. Considérons l'application

$$\tilde{u}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u\left(x_0 + \frac{y}{2^i}\right)}{M^{k-1}}.$$

Notons que

$$\tilde{u}(y) \in \overline{\mathcal{S}} \left(\frac{f\left(x_0 + \frac{y}{2^i}\right)}{2^{2i} M^{k-1}}, \lambda, \Lambda \right) \quad \text{dans } Q_{4\sqrt{n}}.$$

De plus, si $y \in Q_3$, alors $x_0 + \frac{y}{2^i} \in \tilde{Q}$. Par conséquent, $\tilde{u}$ est positive et

$$\inf_{Q_3} \tilde{u} \leqslant \frac{u(\tilde{x})}{M^{k-1}} \leqslant 1.$$

Finalement,

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}}} = \frac{2^i}{2^{2i}M^{k-1}} \|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}}} \leqslant \|f\|_{L^n(Q_4\sqrt{n}} \leqslant \varepsilon.$$

Donc, $\tilde{u}$ vérifie des conditions du lemme 15. On en déduit que

$$\mu < \lambda(\{\, \tilde{u} \leqslant M \,\} \cap Q_1) = 2^{in}\lambda(\{\, u(x) \leqslant M^k \,\} \cap Q) = 2^{in}\lambda(Q \setminus A),$$

où la première égalité découle du fait que $y \mapsto x_0 + \frac{y}{2^i}$ est une application surjective de Q_1 à Q. Cependant on a supposé que

$$\lambda(Q \cap A) \geqslant (1-\mu)\lambda(Q) = \frac{1-\mu}{2^{in}},$$

c'est la raison pour laquelle

$$\lambda(Q \setminus A) + \lambda(Q \cap A) > \frac{1-\mu}{2^{in}} + \frac{\mu}{2^{in}} = \lambda(Q),$$

ce qui est absurde. Q.E.D.

Corollaire 2. *Si u vérifie des conditions du lemme (15), alors*

$$\lambda(\{\, u \geqslant t \,\} \cap Q_1) \leqslant dt^{-\varepsilon},$$

où d et ε sont les constantes universelles positives.

Démonstration. Posons $d = 1 - \mu$ et choisissons ε tel que $1 - \mu = M^{-\varepsilon}$. Q.E.D.

Ce corollaire est très important pour nous. En fait, c'est la principale propriété de la fonction u qu'on va utiliser dans la preuve de l'inégalité de Harnack, mais d'abord un autre lemme préparatoire.

Lemme 17. *Soit $u \in \underline{S}(-|f|, \lambda, \Lambda)$ dans $Q_{4\sqrt{n}}$ telle que*

$$\lambda(\{\, u \geqslant t \,\} \cap Q_1) \leqslant dt^{-\varepsilon}.$$

Aussi on suppose que

$$\|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} \leqslant \varepsilon_0.$$

Alors il existe deux constantes universelles $M_0 > 1$ et $\sigma > 0$ telles que la condition suivante est remplie : si $\exists j \leqslant 1$ et $x_0 \in \bar{Q}_{\frac{1}{4}}$ et

$$u(x_0) \geqslant \nu^{j-1} M_0,$$

où $\nu \overset{\text{def}}{=} \frac{M_0}{M_0 - \frac{1}{2}}$, alors

$$Q^j \overset{\text{def}}{=} Q_{l_j}(x_0) \subset Q_1 \quad \text{et} \quad \sup_{Q^j} u \geqslant \nu^j M_0,$$

où $l_j \overset{\text{def}}{=} \sigma M_0^{-\varepsilon/n} \nu^{-\varepsilon j/n}$.

Démonstration. Choisissons $\sigma > 0$ et $M_0 > 1$ tels que

$$\frac{\sigma^n}{2} > d2^{\varepsilon}(4\sqrt{n})^n \tag{13}$$

et

$$\sigma M_0^{-\varepsilon/n} + dM_0^{-\varepsilon} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Supposons que

$$\sup_{Q^j} u < \nu^j M_0.$$

Puisque

$$Q_{\frac{l_j}{4\sqrt{n}}}(x_0) \subset Q_1,$$

$$\lambda\left(\left\{ u \geqslant \frac{\nu^j M_0}{2} \right\} \cap Q_{\frac{l_j}{4\sqrt{n}}}(x_0)\right) \leqslant \lambda\left(\left\{ u \geqslant \frac{\nu^j M_0}{2} \right\} \cap Q_1\right).$$

En utilisant l'hypothèse du lemme, on obtient que

$$\lambda\left(\left\{ u \geqslant \frac{\nu^j M_0}{2} \right\} \cap Q_{\frac{l_j}{4\sqrt{n}}}(x_0)\right) \leqslant d\nu^{-j\varepsilon}\left(\frac{M_0}{2}\right)^{-\varepsilon}. \tag{15}$$

Considérons l'application

$$g(y) = x_0 + \frac{l_j}{4\sqrt{n}} y.$$

Notons que g est une bijections entre $Q_l(x_0)$ et $Q_{(4l\sqrt{n})/l_j}$ pour tout $l > 0$. Posons

$$v(y) \overset{\text{def}}{=} \frac{\nu^j M_0 - u(g(y))}{(\nu-1)\nu^{j-1} M_0}.$$

Notre objectif est de prouver que cette fonction vérifie des conditions du lemme 15, puis d'appliquer le corollaire 2 à cette fonction.

En effet, $v > 0$ dans $Q_{4\sqrt{n}}$ car on a supposé que $\sup_{Q^j} u < \nu^j M_0$. Aussi $u(x) > \nu^{j-1} M_0$, donc $\inf_{Q_3} v \leqslant 1$.

Par les propriétés générales des solutions,

$$v(y) \in \overline{\mathcal{S}}\left(\left(\frac{l_j}{4\sqrt{n}}\right)^2 \frac{1}{\nu^{j-1}(\nu-1)M_0} |f(g(y))|, \lambda, \Lambda\right) \quad \text{dans } Q_{4\sqrt{n}}.$$

Il reste à estimer

$$\left\| \left(\frac{l_j}{4\sqrt{n}}\right)^2 \frac{1}{\nu^{j-1}(\nu-1)M_0} |f| \right\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})}.$$

Rappelons que $\nu = \frac{M_0}{M_0 - \frac{1}{2}}$, c'est pourquoi $2(\nu-1)M_0 = \nu$.

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\frac{l_j}{4\sqrt{n}}\right)^2 \frac{1}{\nu^{j-1}(\nu-1)M_0} |f| \right\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} &= \frac{l_j}{4\sqrt{n}} \frac{1}{\nu^{j-1}(\nu-1)M_0} \|f\|_{L^n(Q_{l_j}(x_0))} \\
&= \frac{\sigma M_0^{-\varepsilon/n} \nu^{-\varepsilon j/n}}{4\sqrt{n}} \frac{1}{\nu^{j-1}(\nu-1)M_0} \|f\|_{L^n(Q_{l_j}(x_0))} \\
&\leqslant \frac{\sigma M_0^{-\varepsilon/n} \nu^{-\varepsilon j/n}}{4\sqrt{n}} \frac{1}{\nu^{j-1}(\nu-1)M_0} \varepsilon_0 \\
&\leqslant \frac{\nu^{-\varepsilon j/n}}{8\sqrt{n}} \frac{1}{\nu^{j-1}(\nu-1)M_0} \varepsilon_0 \\
&= \frac{\nu^{-\varepsilon j/n}}{4\sqrt{n}} \frac{1}{\nu^j} \varepsilon_0 \\
&\leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

où dans la troisième ligne on a utilise l'hypothèse que $\sigma M_0^{-\varepsilon/n} + dM_0^{-\varepsilon} \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui implique que $\sigma M_0^{-\varepsilon/n} \leqslant \frac{1}{2}$.

Après ces calculs sinistres, on peut enfin appliquer le corollaire 2 à la fonction v.

$$\lambda(\{ v(y) > M_0 \} \cap Q_1) \leqslant dM_0^{-\varepsilon}.$$

Par définition de v,

$$\{ u(g(y)) < \frac{\nu^j M_0}{2} \} \subset \{ v(y) > M_0 \}.$$

Puisque g est une homothétie de Q_1 à $Q_{l_j/(4\sqrt{n})}$,

$$\lambda\left(\left\{ u(g(y)) < \frac{\nu^j M_0}{2} \right\} \cap Q_{l_j/(4\sqrt{n})}\right) \leqslant \left(\frac{l_j}{4\sqrt{n}}\right)^n dM_0^{-\varepsilon}. \tag{16}$$

En utilisant (15) et (16), on obtient que

$$\left(\frac{l_j}{4\sqrt{n}}\right)^n \leqslant d\nu^{-j\varepsilon}\left(\frac{M_0}{2}\right)^{-\varepsilon} + \left(\frac{l_j}{4\sqrt{n}}\right)^n dM_0^{-\varepsilon}.$$

Puisque $dM_0^{-\varepsilon} \leqslant \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{l_j}{4\sqrt{n}}\right)^n \leqslant d\nu^{-j\varepsilon}\left(\frac{M_0}{2}\right)^{-\varepsilon}.$$

Rappelons que $l_j = \sigma M_0^{-\varepsilon/n}\nu^{-\varepsilon j/n}$, c'est pourquoi

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma M_0^{-\varepsilon/n}\nu^{-\varepsilon j/n}}{4\sqrt{n}}\right)^n \leqslant d\nu^{-j\varepsilon}\left(\frac{M_0}{2}\right)^{-\varepsilon},$$

i.e.

$$\frac{1}{2}\sigma^n \leqslant 2^\varepsilon d(4\sqrt{n})^n,$$

ce qui est en contradiction avec la définition de σ. D'où le résultat. Q.E.D.

On a déjà démontré beaucoup de propriétés de la fonction u qui vérifie des conditions du lemme 15. Le résultat suivant est presque l'inégalité de Harnack. En fait, l'inégalité de Harnack est sa conséquence instantanée.

Lemme 18. *Soit $u \in \mathcal{S}^*(\lambda, \Lambda, f)$ dans $Q_{4\sqrt{n}}$ telle que $u \geqslant 0$ et $u \in \mathcal{C}(\bar{Q}_{4\sqrt{n}})$, où f est continue et bornée dans $Q_{4\sqrt{n}}$. Supposons que $\|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} \leqslant \varepsilon_0$ et $\inf_{Q_{\frac{1}{4}}} u \leqslant 1$. Alors il existe une constante C universelle telle que*

$$\sup_{Q_{\frac{1}{4}}} u \leqslant C.$$

Démonstration. Puisque $\inf_{Q_3} u \leqslant \inf_{Q_{\frac{1}{4}}} u \leqslant 1$, u vérifie des conditions du lemme 15. Par conséquent, on peut appliquer lemme 17 à u. Rappelons que $\forall j \in \mathbb{N}^*$ on a défini $l_j = \sigma M_0^{-\varepsilon/n}\nu^{-\varepsilon j/n}$. La série $\sum_{j=1} l_j$ est convergent, c'est pourquoi il existe j_0 tel que $\sum_{j=j_0} l_j < \frac{1}{4}$. Si

$$\sup_{Q_{\frac{1}{4}}} u > \nu^{j_0-1}M_0,$$

alors $\exists x_{j_0} \in \bar{Q}_{\frac{1}{4}}$ tel que

$$u(x_{j_0}) \geqslant \nu^{j_0-1}M_0.$$

D'après le lemme 17, on obtient une suite $(x_j)_{j\geqslant j_0}$ telle que

$$\|x_{j+1} - x_j\|_\infty \leqslant \frac{l_j}{2} \quad \text{et} \quad u(x_{j+1}) \geqslant \nu^j M_0.$$

En revanche, pour tout $j \geqslant j_0$ on a

$$\|x_j\|_\infty \leqslant \|x_{j_0}\|_\infty + \sum_{k=j_0}^{j-1}\|x_{k+1} - x_k\|_\infty \leqslant \frac{1}{8} + \sum_{k=j_0}^{\infty}\frac{l_j}{2} \leqslant \frac{1}{4},$$

i.e. $x_j \in \bar{Q}_{\frac{1}{4}}$ pour tout $j \geqslant j_0$. Donc, u est non bornée sur $\bar{Q}_{\frac{1}{4}}$ ce qui est absurde, car u est continue. Q.E.D.

Démonstration du théorème 6. Pour tout $\delta > 0$ posons

$$u_\delta = \frac{u}{\inf_{Q_{\frac{1}{4}}} u + \delta + \frac{1}{\varepsilon_0}\|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})}},$$

alors $u_\delta \in \mathcal{S}^*\left(\frac{f}{\inf_{Q_{\frac{1}{4}}} u + \delta + \frac{1}{\varepsilon_0}\|f\|_{L^n}}, \lambda, \Lambda\right)$ et vérifie des conditions du lemme 12. Donc,

$$\sup_{Q_{\frac{1}{4}}} u \leqslant C\left(\inf_{Q_{\frac{1}{4}}} u + \delta + \frac{1}{\varepsilon_0}\|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})}\right).$$

En passant a la limite $\delta \to 0$, on obtient que

$$\sup_{Q_{\frac{1}{4}}} u \leqslant C'\left(\inf_{Q_{\frac{1}{4}}} u + \|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})}\right).$$

En appliquant une homothétie, on obtient que

$$\sup_{Q_{\frac{1}{16\sqrt{n}}}} u \leqslant C'' \left(\inf_{Q_{\frac{1}{16\sqrt{n}}}} u + \|f\|_{L^n(Q_1)} \right)$$

et donc on démontre l'inégalité (11) en utilisant le même argument de recouvrement qu'on a déjà vu dans la preuve du théorème 3 Q.E.D.

Cela conclut la preuve de l'inégalité de Harnack.

6. Quelques conséquences de l'inégalité de Harnack

Dans ce chapitre, nous explorons quelques conséquences de l'inégalité de Harnack sur la structure de l'ensemble des solutions d'une équation uniformément elliptique et retrouvons un certain nombre de résultats connus pour les fonctions harmoniques.

6.1. **Principe du maximum fort.** Cette sous-section est très courte mais montre déjà un peu la puissance des résultats montrés plus haut dans le cas où $f = 0$.

Fixons une bonne fois pour toutes les effets d'un changement d'échelle.

Lemme 19. *Soit* $u \in \underline{\mathcal{S}}(f, \lambda, \Lambda)$ $\left[\textit{resp. } u \in \overline{\mathcal{S}}(f, \lambda, \Lambda)\right]$. *Soit* $c > 0$. *Posons* $g(x) = f(cx)$. *Alors* $v(x) \overset{def}{=} u(cx) \in \underline{\mathcal{S}}(c^2 g, \lambda, \Lambda)$ $\left[\textit{resp. } v(x) \overset{def}{=} u(cx) \in \overline{\mathcal{S}}(c^2 g, \lambda, \Lambda)\right]$.

Démonstration. Les deux preuves étant similaires, on traite seulement le cas des sous-solutions. Soit $\psi \in \mathcal{C}^2$ touchant v par au dessus en $\frac{x_0}{c}$. Alors $\varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \psi(\frac{x}{c})$ touche u par au dessus en x_0. Ainsi,

$$\mathcal{M}^-(D^2\varphi(x_0), \lambda, \Lambda) \geqslant f(x_0),$$

i.e.

$$\frac{1}{c^2}\mathcal{M}^-\left(D^2\psi\left(\frac{x_0}{c}\right), \lambda, \Lambda\right) \geqslant g(cx_0).$$

On en déduit que $v(x) \in \underline{\mathcal{S}}(c^2 g, \lambda, \Lambda)$. Q.E.D.

Remarque 8. *Notons qu'un changement d'échelle conserve les nombres* λ, Λ *et bien sûr* n, *de sorte que les constantes universelles ne changent pas.*

Le lemme suivant est un principe du minimum pour les sur-solutions ; de la même manière, on obtient un principe du maximum pour les sous-solutions.

Lemme 20. *Soit* $u \in \overline{\mathcal{S}}(0, \lambda, \Lambda)$ *dans un ouvert connexe* Ω *de* $\mathbb{R}^n$. *Si* $u \geqslant 0$ *et* $u(x_0) = 0$ *pour un certain* $x_0 \in \Omega$, *alors* $u = 0$.

Démonstration. Si $u(x) = 0$, quitte à faire une translation, on peut supposer $x = 0$, et quitte à faire un changement d'échelle, on peut supposer $B_{\frac{1}{2}} \subset \Omega$. Comme $f = 0$, l'inégalité de Harnack devient

$$\sup_{Q_{\frac{1}{2}}} u \leqslant C \inf_{Q_{\frac{1}{2}}} u$$

de sorte que u est nulle sur un voisinage de tout point où elle s'annule ; par connexité de Ω, u est donc identiquement nulle. Q.E.D.

6.2. **Régularité höldérienne.** Rappelons que pour $0 < \alpha \leqslant 1$, $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions α-höldérienne sur Ω. On munit cet ensemble de la norme

$$\|u\|_\alpha = \|u\|_\infty + \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Un outil utile pour mesurer la régularité höldérienne est l'oscillation.

Définition 10. *Soit* u *une fonction à valeurs réelles définie sur un ouvert* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *On appelle oscillation de* u *sur* Ω *le nombre* $\mathrm{osc}_\Omega f \overset{def}{=} \sup_\Omega f - \inf_\Omega f$.

L'inégalité de Harnack implique que les solutions d'une équation uniformément elliptique sont α-höldérienne pour un certain $0 < \alpha \leqslant 1$ universel.

Lemme 21. *Soit $u \in \mathcal{S}^*(f, \lambda, \Lambda)$ dans Q_1. Il existe une constante universelle $\mu < 1$ telle que*
$$\mathrm{osc}_{Q_{\frac{1}{2}}} u \leqslant \mu \mathrm{osc}_{Q_1} u + 2\|f\|_{L^n(Q_1)}$$
De plus, $u \in \mathcal{C}^\alpha\left(Q_{\frac{1}{2}}\right)$ et on a
$$\|u\|_{\mathcal{C}^\alpha} \leqslant C(\|u\|_{L^\infty(Q_1)} + \|f\|_{L^n(Q_1)})$$
pour $\alpha > 0$ et $C > 0$ deux constantes universelles.

Démonstration. Notons $M_r = \sup\limits_{Q_r} u$ et $m_r = \inf\limits_{Q_r} u$. Alors $u - m_1$ et $M_1 - u$ appartiennent à $\mathcal{S}^*(f, \lambda, \Lambda)$ et sont positives.

Par inégalité de Harnack,
$$M_{\frac{1}{2}} - m_1 \leqslant C\left(m_{\frac{1}{2}} - m_1 + \|f\|_{L^n(Q_1)}\right)$$
et
$$M_1 - m_{\frac{1}{2}} \leqslant C\left(M_1 - M_{\frac{1}{2}} + \|f\|_{L^n(Q_1)}\right)$$
de sorte qu'en additionnant les deux inégalités on obtient
$$\mathrm{osc}_{Q_1} u + \mathrm{osc}_{Q_{\frac{1}{2}}} u \leqslant C\left(\mathrm{osc}_{Q_1} u - \mathrm{osc}_{Q_{\frac{1}{2}}} + 2\|f\|_{L^n(Q_1)}\right),$$
i.e.
$$\mathrm{osc}_{Q_{\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{C-1}{C+1}\mathrm{osc}_{Q_1} u + \frac{2C}{C+1}\|f\|_{L^n(Q_1)},$$
de sorte qu'avec $\mu = \frac{C-1}{C+1}$, on a
$$\mathrm{osc}_{Q_{2^{-1}}} u \leqslant \mu \mathrm{osc}_{Q_1} u + 2\|f\|_{L^n(Q_1)}.$$
Pour obtenir la deuxième partie du lemme, l'idée est d'itérer cette inégalité sur les cubes $Q_{2^{-i}}$. Quitte à translater et à faire des homothéties, il suffit de montrer qu'il existe $C, \alpha > 0$ des constantes universelles telles que
$$\mathrm{osc}_{Q_r} u \leqslant C(\|u\|_{L^\infty(Q_1)} + \|f\|_{L^n(Q_1)}) r^\alpha$$
pour tout $r \leqslant 1$. D'après le lemme 19,
$$u\left(\frac{x}{2^i}\right) \in \mathcal{S}^*\left(\frac{g}{2^{2i}}, \lambda, \Lambda\right) \quad \text{avec } g(x) = f\left(\frac{x}{2^i}\right).$$
On a
$$\|g\|_{L^n(Q_1)} = \left(\int_{Q_1} f(\frac{x}{2^i})^n dx\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\int_{Q_{2^{-i}}} f(y)^n 2^{in} dy\right)^{\frac{1}{n}} = 2^i \|f\|_{L^n\left(Q_{2^{-i}}\right)}.$$
Ainsi
$$\mathrm{osc}_{Q_{2^{-(i+1)}}} u \leqslant \mu \mathrm{osc}_{Q_{2^{-i}}} u + \frac{1}{2^{i-1}}\|f\|_{L^n\left(Q_{2^{-i}}\right)},$$
donc
$$\mathrm{osc}_{Q_{2^{-(i+1)}}} u \leqslant \mu \mathrm{osc}_{Q_{2^{-i}}} u + \frac{1}{2^{i-1}}\|f\|_{L^n(Q_1)}.$$
A partir de là, on montre par récurrence que
$$\mathrm{osc}_{Q_{\frac{1}{2^i}}} u \leqslant \mu^i \mathrm{osc}_{Q_1} u + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\mu^{i-1-j}}{2^{j-1}}\|f\|_{L^n(Q_1)}$$
Comme $\frac{\mu^{i-1-j}}{2^{j-1}}$ est monotone en j,
$$\sum_{j=0}^{i-1} \frac{\mu^{i-1-j}}{2^{j-1}} \leqslant i\left(2\mu^{i-1} + \frac{1}{2^i}\right) \quad [i \text{ fois la somme des premier et dernier termes}],$$
qui décroît exponentiellement.

De plus,
$$\mathrm{osc}_{Q_1} u \leqslant 2\|u\|_{L^\infty(Q_1)}.$$
Ainsi, il existe $C, \alpha > 0$ des constantes universelles telles que
$$\mathrm{osc}_{Q_{2^{-i}}} u \leqslant C 2^{-(i-1)\alpha}(\|u\|_{L^\infty(Q_1)} + \|f\|_{L^n(Q_1)}) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Comme $\text{osc}_{Q_r} u$ est décroissante en r, en prenant i tel que $2^{-i} < r \leqslant 2^{-i+1}$, on obtient

$$\text{osc}_{Q_r} u \leqslant \text{osc}_{Q_{\frac{1}{2^i}}} u \leqslant C2^{-(i-1)\alpha} \left(\|u\|_{L^\infty(Q_1)} + \|f\|_{L^n(Q_1)} \right) \leqslant Cr^\alpha \left(\|u\|_{L^\infty(Q_1)} + \|f\|_{L^n(Q_1)} \right)$$

pour tout $0 < r \leqslant 1$. Q.E.D.

Par théorème d'Arzelà-Ascoli, l'ensemble des solutions de viscosité d'une équation uniformément elliptique est donc relativement compact dans $\mathcal{C}(\Omega)$. De plus, on peut démontrer que ces ensembles sont fermés dans $\mathcal{C}(\Omega)$, de sorte qu'ils sont compacts. Un autre résultat classique pour les fonctions harmonique que l'on retrouve si $f = 0$ est le théorème de Liouville.

Lemme 22. *Si $u \in \mathcal{S}(0, \lambda, \Lambda)$ sur $\mathbb{R}^n$ est bornée, alors u est constante.*

Démonstration. L'inégalité

$$\text{osc}_{Q_{2^{-i}}} u \leqslant \mu^i \text{osc}_{Q_1} u + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\mu^{i-1-j}}{2^{j-1}} \|f\|_{L^n(Q_1)}$$

devient

$$\text{osc}_{Q_{2^{-i}}} u \leqslant \mu^i \text{osc}_{Q_1} u.$$

De plus, par le lemme 19, $\mathcal{S}(0, \lambda, \Lambda)$ est invariant par changement d'échelle, de sorte qu'appliquée à $v(x) = u\left(2^i r x\right)$, l'inégalité précédente donne

$$\text{osc}_{Q_r} u \leqslant \mu^i \text{osc}_{Q_{r2^i}} u \leqslant 2\mu^i \|u\|_\infty$$

pour tout $r > 0$.

En faisant tendre i vers l'infini, on obtient donc $\text{osc}_{Q_r} u = 0$ pour tout r, i.e. u est constante. Q.E.D.

Références

[1] Luis Caffarelli and Xavier Cabré. *Fully Nonlinear Elliptic Equations.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[2] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press, revised edition, 2015.

[3] David Gilbarg and Neil S Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer, 2nd edition, 2001.

[4] Qing Han and Fanghua Lin. *Elliptic Partial Differential Equations.* American Mathematical Society and Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 2nd edition, 2011.