Congestion, équilibres de Wardrop et prix de l'anarchie

Thibault Perret
Marc Perlade

Table des matières

1 Introduction

On cherche à modéliser et à étudier les phénomènes de congestion sur des réseaux de transport (comme le réseau routier d'une ville). Pour cela, on modélise le réseau comme un graphe orienté. Pour modéliser la congestion, on munit chaque arête d'une fonction de délai, qui exprime le temps de parcours en fonction du débit.

Les équilibres de Nash, appelés équilibres de Wardrop [2] dans le cadre de notre modèle, sont les configurations de flot où chaque agent minimise son coût individuel (ici la durée de son trajet), en supposant les décisions des autres fixées et connues.

Le modèle étudié est très simple, dans le sens où il ne prend pas compte des phénomènes de fluctuation temporelle (le flux est supposé constant dans tout le réseau). Il capture cependant de nombreux aspects de la congestion des réseaux de transport.

On s'intéressera en particulier à la notion de prix de l'anarchie, qui représente le surcoût global dû au caractère individualiste des agents.

2 Modèle

On reprend les définitions introduites dans [3]. Plus formellement, on considère une graphe orienté (V, E), où V est un ensemble fini et $E \subset V^2$ (on prendra parfois plutôt E comme un multi-ensemble, de manière à avoir plusieurs arêtes entre deux sommets). Pour $n \geqslant 1$, on appelle chemin simple de longueur n tout n-uplet d'arêtes distinctes $(e_1, \dots e_n)$ tel que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, le sommet d'arrivée de e_i est le sommet de départ de e_{i+1}. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des chemins simples du réseau, et, pour $x, y \in V$, $\mathcal{P}(x, y)$ l'ensemble des chemins simples de x à y. On fixe également $(\gamma_{x,y})_{x,y \in V} \in {\mathbb{R}_+}^{V^2}$, qu'on supposera à support dans $\left\{(x, y) \in V^2, \mathcal{P}(x, y) \neq \emptyset\right\}$ et qu'on appelera plan de transport.

À chaque arête $e \in E$, on associe une fonction de délai $T_e : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue et croissante, telle que $T_e(q)$ représente le temps pour traverser l'arête e lorsqu'elle est parcourue par un flux q.

On dira qu'un flot $q \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{P}}$ est admissible lorsqu'il est compatible avec le plan de transport, c'est-à-dire $\forall x, y \in V$, $\displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}(x,y)} q_P = \gamma_{x,y}$. On notera A l'ensemble des flots admissibles. Pour $e \in E$, on admettra la notation abusive $q_e = \displaystyle\sum_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P \ni e}} q_P$. Pour $P \in \mathcal{P}$ et $q \in A$, on notera $T_P(q) = \displaystyle\sum_{e \in P} T_e(q_e)$ la durée du chemin P avec le flot q.

3 Équilibres de Wardrop et optima collectifs

On peut maintenant introduire les deux notions qui vont nous intéresser par la suite, à savoir celles d'équilibre de Wardrop et d'optimum collectif.

Définition (Équilibre de Wardrop)**.**
Soit $q \in A$.
On dit que q est un équilibre de Wardrop lorsque, pour tous $x, y \in V$ et pour tous $P, Q \in \mathcal{P}(x, y)$ tel que $q_P > 0$, on a $T_P(q) \leqslant T_Q(q)$.
Autrement dit, q est un équilibre de Wardrop lorsque tous les chemin effectivement empruntés sont de durée minimale.

Cette définition est très naturelle : dans le cadre du réseau routier d'une ville ou d'un pays, elle correspond à des agents rationnels qui ont une connaissance parfaite de la circulation sur le reste du réseau (on peut penser à l'utilisation d'un assistant de navigation, qui recherche le chemin optimal en prenant en compte la congestion).

Définition (Coût collectif et optimum collectif)**.**
Pour $q \in A$, on note $C(q) = \displaystyle\sum_{e \in E} q_e T_e(q_e)$.

Dans notre modèle, cette quantité représente la perte de temps collective. On appelle optima collectifs les éléments de $\operatorname{argmin}(C)$.

Vu la définition, il n'est *a priori* pas évident de construire un équilibre de Wardrop. Le théorème suivant reformule le problème sous forme variationnelle de façon à rendre la preuve de l'existence plus directe.

Théorème 3.1 (Caractérisation variationnelle des équilibres de Wardrop, Beckmann, McGuire, Winsten, 1956 [4])**.**
Pour $e \in E$, on note $H_e : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ q & \longmapsto & \displaystyle\int_0^q T_e(x)\,dx \end{cases}$.
On pose $F : \begin{cases} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ q & \longmapsto & \displaystyle\sum_{e\in E} H_e(q_e) \end{cases}$.
Alors l'ensemble des équilibres de Wardrop est exactement $\operatorname{argmin}(F)$.

Preuve.
Pour tout $e \in E$, comme on a supposé T_e croissante et continue, H_e est convexe et continûment dérivable.
A est convexe.
Il en découle directement que la fonctionnelle F est convexe et continûment dérivable.

$$\forall q \in A, \nabla F(q) = \sum_{e\in E} T_e(q_e)\, u_e$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{argmin}(F) &= \left\{q \in A, \forall q' \in A, \nabla F(q)\cdot\left(q'-q\right) \geqslant 0\right\} \\
&= \left\{q \in A, \forall q' \in A, \sum_{e\in E} T_e(q_e)\left(q'_e - q_e\right) \geqslant 0\right\} \\
&= \left\{q \in A, \forall q' \in A, \sum_{e\in E} T_e(q_e) \sum_{x,y\in V}\ \sum_{P\in\mathcal{P}(x,y)} \left(q'_P - q_P\right) \geqslant 0\right\} \\
&= \left\{q \in A, \forall q' \in A, \sum_{x,y\in V}\ \sum_{P\in\mathcal{P}(x,y)} T_P(q)\left(q'_P - q_P\right) \geqslant 0\right\}
\end{aligned}$$

Soit $q \in \operatorname{argmin}(F)$.
Soit $x, y \in V$ et $P, Q \in \mathcal{P}(x,y)$ tel que $q_P > 0$.
En choisissant pour q' le plan de transport qui redirige tout le flot du chemin P sur Q, on a :
$T_P(q)(0 - q_P) + T_Q(q)(q_P + q_Q - q_Q) \geqslant 0$
$-q_P T_P(q) + q_P T_Q(q) \geqslant 0$

$T_P(q) \leqslant T_Q(q)$ car $q_P > 0$.
q est donc un équilibre de Wardrop.

Réciproquement, soit q un équilibre de Wardrop.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $q \notin \operatorname{argmin}(F)$.
Alors il existe $q' \in A$ et $x, y \in V$ tels que $\displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}(x,y)} T_P(q)\left(q'_P - q_P\right) < 0$.
Il existe $Q \in \mathcal{P}(x, y)$ tel que $T_Q(q) > 0$.
En utilisant le fait que q est un équilibre de Wardrop,

$$T_Q(q) \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}(x,y) \\ q_P > 0}} \left(q'_P - q_P\right) + \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}(x,y) \\ q_P = 0}} T_P(q)\, q'_P < 0$$

Dans la somme de droite, comme les q'_P sont positifs, toujours grâce au fait que q est un équilibre de Wardrop,

$$T_Q(q) \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}(x,y) \\ q_P > 0}} \left(q'_P - q_P\right) + \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}(x,y) \\ q_P = 0}} T_Q(q)\, q'_P < 0$$

En regroupant, et comme $T_Q(q) > 0$,

$$\sum_{P \in \mathcal{P}(x,y)} q'_P < \sum_{P \in \mathcal{P}(x,y)} q_P$$

Comme q et q' sont admissibles, les deux sommes doivent être égales $\gamma_{x,y}$: on a une absurdité, et $q \in \operatorname{argmin}(F)$.

Corollaire 3.2.
Il existe un équilibre de Wardrop.
Plus précisément, l'ensemble des équilibres de Wardrop est un compact convexe non vide.
Si de plus les fonctions de délai $(T_e)_{e \in E}$ sont strictement croissantes, alors les flots de bords $(q_e)_{e \in E}$ correspondant à un équilibre de Wardrop sont uniques.

Preuve.
Il suffit de montrer que A est un compact. En effet, la fonctionnelle F du théorème précédent est continue et convexe. La deuxième partie du théorème découle simplement du fait que si, pour tout $e \in E$, T_e est strictement croissante, alors H_e est strictement convexe, et F est alors une fonction strictement convexe des flots de bords.
A est clairement fermé. Pour le caractère borné, on peut remarquer que pour $q \in A$ et $P \in \mathcal{P}$, on a $0 \leqslant q_P \leqslant \gamma_{xy}$, où x et y sont les extrémités de P.

Remarque.
La compacité de A implique également l'existence d'un optimum collectif.

Corollaire 3.3 (Les optima collectifs comme équilibres de Wardrop)**.**
Soit $q \in A$. On suppose que les fonctions de délai sont continûment dérivables, et que pour tout $e \in E$, $q \mapsto qT_e(q)$ est convexe.
Alors l'optimum collectif est atteint pour les équilibres de Wardrop associés aux fonctions de délai définies par $\tilde{T_e} : q \mapsto T_e(q) + qT_e'(q)$.

Preuve.
On rappelle l'expression de la fonctionnelle coût collectif :

$$C : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ q & \longmapsto & \displaystyle\sum_{e \in E} q_e T_e(q_e) \end{array} \right.$$

D'après les hypothèses, comme pour tout $e \in E$, $q \mapsto qT_e(q)$ est convexe et continûment dérivable, $\tilde{T_e}$, sa dérivée, est croissante et continue.
On peut donc appliquer le théorème précédent : l'ensemble des équilibres de Wardrop associés aux fonctions de délai modifiées est $\operatorname{argmin}(F)$, où

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ q & \longmapsto & \displaystyle\sum_{e \in E} \int_0^q \tilde{T_e}(x)\, dx \end{array} \right.$$

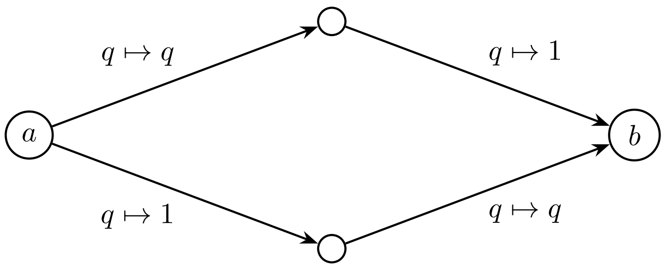
On vérifie que $F = C$: c'est donc aussi l'ensemble des optima collectifs.

Remarque.
Les énoncés 3.1 et 3.3 sont en fait totalement symétriques ! Ainsi, le premier théorème peut être reformulé pour dire que les équilibres de Wardrop sont eux-même les optimaux collectifs associés aux fonctions de délais $\tilde{T_e}(q) \mapsto \dfrac{1}{q}\displaystyle\int_0^q T_e(x)\, dx$ (prolongées par continuité en 0).

D'ailleurs, dans le cas où les fonctions de délai sont des fonctions puissance de même exposant, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \geqslant 1$ et $(k_e)_{e \in E} \in {\mathbb{R}_+}^E$ tels que pour tout $e \in E$ on ait $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $T_e(x) = k_e x^\alpha$, les équilibres de Wardrop sont exactement les optima globaux (en utilisant l'un ou l'autre des théorèmes). Il est possible de dériver de cette idée une majoration grossière du prix de l'anarchie (voir partie 5), que nous n'aborderons pas (on verra une majoration plus fine).

4 Paradoxe de Braess [1]

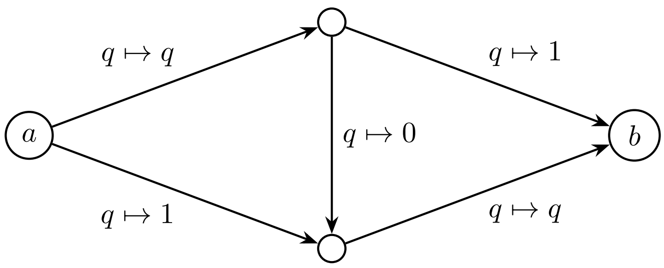
Tentons d'éclairer la notion d'équilibre de Wardrop avec un exemple simple. Considérons le réseau suivant, muni de fonctions de délai :



Le plan de transport est $\gamma_{ab} = 1$.

L'équilibre de Wardrop est alors unique, et il est très facile à déterminer : le flot se sépare de façon égale entre le chemin du haut et le chemin du bas. Le temps de parcours pour tous les agents vaut exactement $\frac{3}{2}$.

Imaginons maintenant qu'en tentant de désencombrer le réseau, on ajoute une connexion entre les deux nœuds centraux. On la suppose instantanée.



Il y a alors trois chemins entre a et b. Le chemin du haut, le chemin qui emprunte la connexion transverse, et le chemin du bas, qu'on numérotera respectivement 1, 2 et 3. On a :

$$\begin{cases} T_1 = q_1 + q_2 + 1 \\ T_2 = q_1 + 2q_2 + q_3 = q_2 + \gamma = q_2 + 1 \\ T_3 = q_3 + q_2 + 1 \end{cases}$$

On voit qu'à nouveau, l'équilibre de Wardrop est unique : $q_1 = q_3 = 0$ et $q_2 = 1$. Le temps de parcours est toujours identique pour tous les agents, mais il vaut cette fois 2.

C'est le paradoxe de Braess : il est possible, en ajoutant des connexions à un réseau, d'empirer la situation. On comprend très bien pourquoi dans notre exemple : quand on rajoute la connexion, la première solution, bien qu'optimale collectivement, n'est plus stable. Les agents vont être tentés d'emprunter la route transverse pour réduire leur temps de trajet de $\frac{3}{2}$ à seulement 1. Clairement, les équilibres de Wardrop ne conduisent pas toujours à des optima collectifs. Cependant, on peut tenter de quantifier à quel point ils s'en éloignent. C'est l'objectif de la section suivante.

5 Contrôle du prix de l'anarchie, réseaux de Pigou

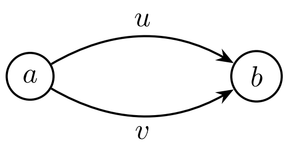
Dans cette section, on s'intéresse à la notion de prix de l'anarchie (PoA), qui mesure à quel point la société perd collectivement à s'organiser de façon individuelle plutôt que d'accepter une autorité centrale planificatrice. On s'intéressera d'abord à des réseaux très simples, les réseaux de Pigou, avant de voir qu'ils sont en fait les pires réseaux en terme de prix de l'anarchie, et qu'ils sont donc tout ce qu'il y a à étudier pour comprendre les obstructions à un faible prix de l'anarchie.

Définition (Prix de l'anarchie)**.**
On définit le prix de l'anarchie comme

$$\mathrm{PoA} = \max_{q \in W} \left(\frac{C(q) - \min(C)}{\min(C)} \right)$$

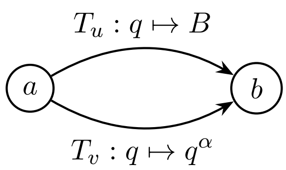
en notant W l'ensemble des équilibres de Wardrop. On prend la convention $0/0 = 0$.
Notons que cette quantité est bien définie car l'ensemble des équilibres de Wardrop est un compact non vide, et qu'on peut vérifier que si $\min(C) = 0$, alors $\forall q \in W, C(q) = 0$.

Définition (Réseau de Pigou [5])**.**
Un réseau de Pigou est un graphe à deux sommets et deux arêtes :



où T_u est une fonction constante.
On note $\gamma = \gamma_{ab}$.

Exemple.
On fixe $\alpha \geqslant 1$ et $B > 0$ et on considère le réseau de Pigou suivant :



Les équilibres de Wardrop peuvent être facilement déterminés.
Lorsque $\gamma \leqslant B^{\frac{1}{\alpha}}$, l'arête v est toujours au moins aussi intéressante que l'arête u, c'est donc la seule à être empruntée.
Lorsque $\gamma \geqslant B^{\frac{1}{\alpha}}$, l'arête u doit être empruntée, ce impose un flot de $B^{\frac{1}{\alpha}}$ sur

l'arête v.
Pour résumer, il y a toujours un unique équilibre de Wardrop et :

$$(q_{W,u}, q_{W,v}) = \begin{cases} (0, \gamma) & \text{si } \gamma \leqslant B^{\frac{1}{\alpha}} \\ \left(\gamma - B^{\frac{1}{\alpha}}, B^{\frac{1}{\alpha}}\right) & \text{si } \gamma \geqslant B^{\frac{1}{\alpha}} \end{cases}$$

On peut aussi déterminer explicitement les optima collectifs.
Il s'agit de minimiser $C : q_v \mapsto q_v^{\alpha+1} + B\,(\gamma - q_v)$ sur l'intervalle $[0, \gamma]$, ce qui donne un unique optimum collectif pour tout γ :

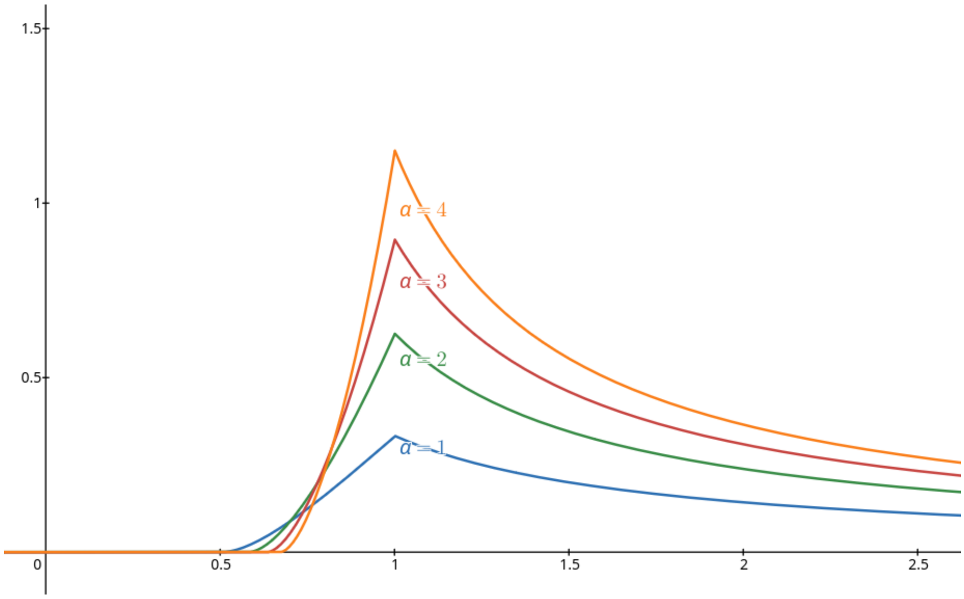
$$(q_{O,u}, q_{O,v}) = \begin{cases} (0, \gamma) & \text{si } \gamma \leqslant \left(\dfrac{B}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ \left(\gamma - \left(\dfrac{B}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(\dfrac{B}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) & \text{si } \gamma \geqslant \left(\dfrac{B}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \end{cases}$$

Les coûts collectifs associés sont :

$$C_W = \begin{cases} \gamma^{\alpha+1} & \text{si } \gamma \leqslant B^{\frac{1}{\alpha}} \\ B\gamma & \text{si } \gamma \geqslant B^{\frac{1}{\alpha}} \end{cases}$$

$$C_O = \begin{cases} \gamma^{\alpha+1} & \text{si } \gamma \leqslant \left(\dfrac{B}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ \gamma - \alpha\left(\dfrac{B}{\alpha+1}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} & \text{si } \gamma \geqslant \left(\dfrac{B}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \end{cases}$$

On peut tracer $\text{PoA} = \dfrac{C_W - C_O}{C_O}$ en fonction de γ :



Courbes de PoA en fonction de γ pour plusieurs valeurs de α (avec $B = 1$).

Le prix de l'anarchie est toujours maximal pour $\gamma = B^{\frac{1}{\alpha}}$, et vaut alors

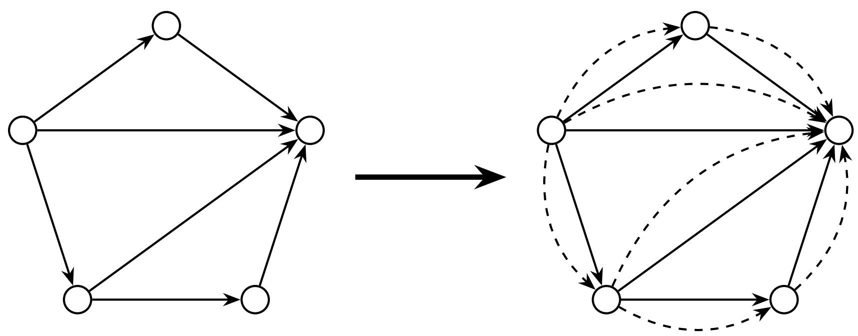
$$\frac{1}{\frac{(\alpha+1)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\alpha} - 1} \sim \frac{\alpha}{\log(\alpha)} \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} +\infty$$

Si on s'autorise des fonctions de délai arbitraires, le prix de l'anarchie n'est pas majoré !
Cependant, ce exemple reste important, car il représente, dans une certaine mesure, la seule obstruction à un faible prix de l'anarchie, à savoir des fonctions présentant de fortes « marches ».

Le théorème suivant, dont la preuve est assez élégante, est central dans l'étude du prix de l'anarchie, car il permet de se ramener systématiquement à des réseaux de Pigou pour le contrôler.

Théorème 5.1 (Roughgarden, 2003 [6])**.**
Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de fonctions de délai, qu'on suppose en plus continûment dérivables et telles que $q \mapsto qT(q)$ est convexe pour tout $T \in \mathcal{D}$ (hypothèses du théorème 3.3). On suppose que toutes les fonction de délai constantes (positives) appartiennent à $\mathcal{D}$.
Alors pour tout réseau muni d'un plan de transport quelconque et dont les fonctions de délai appartiennent toutes à $\mathcal{D}$ il existe un réseau de Pigou à fonctions de délai également dans $\mathcal{D}$ dont le prix de l'anarchie est au moins aussi grand.

Preuve.
Fixons un tel réseau.
On fixe q_W un équilibre de Wardrop pour lequel le prix de l'anarchie est atteint.
On construit un nouveau réseau, avec le même plan de transport, dans lequel chaque arête est dédoublée. Pour chaque arête e, l'une des deux copies conserve la même fonction de délai T_e, la seconde est munie d'une fonction de délai constante égale à $T_e(q_{W,e})$.
Toutes les quantités concernant ce second réseau seront dénotées avec une tilde.



Il est clair que les optima collectifs du second réseau sont au moins aussi bons que ceux du réseau d'origine.
En outre, $\tilde{q}_W$, obtenu à partir de q_W en fixant $\tilde{q}_{W,\tilde{P}} = 0$ pour tout $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P}$, est un équilibre de Wardrop du nouveau réseau.
Sur le second réseau, on construit un nouveau flot $\tilde{q}_O$ à partir de $\tilde{q}_W$ en rééquilibrant localement le flot sur les paires d'arêtes jumelles.
Plus précisément, pour $e \in E$, on pose

$$\tilde{C}_e : \tilde{q} \mapsto \tilde{q} T_e(\tilde{q}) + (q_{W,e} - \tilde{q}) T_e(q_{W,e})$$

On choisit pour $\tilde{q}_{O,e}$ un minimiseur de $\tilde{C}_e$ sur $]0, q_{W,e}[$. C'est possible car $\tilde{C}_e$ est convexe et que $\tilde{C}_e(0) = \tilde{C}_e(q_{W,})$ (si il y a un minimiseur au bord, la fonction est constante sur l'intervalle). On fixe le flot sur l'arête jumelle à $q_{W,e} - \tilde{q}_{O,e}$ de manière à ce que $\tilde{q}_O$ reste admissible.
Le flot $\tilde{q}_O$ ainsi construit, obtenu simplement en rééquilibrant localement l'équilibre de Wardrop, est en fait un optimum collectif !
En effet, pour $e \in E$, comme $\tilde{q}_{O,e}$ minimise $\tilde{C}_e$ sur un intervalle ouvert, on a $\tilde{C}'_e(\tilde{q}_{O,e}) = 0$, d'où

$$T_e(q_{W,e}) = T_e(\tilde{q}_{O,e}) + \tilde{q}_{O,e} T'_e(\tilde{q}_{O,e})$$

ce qu'on peut réécrire

$$\tilde{T}_e(\tilde{q}_{W,e}) = \tilde{T}_e(\tilde{q}_{O,e}) + \tilde{q}_{O,e} \tilde{T}'_e(\tilde{q}_{O,e})$$

En notant f l'arête jumelle de e, on a également

$$\tilde{T}_f(\tilde{q}_{W,f}) = \tilde{T}_f(\tilde{q}_{O,f}) + \tilde{q}_{O,f} \tilde{T}'_f(\tilde{q}_{O,f})$$

car $\tilde{T}_f$ est constante.
En regroupant ces deux observations, on a, pour tout $\tilde{e} \in \tilde{E}$,

$$\tilde{T}_{\tilde{e}}(\tilde{q}_{W,\tilde{e}}) = \tilde{T}_{\tilde{e}}(\tilde{q}_{O,\tilde{e}}) + \tilde{q}_{O,\tilde{e}} \tilde{T}'_{\tilde{e}}(\tilde{q}_{O,\tilde{e}})$$

Comme $\tilde{q}_W$ est un équilibre de Wardrop, d'après le théorème 3.3, $\tilde{q}_O$ est un optimum collectif.
Pour $e \in E$, on note G_e le réseau de Pigou obtenu en munissant les sommets et la paire d'arêtes jumelles correspondant à e du plan de transport $\gamma = q_{W,e}$.
Il est clair que $\tilde{q}_W$ et $\tilde{q}_O$ induisent respectivement un équilibre de Wardrop et un optimum collectif sur G_e.
On a donc :

$$\frac{\tilde{C}_e(\tilde{q}_{W,e}) - \tilde{C}_e(\tilde{q}_{O,e})}{\tilde{C}_e(\tilde{q}_{O,e})} \leqslant \mathrm{PoA}(G_e)$$

En notant $\tilde{C}$ le coût collectif du second réseau, et en utilisant l'inégalité $\dfrac{a+b}{c+d} \leqslant \max\left(\dfrac{a}{c}, \dfrac{b}{d}\right)$ valable pour tous quadruplets de réels positifs, on a :

$$\frac{\tilde{C}(\tilde{q}_W) - \tilde{C}(\tilde{q}_O)}{\tilde{C}(\tilde{q}_O)} \leqslant \max_{e \in E}(\mathrm{PoA}(G_e))$$

Comme $\min(C) \leqslant \tilde{C}(\tilde{q}_O)$ et $C(q_W) = \tilde{C}(\tilde{q}_W)$, on peut conclure :

$$\text{PoA} \leqslant \max_{e \in E} \left(\text{PoA}(G_e)\right)$$

Corollaire 5.2.
On suppose que toutes les fonctions de délai sont polynomiales à coefficients positifs de degré au plus $d \geqslant 1$. Alors

$$\text{PoA} \leqslant \frac{1}{\frac{(d+1)^{\frac{d+1}{d}}}{d} - 1}$$

et cette inégalité est optimale.
En particulier, le prix de l'anarchie est en $\mathcal{O}\left(\frac{d}{\log(d)}\right)$ quand $d \to \infty$, et, si toutes les fonctions de délai sont affines, il est majoré par $\frac{1}{3}$.

Preuve.
Quitte à remplacer les arêtes par des chaînes de plusieurs arêtes, on peut supposer que toutes les fonctions de délai sont de la forme $q \mapsto Kq^n$, avec $K \geqslant 0$ et $n \in [\![0, d]\!]$.
Soit $K \geqslant 0$, $n \in [\![0, d]\!]$, $B \geqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$. Il suffit de majorer le prix de l'anarchie pour le réseau de Pigou suivant :

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, bend left, "q \mapsto B"] \arrow[rr, bend right, "q \mapsto Kq^n"'] & & b \end{tikzcd}$$

Si $K = 0$, il est clair que $\text{PoA} = 0$, sans perte de généralité, on peut donc normaliser les fonctions de délai et supposer que $K = 1$.
Cela nous ramène exactement à un calcul déjà traité lors d'un exemple précédent.

Les majorations du prix de l'anarchie vus jusque là, bien qu'optimaux, concernent seulement le pire des cas. Dans beaucoup de situations, il peut rester très bas. Parmi celles qui semblent très réalistes, on peut citer :
— Un trafic faible
— Un trafic fort
— Un problème très symétrique
C'est l'objet des propositions suivantes.

Proposition 5.3 (Trafic faible)**.**
On suppose que pour tout $e \in E$, $T_e(0) > 0$ (hypothèse raisonnable, dans le cas d'un réseau routier par exemple).
Alors, à réseau fixé, $\text{PoA} \underset{\gamma \to 0}{\longrightarrow} 0$.
Autrement dit, le prix de l'anarchie est négligeable pour un trafic faible.

Preuve.
Fixons un plan de transport γ.
On note $n(\gamma) = \sum_{\substack{x,y\in V\\ x\neq y}} \gamma_{xy}$. Alors pour tout $q \in A$, on a :

$$n(\gamma) \leqslant \sum_{e\in E} q_e$$

$$\forall e \in E, q_e \leqslant n(\gamma)$$

On rappelle les notations $C : q \mapsto \sum_{e\in e} q_e T_e(q_e)$ et $F : q \mapsto \sum_{e\in e} \int_0^{q_e} T_e(x)\,dx$.
Soit $q \in A$.

$$\begin{aligned}0 &\leqslant C(q) - F(q)\\ &= \sum_{e\in E} \int_0^{q_e} \left(T_e(q_e) - T_e(x)\right) dx\\ &\leqslant n(\gamma) \sum_{e\in E} \left(T_e(n(\gamma)) - T_e(0)\right)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}&\max_{q\in W} (C(q) - \min(C)) = \max_{q\in \operatorname{argmin}(F)} (C(q)) - \min(C)\\ &\leqslant \max_{q\in \operatorname{argmin}(F)} (F(q)) - \min(C) + n(\gamma) \sum_{e\in E} \left(T_e(n(\gamma)) - T_e(0)\right)\\ &= \min(F) - \min(C) + n(\gamma) \sum_{e\in E} \left(T_e(n(\gamma)) - T_e(0)\right)\\ &\leqslant n(\gamma) \sum_{e\in E} \left(T_e(n(\gamma)) - T_e(0)\right)\end{aligned}$$

D'autre part, $\min(C) \geqslant \min_{q\in A} \left(\sum_{e\in E} q_e T_e(0)\right) \geqslant n(\gamma) \min_{e\in E} (T_e(0))$.
Ainsi :

$$\text{PoA} \leqslant \frac{1}{\min_{e\in E}(T_e(0))} \sum_{e\in E} \left(T_e(n(\gamma)) - T_e(0)\right)$$

Toutes les constantes dans l'expression étant indépendantes de γ, on peut conclure par continuité en 0 des fonctions de délai.

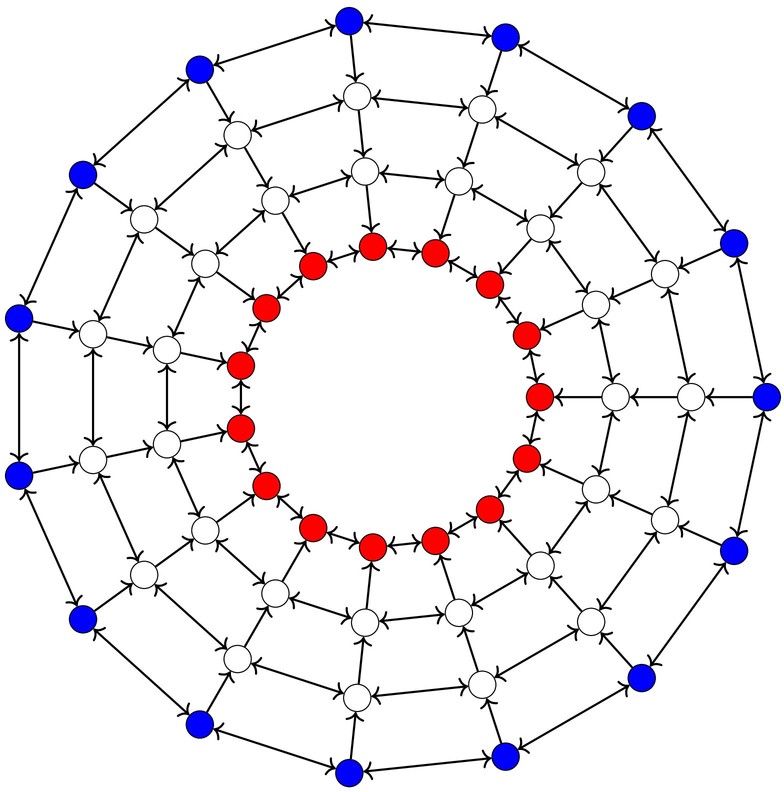
Proposition 5.4 (Trafic fort)**.**
On suppose qu'il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que pour tout $e \in E$, il existe $k_e > 0$ tel que $T_e(q) \sim_{q\to\infty} k_e q^\alpha$.
Alors, à réseau fixé, PoA $\xrightarrow[n(\gamma)\to+\infty]{} 0$.

Preuve.
Par des inégalités très similaires à celles de la preuve précédente, on obtient : $|C(q) - (\alpha+1) F(q)| = o\left(n(\gamma)^{\alpha+1}\right)$ uniformément en $q \in A$, d'où $\max_{q\in W}(C(q) - \min(C)) = o\left(n(\gamma)^{\alpha+1}\right)$.
En outre, il existe $\varepsilon > 0$ indépendant de γ tel que $\min(C) \geqslant \varepsilon n(\gamma)^{\alpha+1}$.
En combinant ces deux résultats, on a $\mathrm{PoA} = o(1)$ quand $n(\gamma) \to \infty$.

Remarque.
L'hypothèse de ce théorème est très forte, et bien qu'elle permette de prendre en compte toutes les fonctions de délai polynomiales de même degré, il est probablement possible de l'affaiblir pour pouvoir considérer d'autres classes de fonctions.

Les deux propositions précédentes suggèrent (au moins dans le cas polynomial), qu'il existe une zone « critique » de trafic intermédiaire où le prix de l'anarchie est maximal. C'est ce qu'on retrouve dans les courbes de la page 8.

Exemple (Haute symétrie)**.**
Soit $l, d \geqslant 2$. On considère le réseau suivant, de largeur l et de profondeur d qui pourrait modéliser le trafic entre une ville et sa banlieue, le matin :



(sur le dessin, $l = 15$ et $d = 4$)

Les nœuds bleus sont les nœuds de départ, et les rouges ceux d'arrivée.
Pour tout nœud bleu x et tout nœud rouge y, on a $\gamma_{xy} = 1$, autrement dit, les l^2 paires origine-destination sont équiprobables.
Les liaisons longitudinales ont toutes la même fonction de délai T_1, et les liaisons latérales ont toutes la même fonction de délai T_2.
T_1 et T_2 sont strictement croissantes et $q \mapsto qT_1(q)$ et $q \mapsto qT_2(q)$ sont strictement convexes.

Proposition 5.5.
Dans ce cadre, $\mathrm{PoA} = 0$.

Preuve.
D'après les hypothèses, les flots de bords correspondant à un équilibre de Wardrop et à un optimum collectif sont tous deux uniques. On va montrer qu'ils sont égaux, en exploitant simplement les fortes symétries du problème.

Tout d'abord, dans les deux situations, par symétrie de rotation, le flux et identique sur toutes les arêtes longitudinales de même profondeur, de même pour les arêtes transversales. Par conservation à travers les niveaux, le flux est en fait identique sur toutes les arêtes longitudinales du réseau. De façon moins évidente, on peut aussi exploiter la deuxième symétrie du réseau pour montrer que tous les flux transversaux sont égaux. En effet, en voyant les chemins entre les nœuds bleus et les nœuds rouges comme des éléments de $\mathbb{Z}^d$ (à chaque niveau $i \in [\![1, d]\!]$, on peut se déplacer d'un certain de nombre de pas dans le sens horaire ou anti-horaire), appliquer la même permutation à tous les chemins préserve le caractère d'optimum collectif ou d'équilibre de Wardrop.

Après ces observations, il reste à montrer que le flux des arêtes transversales est le même pour un équilibre de Wardrop et pour un optimum collectif (celui des arêtes longitudinales est nécessairement le même, toujours par conservation). Notons A_t l'ensemble des valeurs admissibles de flux transversal. D'après le théorème 3.1, trouver l'équilibre de Wardrop revient à minimiser $\displaystyle\int_0^q T_2(x)\, dx$ sur A_t tandis que trouver l'optimum collectif revient à minimiser $qT_2(q)$ sur le même ensemble. Dans les deux cas, comme les fonctions sont strictement croissantes, le flux transversal est égal à $\min(A_t)$, ce qui conclut.

Références

[1] D. Braess, "Über ein paradoxon aus der verkehrsplanung," *Unternehmensforschung*, vol. 12, pp. 258–268, 1968. Eingegangen am 28. März 1968.

[2] J. G. Wardrop, "Some theoretical aspects of road traffic research," *Road Engineering Division Meeting*, 1952. Road Paper No. 36, 24 January 1952.

[3] G. Carlier and F. Santambrogio, "A continuous theory of traffic congestion and wardrop equilibria," *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 181, 12 2010.

[4] M. Beckmann, C. McGuire, and C. B. Winsten, *Studies in the Economics of Transportation*. New Haven : Yale University Press, 1956. Published for the Cowles Commission for Research in Economics.

[5] A. C. Pigou, *The Economics of Welfare*. Macmillan, 1920.

[6] T. Roughgarden, "The price of anarchy is independent of the network topology," *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 67, no. 2, pp. 341–364, 2003.