

Codes barres et Géométrie

Emile FRESSON Mehdi ALAMI YOUNSI
Sous la supervision d'Emmanuel GIROUX

Mai 2025

Table des matières

1	Introduction	1
2	Modules de persistance	2
2.1	Définitions et premières propriétés	2
2.2	Stabilité des modules de Rips	3
3	Codes-barres et théorème d'Isométrie	4
3.1	Forme normale des modules de persistance	4
3.2	Distance de goulot et théorème d'isométrie	5
4	Géométrie symplectique et Homologie de Floer	9
4.1	Géométrie symplectique	9
4.1.1	Variétés symplectiques et hamiltoniens	9
4.1.2	Distance de Hofer	10
4.2	Homologie de Floer	10
4.2.1	Indice de Conley-Zehnder	10
4.2.2	La fonctionnelle d'action	11
4.2.3	L'homologie de Floer	13

1 Introduction

Dans cet exposé, on introduira la notion de code barre et présentera son lien avec celle de modules de persistance, par le théorème d'Isométrie. On définira finalement l'homologie de Floer, permettant une utilisation des notions de codes barre en géométrie symplectique.

Cet exposé suit le plan général et est principalement basé sur les notes *Topological Persistence in Geometry and Analysis* de Leonid Polterovich, Daniel Rosen, Karina Samvelyan et Jun Zhang [1].

2 Modules de persistance

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1 *Un module de persistance est une paire (V, π) où :*

- $V = \{V_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est une famille d'espaces vectoriels de dimension finie sur un corps \mathbb{F} ,
- $\pi = \{\pi_{s,t} : V_s \rightarrow V_t\}_{s \leq t}$ est une famille de morphismes linéaires vérifiant :
 1. (transitivité) : $\pi_{s,r} = \pi_{t,r} \circ \pi_{s,t}$ pour tous $s \leq t \leq r$,
 2. (stabilité locale) : pour presque tout t , il existe un petit intervalle autour de t où tous les $\pi_{s,r}$ sont des isomorphismes dès que $s < r$,
 3. (semi-continuité) : autour de chaque t , il existe un $\varepsilon > 0$ tel que tous les $\pi_{s,t}$ sont des isomorphismes pour $s \in (t - \varepsilon, t]$,
 4. (trivialité au début) : il existe un instant s^- tel que $V_s = 0$ pour tout $s \leq s^-$.

Ces conditions garantissent que l'évolution est bien contrôlée. Par exemple, on peut définir la "limite" du système pour t grand :

$$V_\infty = \varinjlim V_t,$$

et tous les morphismes $\pi_{t,t}$ sont les identités.

Définition 2.2 *Un morphisme de modules de persistance $A : (V, \pi) \rightarrow (V', \pi')$ est une famille de morphismes linéaires $A_t : V_t \rightarrow V'_t$ telle que, pour tous $s \leq t$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} V_s & \xrightarrow{\pi_{s,t}} & V_t \\ \downarrow A_s & & \downarrow A_t \\ V'_s & \xrightarrow{\pi'_{s,t}} & V'_t \end{array}$$

Deux modules sont dits **isomorphes** s'il existe des morphismes dans les deux sens qui sont inverses l'un de l'autre.

Définition 2.3 *Pour $\delta > 0$, le module décalé $V[\delta]$ est défini par :*

$$V[\delta]_t = V_{t+\delta}, \quad \pi[\delta]_{s,t} = \pi_{s+\delta, t+\delta}.$$

Le morphisme de décalage $\Phi^\delta : V \rightarrow V[\delta]$ est donné par :

$$\Phi_t^\delta = \pi_{t, t+\delta}.$$

Ce morphisme correspond simplement à faire "glisser" tout le module dans le temps vers la gauche.

Définition 2.4 *Un module d'intervalle $\mathbb{F}_{(a,b]}$ est le module qui vaut \mathbb{F} pour $t \in (a, b]$ et 0 sinon. Tous les morphismes dans l'intervalle sont des identités.*

Définition 2.5 La **somme directe** de deux modules (V, π) et (W, θ) est définie par :

$$(V \oplus W)_t = V_t \oplus W_t, \quad \pi_{s,t} = \pi_{s,t}^V \oplus \pi_{s,t}^W.$$

Pour comparer deux modules de persistance, on introduit une notion de distance qui reflète à quel point ils peuvent être transformés l'un en l'autre.

Définition 2.6 Deux modules V et W sont **δ -entrelacés** s'il existe des morphismes :

$$F : V \rightarrow W[\delta], \quad G : W \rightarrow V[\delta]$$

tels que les deux compositions respectent les décalages de 2δ :

$$G[\delta] \circ F = \Phi_V^{2\delta}, \quad F[\delta] \circ G = \Phi_W^{2\delta}.$$

Définition 2.7 La **distance d'entrelacement** entre V et W est :

$$d_{\text{int}}(V, W) = \inf\{\delta > 0 \mid V \text{ et } W \text{ sont } \delta\text{-entrelacés}\}.$$

Définition 2.8 Une **correspondance surjective** entre deux ensembles finis X et Y est une relation $C \subset X \times Y$ telle que chaque point de X et de Y est relié à au moins un point de l'autre ensemble.

Définition 2.9 La **distorsion** d'une correspondance C est :

$$\text{dis}(C) = \max_{(x,y),(x',y') \in C} |d_X(x, x') - d_Y(y, y')|.$$

Définition 2.10 La **distance de Gromov-Hausdorff** entre deux espaces finis (X, d_X) et (Y, d_Y) est :

$$d_{\text{GH}}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf_C \text{dis}(C),$$

où C parcourt toutes les correspondances surjectives entre X et Y .

2.2 Stabilité des modules de Rips

Définition 2.11 Pour (X, d) un espace métrique fini, et $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on peut regarder le complex simplicial $R_\alpha(X)$ engendré par les simplexes dont les arêtes ont toutes une longueur inférieure à α . Pour $\alpha \leq \beta$, l'inclusion $R_\alpha \rightarrow R_\beta$ induit, en prenant l'homologie, une application linéaire. La collection de toutes ces applications entre les homologies forme alors un module de persistance appelé **module de Rips**.

Théorème 2.12 Soient X et Y deux ensembles finis avec des distances. Notons $V(X)$ et $V(Y)$ leurs modules de Rips. Alors :

$$d_{\text{int}}(V(X), V(Y)) \leq 2 \cdot d_{\text{GH}}(X, Y).$$

3 Codes-barres et théorème d'Isométrie

3.1 Forme normale des modules de persistance

Un fait fondamental est qu'on peut décomposer n'importe quel module de persistance en une somme directe de **modules d'intervalle**.

Théorème 3.1 *Soit (V, π) un module de persistance de type fini. Alors il existe un ensemble d'intervalles $\{I_j\}_{j \in J}$ tel que :*

$$V \cong \bigoplus_{j \in J} \mathbb{F}_{I_j}.$$

Cette décomposition est unique à isomorphisme près et à l'ordre près.

Ce résultat veut dire que pour chaque module de persistance, on peut lui associer un multiensemble d'intervalles (les I_j qui peuvent donc apparaître plusieurs fois), qui est une manière simple et efficace de représenter toute l'information du module. C'est ça qu'on appelle un code-barres.

Définition 3.2 *Soit (V, π) un module de persistance. Un réel $t \in \mathbb{R}$ est appelé un **point spectral** de V s'il existe un changement "non trivial" dans le module à ce point. Plus précisément, t est spectral si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $s \in (t - \epsilon, t + \epsilon)$ tel que $\pi_{s,t}$ ou $\pi_{t,s}$ n'est pas un isomorphisme.*

Définition 3.3 *Soit (V, π) un module de persistance. Un sous-module $W \subset V$ est appelé **semi-surjectif** s'il existe un temps t_0 tel que, pour tout $t \leq t_0$, $W_t = V_t$ et $\pi_{s,t} : W_r \rightarrow W_s$ est surjective $\forall r < s < t$.*

On construira la décomposition inductivement en utilisant le lemme suivant :

Lemme 3.4 *Soit W un sous-module semi-surjectif strict de V . Alors il existe un sous-module semi-surjectif $W'] \subset V$ tel que :*

$$W'] \cong W \oplus \mathbb{F}_{(a,b)},$$

pour un certain intervalle $(a, b]$ formé à partir de points spectraux de V .

Comme W est semi-surjectif, il existe un instant r tel que $W_t = V_t$ pour tout $t \leq r$. On choisit ensuite le plus petit i tel que $W^i \subsetneq V^i$.

Prenons un élément $z^i \in V^i \setminus W^i$, et appelons z^k son image dans V^k pour $k > i$. Deux cas peuvent arriver :

- **Cas infini** : Si $z^k \notin W^k$ pour tout $k > i$, on définit un sous-module P isomorphe à $\mathbb{F}_{(a_i, +\infty)}$.
- **Cas fini** : Sinon, on prend le plus petit $j > i$ tel que $z^j \in W^j$, on construit $y^i := z^i - x^i$ pour un certain $x^i \in W^i$ et on considère son image y^k dans chaque V^k pour $i \leq k < j$, qui tombe hors de W^k mais s'annule à $k = j$.

On définit alors P comme le sous-module engendré par les y^k sur les intervalles $(a_{k-1}, a_k] \subset (a_{i-1}, a_{j-1}]$. Ce module est isomorphe à $\mathbb{F}_{(a_{i-1}, a_{j-1}]}$.

On pose $W' := W + P$. On montre ensuite que $W'] = W \oplus P$ et que W' reste semi-surjectif.

Définition 3.5 *Un module de persistance (V, π) est dit **propre** s'il possède un sous-module semi-surjectif $U \subset V$ tel que $U_t \rightarrow V_t$ est un isomorphisme pour tout t en dehors d'un ensemble fini de points spectraux.*

Théorème 3.6 *Tout module propre de dimension finie admet une décomposition unique (à isomorphisme près et à l'ordre près) en une somme directe de modules d'intervalle.*

3.2 Distance de goulot et théorème d'isométrie

Soient B et B' deux codes-barres, c'est-à-dire deux **multiensembles d'intervalles** de la forme $(a, b] \subset \mathbb{R}$ (avec $a < b$), chacun représentant un module de persistance.

Définition 3.7 *Soient $I = (a, b]$ et $J = (a', b']$ deux intervalles. On définit la distance entre eux par :*

$$d_\infty(I, J) := \max(|a - a'|, |b - b'|).$$

Définition 3.8 *Un δ -**matching** entre deux codes-barres B et B' est une correspondance partielle (au sens des ensembles) :*

$$\gamma \subset B \times B'$$

telle que :

- chaque intervalle de B et de B' apparaît au plus une fois dans γ ,
- pour chaque paire $(I, J) \in \gamma$, on a :

$$d_\infty(I, J) \leq \delta,$$

- tout intervalle non apparié (dans B ou B') est de longueur au plus 2δ , c'est-à-dire que :

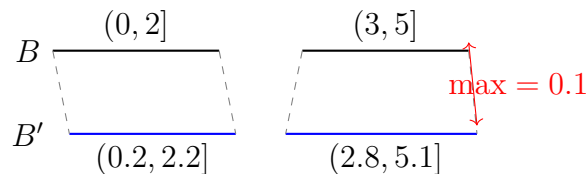
$$\text{si } I = (a, b] \text{ est non apparié, alors } b - a \leq 2\delta.$$

Cette définition permet d'“ignorer” les petits intervalles

Définition 3.9 *La **distance de goulot** entre deux codes-barres B et B' est définie par :*

$$d_B(B, B') := \inf\{\delta > 0 \mid \text{il existe un } \delta\text{-matching entre } B \text{ et } B'\}.$$

Remarques : - Cette distance est bien une pseudo-distance sur l'ensemble des codes-barres, le théorème d'isométrie prouve que cette distance correspond exactement à la distance d'entrelacement entre les modules.



Cette distance reflète combien il faut “bouger” les intervalles pour que les deux codes-barres soient alignés au mieux.

Théorème 3.10 (Théorème d’isométrie) *Si V et W sont deux modules de persistance de type fini, alors :*

$$d_{\text{int}}(V, W) = d_{\text{B}}(B(V), B(W)),$$

où $B(V)$ et $B(W)$ désignent les codes-barres associés à V et W .

Preuve pour le sens \leq : Soient $V = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{F}_{I_i}$ et $W = \bigoplus_{j \in J} \mathbb{F}_{J_j}$ deux modules de persistance.

On suppose que :

$$d_{\text{B}}(B(V), B(W)) < \delta.$$

On va maintenant construire un entrelacement entre V et W .

— On écrit :

$$V = V_{\text{match}} \oplus V_{\text{short}}, \quad W = W_{\text{match}} \oplus W_{\text{short}},$$

où : - $V_{\text{match}} = \bigoplus_{i \in I'} \mathbb{F}_{I_i}$, avec I' les indices appariés dans γ , - V_{short} est la somme des modules restants (non appariés, de longueur $\leq 2\delta$), - Idem pour W_{match} et W_{short} .

Par le lemme 2.1.9, on peut construire un morphisme :

$$F_{\text{match}} : V_{\text{match}} \rightarrow W_{\text{match}}[\delta]$$

en associant chaque \mathbb{F}_{I_i} à son partenaire \mathbb{F}_{J_j} avec $d_{\infty}(I_i, J_j) \leq \delta$.

De même, on construit :

$$G_{\text{match}} : W_{\text{match}} \rightarrow V_{\text{match}}[\delta].$$

Pour les modules courts (V_{short} et W_{short}), comme ils sont de longueur $\leq 2\delta$, les morphismes naturels de décalage :

$$\Phi_{V_{\text{short}}}^{2\delta} : V_{\text{short}} \rightarrow V_{\text{short}}[2\delta], \quad \Phi_{W_{\text{short}}}^{2\delta} : W_{\text{short}} \rightarrow W_{\text{short}}[2\delta]$$

suffisent à former un entrelacement trivial.

On définit :

$$F := F_{\text{match}} \oplus \Phi_{V_{\text{short}}}^{\delta} : V \rightarrow W[\delta],$$

$$G := G_{\text{match}} \oplus \Phi_{W_{\text{short}}}^{\delta} : W \rightarrow V[\delta].$$

Alors, par construction, les compositions satisfont :

$$G[\delta] \circ F = \Phi_V^{2\delta}, \quad F[\delta] \circ G = \Phi_W^{2\delta}.$$

Donc V et W sont δ -entrelacés, ce qui prouve que :

$$d_{\text{int}}(V, W) \leq \delta.$$

Soient (V, π) et (W, θ) deux modules de persistance, avec barcodes respectifs B et C . Pour un intervalle $I = (b, d]$, où $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on note :

$$B_I^- \subseteq B$$

l’ensemble des intervalles de la forme $(a, d] \in B$ avec $a \leq b$.

Proposition 3.11 Soit $I = (b, d]$ et $\iota : (V, \pi) \mapsto (W, \theta)$ un morphisme injectif. alors $B_I^- \leq C_I^-$.

on a la même résultat pour une surjection, avec une inégalité dans l'autre sens.

Définition 3.12 Supposons qu'il existe une injection de modules de persistance : $\iota : V \hookrightarrow W$

et que les barcodes associés à V et W soient respectivement B et C .

On définit un appariement induit par cette injection : $\mu_{\text{inj}} : B \rightarrow C$: Pour chaque $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on considère tous les intervalles de B et C qui se terminent en d :

$$B_d = \{(b_i, d] \in B\}, \quad C_d = \{(c_j, d] \in C\}.$$

On trie les deux ensembles par longueur décroissante (ou, ce qui revient au même, par ordre croissant des bornes inférieures) :

$$(b_1, d] \supset (b_2, d] \supset \dots \supset (b_k, d], \quad \text{avec } b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k,$$

$$(c_1, d] \supset (c_2, d] \supset \dots \supset (c_\ell, d], \quad \text{avec } c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_\ell.$$

on a toujours $k \leq \ell$. On apparie alors chaque intervalle de B_d au premier (le plus long) intervalle disponible dans C_d , en suivant l'ordre donné. Ainsi, $(b_1, d]$ est apparié avec $(c_1, d]$, puis $(b_2, d]$ avec $(c_2, d]$, etc.

On répète cette procédure pour tous les $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On obtient ainsi un appariement global, et on a une construction similaire pour les surjections.

Proposition 3.13 Soit $\iota : V \hookrightarrow W$ une injection de modules de persistance, et soient B et C les codes-barres respectifs de V et W .

Alors le matching induit $\mu_{\text{inj}} : B \rightarrow C$ vérifie les deux propriétés suivantes :

1. Tous les intervalles de B sont appariés : $\text{coim}(\mu_{\text{inj}}) = B$.
2. Pour chaque intervalle $(b, d] \in B$, l'image par μ_{inj} est un intervalle $(c, d] \in C$ avec $c \leq b$.

Proposition 3.14 Soit $\pi : V \rightarrow W$ une surjection de modules de persistance, et soient B et C les codes-barres respectifs de V et W .

Alors le matching induit $\mu_{\text{sur}} : B \rightarrow C$ vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $\text{im}(\mu_{\text{sur}}) = C$.
2. Pour chaque intervalle $(b, d] \in B$, l'image par μ_{sur} est un intervalle $(b, e] \in C$ avec $e \leq d$.

Ces propositions nous permettent de construire des matching à partir d'un morphisme injectif ou surjectif, on va écrire alors un morphisme général comme composition d'un morphisme injectif et d'un morphisme surjectif.

Proposition 3.15 *Fonctorialité des couplages pour injections ou surjections*

Considérons un diagramme commutatif dans la catégorie des modules de persistance, où tous les morphismes sont des **injections** ou tous des **surjections** :

$$\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{f} & V \\
& \searrow h & \downarrow g \\
& & W
\end{array}$$

Alors le diagramme correspondant au niveau des **barcodes** commute également :

$$\begin{array}{ccc}
B(U) & \xrightarrow{\mu(f)} & B(V) \\
& \searrow \mu(h) & \downarrow \mu(g) \\
& & B(W)
\end{array}$$

où $\mu(\cdot)$ désigne :

- soit le couplage induit μ_{inj} , si tous les morphismes sont des injections ;
- soit μ_{sur} , si tous sont des surjections.

Soient (V, π_V) et (W, π_W) deux modules de persistance qui sont δ -entrelacés, c'est-à-dire qu'il existe deux morphismes :

$$f : V \rightarrow W[\delta], \quad g : W \rightarrow V[\delta]$$

tels que :

$$g[\delta] \circ f = \Phi_{2\delta}^V, \quad f[\delta] \circ g = \Phi_{2\delta}^W$$

où $\Phi_{2\delta}$ désigne la translation naturelle de 2δ .

Lemme 3.16 *Considérons le morphisme $f : V \rightarrow \text{im}(f)$ et le couplage induit $\mu_{\text{sur}} : B(V) \rightarrow B(\text{im}(f))$.*

Alors :

- (1) $\text{coim}(\mu_{\text{sur}}) \supseteq B(V)^{2\delta}$
- (2) $\text{im}(\mu_{\text{sur}}) = B(\text{im}(f))$
- (3) Chaque barre $(b, d'] \in \text{coim}(\mu_{\text{sur}})$ est envoyée sur une barre $(b, d']$ avec : $d' \in [d - 2\delta, d]$

Lemme 3.17 *Considérons maintenant l'injection $\text{im}(f) \rightarrow W[\delta]$ et le couplage induit $\mu_{\text{inj}} : B(\text{im}(f)) \rightarrow B(W[\delta])$.*

Alors :

- (1) $\text{coim}(\mu_{\text{inj}}) = B(\text{im}(f))$
- (2) $\text{im}(\mu_{\text{inj}}) \supseteq B(W[\delta])^{2\delta}$
- (3) Chaque barre $(b, d'] \in \text{coim}(\mu_{\text{inj}})$ est envoyée sur une barre $(b', d']$ avec : $b' \in [b - 2\delta, b]$

Soient V et W deux modules de persistance, et $B(V), B(W)$ leurs barcodes. Alors,

$$d_{\text{int}}(V, W) \geq d_{\text{bott}}(B(V), B(W)).$$

On considère la factorisation suivante :

$$V \xrightarrow{f} \text{im}(f) \hookrightarrow W[\delta]$$

et l'on utilise les couplages induits suivants :

$$\mu_{\text{sur}} : B(V) \rightarrow B(\text{im}(f)), \quad \mu_{\text{inj}} : B(\text{im}(f)) \rightarrow B(W[\delta]).$$

On définit alors le couplage composé :

$$\mu(f) := \mu_{\text{inj}} \circ \mu_{\text{sur}} : B(V) \rightarrow B(W[\delta]).$$

Ensuite, on compose avec la translation Ψ_δ définie par :

$$\Psi_\delta((a, b]) = (a + \delta, b + \delta]$$

pour obtenir :

$$\Psi_\delta \circ \mu(f) : B(V) \rightarrow B(W).$$

Ce couplage est un δ -matching entre les barcodes de V et W .

4 Géométrie symplectique et Homologie de Floer

Dans cette partie, on introduit les notions nécessaires à la définition de l'homologie de Floer, puis on en présente une application.

4.1 Géométrie symplectique

4.1.1 Variétés symplectiques et hamiltoniens

Définition 4.1 Soit M une variété de dimension paire. On dit que M a une structure symplectique si elle est munie d'une 2-forme différentielle ω fermée et non dégénérée, c'est à dire que ω^n est une forme de volume et que $d\omega = 0$. La paire (M, ω) est alors appelée **variété symplectique**.

Définition 4.2 Un **symplectomorphisme** $\phi : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$ est un difféomorphisme préservant la structure symplectique, donc tel que $\phi^*\omega_2 = \omega_1$. Le groupe des symplectomorphismes sur (M, ω) est noté $\text{Symp}(M, \omega)$.

Définition 4.3 Soit (M, ω) une variété symplectique, et $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ lisse. On définit le **champ de vecteurs hamiltonien** de H , noté X_H comme la solution de l'équation $X_H \lrcorner \omega = -dH$. Le flot ϕ_H^t de X_H , est appelé **flot hamiltonien**, et l'image $\phi_H^1 = \phi$ est appelé **difféomorphisme hamiltonien**. L'ensemble de tous les difféomorphismes hamiltoniens est noté $\text{Ham}(M, \omega)$.

On remarque que si on pose $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse, le champ de vecteurs $X_{H'}$ engendré par le hamiltonien modifié $H'(x, t) = H(x, t) + f(t)$ est identique à celui engendré par H . On peut, pour se débarrasser de cette ambiguïté, dans le cas où le support du hamiltonien est compact, ne considérer que les hamiltoniens normalisés, c'est à dire vérifiant $\int_M H_t \omega^n / n! = 0$ pour tous $t \in [0, 1]$.

Proposition 4.4 Pour (M, ω) une variété symplectique close, le flot hamiltonien ϕ_H^t est un symplectomorphisme

La formule de Cartan donne

$$X_H \cdot \omega = d(X_H \lrcorner \omega) + X_H \lrcorner d\omega = d(-dH) + 0 = 0 .$$

Donc la dérivée de Lie de ω selon X_H est nulle, ainsi, ϕ_H^t préserve ω pour tout t .

4.1.2 Distance de Hofer

Théorème 4.5 *Pour γ un chemin lisse dans $\text{Ham}(M, \omega)$, il existe une fonction $F : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, vérifiant pour tout $x \in M$ et $t \in [0, 1]$,*

$$\frac{d}{dt}(\gamma_t(x)) = X_{F_t}(\gamma_t(x)) .$$

Une preuve de ce théorème est donnée dans [2]. L'existence de cette fonction engendrant le chemin permet de définir la longueur d'un chemin lisse de $\text{Ham}(M, \omega)$:

Définition 4.6 *La **longueur de Hofer** d'un chemin γ engendré par F est définie comme*

$$\text{long}(\gamma) = \int_0^1 \|F_t\| dt.$$

On peut dès lors définir la distance de Hofer entre deux difféomorphismes hamiltoniens :

Définition 4.7 *Sur $\text{Ham}(M, \omega)$, on pose*

$$d_{\text{Hofer}}(\phi, \psi) = \inf\{\text{long}(\gamma), \gamma \text{ relie } \phi \text{ à } \psi\}$$

pour tous $\phi, \psi \in \text{Ham}(M, \omega)$. On en déduit une norme : $\|\phi\|_{\text{Hofer}} = d_{\text{Hofer}}(\phi, \text{Id}_M)$

4.2 Homologie de Floer

4.2.1 Indice de Conley-Zehnder

On note $\text{Sp}(2n)$ groupe des matrices symplectiques $2n \times 2n$ à coefficients dans \mathbb{R} , c'est à dire qui vérifient $M^T \Omega M = \Omega$ avec $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id}_n \\ \text{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$.

Soit Φ un chemin lisse dans Sp . On pose $S(t) = \Omega \dot{\Phi}(t) \Phi(t)^{-1}$, chemin lisse de matrices symmetriques.

Définition 4.8 *On dit que $t \in [0, 1]$ est un **croisement** si $\det(\Phi(t) - \text{Id}) = 0$. Dans ce cas, $S(t)$ restreinte à $\ker(\Phi(t) - 1)$ définit une forme quadratique notée $\Gamma(\Phi, t)$, la forme de croisement. Le croisement est dit régulier si la forme $\Gamma(\Phi, t)$ est non dégénérée.*

On suppose que Φ est un chemin lisse de matrices de $\text{Sp}(2n)$ vérifiant $\Phi(0) = \text{Id}$ et 1 n'appartient pas au spectre de $\Phi(1)$: Le point $t = 0$ est donc un croisement, avec $\ker(\Phi(0) - \text{Id}) = \mathbb{R}^{2n}$ tandis que $t = 1$ n'en est pas. On suppose désormais que tous les croisements de Φ sont réguliers.

Définition 4.9 *On définit alors l'**indice de Conley-Zehnder** par*

$$\mu_{\text{CZ}}(\Phi) = \frac{1}{2} \text{sign}(\Gamma(\Phi, 0)) + \sum_{t \text{ croisement}} \text{sign}(\Gamma(\Phi, t)),$$

Avec sign la signature de la forme définie comme le nombre de carrés positifs moins le nombre de carrés négatifs dans l'écriture canonique de la forme quadratique. L'indice $\mu_{CZ}(\Phi)$ est bien entier car comme $\ker(\Phi(0) - \text{Id})$ est de dimension paire, $\text{sign}(\Gamma(\Phi, 0))$ est nécessairement paire. Si Φ et Ψ sont homotopes relativement à leurs extrémités, on constate qu'elles ont le même indice.

On peut alors définir l'indice de Conley-Zehnder de tout chemin lisse Ψ ayant Id et une matrice dont le spectre ne contient pas 1 comme extrémités par $\mu_{CZ}(\Psi) = \mu_{CZ}(\Phi)$ avec Φ un chemin quelconque homotope à Ψ avec extrémités fixées. On normalise ensuite l'indice en posant $\text{Ind}(\Phi) = n - \mu_{CZ}(\Phi)$.

4.2.2 La fonctionnelle d'action

Soit (M, ω) une variété symplectique avec $\pi_2(M) = 0$. On s'intéresse à l'ensemble \mathcal{LM} des cercles lisses contractiles $x : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$. Pour $x \in \mathcal{LM}$, on choisit $D \subset M$ un disque de bord x et on s'intéresse à la forme d'aire : $\mathcal{A}(x) = - \int_D \omega$. comme $\pi_2(M) = 0$, \mathcal{A} est bien définie : si D' est un autre disque de bord x , $D \cup D'$ forme une sphère S , on peut choisir B une boule dont le bord est S . La formule de Stokes donne alors

$$\int_D \omega - \int_{D'} \omega = \int_S \omega = \int_B d\omega = 0.$$

On veut s'intéresser aux points critiques de \mathcal{A} . On obtient cependant le résultat suivant.

Proposition 4.10 *Les seuls points critiques de \mathcal{A} sont les cycles constants.*

En effet, en remarquant que l'espace tangent $T_x \mathcal{LM}$ en $x \in \mathcal{LM}$ est identifiable à l'espace des champs de vecteurs sur M restreints à $x : \xi(t) \in T_{x(t)}M$, pour $t \in [0, 1]$, et en choisissant un $[\gamma] \in T_x \mathcal{LM}$, pour γ dans \mathcal{LM} avec $\gamma(0) = x$, et en identifiant $[\gamma]$ à $\xi \in T_x M$, c'est à dire $\xi = \gamma'(0)$, et en choisissant δ lisse telle que $\delta(t)$ est un disque de bord $\gamma(t)$, on obtient :

$$d\mathcal{A}([\gamma]) = \left[- \int_\delta \omega \right]$$

Or, pour $s \rightarrow 0$,

$$\frac{1}{s} \left(- \int_{\delta(s)} \omega + \int_D \omega \right) = -\frac{1}{s} \left(\int_0^s \left(\int_{\gamma(u)} \omega \right) du \right) \rightarrow - \int_{\partial D} \gamma'(0) \lrcorner \omega ,$$

donc

$$d_x \mathcal{A}(\xi) = - \int_0^1 \omega(\xi, \dot{x}(t)) \in \mathbb{R} .$$

Le cycle x donc est un point critique s'il vérifie $d_x \mathcal{A}(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in T_x M$. Comme on peut choisir ξ à support arbitrairement petit et vallant $v \in T_{x(t)}M$ en $x(t)$, x doit vérifier $\omega(v, \dot{x}(t)) = 0$ pour tous $t \in [0, 1]$ et $v \in T_{x(t)}M$. Par non dégénérescence de ω , on doit avoir $\dot{x}(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, soit x constant.

On va, pour remédier à cette dégénérescence des points critiques, perturber \mathcal{A} en posant, pour un hamiltonien $H : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times M \rightarrow \mathbb{R}$, la fonctionnelle $\mathcal{A}_H : \mathcal{LM} \rightarrow \mathbb{R}$ comme :

$$\mathcal{A}_H(x) = - \int_D \omega + \int_0^1 H(x) dt$$

avec D un disque recouvrant x . On s'intéresse aux effets de cette perturbation sur les points critiques.

Théorème 4.11 *Principe de moindre action : $x \in \mathcal{LM}$ est un point critique de \mathcal{A}_H si et seulement si x est une orbite 1-periodique contractile du flot hamiltonien de H .*

Par le même calcul que ci-dessus,

$$d\mathcal{A}_H(\xi) = \int_0^1 dH(\xi) - \omega(\xi, \dot{x}(t))dt ,$$

que l'on peut réécrire comme

$$d\mathcal{A}_H(\xi) = \int_0^1 \omega(\xi, X_H - \dot{x}(t))dt.$$

Le cycle x est un point critique de \mathcal{A}_H si $d\mathcal{A}_H(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in T_x M$, donc par le même argument, $\omega(v, X_H(x(t)) - \dot{x}(t)) = 0$ pour tous $t \in [0, 1]$ et $v \in T_{x(t)} M$. Comme ω est non dégénérée, on doit avoir $X_H(x(t)) = \dot{x}(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$, c'est à dire que x vérifie exactement le principe de moindre action.

On note P l'ensemble des points critiques de \mathcal{A}_H . On veut désormais poser une métrique sur \mathcal{LM} pour pouvoir obtenir calculer des gradients. On définit pour cela une structure presque-complexe J sur M comme un champ lisse d'automorphismes : $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ vérifiant $J_p^2 = -\text{Id}$ pour tout $p \in M$. La structure presque-complexe J est dite ω -compatible si $\omega(\cdot, J\cdot)$ définit une métrique riemannienne sur M . On note alors $\mathcal{J}(M, \omega)$ la collection de toutes les structures presque-complexes ω -compatibles. $\mathcal{J}(M, \omega)$ est non vide et contractile (preuve?). On choisit désormais un cycle $J(t)$ de structures ω -compatibles sur (M, ω) . Pour tout $x \in \mathcal{LM}$ et tous champs de vecteurs $\xi, \eta \in T_x \mathcal{LM}$, on peut définir une métrique sur \mathcal{LM} comme

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_0^1 \omega(\xi(t), J(t)\eta(t)).$$

Une orbite $x \in P$ est dite non-dégénérée si la différentielle $\phi_* : T_{x(0)} M \rightarrow T_{x(0)} M$ du flot hamiltonien $\phi = \phi_H^1$ de H en le point fixe $x(0)$ n'admet pas 1 comme valeur propre. On dit que H et ϕ sont non-dégénérées si cette propriété est vérifiée pour toute orbite de P .

Soit $x \in P$ une orbite d'un difféomorphisme hamiltonien ϕ . On choisit un disque $w : \mathbb{D}_2 \rightarrow M$ de bord $x : w|_{\mathbb{S}_1} = x$. Comme $w^* TM$ forme un fibré vectoriel symplectique sur un espace de base contractile, il admet une trivialisatation $w^* TM \simeq \mathbb{D}_2 \times (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Sous cette trivialisatation, ϕ_H^t en $x(0)$ induit un chemin lisse $\Phi : [0, 1] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ vérifiant $\Phi(0) = \text{Id}$, car ϕ est un flot, et le spectre de $\Phi(1)$ ne contient pas 1 car x est non dégénérée. On peut donc définir l'indice de x par $\text{Ind}(x) = \text{Ind}(\Phi)$. On peut montrer que $\text{Ind}(x)$ est indépendant du choix de la trivialisatation.

Soient ψ_1 et ψ_2 deux trivialisatations. On suppose que ψ_1 et ψ_2 ont la même orientation en 0, donc quitte à tourner ψ_2 continuellement, on peut supposer que les trivialisatations coïncident en 0. On peut alors considérer l'homotopie $H(t, x) = \psi_1((1 - 2t)x)$ si $t \leq \frac{1}{2}$ et $H(t, x) = \psi_2((2t - 1)x)$ si $t \geq \frac{1}{2}$ pour $t \in [0, 1]$ et $x \in \mathbb{D}_2$. On a bien la continuité

en $\frac{1}{2}$ par hypothèse. Les deux trivialisations sont alors bien homotopes, donc l'indice de x est inchangé entre les deux trivialisations. L'indice est également identique pour des trivialisations d'orientations opposées : inverser le signe de la première coordonnée sur \mathbb{R}^{2n} revient, sur le chemin Φ , à le conjuguer par $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$, ce qui laisse inchangés le lieu des croisements, et la signature de la forme $\Gamma(\Phi, t)$ en tout t croisement. Comme de plus $\pi_2(M) = 0$, l'indice est également indépendant du choix du disque w .

4.2.3 L'homologie de Floer

Pour $x, y \in P$, On s'intéresse à l'espace des trajectoires de gradients de \mathcal{A}_H de x à y , selon la métrique J_t définie auparavant, notées $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y)$. Une telle trajectoire de gradient est alors un cylindre $u(s, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ vérifiant l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J_t(u) \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla H_t(u) = 0$$

avec comme conditions au bords $\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = y(t)$ et $\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, t) = x(t)$.

On a une action de \mathbb{R} sur $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y)$ par $T \cdot u(s, t) = u(s+T, t)$, pour tout $T \in \mathbb{R}$. On peut donc considérer $\mathcal{M}(x, y) = \widetilde{\mathcal{M}}(x, y)/\mathbb{R}$. Un résultat admis et difficile est que \mathcal{M} est une variété compacte de dimension $\text{Ind}(x) - \text{Ind}(y) - 1$. En particulier, si $\text{Ind}(x) - \text{Ind}(y) = 1$, \mathcal{M} est un ensemble fini de points isolés. On peut alors définir $n(x, y) = \text{Card}(\mathcal{M}(x, y))$. On pose, pour un $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{CF}_k(M, H) = \langle x \in P, \text{Ind}(x) = k \rangle_{\mathbb{Z}_2}.$$

On définit l'opérateur \mathbb{Z}_2 -linéaire $\partial_k : \text{CF}_k(M, H) \rightarrow \text{CF}_{k-1}(M, H)$ par

$$\partial_k x = \sum_{y \in P, \text{Ind}(y) = k-1} n(x, y) y.$$

On admet que l'opérateur ∂ est une différentielle, il vérifie $\partial^2 = 0$. De plus, tout y générateur de $\partial_k x$ a une action symplectique strictement inférieure à celle de $x : \mathcal{A}_H(y) < \mathcal{A}_H(x)$, car $n(x, y)$ est obtenu en suivant les trajectoires de gradient de x à y . On note l'homologie hamiltonienne de Floer $\text{HF}_k(H) = \frac{\ker(\partial_k)}{\text{im}(\partial_{k+1})}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On peut désormais ajouter de la filtration à cette homologie : pour un $\lambda \in \mathbb{R}$ et un degré $k \in \mathbb{Z}$, on définit

$$\text{CF}_k^\lambda(M, H) = \langle x \in P, \text{Ind}(x) = k, \mathcal{A}_H(x) < \lambda \rangle_{\mathbb{Z}_2}.$$

Comme ∂_k fait strictement décroître l'action symplectique, $\partial_k : \text{CF}_k^\lambda(M, H) \rightarrow \text{CF}_{k-1}^\lambda(M, H)$ est bien définie. On peut donc définir l'homologie de Floer filtrée par :

$$\text{HF}_k^\lambda(H) = \frac{\ker(\partial_k : \text{CF}_k^\lambda(M, H) \rightarrow \text{CF}_{k-1}^\lambda(M, H))}{\text{im}(\partial_{k+1} : \text{CF}_{k+1}^\lambda(M, H) \rightarrow \text{CF}_k^\lambda(M, H))}$$

Pour tout $\lambda \leq \eta$, l'inclusion $\text{CF}_k^\lambda(M, H) \rightarrow \text{CF}_k^\eta(M, H)$ induit un morphisme bien défini $\iota_{\lambda, \eta} : \text{HF}_k^\lambda(H) \rightarrow \text{HF}_k^\eta(H)$.

Proposition 4.12 *Pour des hamiltoniens normalisés, c'est à dire vérifiant*

$$\forall t \in [0, 1], \int_M H(\cdot, t) \omega^n = 0,$$

l'homologie filtrée $\mathrm{HF}_k^\lambda(H)$ ne dépend que de $\phi = \phi_H^1$, l'image au temps 1 du flot hamiltonien ϕ_H^t engendré par H .

Ce qui permet de définir, pour une variété symplectique (M, ω) vérifiant $\pi_2(M) = 0$, un difféomorphisme hamiltonien $\phi = \phi_H^1$ et un degré $k \in \mathbb{Z}$, la collection $\{\{\mathrm{HF}_k^\lambda(\phi)\}_\lambda, \{\iota_{\lambda, \eta}\}_{\lambda \leq \eta}\}$ comme le module de persistance hamiltonien de degré k , noté $\mathbb{H}\mathrm{F}_k(\phi)$, dont le code barre est noté $\mathcal{B}_k(\phi)$, avec $\mathcal{B}(\phi) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_k(\phi)$

On termine en citant un dernier théorème qui présente une application de l'homologie de Floer d'une variété pour minorer la distance entre deux difféomorphismes hamiltoniens.

Théorème 4.13 *Théorème de stabilité dynamique : Pour (M, ω) une variété symplectique compacte avec $\pi_2(M) = 0$. Pour toute paire de difféomorphismes hamiltoniens non-dégénérés $\phi, \psi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$, $d_{\mathrm{bot}}(\mathcal{B}(\phi), \mathcal{B}(\psi)) \leq d_{\mathrm{Hofer}}(\phi, \psi)$.*

Références

- [1] Leonid Polterovich and Daniel Rosen and Karina Samvelyan and Jun Zhang, 2021, <https://arxiv.org/abs/1904.04044>
- [2] Augustin Banyaga. Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique. Comment. Math. Helv., 53(2) :174–227, 1978.