

LE THÉORÈME DE GROMOV SUR LES GROUPES À CROISSANCE POLYNOMIALE

ANDRÉ CHAMBRILLON, YANIS HEDJEM
SOUS LA DIRECTION DE CYRIL HOUDAYER

RÉSUMÉ. Nous détaillons la preuve du théorème de Gromov sur les groupes à croissance polynomiale en utilisant l'approche d'Ozawa par l'analyse fonctionnelle. Cette approche élégante, plus récente que la preuve originale, établit un pont remarquable entre la théorie des groupes, l'analyse fonctionnelle et la théorie ergodique.

REMERCIEMENTS

À Cyril Houdayer qui a su nous faire ressentir l'essence de ce résultat et sans qui ce mémoire ne serait qu'une masse informe de vérités désincarnées.

INTRODUCTION

Le théorème de Gromov, établi en 1981, constitue un résultat fondamental en théorie géométrique des groupes. Il affirme qu'un groupe de type fini à croissance polynomiale est virtuellement nilpotent, c'est-à-dire qu'il contient un sous-groupe nilpotent d'indice fini. Cette caractérisation élégante établit un lien profond entre une propriété purement géométrique (la croissance polynomiale) et la structure algébrique d'un groupe.

La preuve originale de Gromov reposait sur une analyse fine des espaces métriques et utilisait la construction d'un espace limite. Depuis, plusieurs approches alternatives ont été proposées, notamment par Kleiner, Shalom-Tao et d'autres. Dans ce mémoire, nous nous concentrons sur l'approche développée par Narutaka Ozawa, qui utilise des outils d'analyse fonctionnelle et la théorie des cocycles harmoniques.

Cette méthode présente plusieurs avantages pédagogiques : elle met en évidence les connexions entre la théorie des groupes et l'analyse harmonique, elle utilise des concepts fondamentaux de probabilités sur les groupes, et elle illustre l'utilité de la cohomologie réduite pour comprendre la structure des groupes.

Notre mémoire s'organise comme suit. Dans la première section, nous introduisons les notions de base concernant les groupes à croissance polynomiale. La deuxième section présente les groupes discrets et leurs représentations unitaires. La troisième section développe la théorie de la cohomologie réduite et des cocycles harmoniques. Enfin, la quatrième section présente en détail la preuve du théorème de Gromov selon l'approche d'Ozawa.

1. SUR LES GROUPES À CROISSANCE POLYNOMIALE

Le théorème de Gromov porte sur les groupes de type fini à croissance polynomiale, il convient donc de définir la croissance d'un groupe et de voir qu'on a automatiquement une métrique sur les groupes de type fini.

Définition 1.1 (Distance sur les groupes). *Soit G un groupe et S une partie symétrique qui l'engendre. On définit la distance entre deux éléments de G comme la distance d'édition entre les deux mots de S associés. On considérera en général la norme induite par la distance au neutre.*

Exemple 1.1.1. *Sur le groupe libre à deux générateurs (a, b) , $a^p b^q$ a pour norme $p + q$. Attention toutefois, sur \mathbb{U}_4 par exemple, on a pour la partie génératrice $\{\omega, \omega^{-1}\}$ que la norme de ω^3 est 1 et pas 3.*

Propriété 1.1. *La norme sur G vérifie les propriétés suivantes :*

- (1) $\forall x, y \in G, \|xy\| \leq \|x\| + \|y\|$
- (2) $\forall x \in G, \|x^{-1}\| = \|x\|$

Définition 1.2 (Croissance polynomiale). *Soit G un groupe de type fini et S une partie finie génératrice symétrique. On définit la boule de rayon r et de centre le neutre notée $B(r)$ par $\{x \in G, \|x\| \leq r\}$. G est dit à **croissance polynomiale** si $\#B(n) = O(n^d)$. Si d est le plus petit exposant entier vérifiant cette propriété, il est appelé **le degré de croissance** de G . Si on change de partie génératrice finie, on obtient une norme équivalente à la précédente ce qui ne change pas la croissance du groupe.*

Exemple 1.2.1. *Sur l'abélianisé du groupe libre à deux générateurs, $\#B(n) = 2n^2 + 2n + 1$ donc il est à croissance polynomiale, néanmoins sur le groupe libre à deux générateurs : $\#B(n) = 2 \cdot 3^n - 1$; il n'est pas à croissance polynomiale. Plus généralement, les groupes libres à ≥ 2 générateurs ont une croissance au moins exponentielle.*

Exemple 1.2.2.

- (1) *Les groupes abéliens de type fini sont à croissance polynomiale*
- (2) *Les groupes nilpotents de type fini sont à croissance polynomiale (on le montrera plus tard)*
- (3) *Plus généralement, une extension finie d'un groupe à croissance polynomiale est polynomiale.*
- (4) *On en conclut que si Γ est virtuellement nilpotent de type fini, il est à croissance polynomiale. La réciproque est le théorème de Gromov.*

2. GROUPES DISCRETS ET REPRÉSENTATIONS UNITAIRES

Dans cette section, nous présentons les notions fondamentales sur les groupes discrets et leurs représentations unitaires qui seront essentielles pour comprendre la preuve du théorème de Gromov selon l'approche d'Ozawa.

2.1. Généralités sur les groupes discrets.

Définition 2.1. *Un groupe topologique G est dit discret si sa topologie est la topologie discrète, c'est-à-dire si tout singleton $\{g\}$ avec $g \in G$ est un ouvert.*

Remarque 2.1. *Un groupe discret est particulièrement simple du point de vue topologique, mais sa structure algébrique peut être d'une grande complexité. Dans un groupe discret, toute application $G \rightarrow H$ à valeurs dans un espace topologique H est automatiquement continue.*

Exemple 2.0.1. *Les groupes finis, le groupe additif \mathbb{Z} , les groupes libres F_n et les groupes de présentation finie sont tous naturellement munis de la topologie discrète.*

Définition 2.2. *Soit G un groupe discret. Un sous-groupe $H \subset G$ est dit d'indice fini si l'ensemble quotient G/H est fini, c'est-à-dire si G peut être écrit comme une union finie de classes à gauche modulo H .*

Propriété 2.1. *Soit G un groupe discret et $H \subset G$ un sous-groupe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) H est d'indice fini dans G .
- (2) $|G/H| < \infty$, où G/H désigne l'ensemble des classes à gauche de H dans G .
- (3) Il existe un sous-ensemble fini $F \subset G$ tel que $G = FH$.

2.2. Actions de groupes discrets.

Définition 2.3. *Soit G un groupe discret et X un espace topologique. Une action de G sur X est une application $\alpha : G \times X \rightarrow X$ satisfaisant les conditions suivantes :*

- (1) $\alpha(g, \cdot)$ est un homéomorphisme
- (2) $\alpha(e, x) = x$ pour tout $x \in X$, où e désigne l'élément neutre de G .
- (3) $\alpha(g_1, \alpha(g_2, x)) = \alpha(g_1 g_2, x)$ pour tous $g_1, g_2 \in G$ et $x \in X$.

Dans la suite, nous noterons souvent $g \cdot x$ ou simplement gx au lieu de $\alpha(g, x)$.

Définition 2.4. *Une action $G \curvearrowright X$ d'un groupe discret G sur un espace topologique X est dite :*

- (1) Libre si pour tout $g \in G \setminus \{e\}$ et tout $x \in X$, on a $gx \neq x$.
- (2) Fidèle si pour tout $g \in G \setminus \{e\}$, il existe $x \in X$ tel que $gx \neq x$.
- (3) Transitive si pour tous $x, y \in X$, il existe $g \in G$ tel que $gx = y$.
- (4) Propre si pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.

Remarque 2.2. *Pour un groupe discret G agissant sur un espace localement compact X , la propriété de propreté est particulièrement importante dans l'étude des actions géométriques, notamment pour l'étude de la croissance des groupes.*

2.3. Représentations unitaires des groupes discrets.

Définition 2.5. *Soit G un groupe discret. Une représentation unitaire de G est un homomorphisme de groupes $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$, où \mathcal{H}_π est un espace de Hilbert et $\mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ désigne le groupe des opérateurs unitaires sur \mathcal{H}_π .*

Contrairement au cas des groupes localement compacts généraux, pour les groupes discrets, la continuité forte de la représentation est automatique et n'a pas besoin d'être supposée.

Exemple 2.1.1. *Voici quelques exemples fondamentaux de représentations unitaires pour un groupe discret G :*

- (1) La représentation triviale : $\pi(g) = 1$ pour tout $g \in G$ sur un espace de Hilbert de dimension 1.
- (2) La représentation régulière gauche : $\lambda_G : G \rightarrow \mathcal{U}(\ell^2(G))$ définie par $(\lambda_G(g)\xi)(h) = \xi(g^{-1}h)$ pour tout $\xi \in \ell^2(G)$ et $g, h \in G$.

Définition 2.6. Soit $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ une représentation unitaire d'un groupe discret G . On dit que :

- (1) π a des vecteurs invariants et on note $1_G \subset \pi$ si l'espace des vecteurs $\pi(G)$ -invariants $(\mathcal{H}_\pi)^G := \{\xi \in \mathcal{H}_\pi \mid \forall g \in G, \pi(g)\xi = \xi\}$ est non nul. Sinon, on dit que π est ergodique et on note $1_G \not\subset \pi$.
- (2) π a presque des vecteurs invariants et on note $1_G \prec \pi$ si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-ensemble fini $Q \subset G$, il existe un vecteur unitaire $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ tel que $\sup_{g \in Q} \|\pi(g)\xi - \xi\| < \varepsilon$. Sinon, on dit que π a un trou spectral et on note $1_G \not\prec \pi$.

Remarque 2.3. Il est clair que si $1_G \subset \pi$, alors $1_G \prec \pi$. La réciproque n'est généralement pas vraie.

2.4. Moyennabilité pour les groupes discrets. La moyennabilité est une propriété fondamentale pour l'approche d'Ozawa du théorème de Gromov.

Définition 2.7. Un groupe discret G est dit moyennable si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- (1) $1_G \prec \lambda_G$, c'est-à-dire que la représentation régulière gauche de G a presque des vecteurs invariants.
- (2) Il existe une moyenne invariante à gauche sur $\ell^\infty(G)$, c'est-à-dire une forme linéaire $m : \ell^\infty(G) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $m \geq 0$, $m(1_G) = 1$ et $m(\lambda(g)F) = m(F)$ pour tout $g \in G$ et $F \in \ell^\infty(G)$.
- (3) Pour toute action de G par homéomorphismes sur un espace compact métrisable X , il existe une mesure de probabilité borélienne $\nu \in \text{Prob}(X)$ qui est G -invariante.

Exemple 2.1.2. Les groupes discrets suivants sont moyennables :

- (1) Tous les groupes finis.
- (2) Tous les groupes abéliens discrets, comme \mathbb{Z}^d .
- (3) Les groupes résolubles, en particulier les groupes nilpotents.

Exemple 2.1.3. Le groupe libre F_2 à deux générateurs n'est pas moyennable. En fait, tout groupe discret contenant une copie de F_2 n'est pas moyennable.

Propriété 2.2. Soient G et H des groupes discrets. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (1) Si G est moyennable et $\phi : G \rightarrow H$ est un homomorphisme surjectif, alors H est moyennable.
- (2) Si $H \triangleleft G$ est un sous-groupe normal, alors G est moyennable si et seulement si H et G/H sont moyennables.
- (3) Si $H \subset G$ est un sous-groupe d'indice fini, alors H est moyennable si et seulement si G est moyennable.

2.5. Propriété (T) pour les groupes discrets. La propriété (T) joue un rôle dans la preuve du théorème de Gromov par Ozawa, en particulier dans l'analyse des groupes qui ne sont pas à croissance polynomiale.

Définition 2.8. *Un groupe discret G a la propriété (T) si pour toute représentation unitaire $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ telle que $1_G \prec \pi$, on a $1_G \subset \pi$.*

Remarque 2.4. *Cette propriété traduit une forme de rigidité sur G , il ne peut pas être représenté n'importe comment. On réalise alors qu'un tel groupe est naturellement géométrique, en cela qu'il y a des contraintes sur ses représentations unitaires (de nature géométrique) qui forcent des comportements structurels sur le groupe.*

Propriété 2.3. *Soit G un groupe discret ayant la propriété (T). Alors G est de type fini.*

Remarque 2.5. *Un groupe discret est compact si et seulement s'il est fini. Par conséquent, un groupe discret est à la fois moyennable et possède la propriété (T) si et seulement s'il est fini.*

3. COHOMOLOGIE RÉDUITE ET COCYCLES HARMONIQUES

Dans cette section, nous développons la théorie de la cohomologie réduite et des cocycles harmoniques, qui joue un rôle central dans la preuve du théorème de Gromov par la méthode d'Ozawa. Ces outils, issus de l'analyse fonctionnelle, permettent d'établir un lien entre la structure des groupes et leurs propriétés de croissance. Nous nous concentrerons particulièrement sur les propriétés qui interviennent directement dans notre preuve.

3.1. Définitions et propriétés fondamentales.

Définition 3.1. *Soit Γ un groupe discret et $\pi : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ une représentation unitaire. Une application $b : \Gamma \rightarrow \mathcal{H}_\pi$ est un 1-cocycle pour π si elle satisfait la relation*

$$\forall g, h \in \Gamma, b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h).$$

L'espace des 1-cocycles pour π est noté $Z^1(\Gamma, \pi)$.

Définition 3.2. *Un 1-cobord pour π est un 1-cocycle de la forme $b(g) = \pi(g)\xi - \xi$ pour un certain $\xi \in \mathcal{H}_\pi$. L'espace des 1-cobords est noté $B^1(\Gamma, \pi)$.*

Remarque 3.1. *Moralement un 1-cocycle est l'origine d'une représentation affine construite à partir de π par la formule : $g \in G \mapsto (v \mapsto \pi(g)(v) + b(g))$ dont on vérifie qu'elle est une représentation affine si et seulement si b vérifie la relation de 1-cocycle. Un 1-cobord représente alors un changement d'origine pour la représentation.*

Pour introduire la cohomologie réduite, nous avons besoin d'une topologie appropriée sur l'espace $Z^1(\Gamma, \pi)$. Pour les groupes de type fini, nous utilisons la topologie induite par une norme associée à une mesure de probabilité.

Définition 3.3. *Soit Γ un groupe discret de type fini et $\mu \in \text{Prob}(\Gamma)$ une mesure de probabilité symétrique à support fini telle que $\mu(e) > 0$ et le support de μ engendre Γ . Pour $b \in Z^1(\Gamma, \pi)$, définissons*

$$\|b\|_\mu := \left(\sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \|b(g)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Cette définition induit un produit scalaire sur $Z^1(\Gamma, \pi)$ défini par

$$\langle b_1, b_2 \rangle_\mu := \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \langle b_1(g), b_2(g) \rangle.$$

Théorème 3.1. *Pour tout groupe discret de type fini Γ et toute représentation unitaire $\pi : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$, l'espace $(Z^1(\Gamma, \pi), \|\cdot\|_\mu)$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(Z^1(\Gamma, \pi), \|\cdot\|_\mu)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\|b_{n+1} - b_n\|_\mu \leq 2^{-(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, considérons la norme associée à μ^{*k} :

$$\|b\|_{\mu^{*k}} = \left(\sum_{g \in \Gamma} \mu^{*k}(g) \|b(g)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Comme b_n est un cocycle, on a pour tout $g_1, \dots, g_k \in \Gamma$:

$$b_n(g_1 \cdots g_k) = b_n(g_1) + \pi(g_1)b_n(g_2) + \cdots + \pi(g_1 \cdots g_{k-1})b_n(g_k).$$

Cela implique que

$$\|b_{n+1} - b_n\|_{\mu^{*k}} \leq k \|b_{n+1} - b_n\|_\mu \leq k \cdot 2^{-(n+1)}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à μ^{*k} ,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{g \in \Gamma} \mu^{*k}(g) \|b_{n+1}(g) - b_n(g)\| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \|b_{n+1} - b_n\|_{\mu^{*k}} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} k \cdot 2^{-(n+1)} = k.$$

Par conséquent, pour μ^{*k} -presque tout $g \in \Gamma$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|b_{n+1}(g) - b_n(g)\|$ converge.

Maintenant, fixons $g \in \Gamma$. Puisque μ est non dégénérée et que son support engendre Γ , il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mu^{*k}(g) > 0$. Pour ce k , la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|b_{n+1}(g) - b_n(g)\|$ converge, ce qui implique que la suite $(b_n(g))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathcal{H}_π et donc converge.

Définissons $b(g) := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(g)$ pour tout $g \in \Gamma$.

Pour montrer que $b \in Z^1(\Gamma, \pi)$, vérifions qu'il satisfait la relation de cocycle. Pour tous $g, h \in \Gamma$, on a

$$\begin{aligned} b(gh) &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(gh) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n(g) + \pi(g)b_n(h)) \\ &= b(g) + \pi(g)b(h) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation de cocycle pour b_n et la continuité de $\pi(g)$.

De plus, pour montrer que $\|b_n - b\|_\mu \rightarrow 0$, nous utilisons l'inégalité triangulaire et le lemme de Fatou :

$$\begin{aligned}
 \|b - b_n\|_\mu^2 &= \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \|b(g) - b_n(g)\|^2 \\
 &= \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \left\| \lim_{m \rightarrow \infty} b_m(g) - b_n(g) \right\|^2 \\
 &= \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \left\| \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{m-1} (b_{k+1}(g) - b_k(g)) \right\|^2 \\
 &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \left\| \sum_{k=n}^{m-1} (b_{k+1}(g) - b_k(g)) \right\|^2 \\
 &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \left(\sum_{k=n}^{m-1} \|b_{k+1}(g) - b_k(g)\| \right)^2 \\
 &\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \|b_{k+1} - b_k\|_\mu \right)^2 \\
 &\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} 2^{-(k+1)} \right)^2 = 2^{-2n}.
 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \|b - b_n\|_\mu = 0$, ce qui prouve que $(Z^1(\Gamma, \pi), \|\cdot\|_\mu)$ est complet. \square

Définition 3.4. La cohomologie réduite de Γ à coefficients dans π est définie comme

$$\overline{H}^1(\Gamma, \pi) := Z^1(\Gamma, \pi) / \overline{B^1(\Gamma, \pi)},$$

où $\overline{B^1(\Gamma, \pi)}$ désigne la fermeture de $B^1(\Gamma, \pi)$ dans $Z^1(\Gamma, \pi)$ pour la topologie induite par $\|\cdot\|_\mu$.

Remarque 3.2. Avec l'interprétation géométrique des 1-cocycle, on voit l'intérêt d'effacer $B^1(\Gamma, \pi)$ (et a fortiori son adhérence) : les phénomènes significatifs à observer sont ceux qui ne sont pas relatif à un changement d'origine qui est insignifiant.

3.2. Cocycles harmoniques et décomposition orthogonale. Un concept essentiel pour étudier la cohomologie réduite est celui de cocycle harmonique.

Définition 3.5. Soit $\mu \in \text{Prob}(\Gamma)$ comme précédemment. Un cocycle $b \in Z^1(\Gamma, \pi)$ est dit μ -harmonique si

$$\sum_{g \in \Gamma} \mu(g) b(g) = 0.$$

L'espace des cocycles μ -harmoniques est noté $\text{Har}_\mu(\Gamma, \pi)$.

Le résultat suivant établit une connexion fondamentale entre la cohomologie réduite et les cocycles harmoniques.

Théorème 3.2. Soit Γ un groupe discret de type fini et $\pi : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ une représentation unitaire. On a la décomposition orthogonale suivante :

$$Z^1(\Gamma, \pi) = \overline{B^1(\Gamma, \pi)} \oplus \text{Har}_\mu(\Gamma, \pi).$$

En particulier, $\overline{H}^1(\Gamma, \pi)$ peut être canoniquement identifié à $\text{Har}_\mu(\Gamma, \pi)$.

Démonstration. Nous montrons d'abord que $\text{Har}_\mu(\Gamma, \pi) = B^1(\Gamma, \pi)^\perp$. Pour $b \in Z^1(\Gamma, \pi)$ et $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, définissons $\partial\xi \in B^1(\Gamma, \pi)$ par $\partial\xi(g) = \pi(g)\xi - \xi$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle b, \partial\xi \rangle_\mu &= \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \langle b(g), \pi(g)\xi - \xi \rangle \\ &= \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \langle b(g), \pi(g)\xi \rangle - \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \langle b(g), \xi \rangle \\ &= \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \langle \pi(g)^* b(g), \xi \rangle - \left\langle \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) b(g), \xi \right\rangle \end{aligned}$$

En utilisant l'identité $\pi(g)^* b(g) = -b(g^{-1})$ (qui découle de la relation de cocycle appliquée à $g^{-1}g = e$ et du fait que $b(e) = 0$), et comme μ est symétrique, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle b, \partial\xi \rangle_\mu &= - \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \langle b(g^{-1}), \xi \rangle - \left\langle \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) b(g), \xi \right\rangle \\ &= - \sum_{g \in \Gamma} \mu(g^{-1}) \langle b(g), \xi \rangle - \left\langle \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) b(g), \xi \right\rangle \\ &= -2 \left\langle \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) b(g), \xi \right\rangle \end{aligned}$$

Par conséquent, $\langle b, \partial\xi \rangle_\mu = 0$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ si et seulement si $\sum_{g \in \Gamma} \mu(g) b(g) = 0$, c'est-à-dire si $b \in \text{Har}_\mu(\Gamma, \pi)$. Ainsi, $\text{Har}_\mu(\Gamma, \pi) = B^1(\Gamma, \pi)^\perp$.

Puisque $(Z^1(\Gamma, \pi), \|\cdot\|_\mu)$ est un espace de Hilbert par le Théorème 3.1, nous avons

$$Z^1(\Gamma, \pi) = \overline{B^1(\Gamma, \pi)} \oplus B^1(\Gamma, \pi)^\perp = \overline{B^1(\Gamma, \pi)} \oplus \text{Har}_\mu(\Gamma, \pi).$$

L'identification canonique $\overline{H^1}(\Gamma, \pi) \cong \text{Har}_\mu(\Gamma, \pi)$ en découle immédiatement. \square

3.3. Propriété (T) et cohomologie réduite. Le résultat suivant, dû à Delorme-Guichardet, caractérise la propriété (T) en termes de cohomologie.

Théorème 3.3 (Delorme-Guichardet). *Soit Γ un groupe discret de type fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) Γ possède la propriété (T) de Kazhdan.
- (2) Pour toute représentation unitaire $\pi : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$, on a $H^1(\Gamma, \pi) = 0$.

Démonstration. (\Rightarrow) Supposons que G a la propriété (T) et soit $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ une représentation unitaire fortement continue. Supposons que $b \in Z^1(G, \pi)$ soit un cocycle non trivial, c'est-à-dire que $b \notin B^1(G, \pi)$. On veut montrer que cela contredit la propriété (T).

Un cocycle $b \in Z^1(G, \pi)$ est un cobord si et seulement si il est borné. Ainsi, b n'est pas borné sur G .

On considère alors l'espace de Fock symétrisé associé à \mathcal{H}_π :

- on définit $\mathcal{H}_\pi^{\otimes 0} := \mathbb{C}\Omega$, avec $\|\Omega\| = 1$;
- on définit l'espace

$$\exp(\mathcal{H}_\pi) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\pi^{\otimes n} ;$$

— pour tout $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, on définit

$$\exp(\xi) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n!}} \xi^{\otimes n} \in \exp(\mathcal{H}_\pi).$$

On note K la fermeture de l'enveloppe linéaire de $\{\exp(\xi) \mid \xi \in \mathcal{H}_\pi\}$ dans $\exp(\mathcal{H}_\pi)$.

Pour tout $t > 0$, on définit une représentation unitaire fortement continue $\rho_t : G \rightarrow \mathcal{U}(K)$ par :

$$\rho_t(g)(\exp(\xi)) := \exp\left(-\frac{t^2}{2}\|b(g)\|^2 - \langle \pi(g)\xi, tb(g) \rangle\right) \cdot \exp(\pi(g)\xi + tb(g)).$$

La relation de cocycle pour b permet de vérifier que ρ_t est un morphisme de groupes et donc une représentation unitaire. De plus, ρ_t est fortement continue.

En particulier, pour tout $g \in G$:

$$\langle \rho_t(g)\Omega, \Omega \rangle = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\|b(g)\|^2\right).$$

Mais comme b n'est pas borné sur G , on obtient que Ω n'est pas presque invariant. Par conséquent, ρ_t ne contient pas de vecteurs presque invariants. Cette construction contredit la propriété (T) de G . Donc un tel cocycle b ne peut pas exister, et $H^1(G, \pi) = 0$.

(\Leftarrow) Supposons maintenant que G est σ -compact et que $H^1(G, \pi) = 0$ pour toute représentation unitaire fortement continue $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$. Supposons par l'absurde que G ne vérifie pas la propriété (T). Alors, par définition, il existe une représentation unitaire π de G qui admet des vecteurs presque invariants mais pas de vecteur invariant.

Cela implique que l'espace $B^1(G, \pi)$ n'est pas fermé dans $Z^1(G, \pi)$ (dans la topologie de la convergence uniforme sur les compacts).

Mais notre hypothèse $H^1(G, \pi) = 0$ implique que $Z^1(G, \pi) = B^1(G, \pi)$. Donc $B^1(G, \pi)$ est à la fois dense et fermé dans $Z^1(G, \pi)$, donc $Z^1 = B^1$ est un espace de Banach. Contradiction.

On conclut que G vérifie la propriété (T). \square

Remarque 3.3. *C'est le dernier pont que nous effectuons : d'un groupe G qui n'avait rien à dire nous avons obtenu la propriété (T) plus géométrique, plus loquace mais pas assez fonctionnelle (à entendre au sens mathématiques et commun) ; finalement on obtient la cohomologie qui elle est fonctionnelle et loquace car elle caractérise une propriété géométrique à partir d'une donnée fonctionnelle.*

Le théorème qui suit est fondamental à notre exposé, notamment car il traite de la cohomologie réduite contrairement à Delorme-Guichardet, qui est beaucoup plus régulière d'un point de vu fonctionnel.

Théorème 3.4 (Shalom). *Soit Γ un groupe discret de type fini sans la propriété (T). Alors il existe une représentation unitaire $\pi : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ telle que $\overline{H}^1(\Gamma, \pi) \neq 0$.*

Démonstration. Comme Γ n'a pas la propriété (T), il existe une représentation unitaire $\pi : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ qui possède presque des vecteurs invariants mais pas de vecteur invariant non nul.

Fixons une mesure de probabilité symétrique μ sur Γ à support fini, avec $\mu(e) > 0$ et telle que le support de μ engendre Γ . Considérons l'opérateur de Markov $T_\mu = \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \pi(g) \in B(\mathcal{H}_\pi)$. Puisque π a presque des vecteurs invariants, 1 appartient au spectre de T_μ . Cependant, comme π n'a pas de vecteur invariant non nul, 1 n'est pas une valeur propre de T_μ .

Ainsi, 1 est un point d'accumulation du spectre de T_μ . Il existe donc une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels positifs qui décroît vers 0 telle que les sous-espaces spectraux

$$\mathcal{H}_n = E_{T_\mu}([1 - 2\varepsilon_n, 1 - \varepsilon_n])\mathcal{H}_\pi$$

sont non nuls pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, choisissons un vecteur unitaire $\xi_n \in \mathcal{H}_n$. On a alors

$$\sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \|\xi_n - \pi(g)\xi_n\|^2 = 2(1 - \langle T_\mu \xi_n, \xi_n \rangle) \in [2\varepsilon_n, 4\varepsilon_n].$$

Fixons un ultrafiltre non principal \mathcal{U} sur \mathbb{N} et considérons la représentation ultrapuissance $\pi_{\mathcal{U}}$ sur l'espace de Hilbert ultrapuissance $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$. Définissons l'application $b : \Gamma \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ par

$$b(g) = (\varepsilon_n^{-1/2}(\xi_n - \pi(g)\xi_n))_{n \rightarrow \mathcal{U}}.$$

Vérifions que b est un 1-cocycle pour $\pi_{\mathcal{U}}$. Pour tous $g, h \in \Gamma$, nous avons :

$$\begin{aligned} b(gh) &= (\varepsilon_n^{-1/2}(\xi_n - \pi(gh)\xi_n))_{n \rightarrow \mathcal{U}} \\ &= (\varepsilon_n^{-1/2}(\xi_n - \pi(g)\pi(h)\xi_n))_{n \rightarrow \mathcal{U}} \\ &= (\varepsilon_n^{-1/2}(\xi_n - \pi(g)\xi_n + \pi(g)\xi_n - \pi(g)\pi(h)\xi_n))_{n \rightarrow \mathcal{U}} \\ &= (\varepsilon_n^{-1/2}(\xi_n - \pi(g)\xi_n))_{n \rightarrow \mathcal{U}} + (\varepsilon_n^{-1/2}\pi(g)(\xi_n - \pi(h)\xi_n))_{n \rightarrow \mathcal{U}} \\ &= b(g) + \pi_{\mathcal{U}}(g)b(h) \end{aligned}$$

Donc $b \in Z^1(\Gamma, \pi_{\mathcal{U}})$.

De plus, nous avons :

$$\sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \|b(g)\|^2 = \lim_{n \rightarrow \mathcal{U}} \varepsilon_n^{-1} \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \|\xi_n - \pi(g)\xi_n\|^2 \in [2, 4]$$

ce qui montre que b est non nul, et

$$\left\| \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) b(g) \right\| = \lim_{n \rightarrow \mathcal{U}} \varepsilon_n^{-1/2} \left\| \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) (\xi_n - \pi(g)\xi_n) \right\| = 0$$

car $\sum_{g \in \Gamma} \mu(g) (\xi_n - \pi(g)\xi_n) = \xi_n - T_\mu \xi_n$ a une norme majorée par $2\varepsilon_n$ pour chaque n .

Ainsi, b est un cocycle μ -harmonique non nul pour $\pi_{\mathcal{U}}$. D'après le Théorème 3.2, $\overline{H}^1(\Gamma, \pi_{\mathcal{U}}) \cong \text{Har}_\mu(\Gamma, \pi_{\mathcal{U}}) \neq 0$. \square

3.4. Cocycles harmoniques et représentations faiblement mélangeantes.

Rappelons qu'une représentation unitaire $\pi : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ est dite *faiblement mélangeante* si elle ne contient aucun sous-espace non nul de dimension finie qui est $\pi(\Gamma)$ -invariant.

Le lemme suivant, dû à Ozawa, est un outil technique crucial qui relie le comportement des cocycles harmoniques aux propriétés de mélange des représentations.

Lemme 3.5. *Soit Γ un groupe discret de type fini, $\mu \in \text{Prob}(\Gamma)$ une mesure de probabilité symétrique à support fini telle que $\mu(e) > 0$ et le support de μ engendre Γ . Soit $b : \Gamma \rightarrow \mathcal{H}_\pi$ un cocycle μ -harmonique avec coefficients dans une représentation unitaire $\pi : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ faiblement mélangeante. Alors*

$$\frac{1}{n} \left\| \sum_{g \in \Gamma} \mu^{*n}(g) (b(g) \otimes \overline{b(g)}) \right\|_{\mathcal{H}_\pi \otimes \overline{\mathcal{H}_\pi}} \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$. En particulier,

$$\sup_{\xi \in \mathcal{H}_\pi, \|\xi\| \leq 1} \frac{1}{n} \sum_{g \in \Gamma} \mu^{*n}(g) |\langle b(g), \xi \rangle|^2 \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$.

Remarque 3.4. $\mathcal{H}_\pi \otimes \overline{\mathcal{H}_\pi}$ s'identifie à l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Ce lemme dit que l'espérance de $b(S_n) \otimes \overline{b(S_n)}$ (où S_n est la marche aléatoire sur le groupe G à l'étape n) est négligeable devant n .

Démonstration. Comme b est μ -harmonique (et donc μ^{*n} -harmonique pour tout n), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $g \in \Gamma$:

$$\sum_{h \in \Gamma} \mu^{*n}(h) (b(gh) \otimes \overline{b(gh)}) = b(g) \otimes \overline{b(g)} + (\pi(g) \otimes \overline{\pi(g)}) \sum_{h \in \Gamma} \mu^{*n}(h) (b(h) \otimes \overline{b(h)})$$

où nous avons utilisé la relation de cocycle et la μ^{*n} -harmonicité de b .

Posons $\zeta := \sum_{h \in \Gamma} \mu(h) (b(h) \otimes \overline{b(h)})$ et $T := \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) (\pi(g) \otimes \overline{\pi(g)})$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{h \in \Gamma} \mu^{*n}(h) (b(h) \otimes \overline{b(h)}) &= \sum_{g \in \Gamma, h \in \Gamma} \mu(g) \mu^{*(n-1)}(h) (b(gh) \otimes \overline{b(gh)}) \\ &= \zeta + T \sum_{h \in \Gamma} \mu^{*(n-1)}(h) (b(h) \otimes \overline{b(h)}) \\ &= \dots = (1 + T + \dots + T^{n-1}) \zeta \end{aligned}$$

Puisque π est faiblement mélangeante, la représentation tensorielle $\pi \otimes \overline{\pi}$ n'a pas de vecteur invariant non nul. Par conséquent, par stricte convexité d'un espace de Hilbert, 1 n'est pas une valeur propre de l'opérateur auto-adjoint T .

Soit E_T la résolution spectrale de T et $m(\cdot) := \langle E_T(\cdot) \zeta, \zeta \rangle$ la mesure spectrale associée. Comme π est faiblement mélangeante, m est supportée sur $[-1, 1]$ et $m(\{1\}) = 0$. Ainsi,

$$\frac{1}{n} \left\| \sum_{h \in \Gamma} \mu^{*n}(h) (b(h) \otimes \overline{b(h)}) \right\|_{\mathcal{H}_\pi \otimes \overline{\mathcal{H}_\pi}} = \left(\int_{-1}^1 \left| \frac{1+t+\dots+t^{n-1}}{n} \right|^2 dm(t) \right)^{1/2}$$

Pour chaque $t \in [-1, 1] \setminus \{1\}$, $\frac{1+t+\dots+t^{n-1}}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Par le théorème de convergence dominée, l'intégrale ci-dessus tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

La seconde affirmation découle de la première en utilisant $|\langle b(g), \xi \rangle|^2 = \langle b(g) \otimes \overline{b(g)}, \xi \otimes \overline{\xi} \rangle$. \square

3.5. Concavité de la fonctionnelle d'entropie. Pour prouver le théorème d'Ozawa, nous aurons besoin d'examiner la concavité de la fonctionnelle d'entropie. Pour toute fonction non négative p sur Γ , l'entropie est définie par

$$H(p) := - \sum_{g \in \Gamma} p(g) \log p(g).$$

Lemme 3.6. *Pour toutes fonctions non négatives p et q sur Γ , on définit*

$$\delta(p, q) := H\left(\frac{p+q}{2}\right) - \frac{H(p) + H(q)}{2}.$$

Alors :

$$(1) \quad \delta(p, q) \geq \sum_{g \in \Gamma} \frac{|p(g) - q(g)|^2}{8(p(g) + q(g))} \geq 0.$$

(2) *Pour toute fonction non négative f sur Γ ,*

$$\sum_{g \in \Gamma} f(g) |p(g) - q(g)| \leq \left(8\delta(p, q) \sum_{g \in \Gamma} f(g)^2 (p(g) + q(g)) \right)^{1/2}.$$

(3) *En particulier, $\|p - q\|_1 \leq (8\delta(p, q) \|p + q\|_1)^{1/2}$.*

Démonstration. (1) Pour $a, b \geq 0$, on a

$$\frac{1}{2}(a \log a + b \log b) - \frac{a+b}{2} \log \frac{a+b}{2} \geq \frac{|a-b|^2}{8(a+b)} \geq 0$$

comme on peut le vérifier en utilisant le fait que $(t \log t)'' = t^{-1} \geq (a+b)^{-1}$ pour tout t entre a et b . Appliquant cette inégalité terme à terme, on obtient :

$$\delta(p, q) \geq \sum_{g \in \Gamma} \frac{|p(g) - q(g)|^2}{8(p(g) + q(g))} \geq 0.$$

(2) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en décomposant

$$f(g) |p(g) - q(g)| = f(g) \sqrt{p(g) + q(g)} \cdot \frac{|p(g) - q(g)|}{\sqrt{p(g) + q(g)}},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{g \in \Gamma} f(g) |p(g) - q(g)| &\leq \left(\sum_{g \in \Gamma} f(g)^2 (p(g) + q(g)) \right)^{1/2} \left(\sum_{g \in \Gamma} \frac{|p(g) - q(g)|^2}{p(g) + q(g)} \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{g \in \Gamma} f(g)^2 (p(g) + q(g)) \right)^{1/2} (8\delta(p, q))^{1/2} \end{aligned}$$

(3) En prenant $f(g) = 1$ pour tout $g \in \Gamma$ dans (2), on obtient

$$\begin{aligned} \|p - q\|_1 &\leq \left(\sum_{g \in \Gamma} (p(g) + q(g)) \right)^{1/2} (8\delta(p, q))^{1/2} \\ &= (8\delta(p, q) \|p + q\|_1)^{1/2}. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.7. *Pour toutes mesures de probabilité μ et ν sur Γ et tout $g_0 \in \Gamma$, on a*

$$H(\mu * \nu) - H(\nu) \geq 2 \min\{\mu(e), \mu(g_0)\} \delta(\nu, g_0\nu).$$

où $(g_0\nu)(g) = \nu(g_0^{-1}g)$.

Démonstration. Posons $\lambda := \min\{\mu(e), \mu(g_0)\}$ et observons que

$$\nu' := \frac{1}{1-2\lambda}(\mu * \nu - \lambda\nu - \lambda g_0\nu)$$

est une combinaison convexe de translatées de ν . Par conséquent, $H(\nu') \geq H(\nu)$ par concavité de l'entropie. Ainsi,

$$\begin{aligned} H(\mu * \nu) - H(\nu) &= H\left(2\lambda \frac{\nu + g_0\nu}{2} + (1-2\lambda)\nu'\right) - H(\nu) \\ &\geq 2\lambda \left(H\left(\frac{\nu + g_0\nu}{2}\right) - H(\nu)\right) + (1-2\lambda)(H(\nu') - H(\nu)) \\ &\geq 2\lambda \delta(\nu, g_0\nu). \end{aligned}$$

□

3.6. Propriété H_{FD} de Shalom. La propriété H_{FD} introduite par Shalom joue un rôle fondamental dans la preuve du théorème de Gromov par la méthode d'Ozawa.

Définition 3.6. *Un groupe Γ est dit avoir la propriété H_{FD} si pour toute représentation unitaire π telle que $\overline{H}^1(\Gamma, \pi) \neq 0$, la représentation π n'est pas faiblement mélangante.*

Remarque 3.5. *Lire cette définition sous la forme : avoir H_{FD} c'est être un groupe docile vis-à-vis du fonctionnelle, une information sur la cohomologie réduite (le fait qu'elle soit non-triviale) offre une information géométrique : il existe une sous-représentation de dimension finie, ce qui est encore une fois remarquable car Γ peut-être gros.*

Voici maintenant la preuve détaillée du théorème d'Ozawa, qui constitue l'élément central de sa preuve du théorème de Gromov.

Théorème 3.8 (Ozawa). *Soit Γ un groupe discret de type fini avec croissance d'entropie lente, c'est-à-dire qu'il existe une mesure de probabilité symétrique μ à support fini avec $\mu(e) > 0$ et le support de μ génère Γ , telle que*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n(H(\mu^{*n+1}) - H(\mu^{*n})) < \infty,$$

où H est la fonctionnelle d'entropie. Alors Γ a la propriété H_{FD} .

Démonstration. Soit $\pi : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ une représentation unitaire faiblement mélangante. Nous allons montrer que tout cocycle μ -harmonique $b \in Z^1(\Gamma, \pi)$ est trivial, c'est-à-dire $b = 0$. Par le Théorème 3.2, cela impliquera que $\overline{H}^1(\Gamma, \pi) = 0$.

Soit b un cocycle μ -harmonique pour π . Pour tout $g \in \Gamma$ et tout vecteur unitaire $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, nous voulons montrer que $\langle b(g), \xi \rangle = 0$.

Fixons $g \in \text{supp}(\mu)$ et un vecteur unitaire $\xi \in \mathcal{H}_\pi$. Puisque b est μ^{*n} -harmonique pour tout n , nous avons pour chaque $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \langle b(g), \xi \rangle &= \left\langle \sum_{x \in \Gamma} (b(gx) - b(x)) \mu^{*n}(x), \xi \right\rangle \\ &= \sum_{x \in \Gamma} \langle b(x), \xi \rangle (g\mu^{*n} - \mu^{*n})(x) \end{aligned}$$

où $(g\mu^{*n})(x) = \mu^{*n}(g^{-1}x)$. Par le Lemme 3.6 (2), nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\langle b(g), \xi \rangle| &\leq \sum_{x \in \Gamma} |\langle b(x), \xi \rangle| |(g\mu^{*n} - \mu^{*n})(x)| \\ &\leq \left(8\delta(\mu^{*n}, g\mu^{*n}) \sum_{x \in \Gamma} |\langle b(x), \xi \rangle|^2 (g\mu^{*n} + \mu^{*n})(x) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Notons que $(g\mu^{*n} + \mu^{*n})(x) = \mu^{*n}(g^{-1}x) + \mu^{*n}(x)$. Pour majorer cette somme, observons que :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Gamma} |\langle b(x), \xi \rangle|^2 (g\mu^{*n} + \mu^{*n})(x) &= \sum_{x \in \Gamma} |\langle b(x), \xi \rangle|^2 \mu^{*n}(g^{-1}x) + \sum_{x \in \Gamma} |\langle b(x), \xi \rangle|^2 \mu^{*n}(x) \\ &= \sum_{x \in \Gamma} |\langle b(gx), \xi \rangle|^2 \mu^{*n}(x) + \sum_{x \in \Gamma} |\langle b(x), \xi \rangle|^2 \mu^{*n}(x) \end{aligned}$$

Puisque b est un cocycle, nous avons $b(gx) = b(g) + \pi(g)b(x)$. Donc :

$$\begin{aligned} |\langle b(gx), \xi \rangle|^2 &= |\langle b(g) + \pi(g)b(x), \xi \rangle|^2 \\ &= |\langle b(g), \xi \rangle + \langle b(x), \pi(g)^*\xi \rangle|^2 \\ &\leq 2|\langle b(g), \xi \rangle|^2 + 2|\langle b(x), \pi(g)^*\xi \rangle|^2 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Gamma} |\langle b(x), \xi \rangle|^2 (g\mu^{*n} + \mu^{*n})(x) &\leq 2|\langle b(g), \xi \rangle|^2 + 2 \sum_{x \in \Gamma} |\langle b(x), \pi(g)^*\xi \rangle|^2 \mu^{*n}(x) \\ &\quad + \sum_{x \in \Gamma} |\langle b(x), \xi \rangle|^2 \mu^{*n}(x) \\ &\leq 2|\langle b(g), \xi \rangle|^2 + 3 \sum_{x \in \Gamma} |\langle b(x), \eta \rangle|^2 \mu^{*n}(x) \end{aligned}$$

où η est un vecteur unitaire quelconque (on peut prendre $\eta = \xi$ ou $\eta = \pi(g)^*\xi$). En substituant dans notre inégalité initiale :

$$|\langle b(g), \xi \rangle|^2 \leq 8\delta(\mu^{*n}, g\mu^{*n}) \left(2|\langle b(g), \xi \rangle|^2 + 3 \sum_{x \in \Gamma} |\langle b(x), \eta \rangle|^2 \mu^{*n}(x) \right)$$

Par le Lemme 3.7, nous avons :

$$\delta(\mu^{*n}, g\mu^{*n}) \leq \frac{\lambda_g}{2} (H(\mu^{*n+1}) - H(\mu^{*n}))$$

où $\lambda_g = 4 \min\{\mu(e), \mu(g)\}^{-1}$.

Donc :

$$|\langle b(g), \xi \rangle|^2 \leq 4\lambda_g (H(\mu^{*n+1}) - H(\mu^{*n})) \left(2|\langle b(g), \xi \rangle|^2 + 3 \sum_{x \in \Gamma} |\langle b(x), \eta \rangle|^2 \mu^{*n}(x) \right)$$

Réarrangeons cette inégalité :

$$|\langle b(g), \xi \rangle|^2 (1 - 8\lambda_g(H(\mu^{*n+1}) - H(\mu^{*n}))) \leq 12\lambda_g(H(\mu^{*n+1}) - H(\mu^{*n})) \sum_{x \in \Gamma} |\langle b(x), \eta \rangle|^2 \mu^{*n}(x)$$

Par l'hypothèse de croissance d'entropie lente, il existe $C < \infty$ tel que $\liminf_{n \rightarrow \infty} n(H(\mu^{*n+1}) - H(\mu^{*n})) \leq C$.

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de n tels que $n(H(\mu^{*n+1}) - H(\mu^{*n})) \leq C + \varepsilon$.

Pour ces valeurs de n suffisamment grandes, nous avons $8\lambda_g(H(\mu^{*n+1}) - H(\mu^{*n})) < 1/2$, et donc :

$$\begin{aligned} |\langle b(g), \xi \rangle|^2 &\leq \frac{12\lambda_g(H(\mu^{*n+1}) - H(\mu^{*n}))}{1/2} \sum_{x \in \Gamma} |\langle b(x), \eta \rangle|^2 \mu^{*n}(x) \\ &\leq 24\lambda_g(H(\mu^{*n+1}) - H(\mu^{*n})) \sum_{x \in \Gamma} |\langle b(x), \eta \rangle|^2 \mu^{*n}(x) \\ &\leq \frac{24\lambda_g(C + \varepsilon)}{n} \sum_{x \in \Gamma} |\langle b(x), \eta \rangle|^2 \mu^{*n}(x) \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.5, nous avons :

$$\sup_{\eta \in \mathcal{H}_\pi, \|\eta\| \leq 1} \frac{1}{n} \sum_{x \in \Gamma} \mu^{*n}(x) |\langle b(x), \eta \rangle|^2 \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$.

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n suffisamment grand tel que :

$$|\langle b(g), \xi \rangle|^2 \leq \varepsilon$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, nous avons $\langle b(g), \xi \rangle = 0$ pour tout $g \in \text{supp}(\mu)$ et tout vecteur unitaire $\xi \in \mathcal{H}_\pi$.

Puisque $\text{supp}(\mu)$ génère Γ et que b est un cocycle, cela implique que $b = 0$.

Nous avons donc montré que pour toute représentation faiblement mélangeante π , on a $\overline{H}^1(\Gamma, \pi) = 0$. Cela signifie précisément que Γ a la propriété H_{FD} . \square

4. LA PREUVE DU THÉORÈME DE GROMOV VIA L'APPROCHE D'OZAWA

Dans cette section, nous présentons la preuve complète du théorème de Gromov en utilisant l'approche d'Ozawa, qui repose sur l'analyse des cocycles harmoniques et la propriété H_{FD} introduite par Shalom. Cette preuve élégante utilise des outils d'analyse fonctionnelle pour établir un résultat de nature géométrique sur les groupes.

4.1. Structure de la preuve. La stratégie de la preuve d'Ozawa peut être résumée comme suit :

- (1) Montrer que tout groupe à croissance polynomiale a une croissance d'entropie lente.
- (2) Établir que les groupes à croissance d'entropie lente possèdent la propriété H_{FD} (Théorème 3.8).
- (3) Utiliser le fait que les groupes à croissance polynomiale sont moyennables et donc n'ont pas la propriété (T).

- (4) Appliquer le théorème de Shalom pour obtenir une représentation unitaire de dimension finie avec cohomologie réduite non triviale.
- (5) En déduire l'existence d'un sous-groupe nilpotent d'indice fini.

4.2. Croissance polynomiale et croissance d'entropie lente. Nous commençons par établir le lien entre la croissance polynomiale d'un groupe et sa croissance d'entropie. Ce résultat n'est pas immédiat et constitue une étape importante de la preuve.

Théorème 4.1. *Soit Γ un groupe de type fini à croissance polynomiale. Alors Γ a une croissance d'entropie lente, c'est-à-dire qu'il existe une mesure de probabilité symétrique μ à support fini avec $\mu(e) > 0$ telle que*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n(H(\mu^{*n+1}) - H(\mu^{*n})) < \infty.$$

Démonstration. Soit μ une mesure de probabilité symétrique non dégénérée à support fini sur Γ avec $\mu(e) > 0$. Par la concavité de la fonction logarithme, on a

$$H(\mu^{*n}) = \sum_{g \in \Gamma} \mu^{*n}(g) \log \frac{1}{\mu^{*n}(g)} \leq \log \sum_{g \in \text{supp } \mu^{*n}} \frac{\mu^{*n}(g)}{\mu^{*n}(g)} = \log |\text{supp } \mu^{*n}|.$$

Puisque $|\text{supp } \mu^{*n}| = |(\text{supp } \mu)^n|$ a une croissance polynomiale, il existe $d < \infty$ tel que

$$d = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\mu^{*n})}{\log n} < \infty.$$

Maintenant, pour tout $d' < \liminf_{n \rightarrow \infty} n(H(\mu^{*n+1}) - H(\mu^{*n}))$, on aurait

$$H(\mu^{*n}) = \sum_{k=0}^{n-1} (H(\mu^{*k+1}) - H(\mu^{*k})) \geq \text{const.} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d'}{k} = \text{const.} + d' \log n.$$

Ainsi $d' \leq d$, ce qui implique que $\liminf_{n \rightarrow \infty} n(H(\mu^{*n+1}) - H(\mu^{*n})) \leq d < \infty$. Donc Γ a une croissance d'entropie lente. \square

Remarque 4.1. *Il est probable que la réciproque soit également vraie, c'est-à-dire qu'un groupe à croissance d'entropie lente ait nécessairement une croissance polynomiale. En effet, si un groupe Γ n'a pas une croissance polynomiale, alors pour tout $d > 0$, on a $\liminf_{n \rightarrow \infty} |S^n|/n^d = \infty$. Par l'inégalité de Varopoulos, cela implique $\mu^{*n}(e) = O(n^{-d/2})$. Puisque $\mu^{*n}(e) \geq \mu^{*n}(g)$ pour tout n pair et tout $g \in \Gamma$ (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on obtient*

$$H(\mu^{*n}) \geq \log \frac{1}{\mu^{*n}(e)} \geq \text{const.} + \frac{d}{2} \log n$$

*pour n pair. Comme d peut être arbitrairement grand, on aurait $\lim_{n \rightarrow \infty} H(\mu^{*n})/\log n = \infty$, contredisant la croissance d'entropie lente.*

4.3. Fin de la preuve du théorème de Gromov. Nous pouvons maintenant compléter la preuve du théorème de Gromov en combinant les résultats précédents.

Théorème 4.2 (Gromov). *Tout groupe de type fini à croissance polynomiale contient un sous-groupe nilpotent d'indice fini.*

Démonstration. Nous allons démontrer ce théorème en suivant l'approche de Shalom, fondée sur une récurrence sur l'exposant de croissance polynomiale et complétée par le résultat d'Ozawa.

Étape 1 : La propriété H_{FD} . Soit Γ un groupe de type fini à croissance polynomiale. D'après le Théorème 3.8 d'Ozawa, Γ possède la propriété H_{FD} , c'est-à-dire que pour toute représentation unitaire π telle que $\overline{H}^1(\Gamma, \pi) \neq 0$, la représentation π n'est pas faiblement mélangeante.

Étape 2 : Base de la récurrence. Nous procédons par récurrence sur $d \in \mathbb{N}$, en démontrant que tout groupe de type fini à croissance polynomiale d'exposant au plus d est virtuellement nilpotent.

Si $d = 0$, alors Γ est fini, donc trivialement virtuellement nilpotent.

Étape 3 : Hypothèse de récurrence. Supposons le résultat vrai pour tout groupe de type fini à croissance polynomiale d'exposant au plus d .

Considérons maintenant Γ un groupe de type fini à croissance polynomiale d'exposant au plus $d + 1$.

Étape 4 : Existence d'un sous-groupe à abélianisation infinie. Observons que Γ , étant à croissance polynomiale, est moyennable. Par ailleurs, étant moyennable et infini, Γ n'a pas la propriété (T).

Puisque Γ est infini et moyennable, nous avons $1_\Gamma \prec \lambda_\Gamma$ et $1_\Gamma \not\prec \lambda_\Gamma$, où λ_Γ désigne la représentation régulière gauche.

D'après le Théorème 3.4, comme Γ n'a pas la propriété (T), il existe une représentation unitaire $\pi : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ telle que $\overline{H}^1(\Gamma, \pi) \neq 0$.

Comme Γ a la propriété H_{FD} , cette représentation π contient une sous-représentation de dimension finie $\rho : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(V)$ avec $\overline{H}^1(\Gamma, \rho) \neq 0$.

Fixons un cocycle harmonique non nul $b \in \text{Har}_\mu(\Gamma, \rho)$, pour une mesure de probabilité symétrique μ à support fini avec $\mu(e) > 0$. Considérons l'action affine $\alpha : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(V) \rtimes V$ définie par $\alpha(g)(v) = \rho(g)v + b(g)$.

Alors $\alpha(\Gamma)$ est un sous-groupe infini moyennable du groupe linéaire $\mathcal{U}(V) \rtimes V$. Par l'alternative de Tits, soit $\alpha(\Gamma)$ contient un sous-groupe libre non abélien, soit il contient un sous-groupe résoluble d'indice fini.

La première possibilité est exclue car Γ est à croissance polynomiale. Par conséquent, il existe un sous-groupe $H < \alpha(\Gamma)$ d'indice fini qui est résoluble.

Posons $\Lambda = \alpha^{-1}(H) < \Gamma$. C'est un sous-groupe d'indice fini de Γ dont l'abélianisation est infinie.

Étape 5 : Application du lemme de Milnor. Pour progresser, nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 4.3 (Milnor). *Soit Λ un groupe de type fini à croissance sous-exponentielle. Alors le groupe dérivé $[\Lambda, \Lambda]$ est de type fini.*

Comme Λ est à croissance polynomiale, donc sous-exponentielle, son groupe dérivé $[\Lambda, \Lambda]$ est de type fini.

Étape 6 : Décroissance du degré de croissance

Cette étape est cruciale et nécessite une analyse précise. Soit $B_\Lambda(n) = \{g \in \Lambda : |g| \leq n\}$ la boule de rayon n dans Λ . Par hypothèse, nous savons que $|B_\Lambda(n)| \lesssim n^{d+1}$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|B_\Lambda(n)| \leq Cn^{d+1}$ pour n suffisamment grand.

Considérons maintenant le quotient $Q = \Lambda/[\Lambda, \Lambda]$. C'est un groupe abélien de type fini infini. Selon le théorème de structure des groupes abéliens de type fini, Q est isomorphe à $\mathbb{Z}^r \oplus T$ où $r \geq 1$ est le rang de Q et T est sa partie de torsion (finie).

Puisque Q contient un facteur \mathbb{Z}^r avec $r \geq 1$, la boule $B_Q(n)$ de rayon n dans Q satisfait $|B_Q(n)| \asymp n^r$. En particulier, il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que $c_1 n^r \leq |B_Q(n)| \leq c_2 n^r$ pour n suffisamment grand.

Analysons maintenant la relation entre $|B_\Lambda(n)|$, $|B_Q(n)|$ et $|B_{[\Lambda, \Lambda]}(n)|$, où $B_{[\Lambda, \Lambda]}(n)$ est la boule de rayon n dans $[\Lambda, \Lambda]$.

Soit $\pi : \Lambda \rightarrow Q$ la projection canonique.

Lemme clé : Pour tout n , on a

$$|B_\Lambda(n)| \leq |B_Q(n)| \cdot |B_{[\Lambda, \Lambda]}(2n)|.$$

Preuve du lemme : Pour chaque $q \in B_Q(n)$, choisissons un représentant $g_q \in \Lambda$ tel que $\pi(g_q) = q$ et $|g_q| \leq n$ (c'est possible car π est surjective et préserve les distances au sens que $|q|_Q \leq |g|_\Lambda$ pour tout g avec $\pi(g) = q$).

Pour tout $g \in B_\Lambda(n)$, posons $q = \pi(g) \in B_Q(n)$. Alors $g = g_q h$ pour un certain $h \in [\Lambda, \Lambda]$ car $\pi(g) = \pi(g_q) = q$.

Nous avons $h = g_q^{-1}g$, donc $|h| \leq |g_q^{-1}| + |g| \leq n + n = 2n$. Ainsi $h \in B_{[\Lambda, \Lambda]}(2n)$.

L'application $\phi : B_Q(n) \times B_{[\Lambda, \Lambda]}(2n) \rightarrow B_\Lambda(n)$ définie par $\phi(q, h) = g_q h$ est surjective par construction. En effet, pour tout $g \in B_\Lambda(n)$, on a $g = \phi(\pi(g), g_\pi^{-1}(g))$.

Par conséquent :

$$|B_\Lambda(n)| \leq |B_Q(n) \times B_{[\Lambda, \Lambda]}(2n)| = |B_Q(n)| \cdot |B_{[\Lambda, \Lambda]}(2n)|.$$

Ceci achève la preuve du lemme. \square

En utilisant le lemme et les estimations sur $|B_Q(n)|$ et $|B_\Lambda(n)|$, nous obtenons :

$$Cn^{d+1} \geq |B_\Lambda(n)| \geq c_1 n^r \cdot |B_{[\Lambda, \Lambda]}(n/2)|$$

où nous avons remplacé $B_{[\Lambda, \Lambda]}(2n)$ par $B_{[\Lambda, \Lambda]}(n)$ en ajustant les constantes.

D'où :

$$|B_{[\Lambda, \Lambda]}(n)| \leq \frac{C}{c_1} \cdot n^{d+1-r}.$$

Analyse selon la valeur de r :

— Si $r \geq 1$, alors $|B_{[\Lambda, \Lambda]}(n)| \lesssim n^{d+1-r} \leq n^d$.

— En particulier, si $r \geq 2$, alors $|B_{[\Lambda, \Lambda]}(n)| \lesssim n^{d-1}$.

Dans tous les cas, l'exposant de croissance de $[\Lambda, \Lambda]$ est strictement inférieur à $d + 1$, l'exposant de croissance de Λ . Plus précisément, il est au plus d .

Étape 7 : Application de l'hypothèse de récurrence. Maintenant que nous avons établi que $[\Lambda, \Lambda]$ est un groupe de type fini à croissance polynomiale d'exposant au plus d , nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence.

Par cette hypothèse, $[\Lambda, \Lambda]$ est virtuellement nilpotent, c'est-à-dire qu'il contient un sous-groupe nilpotent d'indice fini.

Étape 8 : Application du lemme de Tits. Pour conclure, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 4.4 (Tits). *Soit Γ un groupe dénombrable discret et $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ un homomorphisme de groupe. Si $\ker(\varphi)$ est de type fini et virtuellement nilpotent, alors soit Γ est virtuellement nilpotent, soit Γ a une croissance exponentielle.*

Comme nous l'avons vu à l'étape 6, le quotient $Q = \Lambda/[\Lambda, \Lambda]$ contient \mathbb{Z} comme facteur direct. Ainsi, il existe un homomorphisme surjectif $\varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ avec $\ker(\varphi) = [\Lambda, \Lambda]$.

Comme $\ker(\varphi) = [\Lambda, \Lambda]$ est de type fini (étape 5) et virtuellement nilpotent (étape 7), le lemme de Tits nous donne une alternative : soit Λ est virtuellement nilpotent, soit Λ a une croissance exponentielle.

La seconde possibilité étant exclue car Λ est à croissance polynomiale, nous concluons que Λ est virtuellement nilpotent.

Étape 9 : Conclusion. Puisque Λ est d'indice fini dans Γ et que Λ est virtuellement nilpotent, nous concluons que Γ est également virtuellement nilpotent, ce qui achève notre démonstration. \square

Remarque 4.2 (Perspectives et généralisations). *Le théorème de Gromov ouvre de nombreuses perspectives de recherche que nous mentionnons à but d'exhaustivité et en toute humilité. Une direction naturelle concerne les groupes à croissance intermédiaire, c'est-à-dire super-polynomiale mais sous-exponentielle. Le premier exemple d'un tel groupe a été construit par Grigorchuk [7], répondant à une question de Milnor. La classification de ces groupes reste un problème ouvert important [8]. Une autre question porte sur les aspects quantitatifs du théorème : peut-on borner explicitement l'indice du sous-groupe nilpotent en fonction de l'exposant de croissance et du nombre de générateurs ? Des progrès ont été réalisés par Breuillard [9]. En 2010, Kleiner a proposé une preuve alternative utilisant l'analyse harmonique [10], et depuis, d'autres approches ont émergé comme celle de Shalom-Tao [11] qui développe une version finie du théorème, et celle de Breuillard-Green-Tao [12] basée sur la structure des groupes approximatifs. Ces différentes méthodes établissent des connexions profondes avec la théorie des opérateurs, la géométrie différentielle et la théorie géométrique des groupes. Le théorème de Gromov a également des applications importantes dans l'étude des variétés riemanniennes à courbure de Ricci positive, via le théorème de décomposition de Cheeger-Gromoll [13]. Enfin, des généralisations à d'autres structures algébriques, comme les semi-groupes [14] ou les groupes de Lie p -adiques [15], constituent des domaines actifs de recherche.*

CONCLUSION

Au terme de ce mémoire, nous avons établi la preuve du théorème de Gromov sur les groupes à croissance polynomiale en suivant l'approche d'Ozawa fondée sur l'analyse fonctionnelle. Cette méthode élégante repose sur l'étude des cocycles harmoniques et la propriété H_{FD} de Shalom.

L'intérêt de cette approche réside notamment dans l'utilisation d'outils d'analyse fonctionnelle pour résoudre un problème de nature algébrico-géométrique. Le pont ainsi établi entre différentes branches des mathématiques illustre la richesse et la profondeur des méthodes contemporaines en théorie des groupes.

Plusieurs questions restent ouvertes dans ce domaine. Par exemple, peut-on obtenir des bornes explicites sur l'indice du sous-groupe nilpotent en fonction de l'exposant de croissance et du nombre de générateurs ? La classification des groupes à croissance intermédiaire, inaugurée par Grigorchuk, demeure également un problème d'une grande richesse.

RÉFÉRENCES

- [1] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 53 :53–73, 1981.
- [2] N. Ozawa, *A functional analysis proof of Gromov’s polynomial growth theorem*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 51 :549–556, 2018.
- [3] Y. Shalom, *Harmonic analysis, cohomology, and the large-scale geometry of amenable groups*, Acta Math., 192 :119–185, 2004.
- [4] J. Milnor, *Growth of finitely generated solvable groups*, J. Differential Geom., 2 :447–449, 1968.
- [5] J. Tits, *Free subgroups in linear groups*, J. Algebra, 20 :250–270, 1972.
- [6] N.J. Korevaar and R.M. Schoen, *Global existence theorems for harmonic maps to non-locally compact spaces*, Comm. Anal. Geom., 5 :333–387, 1997.
- [7] R.I. Grigorchuk, *Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means*, Math. USSR Izv., 25(2) :259–300, 1985.
- [8] V. Nekrashevych, *Self-similar groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 117, American Mathematical Society, 2005.
- [9] E. Breuillard, *Geometric and analytic methods in group theory : a tribute to Gromov’s work*, Journées MAS et Journée en l’honneur de Jacques Neveu, ESAIM Proc., vol. 44, 2014, pp. 1-36.
- [10] B. Kleiner, *A new proof of Gromov’s theorem on groups of polynomial growth*, J. Amer. Math. Soc., 23 :815–829, 2010.
- [11] Y. Shalom and T. Tao, *A finitary version of Gromov’s polynomial growth theorem*, Geom. Funct. Anal., 20(6) :1502–1547, 2010.
- [12] E. Breuillard, B. Green, and T. Tao, *The structure of approximate groups*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., 116 :115–221, 2012.
- [13] J. Cheeger and D. Gromoll, *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature*, J. Differential Geom., 6 :119–128, 1971.
- [14] R. Grigorchuk, D. Lenz, and T. Nagnibeda, *Combinatorial and metric properties of self-similar semigroups and their applications*, Geometric and Computational Perspectives on Infinite Groups, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, vol. 25, 2014.
- [15] P.-E. Caprace and N. Monod, *Isometry groups of non-positively curved spaces : discrete subgroups*, J. Topol., 2(4) :701–746, 2009.