

# MÉMOIRE DE L3 ENS ULM - 2025

BAPTISTE DAUDIN CLAVAUD & SOLAL LÉCUYER-SEGUINEAU  
SOUS LA SUPERVISION DE PAUL GASSIAT

RÉSUMÉ. Nous présentons la notion de signature d'un chemin, puis nous démontrons que les chemins de signature triviale sont exactement les chemins qui peuvent se factoriser sur un arbre réel.

## TABLE DES MATIÈRES

1. Contexte	1
1.1. Chemins rugueux	1
1.2. Chemins rugueux faiblement géométriques	3
1.3. Généralisation à tout ordre	5
1.4. Produit de mélange	6
2. Définitions et énoncé du théorème	8
3. Propriétés de la signature	9
4. Les chemins arborescents sont de signature triviale	10
5. Les chemins de signature triviale sont arborescents	13
Références	17

Bien qu'initialement introduite par K. Chen [2] dans le cadre de l'étude de la cohomologie des lacets, la signature d'un chemin trouve de nombreuses applications dans le cadre de la théorie des chemins rugueux, très pratique pour les manipulations à venir, nous en donnons donc ici un bref aperçu. Cela permettra de justifier et motiver le cadre algébrique qui sera utilisé dans tout le mémoire et qui, à priori, peut sembler étranger à l'intuition que l'on se fait d'intégrales itérées de chemins.

## 1. CONTEXTE

**1.1. Chemins rugueux.** La notion de chemin est ubiquitaire en mathématiques fondamentales et appliquées. Il est naturel et nécessaire d'imposer certaines conditions de régularité aux chemins selon le contexte (continu par morceau, continuité pour l'homotopie, dérivabilité pour la classe de chemins définissant l'espace tangent en un point à une variété différentielle,...), néanmoins, les conditions de régularité "classiques" peuvent s'avérer insuffisantes dans certains cas.

Un exemple particulièrement saillant [4] est à chercher dans la théorie des équations différentielles ordinaires (ODE) dites contrôlées, de la forme  ${}^1\dot{Y}_t = f(t, Y_t)$  où

---

1. Suivant les conventions du domaine, on utilisera principalement la notation  $\dot{Y}_t$  pour désigner la dérivée temporelle  $\frac{dY}{dt}(t)$  d'une fonction  $Y$  dépendante du temps.

l'expression de la fonction  $f$  fait apparaître un chemin  $X_t$ , qui peut être interprété comme un signal extérieur au système que décrit l'ODE et auquel la fonction  $Y_t$  répond. Sans nous soucier encore du caractère bien défini ou non de nos objets, un exemple relativement simple d'ODE contrôlée serait par exemple de la forme  $\dot{Y}_t = f_0(Y_t) + f_1(Y_t)\dot{X}_t$  où seule la dérivée de  $X_t$  compte et non sa valeur, on pourra penser aux fluctuations d'indices boursiers ou aux variations de tension mesurées au fil du temps dans un circuit électrique. Cependant, de tels signaux  $X_t$ , bien que continus, ne sont souvent pas dérivables, c'est par exemple le cas du mouvement brownien, il est d'autant plus cavalier de tenter d'intégrer naïvement ce genre d'équation. Il est alors pratique d'introduire un nouveau cadre d'intégration, plus souple, c'est une des raisons d'être de la théorie des chemins rugueux.

A la manière des intégrales de Riemann-Stieltjes qui permettent d'intégrer une fonction continue "contre" une autre fonction, à variation bornée par exemple, généralisant ainsi le changement de variable aux fonction non dérivables et même non continues, on va donner un sens à l'intégrale d'un chemin irrégulier contre lui-même. On se place sur l'intervalle réel  $[0, T]$ , et on suppose que notre signal est simplement continu à valeur dans un espace de Banach  $V$  de dimension finie (par exemple  $\mathbb{R}^d$ ) muni d'une norme  $|\cdot|$ . L'intégration d'une constante par rapport au chemin donne bien sûr la différence des points de départ et d'arrivée :

$$\int_s^t dX_r := X_t - X_s \quad (1)$$

Par soucis de concision et de lisibilité, on va définir  $X_{s,t} := X_t - X_s$ . On utilisera dans la suite les deux notations, selon le contexte, tout comme on se permettra parfois d'omettre le symbole  $\otimes$  entre deux éléments de  $V$ .

L'originalité de la théorie des chemins rugueux consiste à compléter la donnée du chemin "simple"  $X : [0, T] \rightarrow V$  (qu'on ne saurait pas intégrer à défaut de remplir les conditions requises par les autres théories de l'intégration) par la donnée d'une fonction continue  $\mathbb{X} : [0, T]^2 \rightarrow V \otimes V$  vérifiant certaines propriétés qu'on exposera par la suite. Grâce à cette donnée, appelée *processus du second ordre*, on va pouvoir définir l'intégrale d'ordre supérieur du chemin, à valeur dans  $V \otimes V$  :

$$\int_s^t X_{s,r} \otimes dX_r := \mathbb{X}_{t,s} \quad (2)$$

Il s'agit d'insister sur le fait que c'est bien la fonction  $\mathbb{X}$  qui définit l'intégrale et non l'inverse. Cette définition, "postulant" la valeur d'une intégrale, peut sembler extrêmement arbitraire et nécessite bien sûr d'imposer des conditions sur la fonction  $\mathbb{X}$  afin de retrouver les propriétés standards des intégrales.

On suppose ces intégrales linéaires et pour retrouver un analogue de la relation de Chasles, il suffit d'imposer la *relation de Chen*, soit pour  $s, u$  et  $t$  dans  $[0, T]$  :

$$\mathbb{X}_{s,t} = \mathbb{X}_{s,u} + \mathbb{X}_{u,t} + X_{s,u} \otimes X_{u,t} \quad (3)$$

Comme le chemin rugueux correspond aux deux processus  $X$  et  $\mathbb{X}$ , il est naturel de voir  $(X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t})$ , pour tous  $t$  et  $s$  dans  $[0, T]$ , comme un élément de  $V \oplus (V \otimes V)$ . Dans le but de se donner comme espace d'arrivée une algèbre de Banach (non-commutative), on va plutôt considérer l'espace  $T^{(2)}(V) := \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V)$ .

Pour tout  $n \geq 1$ , étant donné le Banach  $(V, |\cdot|)$ , on peut normer l'espace  $V^{\otimes n}$  par la norme, dite *projective*, définie pour tout  $\mathbf{x} \in V^{\otimes n}$  par :

$$\|\mathbf{x}\|_{V^{\otimes n}} := \inf \left\{ \sum_{i \in I} |x_i^1| \dots |x_i^n| : \mathbf{x} = \sum_{i \in I} x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^n, x_i^k \in V, |I| < \infty \right\} \quad (4)$$

et qui vérifie les propriétés de *symétrie* et de *compatibilité*<sup>2</sup>. Ainsi, pour tout  $\mathbf{x} = (a, b, c) \in T^{(2)}V$  la norme :  $\|\mathbf{x}\| = |a| + \|b\| + \|c\|_{\otimes 2}$  fait de  $T^{(2)}V$  un espace de Banach, qui, une fois muni du produit  $(a, b, c) \otimes (a', b', c') = (aa', ab' + a'b, c + c' + b \otimes b')$  est une algèbre de Banach. L'espace étant une somme directe d'espaces vectoriels, il est d'usage d'écrire le 3-uplet  $(a, b, c)$  simplement comme  $a + b + c$ , nous utiliserons les deux notations dans la suite.

Au regard de cette règle de produit, il convient de représenter les incréments d'un chemin rugueux non par  $(0, X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t})$  mais par  $\mathbf{X}_{s,t} := (1, X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t})$ , ainsi la relation de *Chen* devient :

$$\mathbf{X}_{s,r} \otimes \mathbf{X}_{r,t} = \mathbf{X}_{s,t} \quad (5)$$

et comme tous les chemins rugueux ont 1 comme première composante, on va principalement s'intéresser au sous-espace affine  $T_1^{(2)}(V)$  dont tous les éléments ont pour première composante 1 (on utilisera aussi l'espace  $T_0^{(2)}(V)$  des éléments de première composante nulle). Cet espace a la propriété d'être un groupe de Lie d'élément neutre  $(1, 0, 0)$  où l'inverse d'un élément  $(1, b, c)$  est  $(1, -b, -c + b \otimes b)$ . On définit finalement, à partir de l'incrément, le chemin rugueux à proprement parler comme l'application  $\mathbf{X}_t : t \mapsto \mathbf{X}_{0,t}$  à valeurs dans  $T_1^{(2)}(V)$ .

En terme de régularité, nous allons imposer dans la suite à nos chemins d'être à  $p$ -variations finies. On définit  $\mathcal{V}_p([0, T], V)$  (ou  $\mathcal{C}^{p\text{-var}}([0, T], V)$ ) comme l'espace des chemins à  $p$ -variations finies sur  $[0, T]$ . En toute généralité, ce sont les chemins  $\mathbf{X}_t$  (pas forcément des chemins rugueux ici) à valeurs dans un espace métrique quelconque muni d'une distance  $d$

$$\|X\|_{p\text{-var}} := \sup_{\mathcal{P}} \left( \sum_{t_k \in \mathcal{P}} d(\mathbf{X}_{t_{k-1}}, \mathbf{X}_{t_k})^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (6)$$

où le sup est pris sur toutes les partitions  $\mathcal{P}$  de l'intervalle  $[0, T]$ . Cette définition en toute généralité permettra de généraliser facilement par la suite et on prend dans le cas présent  $d(\mathbf{X}_{t_{k-1}}, \mathbf{X}_{t_k}) = \max\{1, \|X_{t_{k-1}, t_k}\|, \|\mathbb{X}_{t_{k-1}, t_k}\|^{\frac{1}{2}}\}$ .

Le cadre défini jusqu'à présent, à la fois analytique et algébrique, est cependant trop large pour la classe de chemins que nous allons étudier, il convient de se restreindre à partir de maintenant à des chemins rugueux vérifiant de surcroît un analogue de l'intégration par partie.

**1.2. Chemins rugueux faiblement géométriques.** Notons  $X_t^i$  la  $i$ -ème composante dans  $V$  de  $X_t$  dans sa base canonique et  $\mathbb{X}_{s,t}^{ij}$  la composante en position  $(i, j)$  de  $\mathbb{X}_{s,t}$ , vu comme un tenseur d'ordre 2 (une matrice).

2. À savoir  $\|x_1 \otimes \dots \otimes x_n\|_{\otimes n} = \|x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}\|_{\otimes n}$  pour toute  $n$ -permutation  $\sigma$  (*symétrie*) et pour tout  $\mathbf{x} \in V^{\otimes n}$  et tout  $\mathbf{y} \in V^{\otimes m}$ ,  $\|\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}\|_{\otimes(n+m)} \leq \|\mathbf{x}\|_{\otimes n} \|\mathbf{y}\|_{\otimes m}$  (*compatibilité*). Si ces deux conditions sont vérifiées on dit alors que la norme est *admissible*

Par analogie avec les autres types d'intégrales, si l'on souhaite retrouver une propriété d'intégration par partie, il semble alors naturel d'imposer :

$$\int_s^t X_r^i \otimes dX_r^j + \int_s^t X_r^j \otimes dX_r^i = \int_s^t d(X^i \otimes X^j)_r \quad (7)$$

Après quelques manipulations des intégrales ci-dessus, cela revient à imposer :

$$\text{Sym}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t} \quad (8)$$

où  $[\text{Sym}(\mathbb{X})]_{s,t}^{ij} = \frac{1}{2} (\mathbb{X}_{s,t}^{ij} + \mathbb{X}_{s,t}^{ji})$ .

Ainsi pour un chemin vérifiant la propriété d'intégration par partie, la partie symétrique du processus du second ordre est entièrement déterminée par le processus de premier ordre  $X$  et la "spécificité de chemin rugueux" n'est présente que dans la partie antisymétrique de  $\mathbb{X}$ . Cette condition définit des chemins rugueux "intégrables par partie" et se traduit de manière remarquable en termes d'*algèbres de Lie libres* sur  $V$ .

En effet, l'espace  $T_0^{(2)}(V)$  des éléments de  $T^{(2)}(V)$  de la forme  $(0, b, c)$  peut être muni d'un *crochet de Lie*<sup>3</sup> :

$$[b + c, b' + c'] := b \otimes b' - b' \otimes b \quad (9)$$

Muni de cette loi de composition interne,  $T_0^{(2)}(V)$  est une algèbre de Lie, en bijection avec  $T_1^{(2)}(V)$  grâce aux applications *exponentielle* et *logarithme*. Par troncation, on définit naturellement pour  $(0, b, c) \in T_0^{(2)}(V)$  :

$$\exp(b + c) := (1, b, c + \frac{1}{2}b \otimes b) = 1 + b + c + \frac{1}{2}b \otimes b \quad (10)$$

et pour  $(1, b, c) \in T_1^{(2)}(V)$  :

$$\log(1 + b + c) := (0, b, c - \frac{1}{2}b \otimes b) = b + c - \frac{1}{2}b \otimes b \quad (11)$$

et ainsi on a  $T_1^{(2)}(V) = \exp(T_0^{(2)}(V))$ . La décomposition du processus du second ordre  $\mathbb{X}_{s,t}$  d'un chemin rugueux "intégrable par partie" comme somme d'une partie symétrique déterminée par le processus du premier ordre et d'une partie antisymétrique se traduit par le fait que l'on va considérer la *sous-algèbre de Lie libre* sur  $V$   $\mathfrak{g}^{(2)}(V)$ , fermée dans  $T_0^{(2)}(V)$  et définie par :

$$\mathfrak{g}^{(2)}(V) = V \oplus [V, V] \quad (12)$$

où  $[V, V]$  est l'espace généré par les commutateurs des éléments de  $V$ . Alors, on peut vérifier que le sous-groupe de Lie dans  $T_1^{(2)}(V)$  associé, à savoir  $G^{(2)}(V) := \exp(\mathfrak{g}^{(2)}(V))$  est bien de la forme souhaitée car comme pour  $b \in V$  et  $c \in [V, V]$  on a  $\exp(b + c) = (1, b, c + \frac{1}{2}b \otimes b)$ , la composante d'ordre 2 de tout élément de  $G^{(2)}(V)$  se décompose en somme de  $c$ , la composante asymétrique<sup>4</sup> indépendante de  $b$ , et de  $\frac{1}{2}b \otimes b$ , la partie symétrique et entièrement déterminée par  $b$ , la composante

3. Un crochet de Lie  $[\cdot, \cdot]$  est une loi de composition interne, définie sur un espace vectoriel  $V$ , telle que  $(x, y) \rightarrow [x, y]$  est bilinéaire, alternée et vérifie la relation de Jacobi :  $\forall x, y, z \in V$ ,  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ . Un espace vectoriel muni d'un crochet de Lie est une *algèbre de Lie*.

4. Antisymétrique ou symétrique relativement à la permutation  $u \otimes v \mapsto v \otimes u$  pour chaque tenseur pur.

de premier ordre. Ainsi, un chemin rugueux qui est à valeur dans  $G^{(2)}(V)$  vérifie nécessairement la propriété d'intégration par partie, c'est une traduction algébrique de cette propriété analytique.

On va maintenant définir, pour tous  $\mathbf{a} = (1, a_1, a_2)$  et  $\mathbf{b} = (1, b_1, b_2)$  dans  $G^{(2)}(V)$  la distance  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{G^{(2)}(V)} = \max\{1, \|b_1 - a_1\|, \|b_2 - a_2 + a_1 \otimes a_1 - a_1 \otimes b_1\|_{\otimes 2}^{\frac{1}{2}}\}$  qui s'exprime bien plus naturellement en introduisant les projecteurs  $\pi_i : T^{(2)}(V) \rightarrow V^{\otimes i}$  sur la composante d'ordre  $i$  :

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{G^{(2)}(V)} := \max_{i=0,1,2} \|\pi_i(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b})\|_{\otimes i} \quad (13)$$

où l'on a utilisé la convention  $\|\cdot\|_{\otimes 0} = |\cdot|$ .

L'espace  $G^{(2)}(V)$  étant maintenant métrisé, on peut définir les espaces de **chemins rugueux faiblement géométriques** à 2-variations finies. On définit  $WG\Omega_2(V)$  comme l'ensemble des chemins rugueux continus  $[0, T] \rightarrow G^{(2)}(V)$  à 2-variations finies. Par construction, ces chemins vérifient la propriété d'intégration par partie définie plus-haut et c'est là une de leurs raisons d'être.

**1.3. Généralisation à tout ordre.** Bien que le cadre des chemins rugueux composés seulement de processus d'ordres 1 et 2 soit pertinent pour de nombreuses applications et permette un présentation du concept de chemin rugueux relativement intuitive, il est nécessaire pour la suite de définir des chemins rugueux avec une infinité de niveaux *i.e* des chemins rugueux composés de processus de tous ordres. Néanmoins, la construction fournie plus haut pour les chemins rugueux à deux niveaux se généralise très facilement.

Soit  $N$  un entier non nul, on considère  $T((V))$  l'espace des séries formelles de tenseurs sur  $V$  et sa troncation à l'ordre  $N$  :

$$T^{(N)}(V) := \bigoplus_{n=0}^N V^{\otimes n} \quad (14)$$

où l'on a pris  $V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$ . En introduisant la troncation sur les  $N$  premiers sous-espaces  $\pi^{(N)} : T((V)) \rightarrow T^{(N)}(V)$  on a  $\pi^{(N)}(T((V))) = T^{(N)}(V)$ , sur lequel on étend facilement le produit défini pour  $N = 2$  en tronquant le produit  $\otimes$  sur  $T((V))$ . On étend les notations des sous-espaces à composante d'ordre 0 fixée, ainsi, pour  $a \in \mathbb{R}$ ,  $T_a((V))$  et  $T_a^{(N)}(V)$  désignent les éléments  $\mathbf{x}$  de, respectivement,  $T((V))$  et de  $T^{(N)}(V)$  tels que  $\pi_0(\mathbf{x}) = a$ . Les normes projectives ont déjà été introduites (eq. 4) pour tous les espaces  $V^{\otimes N}$ , on définit alors sans peine une norme sur  $T^{(N)}(V)$  qui en fait une algèbre de Banach,  $T_1^{(N)}(V)$  est un groupe de Lie. On va considérer l'algèbre de Lie libre nilpotente [5],  $\mathfrak{g}^{(N)}(V)$  définie par récurrence par  $\mathfrak{g}^{(1)}(V) = V$  et pour tout  $n \geq 1$  par  $\mathfrak{g}^{(n+1)}(V) = [V, \mathfrak{g}^{(n)}(V)]$ . Finalement on définit dans  $T_1((V))$  l'ensemble des éléments *grouplike*  $G^* := \exp(T_0((V)))$  et le groupe de Lie  $G^{(N)} := \exp(\mathfrak{g}^{(N)}(V))$ , ce qui revient à la relation (voir [5])  $G^{(N)} = \pi^{(N)}(G^*)$ . On considère aussi dans  $G^*$  le groupe d'éléments de norme finie, *i.e* les éléments  $\mathbf{a} \in G^*$  tels que  $\max_{i \geq 0} \{\|\pi_i(\mathbf{a})\|_{\otimes i}^{\frac{1}{i}}\} < \infty$ , qu'on dénote  $G_{p.r.c}^*$ , où "p.r.c" signifie *positive radius of convergence*. On introduit ainsi naturellement sur  $G^*$  (et à fortiori sur  $G^{(N)} \subset G^*$ ), pour tous  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  la distance :

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \max_{i \in \mathbb{N}} \|\pi_i(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b})\|_{\otimes i}^{\frac{1}{i}} \quad (15)$$

et ainsi la définition des chemins rugueux à  $p$ -variations finies s'étend ici en prenant dans eq. 6 la distance  $d$  définie au-dessus.

L'extension, à tout  $p \geq 1$  de la définition des chemins rugueux faiblement géométriques est maintenant directe. Les chemins rugueux faiblement géométriques sur  $V$  sont donc les applications à  $p$ -variations finies, continues,  $\mathbf{X}_t : [0, T] \rightarrow G^{(\lfloor p \rfloor)}(V)$  où  $\lfloor p \rfloor$  désigne la partie entière de  $p$ , l'espace de ces applications est dénoté  $WG\Omega_p(V)$ . L'intérêt de se donner des chemins à valeur dans les  $G^{(N)}$  est que la condition "d'intégration" est naturellement généralisée aux processus d'ordres supérieurs, ce qui n'aurait autrement pas été simple à établir. Les incréments sont définis pour tous  $s, t \in [0, T]$  par :

$$\mathbf{X}_{s,t} := \mathbf{X}_s^{-1} \otimes \mathbf{X}_t \quad (16)$$

De plus on peut vérifier que la relation de *Chen* se généralise aussi, pour  $\mathbf{X}_t \in WG\Omega_p(V)$  et  $s, r, t \in [0, T]$  on a :

$$\mathbf{X}_{s,r} \otimes \mathbf{X}_{r,t} = \mathbf{X}_{s,t} \quad (17)$$

Enfin, on peut définir une distance sur  $WG\Omega_p(V)$  entre deux chemins  $\mathbf{X}_t$  et  $\mathbf{Y}_t$  de même origine (*i.e* tels que  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{Y}_0$ ) :

$$d_{p\text{-var}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \max_{1 \leq i \leq \lfloor p \rfloor} \sup_{\mathcal{P}} \left( \sum_{t_k \in \mathcal{P}} \|\mathbf{X}_{t_{k-1}, t_k} - \mathbf{Y}_{t_{k-1}, t_k}\|^{\frac{p}{i}} \right)^{\frac{i}{p}} \quad (18)$$

**1.4. Produit de mélange.** Suivant principalement Friz & Hairer [4], nous allons maintenant définir le produit *shuffle*. Comme  $V$  est de dimension finie, il s'identifie naturellement à  $\mathbb{R}^d$ , identification qu'on utilisera dans ce paragraphe en fixant une base orthonormale de  $V$ , permettant de parler sans ambiguïté de  $n$ -ème composante de tout élément de  $V$ .

Soit  $p \geq 1$ , on pose  $N = \lfloor p \rfloor$ , on considère des mots  $w = w_1 w_2 \dots w_n$  de longueur  $n \leq N$  et dont les lettres appartiennent à l'alphabet  $\{1, \dots, d\}$ . Pour tous  $s, t \in [0, T]$  et pour un incrément donné  $\mathbf{X}_{s,t} \in T_1^{(N)}(V)$ , on définit la composante  $w$  de  $\mathbf{X}_{s,t}$  comme l'intégrale itérée, à laquelle on peut désormais donner un sens :

$$\mathbf{X}_{s,t}^w = \mathbf{X}_{s,t}^{w_1, \dots, w_n} := \int_s^t \int_s^{s_{n-1}} \dots \int_s^{s_1} dX_{s_1}^{w_1} \otimes \dots \otimes dX_{s_n}^{w_n} \quad (19)$$

Cette genre d'intégrales itérées aura une place centrale dans la suite, ces dernières intervenant dans la définition de la signature. La condition "d'intégrabilité par partie"<sup>5</sup> des chemins rugueux faiblement géométriques va permettre de déterminer des relations algébriques entre les différentes intégrales itérées, il sera alors pratique de les noter  $\langle \mathbf{X}_{s,t}, w \rangle$ .

Pour exprimer ces relations, il convient de définir le *produit de mélange* (ou *shuffle product*), noté  $\sqcup$ . Le produit de mélange entre deux mots  $u$  et  $v$  (sur le même alphabet) consiste en la somme des mots formés des lettres de  $u$  et de lettres de  $v$ , conservant l'ordre relatif des lettres de chaque mot. On peut l'illustrer par le mélange à l'américaine de deux paquets de cartes, au cours duquel les cartes du premier paquet s'intercalent par bloc entre celles du second paquet à la fin du

5. De manière équivalente cette condition pourrait s'interpréter comme une "règle de la chaîne généralisée".

mélange, l'ordre relatif des cartes du premier paquet entre elles est conservé. Par exemple, pour  $v = ab$  et  $w = ac$ , on a  $v \sqcup w = abac + 2aacb + 2aabc + acab$ .

La relation fondamentale, remarquée initialement par Ree [7] pour des fonctions continues et généralisable aux chemins rugueux faiblement géométriques grâce à leur structure mimant l'intégration par partie, est pour deux mots  $v$  et  $w$  sur l'alphabet  $\{1, \dots, d\}$  :

$$\langle \mathbf{X}_{s,t}, v \rangle \langle \mathbf{X}_{s,t}, w \rangle = \langle \mathbf{X}_{s,t}, v \sqcup w \rangle \quad (20)$$

*Démonstration.* (Basée sur l'exercice 2.2 de [4] et [3]) Plus formellement le produit de mélange se définit pour des mots  $v$  et  $w$  et des lettres  $i$  et  $j$  par les relations  $v \sqcup \emptyset = \emptyset \sqcup v = v$  (où  $\emptyset$  est le mot vide) et par

$$vi \sqcup wj = (v \sqcup wj)i + (vi \sqcup w)j \quad (21)$$

où la juxtaposition  $vi$  dénote la concaténation de la lettre  $i$  à la fin du mot  $v$ . Soient  $s, t \in [0, T]$  et maintenant  $\mathbf{X}_\bullet \in WG\Omega_p(V)$  pour  $p \geq 1$ . On procède par récurrence sur la somme des longueurs des mots. Le résultat est vrai pour une longueur totale  $|v| + |w| = 2$  car la relation se réduit à

$$X_{s,t}^v X_{s,t}^w = \int_s^t X_{s,s_1}^w dX_{s_1}^v + \int_s^t X_{s,s_1}^v dX_{s_1}^w \quad (22)$$

Cette relation est valide pour les chemins faiblement géométriques d'après eq.(7).

On suppose maintenant que la relation est vraie pour une somme de longueurs valant  $n \geq 2$ , on suppose de plus  $n < N = \lfloor p \rfloor$  sans quoi la relation est triviale (les termes sont nuls). Toute paire de mots  $v$  et  $w$  de longueur combinée  $n+1$  s'exprime comme paire des concaténations  $v = \tilde{v}i$  et  $w = \tilde{w}j$  où  $i$  et  $j$  sont des lettres (mots de longueur 1). On note

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}_{s,t}, v \rangle \langle \mathbf{X}_{s,t}, w \rangle &= \left( \int_s^t \langle \mathbf{X}_{s,r}, \tilde{v} \rangle dX_r^i \right) \left( \int_s^t \langle \mathbf{X}_{s,r}, \tilde{w} \rangle dX_r^j \right) \\ &= \int_{s < r_1, r_2 < t} \langle \mathbf{X}_{s,r_1}, \tilde{v} \rangle \langle \mathbf{X}_{s,r_2}, \tilde{w} \rangle dX_{r_1}^i dX_{r_2}^j \\ &= \int_{s < r_1 < r_2 < t} \langle \mathbf{X}_{s,r_1}, \tilde{v} \rangle dX_{r_1}^i \langle \mathbf{X}_{s,r_2}, \tilde{w} \rangle dX_{r_2}^j \\ &\quad + \int_{s < r_2 < r_1 < t} \langle \mathbf{X}_{s,r_2}, \tilde{w} \rangle dX_{r_2}^j \langle \mathbf{X}_{s,r_1}, \tilde{v} \rangle dX_{r_1}^i \\ &= \int_s^t \langle \mathbf{X}_{s,r}, v \rangle \langle \mathbf{X}_{s,r}, \tilde{w} \rangle dX_r^j + \int_s^t \langle \mathbf{X}_{s,r}, w \rangle \langle \mathbf{X}_{s,r}, \tilde{v} \rangle dX_r^i \end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence aux deux intégrandes on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}_{s,t}, v \rangle \langle \mathbf{X}_{s,t}, w \rangle &= \int_s^t \langle \mathbf{X}_{s,r}, v \sqcup \tilde{w} \rangle dX_r^j + \int_s^t \langle \mathbf{X}_{s,r}, \tilde{v} \sqcup w \rangle dX_r^i \\ &= \langle \mathbf{X}_{s,t}, (v \sqcup \tilde{w})j \rangle + \langle \mathbf{X}_{s,t}, (\tilde{v} \sqcup w)i \rangle \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant la définition du produit de mélange eq. 21, on obtient le résultat. :

$$\langle \mathbf{X}_{s,t}, v \rangle \langle \mathbf{X}_{s,t}, w \rangle = \langle \mathbf{X}_{s,t}, v \sqcup w \rangle \quad (23)$$

□

## 2. DÉFINITIONS ET ÉNONCÉ DU THÉORÈME

Dans la suite de ce mémoire,  $V$  désigne l'espace vectoriel normé  $\mathbb{R}^d$ , mais le théorème reste vrai en prenant un espace de Banach.

L'article [1] généralise la signature pour des chemins rugueux  $WG\Omega_p(V)$  de paramètre  $p > 1$ . Bien que la partie précédente présentait le cadre plus général dans lequel prend place la notion d'intégrales itérées et à fortiori de signature, nous allons nous restreindre dans le cadre de ce texte au cas où  $p = 1$ , et plus précisément aux chemins à variation bornée. Contrairement à la partie précédente, on peut ici avancer de façon pédestre et construire petit à petit la signature d'un chemin pour voir qu'elle vérifie les relations vues plus haut. Cette façon de procéder est propre au cadre  $p = 1$  qui permet d'intégrer grâce à Stieltjes-Riemann.

**Définition 2.1.** *Soient  $J$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  et  $x : J \rightarrow V$  un chemin (i.e. continu).*

*On rappelle que*

$$\|x\|_{1-var} = \sup \sum_{(t_i)} \|x_{t_{i+1}} - x_{t_i}\|$$

*Remarquons qu'un chemin à variation bornée est borné. On note alors  $\mathcal{V}(J, V)$  l'espace des chemins à variation bornée de  $J$  dans  $V$ , que l'on munit de la norme suivante dite de 1-variation :*

$$\|x\|_{\mathcal{V}(J, V)} = \|x\|_{1-var} + \|x\|_{\infty}$$

A l'aide des intégrales de Stieljes-Riemann, on peut intégrer des fonctions continues le long de ces chemins, et des formes différentielles de degré 1 continues. En particulier, on peut maintenant définir la signature d'un chemin.

**Définition 2.2.** *Soit  $x : [0, T] \rightarrow V$  un chemin à variation bornée.*

*On note*

$$S(x)_{0,t} = 1 + \int_{0 < t_1 < t} dx_{t_1} + \int_{0 < t_1 < t_2 < t} dx_{t_1} dx_{t_2} + \dots$$

*la série formelle des intégrales itérées sur  $x$ , où le produit est le produit tensoriel, comme dans la partie précédente.*

*On dit que  $S(x)_{0,T}$  est la signature de  $x$ .*

*On note*

$$S(x)_{0,T}^{i_1, i_2, \dots, i_n} = \int_{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T} dx_{t_1}^{i_1} dx_{t_2}^{i_2} \dots dx_{t_n}^{i_n}$$

*le coefficient devant le tenseur de base  $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_n}$ .*

La signature est définie dans l'algèbre des séries tensorielles,  $T((V))$ .

**Définition 2.3.** *Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle fermé  $I$  de  $\mathbb{R}$ .*

*Une reparamétrisation de  $f$  est une fonction de la forme  $f \circ \varphi$  où  $\varphi : J \rightarrow I$  est un homéomorphisme croissant. C'est une relation d'équivalence.*

**Définition 2.4.** *Soit  $\tau$  un espace métrique.*

*On dit que  $\tau$  est un arbre réel si tout couple de points est relié par un unique chemin injectif à reparamétrisation près.*

**Définition 2.5.** Soit  $x : [0, T] \longrightarrow V$  un chemin.

On dit que  $x$  est arborescent s'il existe  $\tau$  un arbre réel,  $\psi : \tau \longrightarrow V$  et  $\phi : [0, T] \longrightarrow \tau$  deux fonctions continues,  $\phi$  vérifiant  $\phi(0) = \phi(T)$ , tels que  $x = \psi \circ \phi$ .

**Théorème 2.6** (K.T.Chen, B.Hambly-T.Lyons). *Un chemin à variation bornée sur  $V$  est de signature triviale si et seulement s'il est arborescent.*

Moyennant quelques astuces, on peut arranger la preuve pour  $V$  un espace de Banach. B.Hambly et T.Lyons ont généralisé ce théorème pour des chemins rugueux de paramètre  $p \geq 1$ .

### 3. PROPRIÉTÉS DE LA SIGNATURE

Avant de commencer la preuve du théorème, commençons par présenter quelques propriétés de la signature qui nous seront utiles plus tard. La première propriété découle de l'invariance de l'intégration pour la reparamétrisation. La deuxième de ces propriétés est à l'origine de la définition de la signature. La troisième et la quatrième donnent une structure de groupe à l'espace des signatures, et elles sont attribuées à K.T. Chen. L'avant-dernière propriété nous permettra de prendre la signature des troncatures de la signature. Nous admettrons le dernier résultat, issu de l'étude des équations différentielles (Itô map), qui est simplement utile dans certaines démonstrations. Lyons, Caruana et Lévy donnent une explication plus détaillée dans leur notes de conférences [5] (théorème 1.3).

**Définition 3.1** (norme d'algèbre sur  $T(V)$ ). *La norme sur  $T^{(2)}(V)$  définie dans l'introduction se généralise en une norme d'algèbre sur  $T(V)$ .*

Notons  $T_{p,r.c.}(V)$  (pour *positive radius of convergence*) l'ensemble des éléments de  $s \in T(V)$  tels que  $\sum_{n \geq 0} \|\pi_n(s)\| \leq \infty$ .

**Définition 3.2.** *On équipe  $T_{p,r.c.}(V)$  de la norme*

$$\|s\| = \sum_{n \geq 0} \|\pi_n(s)\|$$

**Propriétés 3.3.** *Uniquement dans cette section, on note  $S(x) = S(x)_{0,T}$  la signature de  $x$ .*

*Pour tous chemins à variation bornée,  $x$  et  $y$ , dans  $V$  :*

- (i) *La signature est invariante par reparamétrisation et par translation.*
- (ii) *Soit  $f : T^{(n)}(V) \longrightarrow L(V, T^{(n)}(V))$  définie par  $f(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \cdot x = (0, a_0x, a_1x, \dots, a_{n-2}x)$ . Alors  $\pi^{(n)} \circ S(x)_{0,\bullet}$  est l'unique solution de l'équation différentielle dans  $T^{(n)}(V)$  :*

$$\begin{cases} dX_t = f(X_t) \cdot dx_t \\ X_0 = (1, 0, 0, \dots, 0) \end{cases} \quad (24)$$

- (iii)  $S(x * y) = S(x) \otimes S(y)$
- (iv)  $S(x) \otimes S(\overleftarrow{x}) = 1$  (ces deux dernières propriétés sont appelées relations de Chen)
- (v)  $S(x)_{0,\bullet}$  est un chemin à variation bornée dans  $T_{p,r.c.}(V)$ .

(vi)  $\pi^{(n)} \circ S$  est une fonction continue sur  $\mathcal{V}([0, T], V)$ .

*Démonstration.* (i) Invariance de l'intégrale pour la reparamétrisation, et invariance de  $dx$  par translation.

(ii)

$$\begin{aligned} d(\pi_n \circ S(x)_{0, \bullet})_t &= \left( \int_{0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t} dx_{t_1} dx_{t_2} \dots dx_{t_{n-1}} \right) dx_t \\ &= \pi_{n-1}(S(x)_{0, t}) \otimes dx_t \end{aligned}$$

donc  $S(x)_{0, \bullet}$  est solution de (24). L'unicité est donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz, dont les hypothèses sont vérifiées grâce au fait que  $x$  est à variation bornée.

(iii) On peut vérifier le résultat en faisant les calculs à la main, mais on peut aussi voir que le membre de droite est lui aussi solution de l'équation différentielle.

(iv) Encore une fois, on peut utiliser l'unicité de la solution de l'équation différentielle (24), et la propriété précédente.

(v) Quitte à reparamétriser  $x$ , on peut supposer que  $\|x\|_{[0, t]} \|1 - var\| = t$ , et  $x$  est dérivable presque partout avec  $\|x'\|_\infty = 1$ . On peut alors majorer  $\|\pi_n(S(x)_{t_1, t_2})\| = \|\pi_n(S(x)_{t_2, 0}) - \pi_n(S(x)_{t_1, 0})\|$  par  $\frac{t_2^n - t_1^n}{n!} \leq \frac{t_2 - t_1}{n!} \|x\|_{1-var}^{n-1}$ . On obtient alors que  $\pi_n \circ S(x)_{0, \bullet}$  est à variation bornée et

$$\|\pi_n \circ S(x)_{0, \bullet}\|_{1-var} \leq \frac{\|x\|_{1-var}^n}{n!}$$

Ainsi,  $S(x)_{0, \bullet}$  est Lipschitzienne, donc continue, et à variation bornée de 1-variation inférieure à  $\exp(\|x\|_{1-var}) - 1$ . □

#### 4. LES CHEMINS ARBORESCENTS SONT DE SIGNATURE TRIVIALE

Dans cette section, nous montrons le premier sens du théorème.

Soit donc un chemin  $x$  arborescent dans  $V$ . Notons  $\phi, \psi, \tau$  sa décomposition arborescente, de sorte qu'on a  $x = \psi \circ \phi$  avec  $\phi(0) = \phi(T)$ .

Commençons par constater qu'il existe un ordre partiel naturel entre les points d'un arbre réel.

**Proposition 4.1.** *Un chemin injectif reliant  $a$  et  $b$  dans  $\tau$  est uniquement déterminé, à reparamétrisation près, par son image et son orientation, que l'on notera  $[a, b]$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $c, d$  deux points de  $\tau$  tels que  $[c, d] = [a, b]$ . Notons  $\alpha$  le chemin injectif reliant  $a$  à  $b$  et  $\gamma$  celui reliant  $c$  à  $d$ , que l'on choisit paramétrés sur  $[0, 1]$ . Supposons par l'absurde que  $a \neq c$ . Il existe donc  $t_1, t_2 \in ]0, 1[$  tels que  $\alpha(t_1) = c$  et  $\alpha(t_2) = d$ . Alors  $\alpha|_{[t_1, t_2]}$  est un chemin injectif reliant  $c$  à  $d$ . Donc  $\alpha|_{[t_1, t_2]}$  et  $\gamma$  sont égaux à reparamétrisation près. Or il existe aussi  $t' \in ]0, 1[$  tel que  $\gamma(t') = a$ , ce qui contredit l'injectivité de  $\alpha$ . Donc  $a = c$ . De même,  $b = d$ , ce qui conclut la preuve. □

**Définition 4.2.** *Pour une racine  $c \in \tau$  fixée, on note  $a \leq b$  pour  $a, b \in \tau$  si  $[c, a] \subseteq [c, b]$ . Cette relation est un ordre partiel sur  $\tau$ . Cet ordre induit l'existence d'un infimum entre deux points  $a, b \in \tau$  par rapport à  $c \in \tau$ , c'est-à-dire le plus*

grand élément  $a \wedge b$  qui vérifie  $[c, a \wedge b] \subseteq [c, a] \cap [c, b]$ . De plus,  $a \wedge b \in [a, b]$ . L'existence de cet infimum n'est pas si claire et la preuve est détaillée ci-dessous.

*Démonstration.* Notons  $\gamma$  un représentant du chemin injectif  $[c, a]$ .  $[c, a] \cap [c, b]$  est connexe par arcs et compact (tout point est relié à  $c$ ). Comme  $\gamma$  est un homéomorphisme sur son image (par compacité du segment de départ),  $\gamma^{-1}([c, a] \cap [c, b])$  est connexe par arcs, compact, et contient 0 ( $\gamma(0) = c$ ). C'est donc un intervalle de la forme  $[0, t]$  et  $\gamma(t)$  est l'infimum que l'on cherchait, car, étant injectif,  $\gamma$  est strictement croissant.

Le chemin  $[a, a \wedge b] \cup [a \wedge b, b]$  est injectif, et donc par unicité vaut  $[a, b]$ , donc  $a \wedge b \in [a, b]$ .  $\square$

Étudions maintenant le cas central qui correspond à l'intuition du problème, car il correspond à la représentation du parcours d'un arbre que l'on se fait.

**Proposition 4.3.** *Supposons qu'il existe une subdivision  $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$  du segment  $[0, T]$  telle que  $\phi|_{[t_i, t_{i+1}]}$  soit monotone par rapport à  $\phi(0)$  pour tout  $i$ . Alors  $S(x)_{0, T} = 1$ .*

*Démonstration.* Procédons par récurrence sur  $n$ . Tout d'abord, le résultat est vrai pour  $n = 1$  car alors  $\phi$  est constant. Supposons donc le résultat vrai pour  $n - 1$ . Supposons  $\phi$  non constant, et soit  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$  le premier indice où  $\phi$  change de monotonie en  $t_i$ . C'est-à-dire que  $\phi$  est d'abord croissante sur  $[t_{i-1}, t_i]$  puis décroissante sur  $[t_i, t_{i+1}]$ . On a donc  $[\phi(0), \phi(t_{i-1})] \subseteq [\phi(0), \phi(t_i)]$  et  $[\phi(0), \phi(t_{i+1})] \subseteq [\phi(0), \phi(t_i)]$ . Ainsi, ou bien  $[\phi(0), \phi(t_{i+1})] \subseteq [\phi(0), \phi(t_{i-1})]$ , ou bien  $[\phi(0), \phi(t_{i-1})] \subseteq [\phi(0), \phi(t_{i+1})]$ . Supposons sans perte de généralité le premier cas et notons  $t' = \min\{t \geq t_i, \phi(t) = \phi(t_{i-1})\}$  qui existe par continuité de  $\phi$ . Alors, par les relations de Chen, et par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} S(x)_{0, T} &= S(x)_{0, t_{i-1}} \otimes S(x)_{t_{i-1}, t_i} \otimes S(x)_{t_i, t'} \otimes S(x)_{t', T} \\ &= S(x)_{0, t_{i-1}} \otimes 1 \otimes S(x)_{t', T} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 4.4.** *Si  $x$  est arborescent, alors  $S(x)_{0, T} = 1$*

*Démonstration.* L'idée est de construire une bonne subdivision de plus en plus fine, de rendre  $\phi$  monotone par morceaux sur cette subdivision, et d'appliquer la proposition précédente.

Soit  $P = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$  une subdivision de  $[0, T]$ .

Pour rendre  $\phi$  monotone par morceaux, on veut que la subdivision contienne tous les noeuds du sous-arbre engendré par la subdivision. On définit alors  $B = \{\bigwedge_{k=0}^m \phi(t_{i_k}), m \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_m \in P\}$  l'ensemble fini des noeuds de l'arbre engendré par  $P$ . A l'aide de  $B$  on peut définir une subdivision  $P' = (s_i)_{0 \leq i \leq m}$  plus fine que  $P$  de la façon suivante :  $s_i = \min\{t \in ]s_{i-1}, T], \phi(t) \in B \setminus \{\phi(s_{i-1})\}\}$  et on complète les bords pour avoir une subdivision. Le fait que  $P'$  soit bien définie (et donc finie) découle du fait que  $\phi$  est continue, que  $B$  est fini et donc qu'il existe un minimum pour l'ensemble  $\{\|x|_{[a, b]}\|_{1-var}, \phi(a), \phi(b) \in B, \phi(a) \neq \phi(b)\}$ , et enfin du fait que  $x$  soit à variation bornée.

Remarquons qu'on a pour tout  $i$ ,  $\phi(s_i) \leq \phi(s_{i+1})$  ou  $\phi(s_{i+1}) \leq \phi(s_i)$ . En effet, supposons par l'absurde que leur infimum ne soit ni l'un ni l'autre. Alors cet infimum est dans  $B \cap ]\phi(s_i), \phi(s_{i+1})[$ , ce qui est absurde par définition de  $s_{i+1}$

Il faut maintenant rendre  $\phi$  monotone par morceaux sur  $P'$ . Pour cela, il suffit de rendre  $\phi$  injective sur chaque morceaux, car on a déjà  $\phi(s_i)$  plus grand ou plus petit que  $\phi(s_{i+1})$ . On admet alors le lemme suivant dont R. Börger donne une démonstration dans [6] :

**Lemme 4.5** (Elimination des boucles). *Etant donnée  $f : [t_1, t_2] \rightarrow X$  une fonction continue dans un espace topologique séparé telle que  $f(t_1) \neq f(t_2)$ , il existe une fonction continue injective  $g : [t_1, t_2] \rightarrow X$ , un ensemble fermé  $A \subseteq [t_1, t_2]$  et une fonction croissante et continue  $q : [t_1, t_2] \rightarrow [t_1, t_2]$  telle que :*

- (1)  $g(t_1) = f(t_1)$  et  $g(t_2) = f(t_2)$
- (2)  $g \circ q|_A = f|_A$
- (3)  $q|_A : A \rightarrow [t_1, t_2]$  est surjective (i.e.  $q$  est constante en dehors de  $A$ ).

Par ailleurs, notons que  $[t_1, t_2] \setminus A$  peut s'écrire comme une réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts pour la topologie trace.

En appliquant ce lemme à chacun des  $\phi|_{[s_i, s_{i+1}]}$ , on obtient une fonction  $\phi' = g \circ q : [0, T] \rightarrow \tau$  monotone par morceaux sur la subdivision  $P'$ . Notons  $x'_P = \psi \circ \phi'$ .

$x'_P$  est un chemin à variation bornée qui vérifie les hypothèses de la proposition 4.3. Donc  $S(x'_P)_{0,T} = 1$ . Il reste alors à montrer que

$$\|x - x'_P\|_{1-var} \xrightarrow{|P| \rightarrow 0} 0$$

où  $|P|$  désigne le pas de la subdivision  $P$ . On aura alors, en faisant tendre  $|P|$  vers 0, et en passant à la limite par la propriété 3.1.6,  $S(x)_{0,T} = 1$ .

Comme  $|P'| \leq |P|$  il suffit de montrer que le résultat est vrai quand  $|P'| \rightarrow 0$ .

Tout d'abord,  $\|x'_P\|_{1-var} \rightarrow \|x\|_{1-var}$ . En effet,  $\|x'_P\|_{1-var} \leq \|x\|_{1-var}$  et

$$\|x'_P\|_{1-var} \geq \sum_i \|x'_{P s_{i+1}} - x'_{P s_i}\| = \sum_i \|x_{s_{i+1}} - x_{s_i}\|$$

Et donc en passant à la limite pour  $|P'| \rightarrow 0$ , on a bien  $\|x'_P\|_{1-var} \rightarrow \|x\|_{1-var}$ .

D'autre part,  $\|x - x'_P\|_{1-var} \leq \|x\|_{1-var} - \|x'_P\|_{1-var}$ . En effet, si dans chaque segment de la subdivision on note  $U = ]s_i, s_{i+1}[ \setminus A = \bigcup ]a_j, b_j[$ , on peut construire une subdivision  $\mathcal{U} = (u_i)$  de pas inférieur à  $\varepsilon$  telle que :

- $$\left\{ \begin{array}{l} - \text{ Si } u_{i-1} \in \bar{U} \text{ et n'est pas un bord droit, on prend } u_i \in \bar{U} \\ \text{ le plus grand possible tel que } ]u_{i-1}, u_i[ \in U. \\ - \text{ Sinon, } u_{i-1} \notin U \text{ et on prend } u_i \notin U \text{ le plus grand possible.} \end{array} \right.$$

En trois étapes, on est garanti de faire un pas d'au moins  $\varepsilon$ . On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } u_{i-1} \in \bar{U}, \|x_{u_{i+1}} - x'_{u_{i+1}} - (x_{u_i} - x'_{u_i})\| = \|x_{u_{i+1}} - x_{u_i}\| = \|x_{u_{i+1}} - x_{u_i}\| - \|x'_{u_{i+1}} - x'_{u_i}\| \\ \text{Si } u_{i-1} \notin U, \|x_{u_{i+1}} - x'_{u_{i+1}} - (x_{u_i} - x'_{u_i})\| = 0 \leq \|x_{u_{i+1}} - x_{u_i}\| - \|x'_{u_{i+1}} - x'_{u_i}\| \end{array} \right.$$

et quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a bien  $\|x - x'_P\|_{1-var} \leq \|x\|_{1-var} - \|x'_P\|_{1-var}$ .  
En mettant ensemble ces deux résultats, on a bien

$$\|x - x'_P\|_{1-var} \xrightarrow{|P| \rightarrow 0} 0$$

et donc  $S(x)_{0,T} = 1$  □

## 5. LES CHEMINS DE SIGNATURE TRIVIALE SONT ARBORESCENTS

On munit l'espace des signatures  $\mathcal{G} = \{S(x)_{0,t}, t \in [0, 1], x \in \mathcal{V}([0, T], V)\}$  de la métrique induite par  $T_{p.r.c.}(V)$ . Pour montrer que  $\mathcal{G}$  est un arbre réel, on a besoin de deux choses. Tout d'abord, on doit pouvoir caractériser assez un chemin par sa signature, ce que l'on verra avec l'intégrale des formes différentielles de degré 1. Mais pour appliquer cette caractérisation, on veut pouvoir prendre la signature d'un chemin dans  $\mathcal{G}$ , autrement dit la signature d'un chemin de signatures. Le résultat suivant est le pilier qui résout ces deux problématiques en même temps.

**Proposition 5.1** (shuffle product). *Notons  $I = (i_1, \dots, i_n)$  et  $J = (j_1, \dots, j_m)$ . On appelle shuffle de  $I$  et  $J$  l'ensemble*

$$I \sqcup J = \{(k_1, \dots, k_{n+m}), I = (k_{l_1}, \dots, k_{l_n}), \\ J = (k_{l_{n+1}}, \dots, k_{l_{n+m}}), l_1 < \dots < l_n, l_{n+1} < \dots < l_{n+m}\}$$

*Autrement dit, on mélange  $I$  et  $J$  en conservant leur ordre respectif. Alors*

$$S(x)_{0,T}^I \otimes S(x)_{0,T}^J = \sum_{K \in I \sqcup J} S(x)_{0,T}^K$$

*Démonstration.* De la même manière qu'en introduction, comme on peut intégrer par partie, on démontre le résultat par récurrence sur  $|I| + |J|$ . □

Comme  $x_t = \pi_1(S(x)_{0,t}) + x_0$ , on en déduit le corollaire suivant

**Corollaire 5.2.** *Soit  $P : V \rightarrow T(V)$  une fonction polynomiale. Soit  $x \in \mathcal{V}([0, T], V)$ . Alors  $P(x_t - x_0)$  est une fonction linéaire d'un ensemble fini de coefficients de  $S(x)_{0,t}$  qui ne dépend pas de  $x$ .*

On en déduit un premier résultat important d'invariance.

**Proposition 5.3.** *Soient  $x, y \in \mathcal{V}([0, T], V)$  tels que  $S(x)_{0,T} = S(y)_{0,T}$ . Alors pour toute 1-forme différentielle continue  $\psi$ ,*

$$\int_0^T \psi(dx_t) = \int_0^T \psi(dy_t)$$

*Démonstration.* Par densité des polynômes sur l'espace des fonctions continues on peut supposer que  $\psi(u) = \sum_{i=1}^d P_i(u) du^i$ , où les  $P_i$  sont des polynômes. D'après ce qui précède,  $P_i(x_t - x_0)$  est une fonction linéaire d'un ensemble fini de coefficients de  $S(x)_{0,t}$  qui ne dépend pas de  $x$ . Comme l'intégrale de  $S(x)_{0,t}^{i_1, \dots, i_n}$  le long de  $x^j$  vaut  $S(x)_{0,T}^{i_1, \dots, i_n, j}$  par définition, on a bien l'égalité souhaitée. □

Ce résultat n'est pas exploitable directement, mais peut être étendu à la signature. En effet, en tronquant la signature, on obtient d'après 3.3 un chemin à variation bornée. Il suffit donc, pour utiliser la proposition précédente sur la signature, de montrer le résultat suivant :

**Lemme 5.4.** Notons  $S_N = \pi^{(N)} \circ S$ .

$S(S_N(x)_{0,\bullet})_{0,T}$  est une combinaison linéaire de coefficients de  $S(x)_{0,T}$  qui ne dépend pas de  $x$ .

*Démonstration.* L'espace  $T^{(N)}(V)$  a pour base  $(e_I)_I$  où  $I$  parcourt les  $k$ -uplets d'entiers entre 1 et  $d$ , pour  $0 \leq k \leq N$  ( $e_\emptyset$  correspond au vecteur de base devant le terme scalaire).

Montrons par récurrence que  $S(S_N(x)_{0,\bullet})_{0,T}^{I_1, \dots, I_n} = \int dS_N(x)_{t_1}^{I_1} dS_N(x)_{t_2}^{I_2} \dots dS_N(x)_{t_n}^{I_n}$  s'écrit comme une combinaison linéaire de  $S_N(x)_{0,T}^I$ , dont les coefficients ne dépendent pas de  $x$ .

C'est immédiat pour  $n = 1$ . Pour  $n \geq 2$ , notons  $I_n = (J_n, i_n)$

$$\begin{aligned} S(S_N(x)_{0,\bullet})_{0,T}^{I_1, \dots, I_n} &= \int_0^T S(S_N(x)_{0,\bullet})_{0,t}^{I_1, \dots, I_{n-1}} dS_N(x)_t^{I_n} \\ &= \int_0^T S(S_N(x)_{0,\bullet})_{0,t}^{I_1, \dots, I_{n-1}} S_{N-1}(x)_{0,t}^{J_n} dx_t^{i_n} \end{aligned}$$

On obtient alors le résultat en utilisant l'hypothèse de récurrence et le shuffle product.  $\square$

On en déduit le résultat suivant :

**Corollaire 5.5.** Soient  $x, y \in \mathcal{V}([0, T], V)$  tels que  $S(x)_{0,T} = S(y)_{0,T}$ .

Alors pour toute 1-forme différentielle continue  $\psi$ ,

$$\int_0^T \psi(dS_N(x)_t) = \int_0^T \psi(dS_N(y)_t)$$

On en arrive alors au cœur de la preuve :

**Proposition 5.6.** Soient  $x, y \in \mathcal{V}([0, T], V)$  tels que  $S = S(x)_{0,\bullet}$  et  $S' = S(y)_{0,\bullet}$  soient injectifs et  $S_T = S'_T$ . Alors  $S = S'$ .

*Démonstration.* Notons  $S = S(x)_{0,\bullet}$  et  $S' = S(y)_{0,\bullet}$ . Deux chemins injectifs ayant même point de départ et même point d'arrivée sont égaux à reparamétrisation près si et seulement si leurs images coïncident.

Supposons par l'absurde que  $S([0, T]) \neq S'([0, T])$ . Il existe alors  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $S_N([0, T]) \neq S'_N([0, T])$ . En effet, soit  $s \in S([0, T]) \setminus S'([0, T])$ . On a alors l'existence pour tout  $s' \in S'([0, T])$  de  $N_{s'} \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $N \geq N_{s'}$ ,  $\pi^{(N)}(s') \neq \pi^{(N)}(s)$ . Par continuité de  $S'$ , on peut étendre localement l'inégalité sur un petit voisinage de  $s'$ , et par compacité de  $S'([0, T])$ , on extrait un sous-recouvrement fini, d'où le résultat.

Soient alors  $0 < s_1 < s_2 < t_2 < t_1 < T$  tels que  $S_N([s_2, t_2]) \cap (S_N([0, s_1] \cup [t_2, T]) \cup S'_N([0, T])) = \emptyset$  et  $S_N([s_1, s_2]) \cap S_N([t_1, t_2]) = \emptyset$ . On peut alors recouvrir respectivement  $S_N([t_1, t_2])$ ,  $S_N([s_1, s_2])$ ,  $S_N([s_2, t_2])$ ,  $(S_N([0, s_1] \cup [t_2, T]) \cup S'_N([0, T]))$  par des ouverts bornés  $U_1, V_1, U_2, V_2$  tels que  $U_1 \cap V_1 = \emptyset$  et  $U_2 \cap V_2 = \emptyset$ . On construit alors, à l'aide de ce découpage, une 1-forme différentielle  $\psi$  (un exemple est donné dans [1]) telle que

$$\int \psi(dS_N) \neq \int \psi(dS'_N)$$

ce qui est absurde d'après le corollaire 5.5.  $\square$

**Définition 5.7.** On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble  $\{S(x)_{0,\bullet} \text{ injectif, } x \in \mathcal{V}([0, T], V)\} / \sim$  des chemins de signature injectifs à reparamétrisation près. Nous allons voir que cet ensemble peut être muni d'une structure d'arbre réel et qu'il est isométrique à  $\mathcal{G}$ .

**Corollaire 5.8.** L'application

$$\mathbf{T} : \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ S(x)_{0,\bullet} & \longmapsto & S(x)_{0,T} \end{array}$$

est une bijection.

*Démonstration.* La proposition précédente donne l'injectivité. Pour la surjectivité, on utilise le lemme 4.5 : soient  $\tilde{S}$ ,  $q$  et  $A$  la décomposition obtenue. Alors en recollant morceau par morceau  $x \circ q|_A$  (ce que l'on peut faire car  $[0, T] \setminus A$  est une union dénombrable d'intervalles que l'on écrase un par un en prenant soin de translater pour bien recoller les morceaux de chemin), on obtient un chemin  $\tilde{x}$  tel que  $S(\tilde{x})_{0,\bullet} = \tilde{S}$  par la relation de Chen.  $\square$

$\mathcal{S}$  est muni d'un ordre partiel  $\leq$  défini par

$$S \leq S' \Leftrightarrow \exists t \geq 0, S \text{ est une reparamétrisation de } S'|_{[0,t]}$$

**Propriétés 5.9.** (1)  $\mathcal{S}$  a un plus petit élément  $\mathbf{1} : [0, T] \rightarrow (1, 0, 0, \dots)$

(2) Pour tout  $S \in \mathcal{S}$ , l'ensemble  $\{S' \in \mathcal{S}, S' \leq S\}$  est totalement ordonné.

(3) La fonction  $\|\cdot\|_{1-var}$  vérifie  $\|\mathbf{1}\|_{1-var} = 0$  et est strictement croissante sur  $\{S' \in \mathcal{S}, S' \leq S\}$ .

(4) Deux éléments  $S, S'$  de  $\mathcal{S}$  possèdent un infimum  $S \wedge S'$  pour  $\leq$ .

*Démonstration.* Les trois premières propriétés découlent de la définition de l'ordre  $\leq$  et de  $\|\cdot\|_{1-var}$ . Montrons alors le quatrième point.

Posons  $t = \sup\{t' \in [0, T], S_{t'} \in S'([0, T])\}$ . Par continuité de  $S$  et  $S'$ ,  $S'([0, T])$  est compact et  $t$  est un max. On a  $S|_{[0,t]} \leq S'$  et la proposition 5.6 implique  $S|_{[0,t]} \leq S'$ . Enfin, si  $\tilde{S} \leq S$  et  $\tilde{S} \leq S'$ , alors il existe  $\tilde{t} \geq 0$  tel que  $\tilde{S} = S|_{[0,\tilde{t}]}$ , avec donc  $S_{\tilde{t}} \in S'([0, T])$ , et donc  $\tilde{t} \leq t$  et  $\tilde{S} \leq S|_{[0,t]}$ .  $\square$

Nous admettons alors la proposition suivante

**Proposition 5.10.** Un espace  $\tau$  vérifiant les propriétés précédentes, et muni de la distance

$$d(S, S') = \|S\|_{1-var} + \|S'\|_{1-var} - 2\|S \wedge S'\|_{1-var}$$

est un arbre réel.

La bijection 5.8 induit alors une isométrie, et équipe  $\mathcal{G}$  d'une métrique d'arbre réel :

$$(1) d(S(x)_{0,T}, S(y)_{0,T}) = d(\mathbf{T}^{-1}(S(x)_{0,T}), \mathbf{T}^{-1}(S(y)_{0,T})).$$

$$(2) S(x)_{0,T} \leq S(y)_{0,T} \Leftrightarrow \mathbf{T}^{-1}(S(x)_{0,T}) \leq \mathbf{T}^{-1}(S(y)_{0,T})$$

$$(3) S(x)_{0,T} \wedge S(y)_{0,T} = \mathbf{T}(\mathbf{T}^{-1}(S(x)_{0,T}), \mathbf{T}^{-1}(S(y)_{0,T}))$$

Il reste alors à montrer une dernière chose :

**Proposition 5.11.**  $S(x)_{0,\bullet}$  est une fonction continue de  $[0, T]$  dans  $(\mathcal{G}, d)$ .

*Démonstration.* Notons  $S = S(x)_{0,\bullet}$ . Soient  $t_1 < t_2 \in [0, T]$ . Commençons par constater qu'il existe  $u \in [t_1, t_2]$  tel que  $S_u = S_{t_1} \wedge S_{t_2}$ . En effet, si l'on rend  $S_{[t_1, t_2]}$  injectif par le lemme 4.5, on obtient l'unique chemin injectif à reparamétrisation près reliant  $S_{t_1}$  à  $S_{t_2}$ ,  $[S_{t_1}, S_{t_2}]$ . Or  $S_{t_1} \wedge S_{t_2} \in [S_{t_1}, S_{t_2}]$ , d'où le résultat. On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
 d(S_{t_1}, S_{t_2}) &= \|\mathbf{T}^{-1}(S_{t_1})\|_{1-var} - \|\mathbf{T}^{-1}(S_u)\|_{1-var} \\
 &\quad + \|\mathbf{T}^{-1}(S_{t_2})\|_{1-var} - \|\mathbf{T}^{-1}(S_u)\|_{1-var} \\
 &\leq \|\mathbf{T}^{-1}(S_u) * \overleftarrow{S}_{[t_1, u]}\|_{1-var} - \|\mathbf{T}^{-1}(S_u)\|_{1-var} \\
 &\quad + \|\mathbf{T}^{-1}(S_u) * S_{[u, t_2]}\|_{1-var} - \|\mathbf{T}^{-1}(S_u)\|_{1-var} \\
 &= \|S_{[t_1, u]}\|_{1-var} + \|S_{[u, t_2]}\|_{1-var} \\
 &= \|S_{[t_1, t_2]}\|_{1-var}
 \end{aligned}$$

ce qui tend vers 0 quand  $t_2$  tend vers  $t_1$ , □

On peut alors conclure la preuve de la réciproque du théorème en prenant  $\tau = \mathcal{G}$ ,  $\phi(t) = S(x)_{0,t}$  et  $\psi(s) = \pi_1(s) + x_0$ .

## RÉFÉRENCES

- [1] Horatio BOEDIHARDJO et al. « The signature of a rough path : Uniqueness ». In : *Advances in Mathematics* 293 (2016), p. 720-737.
- [2] Kuo-Tsai CHEN. « Iterated Integrals and Exponential Homomorphisms ». In : *Proceedings of the London Mathematical Society* s3-4.1 (1954), p. 502-512.
- [3] Ilya CHEVYREV et Andrey KORMILITZIN. *A Primer on the Signature Method in Machine Learning*. 2016. arXiv : 1603.03788.
- [4] Peter K. FRITZ et Martin HAIRER. *A Course on Rough Paths : With an Introduction to Regularity Structures*. Springer, 2020.
- [5] Terry J. LYONS, Michael J. CARUANA et Thierry LÉVY. *Differential Equations Driven by Rough Paths*. Springer, 2004.
- [6] R. BÖRGER. « Recent developments of general topology and its applications - International Conference in Memory of Felix Hausdorff (1868-1942) ». In : *How to make a path injective*. 1992.
- [7] Rimhak REE. « Lie Elements and an Algebra Associated With Shuffles ». In : *Annals of Mathematics* 68.2 (1958), p. 210-220.