

Théorème de Mergelyan

Evan OPREA et Mona HAYHURST
Sous la direction de Olivier BENOIST

Introduction

En analyse complexe, donner des conditions sur des fonctions analytiques pour qu'elles puissent être approchées par des fonctions polynomiales ou rationnelles est une question qui se pose assez naturellement. On dispose déjà du résultat d'approximation suivant, appelé théorème de Runge :

Théorème (Runge). *Soit K un compact du plan, avec K^C connexe. Toute fonction analytique dans un voisinage de K peut être approchée uniformément sur K par des fonctions polynomiales.*

On s'intéresse dans ce mémoire à un résultat plus précis, appelé théorème de Mergelyan :

Théorème (Mergelyan). *Soit K un compact du plan, avec K^C connexe. Toute fonction continue sur K et analytique sur l'intérieur de K peut être approchée uniformément sur K par des fonctions polynomiales.*

La preuve de ce théorème, présentée dans le livre *Uniform Algebras* de Théodore Gamelin [1], n'est pas constructive, contrairement à la preuve classique du théorème de Runge. Cette preuve utilise en effet un argument de dualité, en s'intéressant aux mesures représentant les éléments du compact. Ce sont donc des résultats de théorie de la mesure et d'analyse fonctionnelle qui sont utilisés pour prouver ce résultat d'analyse complexe.

On peut remarquer aussi que ce résultat s'applique avec très peu de conditions sur la forme du compact K , contrairement à beaucoup d'autres résultats d'approximation en analyse complexe, qui contiennent en général des conditions sur la forme du bord du compact sur lequel on les utilise.

Pour améliorer la lisibilité de cette preuve, nous avons fait le choix de la présenter en admettant dans un premier temps les preuves des trois principaux théorèmes qu'elle mobilise. Il s'agit du théorème de Walsh-Lesbesgue, du théorème de Hoffmann-Wermer, et d'un théorème de décomposition de mesures orthogonales à un ensemble de fonctions. Les preuves de ces trois résultats seront données ensuite. La structure de ce document est donc la suivante :

- ★ Définitions et résultats préliminaires
- ★ Preuve du théorème de Mergelyan en admettant les trois théorèmes principaux
- ★ Preuves des trois théorèmes utilisés

1 Définitions préliminaires

1.1 Algèbres de Banach

Définition 1.1.1. Une *algèbre de Banach* est un espace complexe de Banach A qui est aussi une algèbre, dans laquelle la norme est sous-multiplicative : $\forall f, g \in A, \|fg\| \leq \|f\| \|g\|$.

On s'intéresse ici à une algèbre de Banach A commutative avec un élément neutre.

Définition 1.1.2. Pour $f \in A$, un complexe λ est dans la *résolvante* de f si $\lambda - f$ est inversible. Sinon, λ est dans le *spectre* de f . On note $\sigma(f)$ le spectre de f .

Théorème 1.1.3. Pour tout $f \in A$, $\sigma(f)$ est un sous-ensemble compact non-vide de \mathbb{C} . De plus, la fonction $(\lambda - f)^{-1}$ est une fonction analytique de λ , pour λ dans l'ensemble résolvant de f .

Démonstration. Si $|\lambda| > \|f\|$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} f^n / \lambda^{n+1}$ est absolument convergente donc convergente puisque A est un Banach. On note cette fonction $g(\lambda)$, qui est analytique en l'infini. On vérifie par un calcul direct que $g(\lambda)(\lambda - f) = 1$, donc $g(\lambda) = (\lambda - f)^{-1}$. Ainsi $\sigma(f) \subseteq \overline{B}(0, \|f\|)$.

Soit λ_0 dans l'ensemble résolvant de f , la série $h(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 - f)^{-(n+1)}$ est convergente et analytique sur le disque $\{|\lambda - \lambda_0| < 1 / \|(\lambda_0 - f)^{-1}\|\}$. De même, un calcul direct montre que $h(\lambda) = (\lambda - f)^{-1}$. On obtient ainsi que l'ensemble résolvant de f est ouvert, et que $(\lambda - f)^{-1}$ y est analytique.

Soit $L : A \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire continue sur A , alors $L((\lambda - f)^{-1})$ est une fonction analytique de λ sur l'ensemble résolvant de f , qui s'annule en l'infini puisque $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} f^n / \lambda^{n+1} = 0$. Par l'absurde, supposons que $\sigma(f) = \emptyset$. Alors $L((\lambda - f)^{-1})$ est une fonction entière bornée, donc constante puis nulle par le Théorème de Liouville. Puisque cela est valable pour tout L , $(\lambda - f)^{-1}$ est nulle par le Théorème de Hahn-Banach, ce qui est absurde. Ainsi $\sigma(f) \neq \emptyset$. \square

Théorème 1.1.4. Si $\lambda \in \sigma(f)$, alors $|\lambda| \leq \|f\|$.

Théorème 1.1.5 (Gelfand-Mazur). Soit A une algèbre de Banach commutative avec identité qui est aussi un corps. Alors A est isométriquement isomorphe à \mathbb{C} .

Démonstration. Soit $f \in A$. Par le théorème 1.1.3, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda - f$ n'est pas inversible. Puisque A est un corps, $\lambda - f = 0$ et $\lambda = f$. Ainsi $A = \mathbb{C} \cdot 1$ qui est isométriquement isomorphe à \mathbb{C} . \square

1.2 Espace des idéaux maximaux

Définition 1.2.1. Un idéal J de A est un *idéal maximal* si $J \neq A$ et J n'est contenu dans aucun autre idéal propre de A . On appelle *espace des idéaux maximaux* l'ensemble des idéaux maximaux de A , qu'on note \mathbf{M}_A .

Le lemme suivant est un résultat classique, mais crucial pour étudier M_A .

Lemme 1.2.2. Tout idéal propre de A est contenu dans un idéal maximal. Un idéal J est maximal si et seulement si A/J est un corps.

Théorème 1.2.3. Tout idéal maximal J de A est fermé, et A/J est isométriquement isomorphe à \mathbb{C} .

Démonstration. On commence par remarquer que si $\|1 - f\| < 1$, alors f est inversible. En effet, par 1.1.4, 1 est dans l'ensemble résolvant de $1 - f$, et donc $f = 1 - (1 - f)$ est inversible. Soit maintenant $f \in J$, puisque J est propre, f n'est pas inversible et donc $\|1 - f\| \geq 1$. Cette inégalité s'étend à $f \in \bar{J}$, qui est donc aussi un idéal propre. Par maximalité, $J = \bar{J}$. Puisque J est fermé, A/J est un Banach avec norme

$$\|f + J\| = \inf\{\|f + g\|, g \in J\}.$$

On peut montrer que $\|fg + J\| \leq \|f + J\| \|g + J\|$, $\forall f, g \in A$. Puisque $\|1 + g\| \geq 1 \forall g \in J$, on a $\|1 + J\| = 1$ ($g = 0$). Ainsi A/J est une algèbre de Banach commutative avec identité $1 + J$, et donc A/J est isométriquement isomorphe à \mathbb{C} par le Théorème de Gelfand-Mazur. \square

Théorème 1.2.4. *La correspondance $\phi \rightarrow A_\phi = \ker \phi$ est une correspondance bijective entre les homomorphismes complexes non-nuls de A et les idéaux maximaux de A .*

Démonstration. Soit J un idéal maximal de A . La projection $A \rightarrow A/J$ est un homomorphisme d'algèbres de noyau J . Le théorème de Gelfand-Mazur nous permet d'identifier A/J et le plan complexe. Donc J est le noyau d'un homomorphisme complexe non nul ϕ . Pour $f \in A$, on peut définir $\phi(f)$ explicitement comme l'unique complexe λ tel que $f - \lambda \in J$. Réciproquement, pour ϕ est un homomorphisme complexe non nul de A , et A_ϕ son noyau, A/A_ϕ est un corps, donc A_ϕ est un idéal maximal de A . \square

On peut maintenant identifier chaque idéal maximal dans M_A à l'homomorphisme complexe qu'il définit. Le lemme qui suit nous permet de définir une topologie sur M_A .

Lemme 1.2.5. *Soit ϕ un homomorphisme complexe non-nul de A . Alors ϕ est continue, et $\|\phi\|_{A^*} = 1 = \phi(1)$.*

Démonstration. On a $\phi(1)^2 = \phi(1)$, donc $\phi(1) \in \{0, 1\}$. Puisque ϕ est non-nulle, $\phi(1) = 1$. Soit $f \in A$ et $|\lambda| > \|f\|$, alors $\lambda - f$ est inversible, et donc $\phi(\lambda - f) \neq 0$, i.e $\phi(f) \neq \lambda$. Puisque cela est valable pour tout tel λ , $\phi(f) \leq \|f\|$. Ainsi ϕ est continue et $\|\phi\|_{A^*} \leq 1$. Puisque $\phi(1) = 1$, $\|\phi\| = 1$. \square

Ce lemme nous permet d'identifier M_A à un sous-ensemble de la sphère unité de A^* . On définit alors la topologie sur M_A comme la topologie faible-* héritée de A^* .

Théorème 1.2.6. *L'espace des idéaux maximaux M_A de A est un espace de Hausdorff compact.*

Démonstration. Soit $\phi \in A^* \setminus M_A$, alors $\exists f, g \in A$ tels que $\phi(fg) \neq \phi(f)\phi(g)$. On peut alors trouver un voisinage faible-* de ϕ qui ne rencontre pas M_A , donc M_A est faible-* fermé. Par le Théorème de Banach-Alaoglu, la boule unité fermée de $(A^*, \|\cdot\|_{A^*})$ est faible-* compacte, donc M_A aussi. \square

Par la suite, on s'intéresse au cas particulier de l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues à valeurs complexes sur un espace de Hausdorff compact X .

C'est une algèbre de Banach pour la norme

$$\|f\|_X = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Dans cette algèbre, tout élément $x \in X$ définit un homomorphisme d'évaluation ϕ_x , défini par :

$$\phi_x(f) = f(x)$$

Théorème 1.2.7. *Tout $\phi \in M_{C(X)}$ est l'homomorphisme d'évaluation ϕ_x pour un certain $x \in X$.*

Démonstration. Supposons que $\phi \neq \phi_x, \forall x \in X$. Alors $\forall x \in X, \exists f_x \in C(X)$ tel que $f_x(x) \neq 0$ et $\phi(f_x) = 0$. Par continuité, $|f_x|^2$ ne s'annule pas dans un voisinage de x , et $\phi(|f_x|^2) = \phi(f_x)\phi(\overline{f_x}) = 0$. Par compacité de $X, \exists x_1, \dots, x_n \in X$ tels que $g = |f_{x_1}|^2 + \dots + |f_{x_n}|^2$ ne s'annule pas. Alors g est inversible dans $C(X)$, ce qui est absurde car $\phi(g) = 0$. \square

Donc X et $M_{C(X)}$ sont homéomorphes. En particulier, X est entièrement déterminé par la structure d'algèbre de Banach de $C(X)$.

1.3 Algèbres uniformes

Définition 1.3.1. *Une algèbre uniforme sur un espace de Hausdorff compact X est une sous-algèbre uniformément fermée de $C(X)$ qui contient les constantes et sépare les points de X . Avec la norme $\|\cdot\|_X$, une telle algèbre A devient une algèbre de Banach. L'identification de chaque $x \in X$ avec l'homomorphisme d'évaluation en x permet de considérer X comme un sous-ensemble fermé de l'espace des idéaux maximaux M_A .*

Définition 1.3.2. *On s'intéresse à trois algèbres sur un compact K du plan complexe :*

- L'algèbre $\mathbf{P}(\mathbf{K})$ des fonctions de $C(K)$ qui peuvent être approchées uniformément sur K par des polynômes.
- L'algèbre $\mathbf{R}(\mathbf{K})$ des fonctions de $C(K)$ qui peuvent être approchées uniformément sur K par des fonctions rationnelles dont les pôles sont hors de K .
- L'algèbre $\mathbf{A}(\mathbf{K})$ des fonctions de $C(K)$ qui sont analytiques sur l'intérieur de K .

Théorème 1.3.3. *Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact. Si $f \in C(K)$ s'étend en une fonction analytique dans un voisinage de K , alors $f \in R(K)$.*

Démonstration. On écrit la formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad z \in K,$$

où γ est un lacet bien choisi entourant K . Les sommes de Riemann approximant l'intégrale sont des fonctions rationnelles avec pôles hors de K approximant uniformément f sur K . \square

Théorème 1.3.4. *Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact. L'espace des idéaux maximaux de $R(K)$ est K .*

Démonstration. Chaque $\phi \in M_{R(K)}$ est uniquement déterminée par sa valeur $\phi(z)$ en la fonction $z \mapsto z$. Puisque $\phi(z - \phi(z)) = 0, z - \phi(z)$ n'est pas inversible dans $R(K)$, donc $\phi(z) \in K$. Ainsi $\phi = ev_{\phi(z)}$. \square

Pour continuer, on doit préciser la forme du compact K . En particulier, on doit décider si le compact a "des trous".

Définition 1.3.5. *On note \hat{K} l'union de K et des composantes connexes bornées de K^C . \hat{K} est compact. Le bord de \hat{K} est alors le bord extérieur de K , i.e. les éléments de ∂K qui sont aussi dans le bord de la composante connexe non-bornée de K^C . Si f est une fonction polynomiale, alors $\|f\|_K = \|f\|_{\hat{K}}$, par principe du maximum. Donc toute suite de polynômes qui converge uniformément sur K vers une fonction $g \in P(K)$ converge aussi uniformément sur \hat{K} vers une extension $\hat{g} \in P(\hat{K})$ de g , telle que $\|\hat{g}\|_{\hat{K}} = \|g\|_K$. L'isomorphisme isométrique $g \mapsto \hat{g}$ permet d'identifier les algèbres $P(K)$ et $P(\hat{K})$.*

Théorème 1.3.6. Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact. L'espace des idéaux maximaux de $P(K)$ est \hat{K} . De plus,

$$P(K) = P(\hat{K}) = R(\hat{K})$$

Démonstration. Par ce qui a été fait précédemment, il suffit de montrer que $P(\hat{K}) = R(\hat{K})$. Pour cela, il suffit de montrer que $(z - \lambda)^{-1} \in P(\hat{K})$ si $\lambda \notin \hat{K}$. Quitte à remplacer K par \hat{K} , on peut supposer que K^C est connexe.

Soit $U = \{\lambda \in K^C, (z - \lambda)^{-1} \in P(K)\}$. On va montrer que $U = K^C$.

Si $(\lambda_n) \subseteq K^C$ et $\lambda_n \rightarrow \lambda \in K^C$, alors $(z - \lambda_n)^{-1}$ converge uniformément sur K vers $(z - \lambda)^{-1}$, donc $\lambda \in U$ et U est fermé dans K^C .

Si $|\lambda|$ est grand, la série

$$(z - \lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^{n+1}} z^n$$

converge uniformément sur K . Ceci montre que U est non vide.

Soit $\lambda_0 \in U$. Alors $(z - \lambda_0)^{-n} \in P(K)$, pour tout $n \geq 1$. Si λ est assez proche de λ_0 , la série

$$(z - \lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_0)^n}{(z - \lambda_0)^{n+1}}$$

converge uniformément sur K . Ainsi $\lambda \in U$ quand λ est assez proche de λ_0 , et U est ouvert. Puisque K^C est connexe, $K^C = U$. \square

À ce stade, on peut donner une preuve alternative du théorème de Runge.

Théorème 1.3.7 (Runge). Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact avec complémentaire connexe. Toute fonction analytique dans un voisinage de K peut être approximée uniformément sur K par des polynômes.

Démonstration. On applique les théorèmes 1.3.3 et 1.3.6. \square

1.4 Mesures de représentation

Soit A une algèbre uniforme sur X , et $\phi \in M_A$. Puisque ϕ est un homomorphisme d'algèbre, c'est en particulier une forme linéaire complexe. Par le Théorème de représentation de Riesz, on peut comprendre M_A à travers les mesures sur X .

Définition 1.4.1. Une *mesure de représentation* pour ϕ est une mesure positive μ sur X telle que

$$\phi(f) = \int f d\mu, \quad \forall f \in A.$$

On note \mathbf{M}_ϕ l'ensemble des mesures de représentation pour ϕ . On verra que M_ϕ est non-vide.

Remarque. Puisque $\|\phi\| = \phi(1) = 1$, pour $\mu \in M_\phi$, on a $\|\mu\| = \int d\mu = 1$. M_ϕ est convexe et fortement fermé, donc faiblement fermé. Par le Théorème de Banach-Alaoglu, M_ϕ est faible-* compact.

Remarque. M_ϕ correspond aux extensions de forme linéaire préservant la norme de ϕ de A à $C(X)$ (données par Hahn-Banach). En effet, chaque $\mu \in M_\phi$ représente une extension de ϕ qui préserve la norme (différentes par unicité dans le Théorème de Riesz). Si $\tilde{\phi}$ est une extension de ϕ préservant la norme, par le Théorème de Riesz, il existe une mesure complexe ν qui la représente. Alors $\|\nu\| = \int d|\nu| = \|\tilde{\phi}\| = 1 = \phi(1) = \int d\nu$. Donc ν est réelle positive et $\nu \in M_\phi$. Ainsi M_ϕ est non-vide.

Définition 1.4.2. Pour $\phi \in M_A$, on définit ϕ sur $Re(A)$ par :

$$\phi(Re(f)) = Re(\phi(f)), \quad f \in A.$$

Alors $\phi(u) = \int ud\mu$, pour $u \in Re(A)$ et $\mu \in M_\phi$. Ainsi ϕ est continue sur $Re(A)$ et est positive, i.e $\phi(u) \geq 0$ si $u \geq 0$.

Remarque. Si L est une extension positive de ϕ de $Re(A)$ à $C_R(X) = C(X, \mathbb{R})$, alors pour tout $v \in C_R(X)$, $L(v) \leq L(\|v\|_X) = \|v\|_X$. Ainsi L est continue, et est donc représentée par une mesure positive $\mu \in M_\phi$ par Théorème de Riesz. Il suit que M_ϕ correspond aux extensions monotones de ϕ de $Re(A)$ à $C_R(X)$.

Théorème 1.4.3. Soit A une algèbre uniforme sur X , et $\phi \in M_A$. Si $v \in C_R(X)$, alors

$$\begin{aligned} \sup\{\phi(u) \mid u \in Re(A), u \leq v\} &= \inf\{\int vd\mu \mid \mu \in M_\phi\} \\ \inf\{\phi(u) \mid u \in Re(A), u \geq v\} &= \sup\{\int vd\mu \mid \mu \in M_\phi\} \end{aligned}$$

Démonstration. On montre uniquement la première égalité.

Soit $B = Re(A) + \mathbb{R}v$. On étend ϕ de manière positive à B en posant $\phi(v) = c$, où

$$\sup\{\phi(u), u \in Re(A), u \leq v\} \leq c \leq \inf\{\phi(u), u \in Re(A), u \geq v\}.$$

Par le lemme de Zorn, on peut étendre ϕ de manière positive à $C_R(X)$. Soit $\mu \in M_\phi$ qui la représente, alors $\int vd\mu = c$. En prenant c minimal, on a une inégalité.

Maintenant, si $\mu \in M_\phi$, $u \in Re(A)$, et $u \leq v$, alors $\phi(u) = \int ud\mu \leq \int vd\mu$. On a donc égalité. \square

On s'intéresse maintenant aux mesures complexes qui représentent ϕ .

Définition 1.4.4. Une **mesure de représentation complexe** de ϕ est une mesure complexe μ sur X telle que

$$\phi(f) = \int fd\mu, \quad \forall f \in A.$$

Par le Théorème de Riesz, les mesures complexes de représentation de ϕ correspondent aux extensions continues de ϕ de A à $C(X)$ (qui ne préservent pas forcément la norme).

Théorème 1.4.5. Soit A une algèbre uniforme et $\phi \in M_A$. Soit μ une mesure de représentation complexe de ϕ , alors il existe une mesure de représentation pour ϕ qui est absolument continue par rapport à μ .

Démonstration. Soit A_ϕ le noyau de ϕ . Soient H^2 et H_ϕ^2 les adhérences de A et A_ϕ dans $L^2(|\mu|)$. Si $f \in A_\phi$, alors $\int |1 - f|^2 d|\mu| \geq \int (1 - f)^2 d\mu = \phi(1 - f)^2 = 1$. Donc $1 \notin H_\phi^2$, et $H^2 \neq H_\phi^2$. Puisque $A_\phi A \subseteq A_\phi$, on a $A_\phi H^2 \subseteq H_\phi^2$.

Puisque $H_\phi^2 \subsetneq H^2$, il existe $F \in H^2$, $\int |F|^2 d|\mu| = 1$ et $F \perp H_\phi^2$ dans $L^2(|\mu|)$. Si $f \in A_\phi$, alors $fF \in H_\phi^2$, donc $fF \perp F$, $\int f|F|^2 d|\mu| = 0$. Ainsi pour $f \in A$,

$$\int (f - \phi(f))|F|^2 d|\mu| = 0 = \int f|F|^2 d|\mu| - \phi(f)$$

et $|F|^2 d|\mu|$ est la mesure recherchée. \square

1.5 Algèbres de Dirichlet

Définition 1.5.1. Soit A une algèbre uniforme sur X , et $E \subseteq X$ fermé. On dit que A est **Dirichlet** sur E si $Re(A)$ est dense dans $C_R(E)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Théorème 1.5.2. Soit A une algèbre de Dirichlet sur X , et $\phi \in M_A$. Alors il existe une unique mesure de représentation pour ϕ .

Démonstration. Soient μ, ν deux mesures de représentation pour ϕ . Alors $\mu - \nu$ est une mesure réelle sur X , nulle sur $Re(A)$. Par densité, $\mu - \nu$ est nulle sur $C_R(X)$, elle est donc nulle par Théorème de Riesz. \square

1.6 Énoncé des trois théorèmes nécessaires à la preuve

Théorème 1.6.1 (Walsh-Lebesgue). Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact avec complémentaire connexe. Alors tout $u \in C_R(\partial K)$ est limite uniforme sur ∂K de polynômes harmoniques en x et y .

Corollaire 1.6.1.1. Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact. Alors $P(K)$ est une algèbre de Dirichlet sur $\partial \hat{K}$.

Théorème 1.6.2 (Hoffman-Wermer). Soit A une algèbre uniforme sur X métrique compact, et $\phi \in M_A$. Soit f une fonction continue sur X qui est dans l'adhérence de A dans $L^1(m) \forall m \in M_\phi$. Alors il existe une suite $(f_n) \subseteq A$ telle que $\|f_n\|_X \leq \|f\|_X$, et $f_n \rightarrow f$ M_ϕ -presque partout, c'est à dire m -presque partout $\forall m \in M_\phi$.

Théorème 1.6.3 (Théorème de décomposition final). Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact, et μ une mesure sur ∂K orthogonale à $R(K)$. Alors il existe des points $z_n \in K$, des mesures de représentation m_n sur ∂K pour z_n , et des fonctions $h_n \in L^1(m_n)$ telles que $h_n m_n \perp R(K)$, et

$$\mu = \sum_n h_n m_n,$$

la série convergeant en la norme de variation totale.

2 Preuve du théorème de Mergelyan

On peut maintenant donner la preuve du théorème de Mergelyan.

Théorème (Mergelyan). Soit K un compact du plan, avec K^C connexe. Toute fonction continue sur K et analytique sur l'intérieur de K peut être approchée uniformément sur K par des fonctions polynomiales.

Démonstration. Il suffit de montrer que si μ est une mesure sur ∂K orthogonale à $P(K)$, alors μ est orthogonale à $A(K)$.

Par le théorème de représentation de Riesz appliqué à ∂K et Hahn-Banach, on aura alors que $A(K)$ et $P(K)$ restreints à ∂K sont égaux, donc que pour toute fonction $f \in A(K)$, il existe une fonction $g \in P(K)$ telle que f et g coïncident sur ∂K , i.e. $f - g|_{\partial K} = 0$. Puis par principe du maximum, $f = g$ sur tout K .

D'après le théorème de décomposition 1.6.3, il suffit de montrer cette implication pour μ de la forme $\mu = hdm$, où m est la mesure de représentation sur ∂K pour un $z_0 \in K$, par rapport à $R(K) = P(K)$, et $h \in L^1(m)$.

Soit $z_0 \in K$, et $P_0(K)$ l'ensemble des fonctions de $P(K)$ qui s'annulent en z_0 . Soient H^2 et H_0^2 les adhérences respectives de $P(K)$ et de $P_0(K)$ dans $L^2(m)$. Pour tous $f \in P(K)$ et $g \in P_0(K)$,

$\int fgdm = 0$, donc $H^2 \perp \overline{H_0^2}$ dans $L^2(m)$ ($\overline{H_0^2}$ est l'ensemble des \bar{z} pour $z \in H_0^2$). De plus, par le théorème de Walsh-Lebesgue 1.6.1, $P(K)$ est Dirichlet sur ∂K .

Par définition, $Re(P(K))$ est donc dense dans $L^2(m)$. Or pour $f \in P(K)$,

$$2Re(f) = (f + \overline{f(z_0)}) + (f - \overline{f(z_0)}) \in P(K) + \overline{P_0(K)}.$$

Donc $P(K) + \overline{P_0(K)}$ est dense dans $L^2(m)$.

Donc :

$$L^2(m) = H^2 \oplus \overline{H_0^2}$$

Ensuite, l'évaluation en z_0 est multiplicative sur $A(K)$ (c'est un morphisme). La seule mesure possible pour représenter z_0 sur $A(K)$ est m , par unicité de la représentation sur les algèbres de Dirichlet 1.5.2, et $P(K) \subseteq A(K)$ donc $A(K)$ est aussi Dirichlet sur ∂K . Donc m est multiplicative sur $A(K)$. Alors, pour tous $f \in A(K)$, $g \in P_0(K)$, $\int fgdm = 0$. Donc $A(K) \perp \overline{H_0^2}$ dans $L^2(m)$. Donc :

$$A(K) \subseteq H^2$$

Supposons maintenant $hdm \perp P(K)$. Soit $f \in A(K)$. On a $f \in H^2$, donc f est dans l'adhérence de $P(K)$ dans $L^1(dm)$.

En effet, si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions de $P(K)$ qui converge vers f pour la norme de

$$L^2(m), \text{ l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne } \int |f - f_n|dm \leq \sqrt{\int |f - f_n|^2 dm} \sqrt{\int 1 dm}, \text{ donc } \int |f - f_n| \rightarrow 0, \text{ i.e. } (f_n)_n \text{ converge vers } f \text{ dans } L^1(m) \text{ aussi.}$$

Par le théorème de Hoffman-Wermer 1.6.2, on dispose alors d'une suite $(f_n)_n$ de fonctions de $P(K)$, bornée, telle que $f_n \rightarrow f$ dm -presque partout. Donc :

$$\int fhdm = \lim_n \int f_n hdm = 0$$

par convergence dominée. Donc $hdm \perp A(K)$. □

3 Preuve du théorème de Walsh-Lebesgue

Nous allons maintenant montrer que pour $K \subseteq \mathbb{C}$ compact, $P(K)$ est Dirichlet sur ∂K . Pour cela, nous allons utiliser la solvabilité du problème de Dirichlet. On admettra le résultat suivant. On peut en trouver une preuve dans (H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, [2]).

Théorème 3.0.1 (Principe de Dirichlet). *Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine dont le bord ∂D est une union finie de courbes lisses fermées. Soit $u \in C_R(\partial D)$, continuellement différentiable sur ∂D . Alors u peut être étendue de manière à ce que u soit harmonique sur D et continue sur \overline{D} , et ce de manière unique. De plus, cette extension de u minimise l'intégrale de Dirichlet*

$$\int \int_D \left(\frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \right) dx dy,$$

parmi les fonctions v continuellement différentiables sur \overline{D} qui coïncident avec u sur ∂D .

Définition 3.0.2. *Soit $K \subseteq \mathbb{C}$. Un point $z \in \partial K$ vérifie la **condition de Lebesgue** si $\int \frac{dr}{r} = +\infty$, où $S = \{0 < r < 1, S(z, r) \cap K^c \neq \emptyset\}$.*

Lemme 3.0.3. *Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact. Soit (K_n) une suite de compacts de \mathbb{C} telle que ∂K_n soit une union finie de courbes lisses fermées, $K_{n+1} \subseteq \overset{\circ}{K}_n$ et $\bigcap_n K_n = K$. Soit $u \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{R})$, et u_n les extensions harmoniques de $u|_{\partial K_n}$ à K_n . Si tout $z \in \partial K$ satisfait la condition de Lebesgue, alors u_n converge uniformément vers u sur ∂K .*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que u_n ne converge pas uniformément vers u sur ∂K . Quitte à extraire, il existe $z_n \in \partial K$, $\varepsilon > 0$ tels que $|u_n(z_n) - u(z_n)| > 3\varepsilon$ pour tout n . De plus, on peut supposer que $z_n \rightarrow 0$, $|z_n| > |z_{n+1}|$ et $u(0) = 0$.

Par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $|u(z)| < \varepsilon$ pour $|z| \leq \delta$. On peut supposer que $|z_n| < \delta$ pour tout n . En utilisant l'inégalité précédente, on a alors $|u_n(z_n)| > 2\varepsilon$ pour tout n .

Supposons qu'il existe $0 < r \leq \delta$ tel que $S(0, r) \cap K = \emptyset$. Par compacité, $S(0, r) \cap K_n = \emptyset$ pour n assez grand. Puisque $|u| \leq \varepsilon$ sur $\partial(K_n \cap \overline{D}(0, r))$, par le principe du maximum pour les fonctions harmoniques et $u|_{\partial K_n} = u_n|_{\partial K_n}$, on a $|u_n| \leq \varepsilon$ sur $K_n \cap \overline{D}(0, r)$. Ceci contredit $|u_n(z_n)| > 2\varepsilon$. Ainsi $S(0, r) \cap K \neq \emptyset$ pour tout $0 < r \leq \delta$.

Soit $E_n = \{r > 0, S(0, r) \cap K_n^c \neq \emptyset \text{ et } |z_n| \leq r \leq \delta\}$. Pour tout tel r , on a aussi $S(0, r) \cap \partial K_n \neq \emptyset$. En effet, $S(0, r) \cap K \neq \emptyset$ et $K \subseteq K_n$. En considérant un chemin sur $S(0, r)$ qui relie un point de K_n et K_n^c , on trouve un point de $S(0, r) \cap \partial K_n$.

La suite (E_n) est une suite croissante d'ensembles mesurables. Puisque $K^c = \bigcup_n K_n^c$, on a

$$E = \bigcup_n E_n = \{0 < r \leq \delta, S(0, r) \cap K^c \neq \emptyset\}.$$

Par hypothèse, $\int_E \frac{dr}{r} = +\infty$.

Soit $r \in E_n$, on considère $F = K_n \cap \overline{D}(0, r)$. Le bord de F consiste en $\partial K_n \cap D(0, r)$, ainsi que certains arcs sur $S(0, r)$. Puisque u_n est harmonique sur $\overset{\circ}{F}$, $|u_n(z_n)| \geq 2\varepsilon$ et $z_n \in K \subseteq \overset{\circ}{K}_n$, et $|u_n| \leq \varepsilon$ sur la partie de ∂F dans $D(0, r)$ car $u_n|_{\partial K_n} = u|_{\partial K_n}$, par le principe du maximum il existe w sur un arc de $\partial F \cap S(0, r)$ tel que $|u_n(w)| \geq 2\varepsilon$. Puisque cet arc doit avoir un sommet dans ∂K_n , la variation de u_n le long de l'arc est au moins ε . Ainsi

$$\varepsilon^2 \leq \left(\int_{K_n \cap S(0, r)} \left| \frac{\partial u_n}{\partial \theta} \right| d\theta \right)^2 \stackrel{C-S}{\leq} 2\pi \int_{K_n \cap S(0, r)} \frac{\partial u_n^2}{\partial \theta} d\theta.$$

Par le principe de Dirichlet, on a

$$\begin{aligned} \iint_{K_n} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) dx dy &\geq \iint_{K_n} \left(\frac{\partial u_n^2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_n^2}{\partial \theta} \right) r dr d\theta \\ &\geq \int_{E_n} \int_{K_n \cap S(0, r)} \frac{1}{r} \frac{\partial u_n^2}{\partial \theta} d\theta dr \\ &\geq \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \int_{E_n} \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

La première intégrale est décroissante en n et bornée, tandis que $\int_{E_n} \frac{dr}{r} \rightarrow \int_E \frac{dr}{r} = +\infty$ par convergence monotone, ce qui est absurde. \square

Théorème 3.0.4 (Walsh-Lebesgue). *Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact avec complémentaire connexe. Alors tout $u \in C_R(\partial K)$ est limite uniforme sur ∂K de polynômes harmoniques en x et y .*

Démonstration. Soit $K = \bigcap_n K_n$, avec K_n compact, K_n^c connexe, $K_{n+1} \subseteq \overset{\circ}{K}_n$, et ∂K_n est une union finie de courbes fermées lisses. Pour obtenir K_n , on peut recouvrir K par un nombre fini de boules assez petites, puis lisser les endroits où les bords des boules se touchent.

Soit $u \in C_R(\partial K)$. Par le Théorème de Stone-Weierstrass, u est limite uniforme sur ∂K de polynômes en x et y .

On peut donc supposer que $u \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{R})$. Soit u_n l'extension harmonique de $u|_{\partial K_n}$ à K_n . Par 3.0.3, $u_n \rightarrow u$ uniformément sur ∂K .

Puisque \hat{K}_n est simplement connexe, il existe f_n holomorphe sur \hat{K}_n telle que $u_n = \operatorname{Re}(f_n)$. Par le Théorème de Runge, f_n peut être approximée uniformément sur K par des polynômes en z . Les parties réelles de ces polynômes sont des polynômes harmoniques en x et y et convergent uniformément sur ∂K vers u_n . \square

Corollaire 3.0.4.1. *Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact. Alors $P(K)$ est une algèbre de Dirichlet sur $\hat{\partial K}$.*

4 Preuve des théorèmes de Hoffman-Wermer et de décomposition

La preuve du théorème de décomposition faisant intervenir le théorème de Hoffman-Wermer, nous avons décidé de rassembler les preuves de ces théorèmes en une section.

4.1 Décomposition de mesures orthogonales

Théorème 4.1.1 (Minimax). *Soit P un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel, et M un sous-ensemble convexe compact d'un espace vectoriel topologique, sur lequel la topologie induite est métrisable. Soit $F : M \times P \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $m \rightarrow F(m, p)$ soit concave et continue pour tout p , et $p \rightarrow F(m, p)$ soit convexe pour tout m . Alors*

$$\sup_{m \in M} \inf_{p \in P} F(m, p) = \inf_{p \in P} \sup_{m \in M} F(m, p)$$

Démonstration. Par compacité de M et continuité de $m \rightarrow F(m, p)$, il est clair que

$$0 \leq \sup_{m \in M} \inf_{p \in P} F(m, p) \leq \inf_{p \in P} \sup_{m \in M} F(m, p) < +\infty.$$

Par l'absurde, supposons que

$$\sup_{m \in M} \inf_{p \in P} F(m, p) = c < c + \varepsilon = \inf_{p \in P} \sup_{m \in M} F(m, p).$$

Soit Q l'enveloppe convexe de $\{F(\cdot, p) \in C_R(M), p \in P\}$. Les fonctions $f \in Q$ sont de la forme $f(m) = \sum a_j F(m, p_j)$, où $a_j \geq 0$ et $\sum a_j = 1$. Puisque $p \rightarrow F(m, p)$ est convexe,

$$\sup_{m \in M} f(m) \geq \sup_{m \in M} F(m, \sum a_j p_j) \geq c + \varepsilon.$$

Ainsi Q est à distance positive de l'ensemble convexe $\{u \in C_R(M), u \leq c\}$. Par le Théorème de séparation strict pour ensembles convexes (Hahn-Banach) et le Théorème de représentation de Riesz, il existe une mesure réelle μ sur M non-nulle telle que

$$\sup\left\{\int u d\mu, u \in C_R(M), u \leq c\right\} < \inf\left\{\int f d\mu, f \in Q\right\}.$$

En particulier, $\int u d\mu \leq 0$ lorsque $u \leq 0$. Par Riesz, $\mu \geq 0$. En multipliant par une constante positive, on peut supposer que $\int d\mu = 1$. L'inégalité implique alors

$$c < \inf_{p \in P} \int F(m, p) d\mu(m).$$

On affirme qu'il existe un point $m_0 \in M$ tel que

$$g(m_0) \geq \int g d\mu$$

pour toute fonction concave $g \in C_R(M)$. Par le Théorème de Krein-Milman, puisque les points extrémaux pour la topologie faible-* de l'ensemble des mesures de probabilités sur M sont les $\delta_m, m \in M$, on peut trouver $\mu_n = \sum_j a_{j_n} \delta_{m_{j_n}}$ combinaison convexe des $\delta_{m_{j_n}}$ telle que $\mu_n \rightarrow \mu$ pour la topologie faible-*. Soit $m_0 \in K$ un point adhérent à $(\sum_j a_{j_n} m_{j_n})_n$, qui existe par métrisabilité de la topologie de K . Alors, quitte à extraire,

$$\begin{aligned} g(m_0) &= \lim_n g\left(\sum_j a_{j_n} m_{j_n}\right) \\ &\geq \lim_n \sum_j a_{j_n} g(m_{j_n}) \\ &= \lim_n \int g d\left(\sum_j a_{j_n} \delta_{m_{j_n}}\right) \\ &= \int g d\mu. \end{aligned}$$

Puisque $m \rightarrow F(m, p)$ est concave, on a

$$\begin{aligned} c &< \inf_{p \in P} \int F(m, p) d\mu \leq \inf_{p \in P} F(m_0, p) \\ &\leq \sup_m \inf_{p \in P} F(m, p) = c, \end{aligned}$$

ce qui est absurde. □

Grâce à ce théorème, on obtient une caractérisation de l'adhérence de A dans $L^1(m)$, pour $m \in M_\phi$.

Théorème 4.1.2 (Hoffman-Wermer). *Soit A une algèbre uniforme sur X métrique compact, et $\phi \in M_A$. Soit f une fonction continue sur X qui est dans l'adhérence de A dans $L^1(m) \forall m \in M_\phi$. Alors il existe une suite $(f_n) \subseteq A$ telle que $\|f_n\|_X \leq \|f\|_X$, et $f_n \rightarrow f$ M_ϕ -presque partout, c'est à dire m -presque partout $\forall m \in M_\phi$.*

Démonstration. On applique le Minimax à la fonction

$$F(m, g) = \int |f - g| dm, \quad m \in M_\phi, g \in A$$

. Puisque f et g sont continues, $m \rightarrow F(m, g)$ est continue pour la topologie faible-*. De plus, la topologie de M_ϕ est métrisable, en tant que sphère unité du dual de $C_R(X)$ qui est séparable (appliquer Stone-Weierstrass à l'algèbre engendrée par les $d(\cdot, x_n)$, où $(x_n)_n$ est dense dans X). Par hypothèse,

$$\inf_{g \in A} \int |f - g| dm = 0, \quad \forall m \in M_\phi.$$

Par le Théorème du Minimax,

$$\inf_{g \in A} \sup_{m \in M_\phi} \int |f - g| dm = 0.$$

Il existe donc $g_n \in A$ tel que

$$\sup_{m \in M_\phi} \int |f - g_n| dm < \frac{1}{n^2}.$$

Alors $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f - g_n| dm < \infty$, $\forall m \in M_\phi$. Ainsi $\sum_{n=1}^{\infty} |f - g_n| < \infty$ M_ϕ -presque partout, et $g_n \rightarrow f$ M_ϕ -presque partout.

On peut supposer que $\|f\|_X = 1$. Si $a, b \in \mathbb{C}$ et $|b| \leq 1$, alors $\log^+ |a| = \max(0, \log |a|) \leq \max(0, |a| - 1) \leq |a - b|$. Ainsi

$$\sup_{m \in M_\phi} \int \log^+ |g_n| dm \leq \sup_{m \in M_\phi} \int |g_n - f| dm < \frac{1}{n^2}.$$

Par 1.4.3, il existe $h_n \in A$ tel que $\log^+ |g_n| \leq \operatorname{Re}(h_n)$, et $\operatorname{Re}(\phi(h_n)) \leq \frac{1}{n^2}$. Quitte à translater par une constante imaginaire, on peut supposer que $\operatorname{Im}(\phi(h_n)) = 0$. Pour $m \in M_\phi$, on a

$$\int e^{-h_n} dm = e^{-\phi(h_n)} \geq e^{-1/n^2} \geq 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Puisque $\operatorname{Re}(h_n) \geq 0$, $|e^{-h_n}| \leq 1$, et

$$\int |1 - e^{-h_n}|^2 dm = 1 + \int |e^{-h_n}|^2 dm - 2\operatorname{Re}\left(\int e^{-h_n} dm\right) \leq \frac{2}{n^2}.$$

Alors comme précédemment $e^{-h_n} \rightarrow 1$ M_ϕ -presque partout. Alors $f_n = g_n e^{-h_n}$ converge vers f M_ϕ -presque partout, et $|f_n| \leq 1 = \|f\|_X$. \square

De manière similaire, on obtient le résultat suivant.

Lemme 4.1.3 (Forelli). *Soit E un ensemble F_σ (union dénombrable de fermés) tel que $M_\phi(E) = 0$. Alors il existe $(f_n)_n \subseteq A$ tel que $\|f_n\|_X \leq 1$, $f_n(x) \rightarrow 0 \forall x \in E$, et $f_n \rightarrow 1$ M_ϕ -presque partout.*

Démonstration. Soit (E_n) une suite croissante de fermés telle que $\cup_n E_n = E$. Pour tout n et tout $m \in M_\phi$, $m(E_n) = 0$ par hypothèse. On a

$$\inf\left\{\int u dm, u \in C(X), u \geq 0, u \geq n \text{ sur } E_n\right\} = 0.$$

En effet, soit $u_k(x) = n(1 - k \cdot d(x, E_n))^+$. Alors $u_k \rightarrow n \mathbb{1}_{E_n}$ et on a le résultat par convergence dominée.

Soit $P_n = \{u \in C(X), u \geq 0, u \geq n \text{ sur } E_n\}$, alors $F(m, u) = \int u dm$, $u \in P_n, m \in M_\phi$ vérifie les hypothèses du Minimax 4.1.1, et donc

$$\inf_{u \in P_n} \sup_{m \in M_\phi} \int u dm = 0$$

. Ainsi il existe $u_n \in C(X), u_n \geq 0, u_n \geq n$ sur E_n tel que

$$\sup_{m \in M_\phi} \int u_n dm \leq \frac{1}{n^2}$$

. Par 1.4.3, il existe $h_n \in A$ tel que $u_n \leq \operatorname{Re}(h_n)$ et $\operatorname{Re}(\phi(h_n)) \leq 2/n^2$. Quitte à translater par une constante imaginaire, on peut supposer que $\operatorname{Im}(\phi(h_n)) = 0$.

Soit $f_n = e^{-h_n}$. Alors $|f_n| \leq 1$, et $f_n \rightarrow 0$ sur E puisque $\operatorname{Re}(h_n) \rightarrow +\infty$ sur E . Comme dans 4.1.2, on a

$$\int |1 - f_n|^2 dm \leq \frac{4}{n^2}$$

. Comme précédemment, $f_n \rightarrow 1$ M_ϕ -presque partout. \square

Maintenant, on souhaite obtenir une décomposition de Lebesgue d'une mesure μ par rapport à M_ϕ tout entier. On se servira du lemme suivant pour obtenir cette décomposition.

Lemme 4.1.4. *Soit K un ensemble convexe faible-* compact de mesures positives sur X , et soit μ une mesure singulière par rapport à toutes les mesures de K , alors il existe un ensemble $F \subseteq X$ tel que $|\mu|(X \setminus F) = 0$ et $K(F) = 0$, i.e $m(F) = 0 \forall m \in K$.*

Démonstration. Soit $J = \{f \in C(X), 0 \leq f \leq 1\}$, J est convexe. Pour $\nu \in K$, similairement à 4.1.3, on a

$$\inf_{f \in J} \int (1-f)d\nu + \int f d|\mu| = 0$$

. Par le Minimax 4.1.1,

$$\inf_{f \in J} \sup_{\nu \in K} \int (1-f)d\nu + \int f d|\mu| = 0.$$

Alors il existe une suite $(f_n) \subseteq J$ telle que $\int f_n d|\mu| \leq 1/n^2$ et $\int (1-f_n)d\nu \forall \nu \in K$. Soit $F = \{x \in X, f_n(x) \rightarrow 1\}$, alors F est une intersection dénombrable d'ouverts (???), donc $E = F^c$ est l'ensemble F_δ que nous recherchons. \square

Théorème 4.1.5. *Soit K un ensemble convexe faible-* compact de mesures positives sur X . Chaque mesure complexe μ sur X possède une unique décomposition*

$$\mu = \mu_a + \mu_s$$

, où μ_a est absolument continue par rapport à une mesure $\nu \in K$, et μ_s est supportée sur un borélien E tel que $K(E) = 0$.

Démonstration. Soit $c = \sup\{|\mu(G)|, G \text{ borélien tel que } \mu|_G \text{ est absolument continue par rapport à une mesure de } K\}$. Soient $(\nu_n) \subseteq K$ et (F_n) boréliens tels que $\mu|_{F_n}$ est absolument continue par rapport à ν_n et $|\mu(F_n)| \rightarrow c$. Soit $F = \cup_n F_n$, et $\nu = \sum_n \nu_n / 2^n \in K$ car K est convexe et borné. Alors $\mu_a = \mu|_F$ est absolument continue par rapport à ν .

On montre maintenant que $\mu_s = \mu - \mu_a = \mu|_{F^c}$ est singulière par rapport à K . Par l'absurde, il existe $\lambda \in K$ tel que μ_s n'est pas singulière par rapport à λ . On écrit

$$\mu_s = \mu_1 + \mu_2$$

la décomposition de Radon-Nikodym-Lebesgue de μ_s par rapport à λ , où μ_1 est absolument continue par rapport à λ et μ_2 est singulière par rapport à λ . Soit B borélien tel que $|\mu_2|(B) = 0$ et $\lambda(X \setminus B) = 0$. Puisque μ_s n'est pas singulière par rapport à λ , $|\mu_s|(B) = |\mu|(B \cap F^c) > 0$ et $\mu_s|_B = \mu|_{B \cap F^c} = \mu_1|_B$ est absolument continue par rapport à λ . Alors $\mu|_{F \cup B} = \mu_a + \mu_1|_B$ est absolument continue par rapport à $(\nu + \lambda)/2 \in K$, et $|\mu|(F \cup B) = |\mu|(F) + |\mu|(B \cap F^c) > |\mu|(F) = c$, ce qui est absurde. Ainsi μ_s est singulière par rapport à K . On applique alors 4.1.4 pour trouver E .

Soit $\mu = \mu_a + \mu_s = \mu'_a + \mu'_s$ deux telles décompositions, où μ_a est absolument continue par rapport à ν et μ'_a par rapport à ν' . Alors $\mu_a - \mu'_a = \mu'_s - \mu_s$ est en même temps absolument continue et singulière par rapport à $(\nu + \nu')/2 \in K$, elle est donc nulle. La décomposition est donc unique. \square

On montre maintenant que si μ est orthogonale à A , ses parties absolument continues et singulières par rapport à M_ϕ aussi.

Théorème 4.1.6 (Riesz). *Soit A une algèbre uniforme sur X , $\phi \in M_A$ et μ une mesure (complexe) sur X . Soit $\mu = \mu_a + \mu_s$ la décomposition de Lebesgue de μ par rapport à M_ϕ . Si μ est orthogonale à A , alors μ_a et μ_s sont orthogonales à A .*

Nous allons prouver une version plus forte de ce Théorème.

Théorème 4.1.7. *Soit A une algèbre uniforme sur X , et B un sous-espace vectoriel de $C(X)$ qui est un A -module. Soit $\phi \in M_A$ et μ une mesure (complexe) sur X . Soit $\mu = \mu_a + \mu_s$ sa décomposition de Lebesgue par rapport à M_ϕ . Si μ est orthogonale à B , alors μ_a et μ_s aussi.*

Démonstration. Par 4.1.4, il existe un ensemble $F_\sigma E$ tel que $M_\phi(E) = 0$ et $|\mu_s|(X \setminus E) = 0$. Par le lemme de Forelli 4.1.3, il existe $(f_n) \subseteq A$ telle que $|f_n| \leq 1$, $f_n \rightarrow 0$ sur E , et $f_n \rightarrow 1$ M_ϕ -presque partout. Puisque μ_a est absolument continue par rapport à une mesure de M_ϕ , $f_n \rightarrow 1$ μ_a -presque partout. Si $g \in B$, alors $gf_n \in B$, et

$$0 = \int gf_n d\mu = \int gf_n d\mu_a + \int gf_n d\mu_s \rightarrow \int g d\mu_a + 0 = \int g d\mu_a$$

par convergence dominée. Donc μ_a est orthogonale à B , et $\mu_s = \mu - \mu_a$ aussi. \square

Définition 4.1.8. *Une mesure $m \in M_\phi$ est dominante si tout autre mesure de M_ϕ est absolument continue par rapport à μ . Si ϕ a une unique mesure de représentation, alors cette mesure est dominante.*

Corollaire 4.1.8.1 (Ahern). *Soit A une algèbre uniforme sur X , et μ une mesure (complexe) sur X . Supposons que $\phi \in M_A$ possède une mesure de représentation dominante m . Soit $\mu = hdm + \mu_s$ la décomposition de Lebesgue de μ par rapport à M_ϕ . Si μ est orthogonale à A , alors hdm et μ_s sont orthogonales à A .*

Corollaire 4.1.8.2. *Soit A une algèbre uniforme sur X , $\phi \in M_A$, et μ une mesure (complexe) sur X . Soit $\mu = \mu_a + \mu_s$ la décomposition de Lebesgue de μ par rapport à M_ϕ . Si μ est orthogonale à $\ker \phi = A_\phi$, alors μ_a est orthogonale à A_ϕ , et μ_s est orthogonale à A .*

Démonstration. Soit $m \in M_\phi$, et $\nu = \mu - cm$, avec $c = \int d\mu$. Soit $f \in A$, alors $f - \phi(f) \in A_\phi$, et

$$0 = \int (f - \phi(f)) d\mu = \int f d\mu - \int d\mu \int f dm = \int f d\nu.$$

On applique alors 4.1.6 à ν , où la décomposition de Lebesgue de ν est $\nu = (\mu_a - cm) + \mu_s$. \square

Finalement, on peut obtenir une décomposition plus explicite pour les mesures orthogonales à A .

Théorème 4.1.9 (Décomposition de mesures orthogonales). *Soit A une algèbre uniforme sur X , et μ une mesure sur X orthogonale à A . Alors il existe $(\phi_n) \subseteq M_A$ et des mesures μ_s et (μ_n) dans A^\perp , telles que μ_s est singulière par rapport à $M_\phi \forall \phi \in M_A$, μ_n est absolument continue par rapport à une mesure de M_{ϕ_n} , les (μ_n) sont deux à deux mutuellement singulières, et*

$$\mu = \mu_s + \sum_n \mu_n,$$

la série convergeant en norme de variation totale.

Démonstration. Soit $c = \sup\{\|\mu_a\|, \mu_a$ est la partie absolument continue de μ par rapport à $M_\phi\}$. Si $c = 0$, alors $\mu = \mu_s$ et on a le résultat. Si $c > 0$, soit $\phi_1 \in M_A$ telle que la partie absolument continue μ_1 de μ par rapport à M_{ϕ_1} vérifie $\|\mu_1\| \geq c/2$.

On construit la suite (μ_n) par récurrence, on construit μ_{n+1} en appliquant la construction précédente à $\mu - \sum_{k=1}^n \mu_k$, la suite étant possiblement finie.

Puisque $\mu - \mu_1$ est singulière par rapport à M_{ϕ_1} et μ_1 est absolument continue par rapport à une mesure de M_{ϕ_1} , $\mu - \mu_1$ est singulière par rapport à μ_1 . Ainsi $\|\mu\| = \|\mu - \mu_1\| + \|\mu_1\|$, et

$\|\mu - \mu_1\| = \|\mu\| - \|\mu_1\|$. Par récurrence, on a aussi que μ_n est singulière par rapport à $\mu - \sum_{k=1}^n \mu_k$, et $\|\mu - \sum_{k=1}^n \mu_k\| = \|\mu\| - \sum_{k=1}^n \|\mu_k\| \geq 0$, donc $\sum_{k=1}^{\infty} \|\mu_k\| \leq \|\mu\| < \infty$.

La preuve de 4.1.5 indique qu'il existe F_1 borélien tel que $\mu_1 = \mu|_{F_1}$. De même, il existe F_2 borélien tel que $\mu_2 = (\mu - \mu_1)|_{F_2} = \mu|_{F_1^c \cap F_2}$. On peut donc choisir F_2 disjoint de F_1 . Par récurrence, on voit que les mesures (μ_n) sont supportées sur des ensembles deux à deux disjoints, elles sont donc deux à deux mutuellement singulières. On a alors $\|\sum_n \mu_n\| = \sum_n \|\mu_n\| < \infty$, et la série converge en variation totale.

Soit $\mu_s = \mu - \sum_n \mu_n$, et $\mu_s^{(n)} = \mu - \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k$. Pour la même raison que précédemment, il existe une suite décroissante de boréliens (F_n) telle que $\mu_s^{(n)} = \mu|_{F_n}$, et $\mu_s = \mu|_F$ pour $F = \bigcap_n F_n$.

Soit $\phi \in M_A$, et soient $\nu, \nu^{(n)}$ les parties absolument continues de μ_s et $\mu_s^{(n)}$ par rapport à M_ϕ . Puisque $\mu_s = \mu_s^{(n)}|_F$, on a $\nu = \nu^{(n)}|_F$ par unicité de la décomposition. Par définition de μ_n , on a $\|\nu\| \leq \|\nu^{(n)}\| \leq 2\|\mu_n\|$. Puisque $\sum_n \|\mu_n\| < \infty$, $\|\mu_n\| \rightarrow 0$ donc $\|\nu\| = 0$, et μ_s est singulière par rapport à M_ϕ .

Par 4.1.6, μ_1 est orthogonale à A puisque μ l'est. Par récurrence, $\mu - \sum_{k=1}^n \mu_k$ est orthogonale à A , et donc μ_{n+1} aussi par 4.1.6, ainsi μ_n est orthogonale à A pour tout n . Ainsi μ_s est aussi orthogonale à A . \square

4.2 Transformée de Cauchy

Dans cette section, nous allons améliorer le Théorème de décomposition 4.1.9 dans le cas qui nous intéresse.

Définition 4.2.1. Soit μ une mesure finie sur \mathbb{C} à support compact. Sa transformée de Cauchy est la fonction sur \mathbb{C} définie par

$$\hat{\mu}(\zeta) = \int \frac{d\mu(z)}{z - \zeta}.$$

Théorème 4.2.2. Soit μ une mesure finie sur \mathbb{C} à support compact. Alors l'intégrale définissant $\hat{\mu}$ converge absolument $dxdy$ -presque partout, donc $\hat{\mu}$ est bien définie $dxdy$ -presque partout.

Démonstration. Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ le support compact de μ . Pour $\zeta \notin K$, $z \in K \rightarrow 1/|z - \zeta|$ est majorée donc l'intégrale converge absolument.

Par un changement de variable polaire, on a

$$\int_{D(0,R)} \frac{1}{|z|} dxdy = 2\pi \int_0^R \frac{1}{r} r dr = 2\pi R.$$

Ainsi, il existe $C > 0$ tel que $\forall z \in K$, $\int_K \frac{1}{|z - \zeta|} dxdy(\zeta) \leq C$. Par Fubini,

$$\int_K \int_K \frac{d|\mu|(z)}{|z - \zeta|} dxdy(\zeta) \leq \int_K C d|\mu|(z) < \infty.$$

Par Fubini, l'intégrale $\int_K \frac{d|\mu|(z)}{|z - \zeta|}$ converge pour $dxdy$ -presque tout ζ dans K . \square

Le Théorème suivant fait le lien entre $\hat{\mu}$ et $R(K)$.

Théorème 4.2.3. Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact, et μ une mesure sur K . Alors $\hat{\mu}$ est nulle hors de K si et seulement si μ est orthogonale à $R(K)$.

Démonstration. Si $\mu \perp R(K)$, alors pour $\zeta \in \mathbb{C} \setminus K$, $1/(z - \zeta) \in R(K)$, donc $\hat{\mu}(\zeta) = 0$.

Supposons maintenant que $\hat{\mu} = 0$ hors de K . Soit f analytique dans un voisinage de K . Alors par

la formule de Cauchy, pour $\zeta \in K$,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz,$$

pour un certain contour γ entourant K . Alors par Fubini,

$$\int_K f(\zeta) d\mu(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \int_K \frac{f(z)}{z - \zeta} d\mu(\zeta) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} -f(z) \hat{\mu}(z) dz = 0.$$

Ainsi $\mu \perp R(K)$. □

Par dérivation sous le signe intégral, $\hat{\mu}$ est analytique en dehors du support de μ . L'implication inverse est également vraie.

Théorème 4.2.4. *Soit μ une mesure finie sur \mathbb{C} à support compact. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, et f analytique sur U telle que $f = \hat{\mu} dxdy$ -presque partout sur U . Alors $|\mu|(U) = 0$.*

Démonstration. Soit $E \subseteq U$ un rectangle tel que $\int 1/|z - \zeta| d|\mu|(z) < \infty$, $f(\zeta) = \hat{\mu}(\zeta)$ pour presque tout $\zeta \in \partial E$ pour la mesure de Lebesgue de dimension 1, et $\int_{\partial E} d|\mu| = 0$. Par Fubini et la formule de Cauchy, on a

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \int_E d\mu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \int_{\partial E} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta d\mu(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E} \int_{\mathbb{C}} \frac{d\mu(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E} \hat{\mu}(\zeta) d\zeta = 0. \end{aligned}$$

Puisque de tels rectangles E engendrent les sous-ensembles mesurables de U , $|\mu|(U) = 0$. □

Corollaire 4.2.4.1. *Si $\hat{\mu} = 0 dxdy$ -presque partout, alors $\mu = 0$.*

Corollaire 4.2.4.2 (Hartogs-Rosenthal). *Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact de mesure nulle. Alors $R(K) = C(K)$.*

Démonstration. Par Hahn-Banach et le Théorème de représentation de Riesz, il suffit de montrer que si $\mu \perp R(K)$, alors $\mu = 0$. Par 4.2.3, $\hat{\mu} = 0$, donc $\hat{\mu} = 0$ presque partout, donc $\mu = 0$. □

Nous revenons maintenant aux mesures qui nous intéressent.

Théorème 4.2.5 (Wilken). *Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact. Soit μ une mesure sur ∂K orthogonale à $R(K)$. Si μ est singulière par rapport aux mesures de représentation M_z pour tout $z \in K$, alors $\mu = 0$.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\mu \neq 0$. Soit donc z_0 tel que $\int 1/|z - z_0| d|\mu|(z) < \infty$ et $\hat{\mu}(z_0) \neq 0$. Par 4.2.3, $z_0 \in K$.

Si f est une fraction rationnelle avec pôles hors de K , alors $(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)$ aussi. Ainsi $\int (f(z) - f(z_0))/(z - z_0) d\mu(z) = 0$. On a alors

$$f(z_0) = \frac{1}{\hat{\mu}(z_0)} \int \frac{f(z)}{z - z_0} d\mu(z),$$

pour tout $f \in R(K)$. Ainsi $\hat{\mu}(z_0)^{-1} d\mu(z)/(z - z_0)$ est une mesure de représentation complexe pour z_0 . Par 1.4.5, il existe une mesure de représentation pour z_0 qui est absolument continue par rapport à μ , ce qui est absurde puisque μ est singulière par rapport à cette mesure et $\mu \neq 0$. □

A l'aide de ce Théorème, on peut améliorer le Théorème de décomposition 4.1.9. Dans un premier temps, on étudie l'algèbre $R(K)|_{\partial K}$.

Théorème 4.2.6. *Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact. Alors $A = R(K)|_{\partial K} = \{f|_{\partial K}, f \in R(K)\}$ est une algèbre uniforme sur ∂K , et $M_A = K$.*

Démonstration. On montre dans un premier temps que les représentants sont uniques. Soient $f, g \in R(K)$ tels que $f|_{\partial K} = g|_{\partial K}$. Puisque f, g sont analytiques dans $\overset{\circ}{K}$, par le principe du maximum

$$\|f - g\|_K = \|f - g\|_{\partial K} = 0,$$

donc $f = g$. Dans la suite, on identifiera donc $f|_{\partial K}$ à f .

Clairement, $A \subseteq R(\partial K)$. On montre que A est fermée. Soit $(f_n) \subseteq A$, $f_n \rightarrow f$ dans $C(\partial K)$. Alors (f_n) est de Cauchy dans $C(\partial K)$, et par le principe du maximum, (f_n) est de Cauchy dans $C(K)$, donc converge vers $g \in R(K)$. Ainsi $f = g|_{\partial K} \in A$, et A est une algèbre uniforme sur ∂K .

Soit $\phi \in M_A$. Alors ϕ s'étend en $\tilde{\phi} \in M_{R(K)}$, en posant $\tilde{\phi}(f) = \phi(f|_{\partial K})$. Par 1.3.4, $\tilde{\phi}$ est l'évaluation en un $z \in K$. \square

On peut maintenant obtenir cette décomposition améliorée.

Théorème 4.2.7. *Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact, et μ une mesure sur ∂K orthogonale à $R(K)$. Alors il existe des points $z_n \in K$, des mesures de représentation m_n sur ∂K pour z_n , et des fonctions $h_n \in L^1(m_n)$ telles que $h_n m_n \perp R(K)$, et*

$$\mu = \sum_n h_n m_n,$$

la série convergeant en la norme de variation totale.

Démonstration. On applique 4.1.9 pour $X = \partial K$ et $A = R(K)|_{\partial K}$. On a alors des mesures $\phi_n \in M_A$, des mesures μ_s et $\mu_n \in A^\perp$, telles que μ_s est singulière par rapport à M_ϕ pour tout $\phi \in M_A$, μ_n est absolument continue par rapport à une mesure de représentation de ϕ_n , et

$$\mu = \mu_s + \sum_n \mu_n,$$

la série convergeant en la norme de variation totale. Puisque $M_A = K$, il existe $z_n \in K$ tels que ϕ_n est l'évaluation en z_n . De plus, par 4.2.5, $\mu_s = 0$. Soit $m_n \in M_{z_n}$ tel que μ_n est absolument continue par rapport à m_n . Par le Théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue, il existe $h_n \in L^1(m_n)$ telle que $\mu_n = h_n m_n$. Puisque μ_n est une mesure sur ∂K et $\mu_n \in A^\perp$, alors $\mu_n = h_n m_n \in R(K)^\perp$ aussi. \square

Références

- [1] Theodore W. Gamelin. *Uniform Algebras*. AMS Chelsea Publishing, 2006.
- [2] Haim Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Dunod, 2005.