

CLASSES DE CHERN

HUGO SCHWEIGHOFFER & Apolline MALIACH--AUGUSTE

Sous la supervision de Chuhao HUANG

Mémoire réalisé dans le cadre de la L3 du département Mathématiques et Applications de l'ENS-PSL, au cours de l'année scolaire 2024-2025

Table des matières

1	Introduction	1
2	Construction de classes caractéristiques via les axiomes de GROTHENDIECK	2
2.1	Classe d'EULER	2
2.2	Classes de CHERN	5
3	Construction géométrique des classes de CHERN	9
3.1	Connexion et courbure sur un fibré principal	9
3.2	Classes de CHERN	16
4	Conclusion	19
5	Bibliographie	19

1 Introduction

Distinguer deux fibrés vectoriels complexes sur un espace topologique n'est pas une chose aisée. L'objectif de ce mémoire est d'étudier des invariants des fibrés vectoriels complexes, qui permettent d'une certaine manière de répondre à ce problème.

Pour un espace topologique quelconque, la cohomologie singulière est un invariant topologique, dans le sens où deux espaces ayant le même type d'homotopie ont leurs groupes de cohomologie isomorphes. De la même manière, pour une variété différentielle, la cohomologie de DE RHAM est un invariant topologique. Cela motive à construire des invariants des fibrés vectoriels comme des classes de cohomologie de sa base, qui seront des *classes caractéristiques*, c'est à dire des classes qui vérifient la *propriété de naturalité*, que nous détaillerons dans le mémoire.

Dans le cas des fibrés vectoriels complexes sur une variété lisse, nous pouvons chercher à construire ces classes caractéristiques dans sa cohomologie singulière, ou dans sa cohomologie de de Rham. Dans les deux cas, de telles constructions ont été faites : des classes caractéristiques appelées *classes de CHERN* ont été définies dans la cohomologie singulière, ainsi que dans la

cohomologie de DE RHAM de la base d'un fibré vectoriel complexe sur une variété lisse. Les classes de CHERN dans la cohomologie singulière sont définies par des méthodes de topologie algébrique, en utilisant la classe d'EULER, tandis que les classes de CHERN dans la cohomologie de DE RHAM sont construites à partir d'une courbure sur le fibré vectoriel. Nous allons dans ce mémoire étudier ces deux constructions, ainsi que leur équivalence.

Dans la première partie, nous allons étudier la construction des classes de CHERN dans la cohomologie singulière de la base du fibré vectoriel. Ces classes sont définies comme les uniques classes vérifiant les axiomes de GROTHENDIECK, que nous présenterons.

Dans la deuxième partie, nous verrons la construction des classes de CHERN dans la cohomologie de de Rham d'un fibré vectoriel complexe sur une variété lisse, via la théorie de CHERN–WEIL. Nous montrerons également que l'image de ces classes par l'isomorphisme de DE RHAM, qui identifie la cohomologie singulière à coefficients réels à la cohomologie de DE RHAM et que nous expliciterons, est exactement les classes définies dans la première partie.

2 Construction de classes caractéristiques via les axiomes de GROTHENDIECK

L'objectif de cette partie est de définir les classes de CHERN des fibrés vectoriels complexes en utilisant la classe d'EULER. Pour cela, nous allons dans un premier temps définir la classe d'EULER d'un fibré vectoriel réel orienté, puis nous utiliserons la classe d'EULER pour construire les classes de CHERN.

2.1 Classe d'EULER

Considérons d'abord le cas des fibrés vectoriels réels orientés. En effet, comme nous le détaillerons dans la partie suivante, nous pouvons voir un fibré vectoriel complexe de rang complexe n comme un fibré vectoriel réel de rang $2n$, et la structure complexe induit une orientation canonique sur ce fibré réel sous-jacent. Nous allons donc dans un premier temps construire des classes caractéristiques pour les fibrés vectoriels réels orientés.

Dans cette partie, $\xi = (E, \pi, B)$ est un fibré vectoriel réel de rang n au dessus d'un espace topologique B . On note E l'espace total, π est la projection de E sur la base B du fibré.

Définition 2.1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie. On définit sur l'ensemble des bases sur V une relation d'équivalence comme suit : deux bases B et B' sont en relation si et seulement si $\det_B(B') > 0$. Cette relation a exactement deux classes d'équivalence, et une **orientation** sur V est la donnée d'une de ces deux classes d'équivalence.

Définition 2.2. Une **orientation** sur ξ est la donnée d'une orientation sur chaque fibre $\pi^{-1}(x)$ pour tout x dans B , qui vérifie la condition de compatibilité locale, i. e., pour tout x dans B , il existe un voisinage ouvert U de x et un homéomorphisme $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$, où $\pi = p \circ h$ avec $p : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ la projection sur le premier facteur, et tel que $\forall y \in U, h|_{\pi^{-1}(y)} : \pi^{-1}(y) \rightarrow \{y\} \times \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels qui préserve l'orientation.

Cette définition de l'orientation se traduit en cohomologie.

Lemme 2.3. *Pour V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , choisir une orientation sur V équivaut à choisir un générateur de $H^n(V, V_0; \mathbb{Z})$, où V_0 désigne l'ensemble des vecteurs non-nuls de V .*

Démonstration. Soit (e_1, \dots, e_n) une base directe de V . On considère le simplexe $\Delta^n = (0, e_1, \dots, e_n)$. Notons $\sigma : \Delta^n \rightarrow V$ la translation qui envoie le barycentre de Δ^n sur l'origine. Alors, $\partial\sigma$ est à valeurs dans V_0 , donc σ est un élément de $Z_n(V, V_0; \mathbb{Z})$.

On peut vérifier à l'aide de la suite exacte d'homologie relative que $[\sigma]$ est un générateur de $H_n(V, V_0; \mathbb{Z})$, et que changer l'orientation dans cette construction nous donne l'autre générateur. Par dualité entre $H_n(V, V_0; \mathbb{Z})$ et $H^n(V, V_0; \mathbb{Z})$, on obtient un générateur de $H^n(V, V_0; \mathbb{Z})$ caractérisé par l'orientation choisie sur V . □

Lemme 2.4. *Soit ξ un fibré vectoriel réel orienté. Pour toute fibre F , notons u_F le générateur de $H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$ déterminé par l'orientation sur F . Alors pour tout $b_0 \in B$, on dispose d'un voisinage U de b_0 dans B , et d'une classe de cohomologie $u \in H^n(\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(U)_0; \mathbb{Z})$ dont la restriction à chaque fibre $F = \pi^{-1}(b)$ pour $b \in U$ est égale à u_F , où $\pi^{-1}(U)_0$ désigne l'ensemble des vecteurs non nuls de $\pi^{-1}(U)$.*

Démonstration. Soit $b_0 \in B$ et U un ouvert trivialisant. Notons $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme tel que $\forall y \in U, h|_{\pi^{-1}(y)} : \pi^{-1}(y) \rightarrow \{y\} \times \mathbb{R}^n$ préserve l'orientation. Prenons $b \in B$, et notons F la fibre au dessus de b . Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{p^*} & H^n(U \times \mathbb{R}^n, U \times \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{h^*} & H^n(\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(U)_0; \mathbb{Z}) \\ \downarrow id & & \downarrow i^* & & \downarrow i^* \\ H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{p^*} & H^n(\{b\} \times \mathbb{R}^n, \{b\} \times \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{h|_F^*} & H^n(F, F_0; \mathbb{Z}) \end{array}$$

Où i désignent des inclusions induites par l'inclusion de b dans U , et l'application $p : (A \times \mathbb{R}^n, A \times \mathbb{R}_0^n) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$ désigne la projection sur le second facteur pour $A = U$ ou $\{b\}$.

En notant u' la pré-image de u_F par $h|_F^* \circ p^*$, qui ne dépend pas de F car ξ est orienté, u défini comme $h^* \circ p^*(u')$ vérifie la condition demandée. □

Le point clé de nos constructions à venir est le résultat qui suit.

Théorème 2.5 (Isomorphisme de THOM). *Soit ξ un fibré vectoriel réel orienté de rang n , d'espace total E . Pour toute fibre F , on note u_F le générateur de $H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$ déterminé par l'orientation. Alors :*

- (i) les groupes de cohomologie $H^i(E, E_0; \mathbb{Z})$ sont nuls pour $i < n$;
- (ii) le groupe de cohomologie $H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ contient une unique classe u , appelée **classe de THOM**, dont la restriction $u|_{(F, F_0)}$ est égale à u_F pour toute fibre F ;
- (iii) l'application $y \mapsto y \cup u$ est un isomorphisme de $H^k(E; \mathbb{Z})$ dans $H^{n+k}(E, E_0; \mathbb{Z})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. La preuve de ce théorème est très laborieuse, nous donnons ici les étapes clés de cette preuve, mais nous renvoyons à la démonstration complète faite par MILNOR et STASHEFF dans la section 10 de la référence [MS74].

L'idée principale de la preuve de ce théorème est d'utiliser les propriétés de la cohomologie à coefficients dans un corps, plus particulièrement l'exactitude du foncteur $\bullet \otimes \mathbb{K}$ où \mathbb{K} est un corps. On utilise l'exactitude de ce foncteur pour montrer dans un premier temps le résultat suivant, également dû à THOM :

Théorème 2.6. *Soit ξ un fibré vectoriel réel de rang n , d'espace total E et de base B . Alors :*

- (i) *les groupes de cohomologie $H^i(E, E_0; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sont nuls pour $i < n$;*
- (ii) *le groupe de cohomologie $H^n(E, E_0; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ contient une unique classe u , dont la restriction $u|_{(F, F_0)}$ est égale à l'unique élément non-nul de $H^n(F, F_0; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ pour toute fibre F ;*
- (iii) *l'application $y \mapsto y \cup u$ est un isomorphisme de $H^k(E; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ dans $H^{n+k}(E, E_0; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

On démontre le théorème 2.6 en passant par ces 4 étapes :

- Étape 1 : cas où ξ est un fibré trivial.
- Étape 2 : cas où $B = B' \cap B''$, où le résultat est connu pour les restrictions $\xi|_{B'}$, $\xi|_{B''}$ et $\xi|_{B' \cap B''}$.
- Étape 3 : cas où B est couvert par des ensembles finis $(B_i)_{1 \leq i \leq N}$, où chaque restriction $\xi|_{B_i}$ est un fibré trivial. On raisonne par récurrence sur N . L'étape 1 couvre le cas initial, et l'étape 2 sert pour l'hérédité.
- Étape 4 : cas général. La preuve du cas général se fait en montrant d'abord le résultat dans le cas où B est compact (ce qui découle directement de l'étape 3), puis un argument de passage à la limite directe sur l'ensemble des compacts inclus dans B permet de conclure. C'est pour faire fonctionner cet argument de passage à la limite que nous avons besoin de se ramener à la cohomologie à coefficients dans un corps.

Pour démontrer le théorème 2.5, les trois premières étapes s'adaptent, donc on a de la même manière la preuve dans le cas où B est compact. On a également le résultat dans le cas où on considère la cohomologie non plus à coefficients dans \mathbb{Z} . Mais la dernière étape demande un argument supplémentaire car on ne travaille plus avec la cohomologie à coefficients dans un corps, l'argument de passage à la limite ne fonctionne plus. L'idée est de se ramener à la cohomologie à coefficients dans un corps en utilisant le fait suivant.

Lemme 2.7. *Soit $f : C \rightarrow C'$ est un morphisme de complexes de chaînes, avec C et C' des complexes à coefficients dans \mathbb{Z} . Si pour tout corps \mathbb{K} , $f^* : H^*(C'; \mathbb{K}) \rightarrow H^*(C; \mathbb{K})$ est un isomorphisme, alors f induit un isomorphisme $f^* : H^*(C'; \Lambda) \rightarrow H^*(C; \Lambda)$ où Λ est un anneau commutatif quelconque.*

Nous pouvons utiliser ce lemme pour conclure dans le cas général. □

On considère maintenant l'application $H^*(E, E_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(E; \mathbb{Z})$ induite par l'inclusion canonique $(E, \emptyset) \hookrightarrow (E, E_0)$, que l'on note $y \mapsto y|_E$; et on l'applique à la classe de THOM u donnée par le théorème 2.5. Or, $\pi^* : H^n(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(E; \mathbb{Z})$ est un isomorphisme, ce qui nous amène à la définition de la classe d'EULER.

Définition 2.8. *Soit ξ un fibré vectoriel réel orienté de rang n . On appelle **classe d'EULER** de ξ et on note $e(\xi)$ l'image de $u|_E$ par l'isomorphisme $(\pi^*)^{-1} : H^n(E; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(B; \mathbb{Z})$, où u est la classe de THOM de ξ .*

On définit ainsi une classe caractéristique. En effet, la classe d'EULER vérifie la propriété de naturalité.

Proposition 2.9 (Propriété de naturalité). *Soit ξ un fibré vectoriel réel orienté de base B , ξ' un fibré vectoriel réel orienté de base B' , et $f : B \rightarrow B'$ une application continue. Si f est couverte par un morphisme de fibrés vectoriels qui préserve l'orientation, alors $e(\xi) = f^*e(\xi')$.*

Démonstration. Comme f préserve l'orientation, pour tout $x \in B$, en notant F la fibre de ξ au dessus de x , f^* envoie le générateur $u|_{F'} \in H^n(F', F'_0; \mathbb{Z})$ sur $u|_F \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$, où F' est la fibre de $f^*\xi$ au dessus de $f(x)$. Ainsi, f^*u satisfait la condition (ii) du théorème 2.5. Par unicité, on a bien $f^*u = u'$, et donc $f^*e(\xi') = e(\xi)$. \square

De plus, la classe d'EULER vérifie la formule de sommation suivante.

Proposition 2.10. *Soit ξ et ξ' deux fibrés vectoriels réels sur une même base B . Alors, on a $e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \cup e(\xi')$, et $e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi')$.*

Démonstration. Pour prouver la proposition, l'idée est de montrer dans un premier temps que $e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi')$. Pour cela, on observe que $u(\xi \times \xi') = (-1)^{mn} u(\xi) \times u(\xi')$. Ensuite, on conclut que $e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \cup e(\xi')$, en remarquant que si $d : B \rightarrow B \times B$ est l'application diagonale, $\xi \oplus \xi' = d^*(\xi \times \xi')$. La preuve complète est faite par MILNOR et STASHEFF dans l'article [MS74]. \square

2.2 Classes de CHERN

2.2.1 Cadre et notations

On va maintenant définir des classes caractéristiques pour les fibrés vectoriels complexes.

Si ξ est un fibré vectoriel complexe de rang complexe n , on définit le fibré vectoriel réel sous-jacent $\xi_{\mathbb{R}}$ comme le fibré vectoriel réel de rang $2n$, tel que la fibre de $\xi_{\mathbb{R}}$ au dessus de $x \in B$ soit celle de ξ au dessus de x , vue comme un espace vectoriel réel de dimension $2n$. On peut vérifier que $\xi_{\mathbb{R}}$ est muni canoniquement de trivialisations locales, qui en font bien un fibré vectoriel réel. De plus, la structure complexe sur ξ induit une orientation canonique sur $\xi_{\mathbb{R}}$.

En effet, pour F la fibre de ξ au dessus de $x \in B$, on note (e_1, \dots, e_n) une base de F . Alors $(e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n)$ est une base de $F_{\mathbb{R}}$ qui est la fibre de $\xi_{\mathbb{R}}$ au dessus de x , et qui définit donc une orientation sur $F_{\mathbb{R}}$. Cette orientation est indépendante de la base (e_1, \dots, e_n) choisie sur F par connexité par arcs de $GL_n(\mathbb{C})$. Cette orientation canonique sur chaque fibre de $\xi_{\mathbb{R}}$ vérifie la condition de compatibilité locale, on a ainsi une orientation canonique sur $\xi_{\mathbb{R}}$.

2.2.2 Définition axiomatique

Soit B un espace topologique, et ξ un fibré vectoriel complexe de rang complexe n au dessus de B . Notre but est de trouver des classes dans l'anneau de cohomologie singulière de la base du fibré $H^*(B; \mathbb{Z})$, permettant de distinguer deux fibrés vectoriels complexes différents, tout en étant calculables en pratique. Plus formellement, nous souhaitons définir des classes caractéristiques $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ qui vérifient les axiomes suivants :

- (i) Pour tout fibré vectoriel complexe ξ d'espace de base B , et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $c_i(\xi) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$, avec $c_0(\xi) = 1$ et $c_i(\xi) = 0$ pour $i > n$. On note $c(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(\xi)$, et $c(\xi)$ est appelée **classe de CHERN totale** de ξ .

- (ii) (Naturalité) Pour ξ et ξ' deux fibrés vectoriels complexes, et pour tout morphisme de fibrés vectoriels $f: \xi \rightarrow \xi'$, on a $\forall i \in \mathbb{N}, c_i(\xi) = f^* c_i(\xi')$.
- (iii) (Formule de sommation de WHITNEY) Si ξ et η sont deux fibrés complexes au dessus d'un même espace topologique B , $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \cup c(\eta)$.
- (iv) Pour le fibré universel γ^1 de rang un sur $\mathbb{C}P^\infty$, $c(\gamma^1) = 1 + e((\gamma^1)_{\mathbb{R}})$.

L'intérêt de construire de telles classes est qu'elles généralisent la classe d'EULER, et contiennent plus d'information.

2.2.3 Construction des classes de CHERN

Soit B un espace topologique, et ξ un fibré vectoriel complexe de rang complexe n au dessus de B , d'espace total E . Nous allons dans cette partie construire des classes caractéristiques qui vérifient les quatre axiomes énoncés précédemment. Notre construction repose sur le théorème qui suit.

Théorème 2.11 (Suite de GYSIN). *Soit ξ un fibré vectoriel réel de rang n , d'espace total E et de base B . On note E_0 l'ensemble des vecteurs non nuls de E , et $\pi_0: E_0 \rightarrow B$ la restriction de la projection $\pi: E \rightarrow B$. On peut lui associer une suite exacte longue*

$$\dots \rightarrow H^i(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup e} H^{i+n}(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{i+n}(E_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{i+1}(B; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots \quad (1)$$

où $\cup e: a \mapsto a \cup e(\xi)$, et $e(\xi) \in H^n(B; \mathbb{Z})$ est la classe d'EULER.

Démonstration. On part de la suite exacte longue de cohomologie associée à (E, E_0)

$$\dots \rightarrow H^i(E, E_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(E; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(E_0; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(E, E_0; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots, \quad (2)$$

et les isomorphismes $\cup u: H^{i-n}(E; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(E, E_0; \mathbb{Z})$ et $\pi^*: H^{i-n}(E; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{i-n}(B; \mathbb{Z})$ permettent de remplacer $H^i(E, E_0; \mathbb{Z})$ par $H^{i-n}(B; \mathbb{Z})$ dans la suite exacte longue ci-dessus. \square

Nous allons définir les classes de CHERN par récurrence sur n , en utilisant la suite exacte de GYSIN que nous venons d'introduire. Pour cela, nous devons construire un fibré complexe de dimension complexe $n - 1$ au dessus de E_0 , que l'on notera ξ_0 . Soit $v \in E_0$, on note F la fibre de ξ à laquelle v appartient, v est donc un vecteur non nul dans F . On définit la fibre de ξ_0 au dessus de v comme l'espace quotient $F/(\mathbb{C}v)$, qui est bien un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n - 1$. On a des trivialisations locales canoniques, on a donc bien défini un fibré vectoriel complexe de rang complexe $n - 1$ au dessus de E_0 . On reprend la suite exacte de GYSIN sur $\xi_{\mathbb{R}}$:

$$\dots \rightarrow H^{i-2n}(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup e} H^i(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_0^*} H^i(E_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{i-2n+1}(B; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots \quad (3)$$

et on observe que pour $i < 2n - 1$, $H^{i-2n}(B; \mathbb{Z})$ et $H^{i-2n+1}(B; \mathbb{Z})$ sont nuls, donc $\pi_0^*: H^i(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(E_0; \mathbb{Z})$ est un isomorphisme.

Nous pouvons à présent définir les classes de CHERN.

Définition 2.12 (Classes de CHERN). *Pour ξ un fibré vectoriel complexe de rang complexe n sur B , les **classes de CHERN** $c_i(\xi) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$ sont définies par :*

- (i) **la classe supérieure** $c_n(\xi)$ est la classe d'Euler $e(\xi_{\mathbb{R}})$;
- (ii) pour $i < n$, $c_i(\xi) = (\pi_0^*)^{-1} c_i(\xi_0)$;
- (iii) pour $i > n$, $c_i(\xi)$ est nulle.

La somme $c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \dots + c_n(\xi)$ est inversible dans l'anneau des séries formelles sur $H^*(B; \mathbb{Z})$, et est appelée **classe de CHERN totale** de ξ .

Vérifions maintenant que ces classes vérifient les quatre axiomes de la section 2.2.2.

Proposition 2.13 (Naturalité). *Soit ξ et ξ' deux fibrés vectoriels complexes, et $f: \xi \rightarrow \xi'$ un morphisme de fibrés vectoriels. Alors $\forall i \in \mathbb{N}$, $c_i(\xi) = f^* c_i(\xi')$.*

Démonstration. On montre ce résultat par récurrence descendante sur i (le caractère récursif de la définition des classes de CHERN permet de prouver ainsi beaucoup de propriétés), et on utilise la proposition 2.9 qui donnait la naturalité de la classe d'EULER. MILNOR et STASHEFF donnent les détails de la preuve dans l'article [MS74]. \square

Théorème 2.14 (Théorème de sommation de Whitney). *Soient ξ et ξ' deux fibrés vectoriels complexes sur un même espace topologique paracompact B . Alors $c(\xi \oplus \xi') = c(\xi) \cup c(\xi')$.*

La preuve de ce théorème utilise le lemme suivant.

Lemme 2.15. *Il existe un unique polynôme $P_{m,n}(C_1, \dots, C_m, C'_1, \dots, C'_n)$ à coefficients entiers et à $n + m$ variables tel que pour tous fibrés vectoriels complexes ξ et ξ' de rang respectifs m et n , on ait*

$$c(\xi \oplus \xi') = P_{m,n}(c_1(\xi), \dots, c_m(\xi), c_1(\xi'), \dots, c_n(\xi')). \quad (4)$$

La preuve du lemme 2.15 utilise ce résultat.

Lemme 2.16. *L'anneau de cohomologie $H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z})$ est l'anneau polynomial sur \mathbb{Z} généré par les classes de CHERN $(c_i(\gamma^n))_{1 \leq i \leq n}$ du fibré universel γ^n , qui est le fibré tautologique de la grassmannienne $G_n(\mathbb{C}^\infty)$.*

L'idée est de prouver le lemme 2.15 pour les fibrés γ_1^m et γ_2^n de rang respectifs m et n construits sur $G_m(\mathbb{C}^\infty) \times G_n(\mathbb{C}^\infty)$ de la manière suivante : en notant $\pi_1: G_m(\mathbb{C}^\infty) \times G_n(\mathbb{C}^\infty) \rightarrow G_m(\mathbb{C}^\infty)$ et $\pi_2: G_m(\mathbb{C}^\infty) \times G_n(\mathbb{C}^\infty) \rightarrow G_n(\mathbb{C}^\infty)$ les projections canoniques, $\gamma_1^m = \pi_1^* \gamma^m$ et $\gamma_2^n = \pi_2^* \gamma^n$. La preuve du lemme 2.15 pour les fibrés γ_1^m et γ_2^n se fait en utilisant le lemme 2.16. Nous renvoyons à l'article de MILNOR et STASHEFF [MS74] pour une démonstration du lemme 2.16.

On se rappelle ensuite que tout fibré vectoriel complexe ξ de rang complexe q et de base B est isomorphe au rappel du fibré universel γ^q par une certaine application $f: B \rightarrow G_q(\mathbb{C}^\infty)$, et on en déduit le lemme 2.15 pour deux fibrés vectoriels complexes quelconques.

Ensuite, on montre par récurrence sur l'entier $n + m$ que

$$P_{m,n}(C_1, \dots, C_m, C'_1, \dots, C'_n) = (1 + C_1 + \dots + C_m)(1 + C'_1 + \dots + C'_n), \quad (5)$$

ce qui nous donne la formule de sommation de WHITNEY. Les détails de cette preuve sont faits par MILNOR et STASHEFF dans l'article [MS74], ainsi que la démonstration complète des lemmes 2.15 et 2.16.

Les classes ainsi définies vérifient les trois premiers axiomes de la partie précédente, et elles vérifient le quatrième par construction. Nous avons donc bien construit des classes caractéristiques qui vérifient les quatre axiomes de la section 2.2.2.

Remarque 2.17. *La démonstration du lemme 2.16 nous donne également le fait suivant : le groupe de cohomologie $H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ est isomorphe à \mathbb{Z} , et l'isomorphisme envoie la classe de CHERN $c_1(\gamma^1)$ sur -1 . Comme $H^*(G_n(\mathbb{C}); \mathbb{C}) \cong H^n(G_n(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, et on a également que $H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{C})$ est isomorphe à \mathbb{C} , et l'isomorphisme envoie la classe de CHERN $c_1(\gamma^1)$ sur -1 . Ce fait sera utile dans la prochaine partie du mémoire.*

2.2.4 Unicité des classes de CHERN

Soit M une variété lisse, et ξ un fibré vectoriel complexe de rang complexe n sur M . Nous allons voir que les classes de Chern sont en fait les uniques classes caractéristiques qui vérifient les quatre axiomes de la section 2.2.2.

Pour pouvoir comparer les classes $\sigma_k(\xi) \in H_{dR}^*(M)$ qui seront définies dans la partie suivante aux classes de Chern $c_k(\xi) \in H^*(M; \mathbb{Z})$, nous allons utiliser le théorème de DE RHAM.

Théorème 2.18 (Théorème de DE RHAM). *Soit $\Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M) \rightarrow \dots$ le complexe de DE RHAM de M , et $C^0(M; \mathbb{R}) \rightarrow C^1(M; \mathbb{R}) \rightarrow \dots$ le complexe des cochaines singulières à coefficients réels. L'application $\tau : \Omega^*(M) \rightarrow C^*(M; \mathbb{R})$ définie par*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall f \in \Omega^k(M), \forall \sigma \in C_k(M; \mathbb{R}), \tau(f)(\sigma) = \int_{\sigma} f$$

est un quasi-isomorphisme de cohomologie. Ainsi, $H_{dR}^(M) \cong H^*(M; \mathbb{R})$.*

Démonstration. Nous renvoyons à la – très jolie – preuve de Gustave BILLON [Bil18] qui utilise la cohomologie des faisceaux, car elle est assez laborieuse et éloignée de notre sujet. \square

Nous avons montré dans la partie précédente l'existence de classes caractéristiques qui vérifient les quatre axiomes de la section 2.2.2. En fait, de telles classes sont uniques, comme l'indique le théorème suivant.

Théorème 2.19 (Unicité des classes de CHERN). *Soit $(c'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de classes caractéristiques qui vérifient les quatre axiomes de la section 2.2.2. Alors pour tout fibré vectoriel complexe ξ , pour tout $i \in \mathbb{N}$, $c_i(\xi) = c'_i(\xi)$.*

Démonstration. Le résultat est immédiat pour les fibrés de rang 1, par le quatrième axiome. On va se ramener à ce cas de la manière suivante. Pour ξ un fibré vectoriel de base B , on appelle « *splitting map* » une application $f : B' \rightarrow B$ telle que $f^*\xi$ est somme directe de fibrés de rang 1, et $f^* : H^*(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(B'; \mathbb{Z})$ est injective. On affirme que tout fibré vectoriel complexe de rang n admet une *splitting map*. Les détails sont montrés par Adel RAHMAN dans l'article [Rah17]. On peut se ramener au cas des fibrés de rang 1 en utilisant ce fait. Pour ξ un fibré de rang n sur B , on prend $f : B' \rightarrow B$ une *splitting map*. On écrit $f^*\xi \cong \lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n$, où les λ_i sont de rang 1. Le troisième axiome et le cas des fibrés de rang 1 nous donnent $\forall i \in \mathbb{N}$, $c_i(f^*\xi) = c'_i(f^*\xi)$. Le deuxième axiome et l'injectivité de f^* permettent de conclure. \square

Remarque 2.20. Afin de comparer les classes de *CHERN* que nous avons définies dans cette partie aux classes qui seront définies dans la partie suivante dans la cohomologie de *DE RHAM*, nous devons les considérer dans la cohomologie singulière à coefficients réels et complexes, via les morphismes $H^*(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(B; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong H^*(B; \mathbb{R})$, et $H^*(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(B; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong H^*(B; \mathbb{C})$. Le théorème d'unicité des classes de *CHERN* s'adapte pour la cohomologie à coefficients réels et complexes : les classes de *CHERN* vues comme classes dans $H^*(B; \mathbb{R})$ sont les uniques classes qui vérifient les axiomes de la section 2.2.2 dans la cohomologie à coefficients réels et complexes.

3 Construction géométrique des classes de *CHERN*

Cette partie part du constat suivant : soit un fibré vectoriel complexe différentiable de dimension n (V, π, M) . On peut lui associer un fibré dit « des repères » $(F(V), \tilde{\pi}, M)$ dont la fibre au point $p \in X$ est définie comme l'ensemble des isomorphismes linéaires de \mathbb{C}^n dans $\pi^{-1}(p)$.

Ce fibré a une structure supplémentaire, notamment car le groupe linéaire agit transitivement sur ses fibres. Nous allons étudier cette structure dite principale, puis définir sur les fibrés principaux deux objets géométriques, les connexions d'EHRESMANN et leur courbure associée. Nous construirons à partir de ces objets des classes caractéristiques de fibrés vectoriels dans la cohomologie de *DE RHAM*. Nous verrons que ces classes vérifient les trois axiomes de GROTHENDIECK, ce qui permettra de conclure via le théorème de *DE RHAM* qu'elles s'identifient aux classes de *CHERN*.

Notations Nous emploierons les notations suivantes :

- Pour tout couple d'éléments, on notera p_i la projection sur le i^{e} facteur, $i \in 1, 2$.
- Lorsque c'est défini est sans ambiguïté, pour un groupe G et $g \in G$, on notera respectivement R_g et L_g les multiplications à droite et à gauche par g .

3.1 Connexion et courbure sur un fibré principal

3.1.1 Fibrés principaux

Définition 3.1. Soit G un groupe de *LIE*. Un fibré G -principal est un triplet (E, π, M) où $\pi : E \rightarrow M$ est une application différentiable de variétés différentielles. De plus, E est muni d'une action de G à droite $E \times G \rightarrow E$ telle que :

- (i) Pour tout $p \in M$, $\pi^{-1}(p)$ est une orbite de l'action de G .
- (ii) (Trivialisation locale) Tout point de M possède un voisinage U et un difféomorphisme $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times G \\ & \searrow \pi & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

commute, et tel que ϕ soit G -équivariante, i. e.

$$\phi(xg) = \phi(x)g, \forall x \in \pi^{-1}(U), g \in G, \quad (6)$$

où G agit sur $U \times G$ par $(p, g')g = (p, g'g)$.

Exemple 3.1.1. Pour M une variété différentielle et G un groupe de Lie, le fibré $M \times G$ sur M muni de la projection sur le premier facteur est G -principal.

Exemple 3.1.2. On peut vérifier que le fibré des repères $F(V)$ défini à partir d'un fibré vectoriel V est $\mathrm{GL}(V)$ -principal.

Si l'on dispose d'une représentation de groupe $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(N)$, on peut, à partir d'un fibré G -principal définir un fibré vectoriel, dont les fibres sont isomorphes à N :

Définition 3.2. Soient G un groupe, (E, π, M) un fibré principal pour G et N un espace vectoriel avec une action de G à gauche $G \times N \rightarrow N$. On définit $E_N \triangleq E \times_G N = (E \times N)/G$ le quotient pour l'action

$$(x, u) \cdot g = (xg, g^{-1}u), \quad \forall x \in E, \forall u \in N, \forall g \in G. \quad (7)$$

On note π_N l'application induite sur E_N par la composition $E \times N \rightarrow E \xrightarrow{\pi} M$.

En particulier, on peut retrouver un fibré vectoriel à partir de son fibré des repères :

Proposition 3.3. Soit (V, π, M) un fibré vectoriel complexe de rang n . L'espace V est isomorphe à $F(V) \times_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \mathbb{C}^n$.

Démonstration. L'isomorphisme est donné par $\phi: F(V)_{\mathbb{C}^n} \rightarrow V$, qui à $[x, v]$ associe $x(v)$. \square

Lemme 3.4. Soit G un groupe. Soit (E, π, M) un fibré G -principal et soient $(U_\alpha, \phi_\alpha), (U_\beta, \phi_\beta)$ deux trivialisations locales. Il existe une application différentiable $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$, appelée fonction de transition, telle que

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(p, a) = (p, g_{\alpha\beta}(p)a), \quad \forall (p, a) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times G. \quad (8)$$

Démonstration.

$$\begin{array}{ccccc} (U_\alpha \cap U_\beta) \times G & \xrightarrow{\phi_\beta^{-1}} & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{\phi_\alpha} & (U_\alpha \cap U_\beta) \times G \\ & \searrow p_1 & \downarrow \pi & \swarrow p_1 & \\ & & U_\alpha \cap U_\beta & & \end{array},$$

par ce diagramme, $\psi_{\alpha\beta} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ commute avec la projection sur le premier facteur. Donc pour tout $p \in M$, il existe $g_{\alpha\beta}(p)$ tel que $\psi_{\alpha\beta}(p, e) = (p, g_{\alpha\beta}(p))$. Puis, par équivariance,

$$\psi_{\alpha\beta}(p, a) = (p, g_{\alpha\beta}(p)a), \quad \forall a \in G. \quad (9)$$

Enfin, $g_{\alpha\beta}$ est différentiable puisque $\psi_{\alpha\beta}$ l'est. \square

3.1.2 Connexions sur les fibrés principaux

Soit un fibré G -principal (E, π, M) . Les vecteurs de l'espace tangent TE peuvent être envoyés surjectivement sur TM via π_* . Certains vecteurs de TE sont envoyés par π_* sur le vecteur nul, ils sont dits *verticaux*. On va vouloir définir une notion de « parallélisme ». Choisir une connexion

signifie par définition choisir un supplémentaire H_x à $\text{Ker}(\pi_*)_x$, dit espace des vecteurs horizontaux, qui varie continûment selon $x \in M$ (dans un sens qui sera précisé plus loin), et qui vérifie aussi une condition de compatibilité avec l'action de groupe :

$$(R_g)_* H_x = H_{xg}, \quad \forall x \in E, \forall g \in G. \quad (10)$$

On peut réécrire ce choix de manière équivalente en utilisant l'action du groupe G . Considérons, pour tout x dans E , $L_x : G \rightarrow E$, définie par $L_x(g) = xg$, qui est injective. Elle induit une application injective $v_x : \mathfrak{g} \rightarrow T_x E$, où $\mathfrak{g} \triangleq T_e G$ est l'algèbre de Lie du groupe G et $v_x \triangleq (L_x)_*$, la différentielle de L_x en l'élément neutre de G . De plus, comme les orbites de G sont les fibres de π , on montre que $\text{Ker}(\pi_*)_x = \text{Im}(v_x)$. On a ainsi une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{v_x} T_x E \xrightarrow{\pi_*} T_{\pi(x)} M \rightarrow 0, \quad (11)$$

si bien que choisir un supplémentaire H_x à $\text{Ker}(\pi_*)_x$ revient à choisir une application linéaire $\omega_x : T_x E \rightarrow \mathfrak{g}$ telle que $\omega_x \circ v_x = \text{id}_{\mathfrak{g}}$, via l'identification $H_x = \text{Ker} \omega_x$. On requiert de plus que ω_x varie différentiellement selon x , i. e., que $\{\omega_x, x \in E\}$ définisse une 1-forme différentielle $\omega \in \Omega^1(E, G)$. On peut vérifier que la condition de compatibilité avec l'action de G équivaut alors à l'équation sur ω :

$$(R_g)^* \omega = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \omega, \quad \forall g \in G, \quad (12)$$

où, pour tout $g \in G$, $\text{Ad}(g) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ désigne la différentielle en l'identité de l'automorphisme de E défini par $x \mapsto gxg^{-1}$. Le morphisme Ad s'appelle la représentation adjointe de G .

Définition 3.5. Une connexion sur un fibré G -principal (E, π, M) est une 1-forme $\omega \in \Omega^1(E, G)$ vérifiant :

- (i) $\forall x \in M, \omega_x \circ v_x = \text{id}_{\mathfrak{g}}$;
- (ii) $\forall g \in G, (R_g)^* \omega = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \omega$.

Exemple 3.5.1 (Connexion dans le fibré trivial). Dans le fibré trivial $(M \times G, p_1, M)$, on peut définir une connexion ω_{MC} (dite de MAURER-CARTAN) par : $(\omega_{MC})_{(p,g)} = (L_{g^{-1}} \circ p_2)_*$, pour $(p, g) \in M \times G$.

$$G \xrightarrow{L_{(p,g)}} M \times G \xrightarrow{p_2} G \xrightarrow{L_{g^{-1}}} G. \quad (13)$$

En effet, on a bien $(\omega_{MC})_{(p,g)} \circ v_{(p,g)} = (L_{g^{-1}} \circ p_2 \circ L_{(p,g)})_* = (\text{id}_G)_* = \text{id}_{\mathfrak{g}}$.

On peut généraliser les notions définissant les connexions aux formes différentielles de degré supérieur et par rapport à des représentations de groupe différentes de la représentation adjointe :

Définition 3.6. (i) Soit V un espace vectoriel et soit $\omega \in \Omega^k(E, V)$. On dit que ω est horizontale si elle s'annule dès que l'un de ses arguments est un vecteur vertical, i. e.,

$$\omega(X_1, \dots, X_n) = 0 \quad (14)$$

pour tout k -tuples.

(ii) Étant donnée une représentation $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$, on dit que ω est ρ -équivariante si

$$R_g^* \omega = \rho(g^{-1}) \circ \omega. \quad (15)$$

En particulier, si ρ est la représentation triviale, ω est dite invariante.

On notera $\tilde{\Omega}^k(E, V)$ l'espace des k -formes horizontales ρ -équivariantes de $\Omega^k(E, V)$.

Lemme 3.7. Soit (E, π, M) un fibré G -principal, et soit $U := \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Sigma}$ un recouvrement de M avec des trivialisations $\{\phi_\alpha : U_\alpha \times G \rightarrow E|_{U_\alpha}\}_{\alpha \in \Sigma}$ et des fonctions de transition $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in \Sigma}$. Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation. Les k -formes horizontales ρ -équivariantes de $\Omega^k(E, V)$ sont en bijection avec les collections de k -formes $\{\omega_\alpha \in \Omega^k(U_\alpha, V)\}_{\alpha \in \Sigma}$ satisfaisant

$$\omega_\beta = \rho \circ g_{\alpha\beta} \circ \omega_\alpha. \quad (16)$$

Démonstration. La donnée d'une forme $\tilde{\omega} \in \Omega^k(E, V)$ est équivalente à la donnée de la collection $\{\tilde{\omega}_\alpha\}_{\alpha \in \Sigma}$, où $\tilde{\omega}_\alpha := \phi_\alpha^* \omega|_{E|_{U_\alpha}} \in \Omega^k(U_\alpha \times G, V)$, c'est-à-dire de l'expression de ω dans les trivialisations. Nous procédons en deux étapes.

1. Soit $\iota : U_\alpha \rightarrow U_\alpha \times G$ l'inclusion $\iota(p) = (p, e)$, montrons que $\iota^* : \Omega^k(U_\alpha \times G, V) \rightarrow \Omega^k(U_\alpha, V)$ induit une bijection entre les k -formes horizontales ρ -équivariantes sur $U_\alpha \times G$ et les k -formes sur U_α . Étant donné $\omega_\alpha \in \Omega^k(U_\alpha, V)$, il existe une unique forme $\tilde{\omega}_\alpha \in \Omega^k(U_\alpha \times G, V)$ telle que $\iota^* \tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha$, en effet :

— pour $x = (p, e)$, $\tilde{\omega}_x$ est déterminée par ω et l'horizontalité puisque

$$T_x E = \ker(\pi_{*,x}) \oplus \iota_{*,p}(T_p M); \quad (17)$$

— et pour $y = (p, g) = R_g(x)$, la ρ -équivariance implique que $\tilde{\omega}_y = \rho(g^{-1}) \circ \tilde{\omega}_x \circ (R_g)_*^{-1}$.

Remarquons de plus que la forme $\tilde{\omega}$ définie par

$$\tilde{\omega}_{(p,g)} = \rho(g^{-1}) \circ \omega_p \circ \pi_* \quad (18)$$

vérifie ces conditions, ce qui donne une expression explicite de la bijection. En effet :

- $(\iota^* \tilde{\omega})_p = \tilde{\omega}_{(p,e)} \circ \iota_* = \rho(e^{-1}) \circ \omega_p = \omega_p$;
- $(R_g^* \tilde{\omega})_{(p,g')} = \tilde{\omega}_{(p,g'g)} \circ (R_g)_* = \rho(g^{-1}) \circ \rho(g'^{-1}) \circ \omega_p \circ \pi_{*,p} \circ (R_g)_* = \rho(g^{-1}) \circ \tilde{\omega}_{(p,g')}$
car $\pi_{*,p} \circ (R_g)_* = \pi_{*,p}$;
- $\tilde{\omega}$ est horizontale.

2. Soient $\alpha, \beta \in \Sigma$, posons $U = U_\alpha \cap U_\beta$. Sur $U \times G$ on a $\omega_\beta = \psi_{\alpha\beta}^* \omega_\alpha$, avec $\psi_{\alpha\beta}(p, a) = (\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})(p, g_{\alpha\beta}(p))$. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Omega}^k(U \times G, V) & \xrightarrow{\iota^*} & \Omega^k(U, V) & \tilde{\omega}_\alpha \longmapsto \omega_\alpha \\ \psi_{\alpha\beta}^* \downarrow & & & \downarrow \\ \tilde{\Omega}^k(U \times G, V) & \xrightarrow{\iota^*} & \Omega^k(U, V) & \tilde{\omega}_\beta \longmapsto \omega_\beta \end{array}$$

on a alors, $\forall p \in M$,

$$(\omega_\beta)_p = (\iota^* \psi_{\alpha\beta}^* \tilde{\omega}_\alpha)_p \quad (19)$$

$$= (\tilde{\omega}_\alpha)_{(p, g_{\alpha\beta}(p))} \circ (\psi_{\alpha\beta})_* \circ \iota_* \quad (20)$$

$$= \rho \left(g_{\alpha\beta}^{-1}(p) \right) \circ (\omega_\alpha)_p \circ \pi_* \circ (\psi_{\alpha\beta})_* \circ \iota_* \quad (21)$$

$$= \rho \left(g_{\alpha\beta}^{-1}(p) \right) \circ (\omega_\alpha)_p, \quad (22)$$

puisque $\pi \circ \psi_{\alpha\beta} \circ \iota = \text{id}_M$.

□

Corollaire 3.7.1. Soient (E, π, M) un fibré principal et V un espace vectoriel. Alors

$$\pi^* : (\Omega^k(M, V)) \rightarrow \Omega^k(E, V) \quad (23)$$

induit un isomorphisme sur les formes horizontales invariantes de E .

Démonstration. Pour $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}^k(E, V)$, la collection de $\{\omega_\alpha \in \Omega^k(U_\alpha, V)\}$ associée par le lemme précédent vérifie $\omega_\beta = \omega_\alpha$ sur U et définit donc une forme ω sur M . Par (18), la forme $\tilde{\omega}$ est le pullback de ω par π . □

Ce lemme nous permettra de ramener des formes différentielles définies sur un fibré principal sur des formes différentielles de l'espace de base (et ainsi dans sa cohomologie de DE RHAM).

3.1.3 Forme courbure d'une connexion

Considérons une connexion $\omega \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$, sur un fibré G -principal (E, π, M) . On a $\omega \wedge \omega \in \Omega^2(E, \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$, et on définit $[\omega, \omega]$ comme l'image de $\omega \wedge \omega$ par l'application linéaire

$$[-, -] : \begin{cases} \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} & \rightarrow \mathfrak{g} \\ x \otimes y & \mapsto [x, y] \end{cases} . \quad (24)$$

Définition 3.8. La forme courbure $F_\omega \in \Omega^2(E, \mathfrak{g})$ d'une connexion ω est définie par

$$F_\omega \triangleq d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]. \quad (25)$$

Cette définition est motivée par le fait que dans un fibré trivial, on a $F_{\omega_{\text{MC}}} = 0$; on dit en conséquence que la connexion de MAURER-CARTAN est plate. L'annulation de $F_{\omega_{\text{MC}}}$ se déduit de la proposition suivante.

Proposition 3.9. F_ω est horizontale et Ad-equivariante.

Démonstration. L'Ad-équivariance provient de celle de ω . Pour l'horizontalité, soit $x \in E$, soient $X, Y \in T_x E$ tels que X est vertical, il faut montrer que $d\omega(X, Y) = 0$. Comme les vecteurs horizontaux et verticaux sont supplémentaires, il suffit de le montrer dans le cas où Y est vertical, et celui où Y est horizontal. On ne détaille ici que le cas où Y est vertical, l'autre cas plus technique se trouve dans [Dup03]. Si Y est vertical, il existe $A, B \in \mathfrak{g}$ tels que $X = v_x(A)$, $Y = v_x(B)$.

Considérons A^* le champ de vecteur sur E défini par $A_y^* = v_y(A), \forall y \in E$, et B^* défini de même. On a

$$d\omega(A^*, B^*) = A^*(\omega(B^*)) - B^*(\omega(A^*)) - \omega([A^*, B^*]) \quad (26)$$

$$= A^*(B) - B^*(A) - [A, B] \quad (27)$$

$$= -[A, B] \quad (28)$$

$$= -[\omega(A^*), \omega(B^*)]. \quad (29)$$

□

Proposition 3.10 (Identité de Bianchi). *On a :*

$$dF_\omega = [F_\omega, \omega]. \quad (30)$$

Démonstration. On différentie l'équation (25) définissant ω . □

3.1.4 Dérivée covariante associée à une connexion linéaire

On se replace dans le cadre d'un fibré vectoriel (V, π, M) et de son fibré des repères $E = F(V)$. Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$ agit par l'action naturelle i sur $F(V)$. L'algèbre de LIE est $\mathfrak{g} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n , munie du crochet de LIE $[A, B] = AB - BA$, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 3.11. *Pour (V, p, M) un fibré vectoriel, on appelle k -forme différentielle de M dans V une collection de k -formes $\omega_p : T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow V_p$ pour tout p dans M , qui est différentiable dans le sens suivant : pour X_1, \dots, X_k champs de vecteurs différentiables, $\omega(X_1, \dots, X_k)$ donne une section différentiable du fibré V . On notera $\Omega^k(M, V)$ l'ensemble de ces k -formes.*

Fixons une connexion ω du fibré des repères. Nous allons construire à partir de la connexion un opérateur $\nabla : \Gamma(M, V) \rightarrow \Omega^1(M, V)$ qui vérifie la règle de LEIBNIZ. Pour cela nous allons :

- définir un opérateur $\tilde{\nabla} : \tilde{\Omega}^0(E, \mathbb{C}^n) \rightarrow \tilde{\Omega}^1(E, \mathbb{C}^n)$;
- établir deux bijections afin de définir ∇ par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M, V) & \longrightarrow & \tilde{\Omega}^0(E, \mathbb{C}^n) \\ \nabla \downarrow & & \downarrow \tilde{\nabla} \\ \Omega^1(M, V) & \longrightarrow & \tilde{\Omega}^1(E, \mathbb{C}^n) \end{array} .$$

Lemme 3.12. *Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation, (E, π, M) un fibré G -principal, et (E_V, π_V, M) le fibré vectoriel associé. Il y a une bijection entre les fonctions ρ -équivariantes $\tilde{s} : E \rightarrow V$ et les sections du fibré E_V .*

Démonstration. Le lemme 3.7 donne pour $k = 0$ une bijection entre l'ensemble $\tilde{\Omega}^0(E, \mathbb{C}^n)$ des fonctions ρ -équivariantes sur E et $\{s_\alpha : U_\alpha \rightarrow V \mid s_\beta = \rho(g_{\alpha\beta})s_\alpha \text{ sur } U_\alpha \cap U_\beta \text{ pour tout } \beta \in \Sigma\}_{\alpha \in \Sigma}$. Or, la donnée d'une section $s \in \Gamma(M, E_V)$ est équivalente à sa donnée sur les trivialisations, et on vérifie que les fonctions de transition sur E_V sont les $\rho(g_{\alpha\beta})$. □

Lemme 3.13. *Il existe une bijection entre $\Omega^k(M, V)$ et $\tilde{\Omega}^k(E, \mathbb{C}^n)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. De même, $\Omega^k(M, \text{End } V)$ et $\tilde{\Omega}^k(E, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ sont en bijection.*

Démonstration. Soit $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}^k(E, \mathbb{R}^n)$. Pour $p \in M$, on choisit $x \in \pi^{-1}(p)$. Pour $X_1, \dots, X_k \in T_p M$, on choisit $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k \in T_x E$ tels que $\pi_*(\tilde{X}_i) = X_i$. On pose $\omega_p(X_1, \dots, X_k) = x \circ \tilde{\omega}_x(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k)$. La forme ω est bien définie grâce à l'horizontalité et à l' i -équivariance de $\tilde{\omega}$. De plus, la relation $\tilde{\omega}_x = x^{-1} \circ \omega_{\pi^{-1}(x)} \circ \pi_*$ fournit l'expression de la bijection réciproque de $\Omega^k(M, V)$ à $\tilde{\Omega}^k(E, \mathbb{R}^n)$. \square

Proposition 3.14. Soit $s \in \Gamma(M, V)$ et soit $\tilde{s}: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application qui lui est associée par le lemme 3.12. Définissons $\tilde{\nabla}(\tilde{s}) = d\tilde{s} + \omega(\tilde{s}) \in \Omega^1(E, \mathbb{C}^n)$. Alors $\tilde{\nabla}(\tilde{s})$ est horizontale et i -équivariante et définit ainsi par le lemme 3.13 une 1-forme $\nabla(s) \in \Omega^1(M, V)$.

Démonstration. On prouve l'invariance et l' i -équivariance, la preuve est dans le livre de Dupont [Dupo3]. \square

L'opérateur ∇ défini par la proposition ci-dessus est appelé *dérivée covariante*. On notera, pour $s \in \Gamma(M, V)$ et $X \in T_p M$, $p \in M$, $\nabla_X(s) \triangleq \nabla(s)(X)$.

Proposition 3.15. L'opérateur ∇ vérifie :

- $\nabla_X(s)$ est $C^\infty(M)$ -linéaire en la variable X ;
- $\nabla_X(s)$ est \mathbb{C} -linéaire en la variable s et vérifie $\nabla_X(fs) = X(f)s + f(p)\nabla_X(s)$, pour $f \in C^\infty(M)$.

On appellera dérivée covariante toute application de $\Gamma(M, V) \rightarrow \Omega^1(M, V)$ qui vérifie ces propriétés.

Théorème 3.16. Les connexions et les dérivées covariantes sont en bijection.

Démonstration. On montre que ces ensembles sont des espaces affines dont les espaces vectoriels sont en bijection. Soient ω_0 une connexion et ∇_0 sa dérivée covariante associée. D'une part on a

$$\{\omega - \omega_0 \mid \omega \text{ une connexion}\} = \{\omega - \omega_0 \mid \omega - \omega_0 \text{ Ad-équivariante et } (\omega - \omega_0) \circ v = 0\} \quad (31)$$

$$= \tilde{\Omega}(E, \mathcal{M}_n(\mathbb{C})). \quad (32)$$

D'autre part

$$\{\nabla - \nabla_0 \mid \nabla \text{ dérivée covariante}\} = \{\nabla - \nabla_0 \mid \nabla - \nabla_0 \text{ dérivée covariante bi-}C^\infty(M)\text{-linéaire}\} \quad (33)$$

$$\cong \{\phi : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, V) \rightarrow \Gamma(M, V) \mid \phi \text{ } C^\infty\text{-bilinéaire}\} \quad (34)$$

$$\cong \Omega^1(M, \text{End}(V)). \quad (35)$$

La dernière bijection est construite ainsi : soit $\phi: \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, V) \rightarrow \Gamma(M, V)$. Pour $p \in M$, $v \in T_p M$ et $a \in V_p$, on prolonge v en un champ de vecteurs X tel que $X_p = v$ et a en une section s de V telle que $s(p) = a$. On alors définit $\theta \in \Omega^1(M, \text{End}(V))$ par $\theta_p(v)(a) := \phi(X, s)(p) \in V_p$. On vérifie que θ est bien définie en utilisant la bilinéarité de ϕ et une fonction cloche sur une trivialisatation au voisinage de p . La bijection réciproque est donnée en évaluant ϕ point par point. Le lemme 3.13 conclut la démonstration. \square

Proposition 3.17. Soit $F_\omega \in \tilde{\Omega}^2(E, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ la forme courbure d'une connexion ω et soit $\tilde{F}_\omega \in \Omega^2(M, \text{End}(V))$ sa forme correspondante par le lemme 3.13. Soit ∇ la dérivée covariante associée à ω . Alors pour X, Y champs de vecteurs sur M et s section de V on a :

$$\tilde{F}_\omega(X, Y)(s) = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})(s). \quad (36)$$

Démonstration. On trouvera la preuve dans [Dupo3]. \square

On peut donc réécrire connexion et forme courbure en termes de dérivée covariante, ce qui sera utile pour certaines démonstrations à venir.

3.2 Classes de CHERN

3.2.1 Définition des classes de CHERN

Soit (V, π, M) un fibré vectoriel et soit $E := F(V)$ son fibré des repères associé. Fixons $\omega \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$ une connexion sur E et soit $F_\omega \in \Omega^2(E, \mathfrak{g})$ sa forme courbure associée. On peut définir, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la forme $F_\omega^k \triangleq F_\omega \wedge \cdots \wedge F_\omega \in \Omega^{2k}(E, \mathfrak{g}^{\otimes k})$, qui est encore une forme horizontale et Ad-équivariante. Soit maintenant $P \in S^k(\mathfrak{g})^*$ une forme complexe multilinéaire symétrique sur $\mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g}$, que l'on identifie à sa forme canoniquement associée définie sur $\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}$. On a $P(F_\omega^k) \in \Omega^{2k}(E, \mathbb{C})$.

Définissons de plus sur $S^k(\mathfrak{g})^*$ l'action suivante de G :

$$g \cdot P(X_1, \dots, X_k) = P\left(\text{Ad}\left(g^{-1}\right)X_1, \dots, \text{Ad}\left(g^{-1}\right)X_k\right), g \in G. \quad (37)$$

Soit $I^k(G)$ l'ensemble des formes multilinéaires symétriques invariantes pour cette action. Alors pour $P \in I^k(G)$, la forme $P(F_\omega^k) \in \Omega^{2k}(E, \mathbb{C})$ est désormais horizontale et invariante. Par le corollaire 3.7.1, il existe un unique antécédent de cette forme dans $\Omega^{2k}(M, \mathbb{C})$ par le *pullback* $\pi^*: \Omega^1(M, \mathbb{C}) \rightarrow \tilde{\Omega}^1(E)$, que l'on notera encore $P(F_\omega^k)$.

Proposition 3.18. *Pour $P \in I^k(G)$, la forme $P(F_\omega^k)$ définie ci-dessus est fermée, i. e., vérifie $d(P(F_\omega^k)) = 0$, et définit donc une classe dans la cohomologie de DE RHAM.*

Démonstration. Comme π^* est injective, il suffit de montrer que dans $\Omega^{2k}(E, \mathbb{C})$, $d(P(F_\omega^k)) = 0$, or

$$d\left(P\left(F_\omega^k\right)\right) = P\left(dF_\omega^k\right) \quad (38)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^k (-1)^{2i} F_\omega \wedge \cdots \wedge dF_\omega \wedge \cdots \wedge F_\omega\right) \quad (39)$$

$$= kP\left(dF_\omega \wedge F_\omega^{k-1}\right) \quad \text{par symétrie de } P \quad (40)$$

$$= kP\left([F_\omega, \omega] \wedge F_\omega^{k-1}\right) \quad \text{par l'identité de BIANCHI} \quad (41)$$

et F_ω est horizontale tandis que $[F_\omega, \omega]$ s'annule sur les vecteurs horizontaux (cela se montre par le calcul). \square

Proposition 3.19. *La classe dans la cohomologie de DE RHAM de $P(F_\omega^k)$ est indépendante du choix de la connexion ω .*

Démonstration. On utilise pour la preuve un lemme de POINCARÉ, la preuve se trouve dans le livre [Dupo3]. \square

On peut exhiber des formes multilinéaires symétriques invariantes. Nous introduisons à cet effet un résultat algébrique. Soit V un espace vectoriel de dimension finie, et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de cet espace. Alors, pour $P \in S^k(V)^*$ et $v = \sum v_i e_i \in V$, on a

$$P(v, \dots, v) = P\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i, \dots, \sum_{i=1}^n v_i e_i\right) \quad (42)$$

$$= \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} v_1^{i_1} \dots v_n^{i_n} P(e_1, \dots, e_1, \dots, e_n, \dots, e_n) \quad (43)$$

qui est un polynôme homogène de degré k en les coordonnées (v_1, \dots, v_n) . On peut vérifier que l'application

$$\phi: \begin{cases} S^k(V)^* & \rightarrow \mathbb{C}[X]^k \\ P & \mapsto \tilde{P}: (x_1, \dots, x_n) \mapsto P(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \dots, \sum_{i=1}^n x_i e_i) \end{cases} \quad (44)$$

est en fait un isomorphisme d'espaces vectoriels, où $\mathbb{C}[X]^k$ dénote l'ensemble des polynômes à coefficients complexes homogènes de degré k .

On revient au cadre $G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, considérons à présent le développement du polynôme en $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\det\left(\lambda I_n - \frac{1}{2i\pi} A\right) = \sum_{k=0}^n \lambda^{n-k} C_k(A) \quad (45)$$

Les applications C_k ainsi définies sont des polynômes homogènes de degré k en les coefficients de A , qu'on peut donc voir comme des applications multilinéaires symétriques en A . Ils sont de plus invariants, puisque le déterminant est invariant par changement de base.

Définition 3.20. Soient (V, π, M) un fibré vectoriel de dimension n , ω une connexion sur son fibré des repères, et F_ω sa forme courbure. On définit pour tout $1 \leq k \leq n$ la k^e classe de CHERN du fibré par la classe $[C_k(F_\omega^k)] \in H_{dR}^{2k}(M; \mathbb{C})$.

3.2.2 Axiomes de GROTHENDIECK

Théorème 3.21. Les classes de CHERN ainsi définies vérifient les axiomes de GROTHENDIECK.

Démonstration. (i) (Naturalité) Soient (V, π, N) un fibré vectoriel, et $f: M \rightarrow N$ une application différentiable de variétés différentielles. Considérons le *pullback* de $F(V)$.

$$\begin{array}{ccc} f^*F(V) & \xrightarrow{\bar{f}} & F(V) \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array} \cdot$$

On peut vérifier que $f^*F(V)$ est isomorphe à $F(f^*V)$. Soit ω une connexion sur $F(V)$, $\omega' := \bar{f}^* \omega$ est alors une connexion sur $f^*F(V)$. On a ensuite

$$F_{\omega'} = d\omega' + \omega' \wedge \omega' = \bar{f}^* F_\omega, \quad F_{\omega'}^k = \bar{f}^* F_\omega^k, \quad C_k(F_{\omega'}^k) = \bar{f}^* C_k(F_\omega^k), \quad (46)$$

car ces opérations agissent seulement sur les coefficients de l'espace d'arrivée. Enfin, il reste à vérifier que $(p_1^*)^{-1} \bar{f}^* C_k(F_\omega^k) = f^*(\pi^*)^{-1} C_k(f_\omega^k)$. Or, on a par définition du *pullback* $f \circ p = \pi \circ \bar{f}$, donc $p^* f^* = \bar{f}^* \pi^*$, d'où $f^*(\pi^*)^{-1} = (p^*)^{-1} \circ \bar{f}^*$.

- (ii) (Formule de sommation de WHITNEY) Soient V_1, V_2 deux fibrés vectoriels de dimension n_1, n_2 sur M . Soit $V := V_1 \oplus V_2$, un fibré vectoriel de dimension $n = n_1 + n_2$. Soient $E_i := F(V_i)$, $i \in \{1; 2\}$ et $E := F(V)$, et soient ω_1, ω_2 deux connexions sur E_1 resp. E_2 . On associe à ω_i la dérivée covariante $\nabla_i: \Gamma(M, E_i) \rightarrow \Omega^1(M, E_i)$. Alors $\nabla := \nabla_1 \oplus \nabla_2: \Gamma(M, E) \rightarrow \Omega^1(M, E)$ est une dérivée covariante à laquelle correspond une connexion ω sur E . De plus, on peut associer aux formes courbures F_{ω_i} leur forme $\tilde{F}_{\omega_i} \in \Omega^2(M, \text{End}(V_i))$ qui vérifient $\tilde{F}_{\omega_i}(X, Y)(s) = \left((\nabla_i)_X (\nabla_i)_Y - (\nabla_i)_Y (\nabla_i)_X - (\nabla_i)_{[X, Y]} \right)(s)$. De même, $F_\omega(X, Y)(s) = \left((\nabla_1 \oplus \nabla_2)_X (\nabla_1 \oplus \nabla_2)_Y - (\nabla_1 \oplus \nabla_2)_Y (\nabla_1 \oplus \nabla_2)_X - (\nabla_1 \oplus \nabla_2)_{[X, Y]} \right)(s)$. Donc $F_\omega = F_{\omega_1} \oplus F_{\omega_2}$. Fixons des bases locales de V_1 et V_2 , nous pouvons identifier $\text{End}(V)$ avec l'espace des matrices carrées, et donc F_{ω_i} et F_ω comme matrices carrées de 1-formes, soit :

$$F_\omega = \begin{pmatrix} F_{\omega_1} & 0 \\ 0 & F_{\omega_2} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Or pour $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\det \left(\lambda I_n - \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \right) = \det \left(\lambda I_{n_1} - \frac{1}{2\pi i} A_1 \right) \det \left(\lambda I_{n_2} - \frac{1}{2\pi i} A_2 \right) \quad (48)$$

Donc

$$\forall 1 \leq k \leq n, C_k(A) = \sum_{i+j=k} C_i(A_1) C_j(A_2), \quad (49)$$

et si l'on note t une variable, et $C_t(A) := \sum_{k=0}^{\infty} C_k(A) t^k$ comme une série formelle de t , on a

$$C_t(A) = C_t(A_1) C_t(A_2). \quad (50)$$

On conclut en appliquant cette égalité à F_ω^k et passant à la classe de cohomologie.

- (iii) (Fibré universel) Considérons le fibré tautologique $\mathcal{O}(-1)$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. L'espace de base est l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, l'espace total est $\mathcal{O}(-1) = \{(l, x) \mid l \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), x \in l\}$, le fibré des repères est l'ensemble $\{(l, x) \mid l \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), x \in l \setminus \{0\}\} \cong \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, le groupe est $\text{GL}_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$, et la représentation adjointe est triviale. On vérifie que la forme de $\Omega^1(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathbb{C})$ définie par

$$\omega = \frac{\sum \bar{z}_i dz_i}{|z|^2}, \quad (51)$$

est une connexion. On calcule sa courbure

$$F_\omega = \frac{1}{|z|^4} \left(\left(\sum_{i=1}^n d\bar{z}_i dz_i \right) |z|^2 - \left(\sum_{i=1}^n \bar{z}_i dz_i \right) \left(\sum_{i=1}^n z_i d\bar{z}_i \right) \right). \quad (52)$$

On calcule alors $C_1(F_\omega) = -\frac{1}{2i\pi}F_\omega$, puis son image par l'isomorphisme de DE RHAM

$$\int_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} C_1(F_\omega) = -1. \quad (53)$$

On a la valeur -1 pour toute dimension n , puis on montre qu'on peut passer à la limite sur $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$. Si l'on combine la remarque 2.17 avec l'isomorphisme de DE RHAM, on a un isomorphisme $H_{\text{DR}}^2(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \cong H^2(\mathbb{C}^\infty, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$. En effet, cet isomorphisme est donné par intégration sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, qui est un sous-espace de $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$. Donc, pour preuve que $C(F_\omega)$ correspond à la classe d'EULER $e(\gamma')$ via l'isomorphisme de DE RHAM, il suffit de vérifier que $\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} C_1(F_\omega) = -1$.

□

Ainsi, les deux définitions des classes de CHERN coïncident via $H_{\text{DR}}^*(M, \mathbb{C}) \cong H^*(M, \mathbb{C})$ et donc via $H_{\text{DR}}^*(M) \cong H^*(M, \mathbb{R})$.

4 Conclusion

Nous avons vu deux constructions des classes de Chern, classes qui permettent de distinguer des fibrés vectoriels. L'équivalence des deux constructions montre en particulier qu'à partir d'un objet géométrique *a priori* "rigide", on peut construire un invariant topologique. Les classes de Chern forment ainsi un pont entre topologie algébrique et géométrie différentielle.

5 Bibliographie

- [MS74] John MILNOR et James D. STASHEFF. *Characteristic Classes*. Annals of Mathematical Studies 76. Princeton University Press, 21 août 1974.
- [Dup03] Johan DUPONT. *Fibre Bundles and Chern-Weil theory*. Lecture Notes Series 69. Department of Mathematics, University of Aarhus, 2003.
- [Rah17] Adel RAHMAN. "Chern-Weil Theory". In : *Summer Research Experiences for Undergraduates*. University of Chicago, 26 sept. 2017.
- [Bil18] Gustave BILLON. "Une Démonstration du théorème de de Rham à l'aide de la cohomologie des faisceaux". École polytechnique, 22 déc. 2018.