

MEMOIRE DE PREMIERE ANNEE
Département de Mathématiques et Application
ENS Rue d'Ulm

Isopérimétrie

MOHAMMED AMINE ISMAILI ALAOU
ENCADRÉ PAR DJALIL CHAFAÏ



Table des matières

0	Introduction et perspective historique	2
1	L'inégalité isopérimétrique en dimension deux	3
1.0.1	Inégalité de Wirtinger	3
1.0.2	Théorème de Gauss-Ostrogradsky (divergence)	4
1.0.3	Preuve du théorème 1.1	6
2	Inegalite isoperimetrique via Brunn-Minkowski	8
2.1	Inégalité isopérimétrique	11
2.2	Cas limite interessant	12

Chapitre 0

Introduction et perspective historique

Le *problème isopérimétrique* est, dans sa forme traditionnelle, la recherche parmi toutes les formes de \mathbb{R}^n ayant un volume donné, celle dont l'hypersurface est minimale ou inversement partir du bord et trouver la figure qui enlose la plus grande aire. En dimension 2, la légende de la reine Didon illustre déjà l'intuition que le disque est optimal ; ce résultat est connu depuis l'Antiquité, mais ses premières démonstrations rigoureuses (au sens moderne) n'apparaissent qu'au XIX^e siècle : parmi celles-ci Hurwitz (1902) en propose une preuve élégante reposant sur l'inégalité de **Wirtinger** [?] et du théorème de la divergence. Ce cas plan sera la pierre angulaire de notre étude ; les généralisations en dimension $n \geq 3$ n'ont été établies que bien plus tard, notamment par Minkowski.

Organisation du chapitre I.

1. Présentation de l'inégalité isopérimétrique plane ;
2. Rappel des deux outils analytiques :
 - l'inégalité de Wirtinger ;
 - le théorème de **Gauss-Ostrogradsky**¹ ;
3. Preuve complète suivant Hurwitz.

1. Souvent appelé *théorème de la divergence*.

Chapitre 1

L'inégalité isopérimétrique en dimension deux

Théorème 1.1 (Isopérimétrie plane). Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un domaine compact à frontière ∂E de classe C^2 . On a

$$|\partial E|^2 \geq 4\pi |E|,$$

l'égalité vaut *ssi* E est un disque.

Avant de pouvoir s'attaquer à la preuve de ce théorème, il me semble d'abord utile de démontrer les outils phares auxquels fait appel celle-ci pour la fluidité et clarté des idées.

1.0.1 Inégalité de Wirtinger

Théorème 1.2 (Wirtinger). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de période 2π vérifiant $\int_0^{2\pi} f(s) ds = 0$. Alors

$$\int_0^{2\pi} f(s)^2 ds \leq \int_0^{2\pi} f'(s)^2 ds,$$

avec égalité si et seulement si $f(s) = a \cos s + b \sin s$.

Preuve. Écrivons la décomposition de Fourier de f

$$f(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{iks}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-iks} ds.$$

La condition de moyenne nulle implique $c_0 = 0$.

Identité de Parseval. Pour toute fonction 2π -périodique continue par morceaux,

$$\int_0^{2\pi} |f(s)|^2 ds = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

De même, puisque le k -ème coefficient de f' est $ik c_k$;

$$\int_0^{2\pi} |f'(s)|^2 ds = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |ik c_k|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |c_k|^2.$$

Maintenant en comparant terme à terme : pour $k \neq 0$ on a $k^2 \geq 1$; comme $c_0 = 0$,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k \neq 0} |c_k|^2 \leq \sum_{k \neq 0} k^2 |c_k|^2.$$

En multipliant par 2π on obtient (1.2).

Cas d'égalité. L'égalité exige $k^2 |c_k|^2 = |c_k|^2$ pour tout $k \neq 0$, d'où $|c_k| = 0$ dès que $|k| \geq 2$. il reste donc que $k = \pm 1$, i.e.

$$f(s) = c_1 e^{is} + c_{-1} e^{-is} = a \cos s + b \sin s.$$

Réciproquement, ces fonctions satisfont bien (1.2) avec égalité, ce qui complète la preuve. \square

Remarque 1.0.1. L'inégalité (1.2) n'est pas strict : la fonction $f(s) = \sin s$ montre qu'elle est effectivement atteinte.

1.0.2 Théorème de Gauss-Ostrogradsky (divergence)

Théorème 1.3 (Ostrogradsky). Pour tout champ vectoriel $\mathbf{F} \in C^1(\overline{E}, \mathbb{R}^2)$, Alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS,$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure unitaire le long de ∂E .

Preuve. On note $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un polygone dont la frontière est exclusivement constituée de segments horizontaux ou verticaux.

$\mathbf{F} = (P, Q) \in C^1(\overline{\Omega})$ et $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ la normale extérieure unitaire.

il est utile d'abord de remarquer que dans le cas d'un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$. on obtient

$$\iint_R \partial_x P \, dx \, dy = \int_c^d \left[\int_a^b \partial_x P(x, y) \, dx \right] dy = \int_c^d [P(b, y) - P(a, y)] \, dy,$$

par le théorème fondamental du calcul intégral. On reconnait dans le membre droit le flux de $P \mathbf{e}_x$ à travers les deux côtés verticaux. On obtient de même pour $\partial_y Q$ le flux de $Q \mathbf{e}_y$ à travers les côtés horizontaux. Comme \mathbf{n} vaut $(\pm 1, 0)$ ou $(0, \pm 1)$, seulement P contribue sur les arêtes verticales et seulement Q sur les arêtes horizontales, on somme et obtient donc

$$\iint_R (\partial_x P + \partial_y Q) \, dA = \int_{\partial R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Maintenant qu'on a travaillé sur des rectangles simples, ceux-ci seront nos briques élémentaires pour s'attaquer à un domaine plus arbitraire. On découpe donc Ω en un nombre fini de rectangles disjoints $(R_k)_k$ ce qui nous est garanti par la définition même de Ω . En sommant l'égalité précédente sur k , les contributions des côtés internes s'annulent deux à deux car les normales sont opposées. Il reste

$$\iint_{\cup R_k} \mathbf{F} = \int_{\partial(\cup R_k)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds,$$

c'est-à-dire on a maintenant l'égalité pour tout *polygone* ayant les propriétés postulées.

3. Domaine C^1 général. Pour une grille carrée de maille $h > 0$, définissons

$$\Omega_h^- = \bigcup_{R \subset \Omega} R, \quad \Omega_h^+ = \bigcup_{R \cap \Omega \neq \emptyset} R.$$

On a $\Omega_h^- \subset \Omega \subset \Omega_h^+$ et la « couronne » $\Omega_h^+ \setminus \Omega_h^-$ est contenue dans un tube de largeur $O(h)$ autour de $\partial\Omega$.

Chaque pavé R vérifie déjà $\iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} = \int_{\partial R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$. En sommant sur $R \subset \Omega_h^-$, les arêtes internes se compensent automatiquement :

$$\iint_{\Omega_h^-} \operatorname{div} \mathbf{F} = \int_{\partial\Omega_h^-} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Il nous reste à contrôler les arêtes qui ne coïncident pas avec notre domaine. Comme $\partial\Omega$ est C^1 par morceaux :

$$|\Omega \setminus \Omega_h^-|, |\Omega_h^+ \setminus \Omega| = O(h).$$

De même, la longueur totale des arêtes « parasites » $\partial\Omega_h^- \setminus \partial\Omega$ est $O(1)$, et chaque segment

parasite a longueur h : la contribution totale du bord supplémentaire est $O(h)$.

Pour $h \rightarrow 0$,

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} - \iint_{\Omega_h^-} \operatorname{div} \mathbf{F} = O(h), \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} - \int_{\partial\Omega_h^-} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = O(h).$$

Mais l'égalité est vraie sur Ω_h^- ; en laissant $h \rightarrow 0$, les termes d'erreur se dissipent, ce qui donne finalement

$$\boxed{\iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds}.$$

Idée clé : le pavage fournit l'égalité sur chaque maille ; la compensation des arêtes internes « colle » ces égalités ; la régularité C^1 assure que les zones et bords ajoutés s'amenuisent linéairement lorsque $h \rightarrow 0$.

□

□

1.0.3 Preuve du théorème 1.1

Histoire de nous simplifier la tâche, on imposera $|\partial E| = 2\pi$; et on considerera la frontière centre a l'origine. On paramètre ∂E par arc comme suit :

$$\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad |\alpha'(s)| = 1.$$

Les composantes α_1, α_2 sont 2π -périodiques et de moyenne nulle, donc l'inégalité de Wirtinger tient et nous donne

$$\int_0^{2\pi} |\alpha(s)|^2 \, ds = \sum_{i=1}^2 \int_0^{2\pi} \alpha_i(s)^2 \, ds \leq \sum_{i=1}^2 \int_0^{2\pi} \alpha_i'(s)^2 \, ds = 2\pi.$$

D'où $\int_{\partial E} |x|^2 \, ds \leq 2\pi$.

Maintenant pour le champ $X(x) = x$, on a $\operatorname{div} X = 2$. Ainsi

$$2|E| = \int_E \operatorname{div} X = \int_{\partial E} \langle x, \eta \rangle \, ds \leq \int_{\partial E} (|x|^2 + |\eta|^2) \, ds / 2.$$

Comme $|\eta| = 1$ et $|\partial E| = 2\pi$, on obtient

$$4|E| \leq \int_{\partial E} |x|^2 ds + 2\pi \leq 2\pi + 2\pi = 4\pi,$$

soit $|E| \leq \pi$. Plus généralement sans s'astreindre à la simplification admises ci dessus on retrouve l'inégalité $|\partial E|^2 \geq 4\pi|E|$.

Toutes les inégalités ci-dessus deviennent des égalités pour un disque.

□

Chapitre 2

Inegalite isoperimetrique via Brunn-Minkowski

Le precedent passage etant plus introductoire nous nous adonnons maintenant a la tache de demontrer l'inegalite isoperimetrique pour **le cas generale**; pour cela nous aurons besoin du theoreme suivant :

Theoreme 2.1 (Prekopa-Leindler). Soient $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ des fonctions mesurables, et $\lambda \in [0, 1]$.

Supposons que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on ait :

$$h((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda.$$

Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(z) dz \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \right)^\lambda.$$

Démonstration. Dans cette démonstration, on suppose que les fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont continues et strictement positives sur \mathbb{R} . On peut s'y ramener par approximation. Par homogénéité, on impose

$$\int_{\mathbb{R}} f = 1 = \int_{\mathbb{R}} g.$$

Les fonctions

$$F(x) := \int_{-\infty}^x f, \quad G(x) := \int_{-\infty}^x g$$

sont alors des bijections \mathcal{C}^1 strictement croissantes de \mathbb{R} dans $]0, 1[$. On définit

$$T := G^{-1} \circ F,$$

qui est une bijection \mathcal{C}^1 strictement croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^x f = \int_{-\infty}^{T(x)} g \implies f(x) = T'(x) g(T(x)).$$

En introduisant la bijection \mathcal{C}^1 strictement croissante

$$T_t(x) := (1-t)x + tT(x),$$

on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} h = \int_{\mathbb{R}} h(T_t(x)) T_t'(x) dx = \int_{\mathbb{R}} h(T_t(x)) ((1-t) + tT'(x)) dx.$$

L'hypothèse (1) et l'inégalité arithmético-géométrique (utilisable car $T' \geq 0$) donnent

$$h(T_t(x)) \geq f^{1-t}(x) g^t(T(x)), \quad (1-t) + tT'(x) \geq (T'(x))^t,$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}} h \geq \int_{\mathbb{R}} f^{1-t}(x) g^t(T(x)) (T'(x))^t dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1.$$

Il convient de noter que l'on peut étendre l'inégalité PRÉKOPA–LEINDLER aux dimensions supérieures : En effet, on procède par récurrence comme suit, soient $f, g, h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$h((1-t)x + ty) \geq f(x)^{1-t} g(y)^t, \quad x, y \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Écrivons $x = (x_1, \mathbf{x})$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Pour $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ donnés,

$$h((1-t)x_1 + ty_1, (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \geq f^{1-t}(x_1, \mathbf{x}) g^t(y_1, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

et, par l'inégalité de PRÉKOPA–LEINDLER en dimension n ,

$$H((1-t)x_1 + ty_1) \geq F^{1-t}(x_1) G^t(y_1),$$

où

$$H(s) = \int_{\mathbb{R}^n} h(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad F(s) = \int_{\mathbb{R}^n} f(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad G(s) = \int_{\mathbb{R}^n} g(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Cette inégalité valant pour tout x_1, y_1 , on ré-applique l'inégalité en dimension 1 et, grâce à Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} h = \int_{\mathbb{R}} H, \quad \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f = \int_{\mathbb{R}} F, \quad \int_{\mathbb{R}^{n+1}} g = \int_{\mathbb{R}} G.$$

ceci clos la recurrence.

□

Nous revenons maintenant a notre but initial pour lequel nous avons demontre le resultat precedent :

Théorème 2.2 (Inégalité de Brunn–Minkowski). Soient $A, B \subset \mathbb{R}^n$ non vides. On a

$$|A + B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}. \quad (4)$$

Démonstration. Définissons

$$f = \mathbf{1}_A, \quad g = \mathbf{1}_B, \quad h = \mathbf{1}_{(1-\lambda)A + \lambda B}.$$

Ces fonctions sont non négatives et intégrables ; leurs intégrales sont précisément les volumes $|A|$, $|B|$ et $|(1-\lambda)A + \lambda B|$.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ deux possibilités :

- Si $x \in A$ et $y \in B$, alors $(1-\lambda)x + \lambda y$ appartient à $(1-\lambda)A + \lambda B$, donc $h((1-\lambda)x + \lambda y) = 1$; de plus $f(x)^{1-\lambda}g(y)^\lambda = 1$. L'inégalité $h \geq f^{1-\lambda}g^\lambda$ est vérifiée.
- Sinon, au moins l'un des deux indicateurs $f(x)$ ou $g(y)$ vaut 0, donc leur produit est 0. Par définition $h(\cdot)$ vaut 0 ou 1, donc on a toujours $h \geq 0 = f^{1-\lambda}g^\lambda$.

Les conditions étant remplies, on invoque Prékopa–Leindler ce qui nous donne directement

$$\int h = |(1-\lambda)A + \lambda B| \geq \left(\int f\right)^{1-\lambda} \left(\int g\right)^\lambda = |A|^{1-\lambda} |B|^\lambda.$$

En elevons les deux membres à la puissance $1/n$ on obtient :

$$|(1-\lambda)A + \lambda B|^{1/n} \geq |A|^{(1-\lambda)/n} |B|^{\lambda/n}.$$

$$|A + B| = \left| \lambda \frac{A}{\lambda} + (1-\lambda) \frac{B}{1-\lambda} \right| \geq \left(\frac{|A|}{\lambda^n} \right)^\lambda \left(\frac{|B|}{(1-\lambda)^n} \right)^{1-\lambda}.$$

Le membre de droite est maximisé pour

$$\lambda = \frac{|A|^{1/n}}{|A|^{1/n} + |B|^{1/n}},$$

ce qui donne finalement

$$|A + B| \geq (|A|^{1/n} + |B|^{1/n})^n,$$

ce qui conclut la preuve. \square

2.1 Inégalité isopérimétrique

Je rappelle que tout ce qu'on a fait jusqu'ici sert notre but, celui-ci étant de démontrer l'inégalité isopérimétrique dans le cas général, nous avons ainsi démontré le cas de Minkowski par le biais de Prekopa-Leindler.

Théorème 2.3 (Isopérimétrie). Pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^n$ de volume fini,

$$P(A) \geq n \omega_n^{1/n} |A|^{\frac{n-1}{n}}, \quad \omega_n = |B_1|.$$

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$,

$$|A + \varepsilon B_1|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + \varepsilon |B_1|^{1/n} = |A|^{1/n} + \varepsilon \omega_n^{1/n}. \quad (\star)$$

On procède au développement limite au premier ordre :

Écrivons $|A + \varepsilon B_1| = |A| + \delta(\varepsilon)$, avec $\delta(\varepsilon) = o(\varepsilon)$. Le DL :

$$(|A| + \delta)^{1/n} = |A|^{1/n} + \frac{\delta}{n|A|^{(n-1)/n}} + o(\delta).$$

Combiné à (\star) et en négligeant $o(\delta)$,

$$\frac{\delta(\varepsilon)}{n|A|^{(n-1)/n}} \geq \varepsilon \omega_n^{1/n} + o(\varepsilon).$$

Donc

$$|A + \varepsilon B_1| - |A| \geq n \omega_n^{1/n} |A|^{(n-1)/n} \varepsilon + o(\varepsilon).$$

par définition de $P(A)$ et donc par passage à la liminf :

$$P(A) = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{|A + \varepsilon B_1| - |A|}{\varepsilon} \geq n \omega_n^{1/n} |A|^{(n-1)/n}.$$

\square

Constante de l'inégalité isopérimétrique

L'inégalité isopérimétrique s'écrit

$$P(A) \geq C_n |A|^{\frac{n-1}{n}}, \quad C_n = n \omega_n^{1/n},$$

où

$$\omega_n = |B(0, 1)| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

est le volume de la boule unité de \mathbb{R}^n .

2.2 Cas limite intéressant

Histoire de voir l'extension de l'inégalité il peut être intéressant d'évoquer les cas suivants :

Cas $n = 1$

$$\omega_1 = |[-1, 1]| = 2, \quad C_1 = 1 \times 2 = 2.$$

Pour un intervalle borné $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$, on a $P(A) = 2$ (les deux extrémités) et $P(A) = 2 = C_1 |A|^0$, donc l'inégalité est une égalité.

Comportement quand $n \rightarrow \infty$

Par la formule de Stirling,

$$\log \omega_n = \frac{n}{2} \log \pi - \log \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \approx \frac{n}{2} \left[1 + \log \pi - \log\left(\frac{n}{2}\right)\right].$$

Ainsi

$$\omega_n^{1/n} \sim \frac{\sqrt{2\pi e}}{\sqrt{n}}, \quad C_n = n \omega_n^{1/n} \sim \sqrt{2\pi e n}.$$

Interprétation. En grande dimension, le volume d'une boule devient infime par rapport au cube unité ; il faut donc de plus en plus de surface pour enfermer un volume fixé. La constante optimale croît comme \sqrt{n} — sub-linéairement — avec le facteur explicite $\sqrt{2\pi e}$ issu de Stirling

Bibliographie

- [1] Minimal surfaces and the isoperimetric inequality, Simone bredle,columbia university
- [2] Stabilite des inegalites geometriques,Benoit huou
- [3] L'inegalite de Brunn-Mikowski , Referene ; Institut mathematiques de jussieu
- [4] Prekopa leindler inequality wikipedia
- [5] Franck barthe autour de l'inegalite brunn minkowski
- [6] the brunn minkowski inequality r.j.gardner