

Mémoire de 1A
Noah Mauger–Le Cunff / Abdelrahman Zighem

Table des matières

I Premières définitions	2
I.1 Noeuds et tresses	2
I.2 Diagramme de noeuds	3
II Enlacement et lien avec l’homologie	4
II.1 Enlacement et lien avec l’homologie	4
III Surface de Seifert, genre et factorisation d’un noeud	6
III.1 Généralités sur les variétés	6
III.1.1 Variétés	6
III.1.2 Opérations sur les variétés	6
III.2 Interlude : Courbes	7
III.3 Triangulation des surfaces	8
III.4 L’orientabilité d’une surface	9
III.5 Le genre d’une surface	9
III.6 Quelques surfaces compactes standards	10
III.7 Surface de Seifert et genre d’un entrelac	10
III.8 Factorisation d’un noeud	11
IV Forme et matrice de Seifert et polynôme d’Alexander	12
IV.1 Forme et matrice de Seifert	12
IV.2 Polynôme d’Alexander	14
V Sur la signature	16
V.1 Signature d’un entrelac	16
V.2 Signature d’une tresse	17
VI Noeud torique	17
VI.1 Définitions	17
VI.2 Calcul du genre et polynôme d’Alexander	18
VI.3 Calcul de la signature	20

Introduction

La théorie des noeuds a émergé dans les années 1860. Les noeuds furent d'abord étudiés par Gauss et Johann Benedict Listing, qui les étudiaient avec une formule intégrale, pour définir le "nombre de liaison".

Ils furent ensuite étudiés par William Thomson (aussi appelé Lord Kelvin) et Guthrie Tait dans le modèle physique de l'atome-vortex, pour essayer de créer une théorie sur l'éther (qui n'existe pas, comme l'ont prouvé Michelson et Morley entre 1881 et 1887 à l'aide du célèbre interféromètre de Michelson).

Les noeuds sont maintenant étudiés pour leurs liens avec la topologie et les systèmes dynamiques, et s'applique en mathématiques, mais aussi en physique théorique, voire en biologie (pour modéliser des brins d'ADN).

I Premières définitions

I.1 Noeuds et tresses

Définition I.1.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle ensemble des tresses géométriques à n brins, qu'on note \mathcal{G}_n , l'ensemble des n -uplets de courbes lisses $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ à valeurs dans $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$ tel que $\gamma_i(t) = (t, \beta_i(t))$, $\beta_i(0) = (i, 0)$, $\beta_i(1) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \{0\}$ et tel que $i \neq j$ implique $\beta_i(t) \neq \beta_j(t)$.

Remarque I.1.2. L'application définie sur $\mathcal{G}_n \times \mathcal{G}_n$ par $d(\gamma, \gamma') := \sup \{ |\beta_i(t) - \beta'_i(t)| \mid (i, t) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times [0, 1] \}$ définit une distance sur \mathcal{G}_n .

Définition I.1.3. On appelle groupe de tresses, qu'on note B_n , l'ensemble des tresses géométriques quotienté par la relation d'homotopie, munie de la loi de concaténation obtenue en passant l'application

$$(\gamma, \gamma') \mapsto \left(t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma'(2t-1) & \text{sinon} \end{cases} \right) \text{ au quotient.}$$

Définition I.1.4. Il existe un plongement naturel $i_n : B_n \rightarrow B_{n+1}$ qu'on obtient en rajoutant un chemin de $(0, n+1, 0)$ à $(1, n+1, 0)$, qui passe au-dessus (selon la deuxième coordonnée) de tous ceux déjà existant. On note B_∞ l'union des $B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_n \subset \dots$

Remarque I.1.5. On peut définir pour $\gamma \in \mathcal{G}_n$ une permutation σ_γ par $\beta_i(1) = (\sigma_\gamma(i), 0)$. L'application $\gamma \mapsto \sigma_\gamma$ induit un morphisme de groupe de B_n dans S_n .

Définition I.1.6. On appelle entrelac à m composantes une union disjointe de m lacets lisses injectifs dans \mathbb{S}^3 . Un noeud est un entrelac à une composante.

Définition I.1.7. On dit que deux entrelacs L_1, L_2 sont équivalents s'il existe un difféomorphisme lisse préservant l'orientation $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ tel que $h(L_1) = L_2$.

On va à partir de maintenant étudier les noeuds à équivalence près.

Remarque I.1.8. On peut voir une tresse à n brins b comme un entrelac \hat{b} en reliant les points $(0, i, 0)$ et $(1, \sigma_\gamma(i), 0)$ par une courbe comme dans l'exemple ci-dessous. On remarque que le nombre

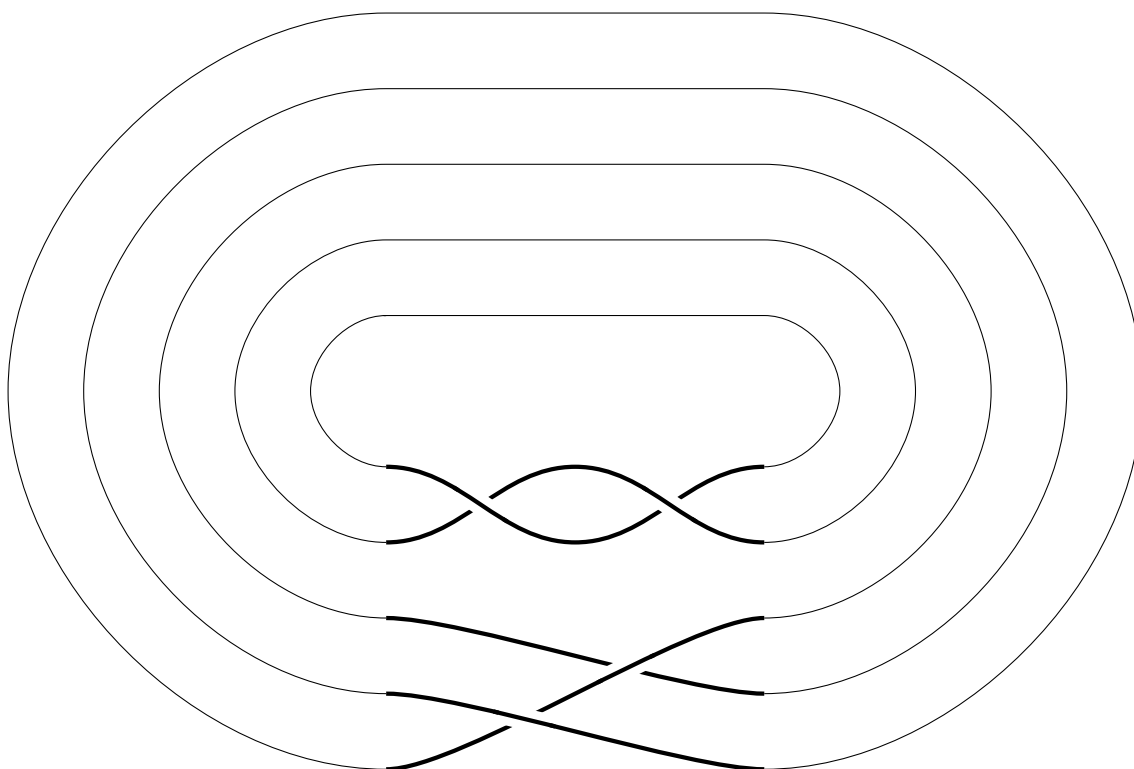


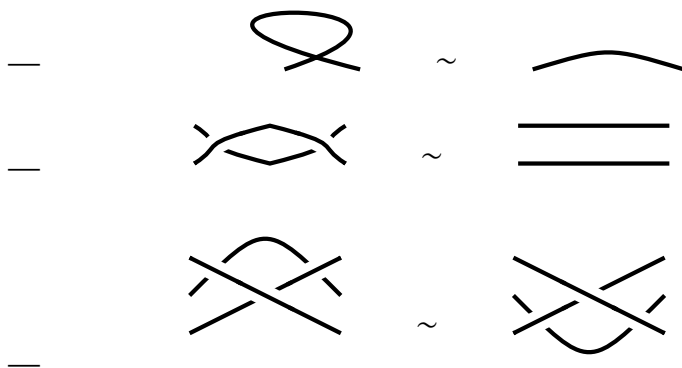
FIGURE 1 – Entrelac formé à partir d’une tresse

de composantes de l’entrelac ainsi formé est égal au nombre d’orbites de σ_γ , et que deux tresses géométriques isotopes induisent des entrelacs équivalents, ce qui justifie cette construction. On va donc définir la signature sur les entrelacs, et la construction faite ici nous permettra de la définir pour des tresses.

I.2 Diagramme de noeuds

Définition I.2.1. On appelle diagramme de noeud, l’image d’un noeud par la projection $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en associant à chaque intersection l’information de quelle courbe passe "au-dessus".

Remarque I.2.2. On peut montrer (ce qui est fait dans [Lic97] p.3) que les diagrammes de deux noeuds équivalents sont reliés par une série de mouvements de Reidemeister, qui sont les trois suivants :



Remarque I.2.3. *L'hypothèse de position générale impose concrètement qu'un segment soit projeté sur un segment (non réduit à un point), que la multiplicité des intersections soit toujours exactement de deux et que ces intersections n'aient pas lieu aux extrémités des segments. On peut toujours s'y ramener par difféomorphisme lisse.*

Définition I.2.4. *Si K_1 et K_2 sont deux noeuds, on définit la somme de ces noeuds $K := K_1 + K_2$ comme suit : on enlève un bout de courbe de chaque noeud, dans une partie sans croisement, et on les accroche de manière à préserver l'orientation des noeuds dans le noeud final. C'est en fait la somme connexe de deux variétés qui sera définie dans le paragraphe III.1.2.*

Définition I.2.5. *Un noeud K est dit premier si l'égalité $K = K_1 + K_2$ implique que K_1 ou K_2 est le noeud trivial.*

II Enlacement et lien avec l'homologie

II.1 Enlacement et lien avec l'homologie

Si L est un entrelac à deux composantes L_1, L_2 , alors à équivalence de noeuds près, il y a un nombre fini d'intersections dans le diagramme entre L_1 et L_2 , et chaque intersection est l'intersection d'exactly deux brins de courbe. On associe un signe à chaque intersection, qui dépend de l'orientation des noeuds : si en prenant l'orientation de la courbe qui passe au-dessus puis celle de la courbe qui passe en dessous, on obtient une base directe de \mathbb{R}^2 , alors on associe le signe $+1$, sinon on associe le signe -1 .



+1



-1

On obtient alors la définition suivante :

Définition II.1.1. *Soit L un entrelac à deux composantes L_1 et L_2 . On définit l'enlacement de L_1 et L_2 , qu'on note $lk(L_1, L_2)$, comme la moitié de la somme des signes associés au diagramme de L .*

Remarque II.1.2. *La valeur de $lk(L_1, L_2)$ est indépendante par mouvement de Reidemeister, ce qui donne la juste définition de l'enlacement. De plus on a $lk(L_1, L_2) = lk(L_2, L_1)$.*

Introduisons quelques notations : Soit K un noeud dans \mathbb{S}^3 . On notera N un voisinage de K qui est un tore solide, l'extérieur X de K est l'adhérence de $\mathbb{S}^3 - N$. On ne prend pas en compte le choix de N pour définir l'extérieur puisque, quelque soit le choix du voisinage assez petit N choisi, on aura toujours $H_1(X) = H_1(\mathbb{S}^3 - K)$.

Théorème II.1.3. *Soit K un noeud orienté dans \mathbb{S}^3 , notons X son extérieur. Alors $H_1(X) = \mathbb{Z}$ et est engendré par la classe d'un lacet dans ∂N qui borde un disque fermé intersectant K en un et un seul point. On a alors, pour C , un lacet de X , $[C] = lk(C, K)$. De plus, $H_3(X) = H_2(X) = 0$.*

Démonstration. On peut remarquer que $X \cup N = \mathbb{S}^3$ et $X \cap N = \partial N$ est un tore. On en déduit, d'après le théorème de Mayer-Vietoris (X et N sont fermés et non ouverts, mais quitte à prendre des voisinages réguliers de ces deux fermés, qui seront alors deux retractes par déformation forte de ces derniers, on peut tout de même appliquer le théorème de Mayer-Vietoris), qu'on a la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \dots & \longrightarrow & H_3(X) \oplus H_3(N) & \longrightarrow & H_3(\mathbb{S}^3) \\
 & & & & & \swarrow & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & \swarrow & \\
 H_2(X \cap N) & \longrightarrow & H_2(X) \oplus H_2(N) & \longrightarrow & H_2(\mathbb{S}^3) & & \\
 & & & & & \swarrow & \\
 & & & & & \swarrow & \\
 H_1(X \cap N) & \longrightarrow & H_1(X) \oplus H_1(N) & \longrightarrow & H_1(\mathbb{S}^3) & &
 \end{array}$$

Or, on a déjà les résultats d'homologie suivants (puisque $X \cap N = \partial N$ est un tore, que N est un tore plein, et puisque X et N se retractsent sur $\partial N = \partial X$ qui sont des variétés de dimension deux) :

$$\begin{aligned}
 H_3(X) &= H_3(N) = 0, \\
 H_3(\mathbb{S}^3) &= \mathbb{Z}, \\
 H_2(X \cap N) &= \mathbb{Z}, \\
 H_2(N) &= 0, \\
 H_2(\mathbb{S}^3) &= 0, \\
 H_1(X \cap N) &= \mathbb{Z}^2, \\
 H_1(N) &= \mathbb{Z}, \\
 H_1(\mathbb{S}^3) &= 0.
 \end{aligned}$$

Il nous reste alors à trouver $H_1(X)$ et $H_2(X)$. Or l'exactitude de la suite longue donne la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_2(X)$$

Ce qui donne $H_2(X) = 0$ (puisque le générateur de $H_3(\mathbb{S}^3)$ est envoyé sur celui de $H_2(X \cap N)$ d'après la preuve du théorème de Mayer-Vietoris).

De même on a la suite exacte courte : $0 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow H_1(X) \oplus \mathbb{Z} \rightarrow 0$

ce qui donne $H_1(X) = \mathbb{Z}$.

De plus, l'isomorphisme $H_1(X \cap N) \rightarrow H_1(X) \oplus H_1(N)$ est induit par les $X \cap N \hookrightarrow X$ et $X \cap N \hookrightarrow N$. Prenons μ un lacet injectif dans ∂N qui borde un disque dans N qui intersecte K en exactement un point. Alors, $[\mu]$ est indivisible dans $H_1(X)$, et vaut 0 dans $H_1(N)$ (car homotope à l'application constante), donc est le point $(1, 0) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = H_1(X) \oplus H_1(N)$, et donc $[\mu]$ engendre $H_1(X)$. On observe de plus que $lk(\mu, K) = 1$, et que si $[C] = n[\mu]$, alors $lk(C, K) = lk(n\mu, K) = n$. \square

Remarque II.1.4. On remarque qu'on peut aussi trouver dans $H_1(X \cap N)$ une classe représentée par un lacet continue injectif λ dans ∂N correspondant à $(0, 1) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = H_1(X) \oplus H_1(N)$.

Définition II.1.5. Soit K un noeud orienté dans \mathbb{S}^3 et N un voisinage de K qui est un tore solide. En reprenant les notations précédentes, on appelle μ un méridien et λ une longitude.

Théorème II.1.6. Si L est un entrelac à m composantes dans \mathbb{S}^3 et si X est son extérieur, alors $H_2(X) = \bigoplus_{m-1} \mathbb{Z}$, $H_1(X) = \bigoplus_m \mathbb{Z}$ et $H_1(X)$ est engendré par les méridiens $\{\mu_i\}$.

Démonstration. La preuve est analogue à celle du théorème II.1.3. □

III Surface de Seifert, genre et factorisation d'un noeud

Nous allons maintenant définir des surfaces associées à un entrelac par une définition naturelle, puis son genre. Avant cela nous aurons besoin de rappels sur les surfaces, notamment leur définition, les opérations que l'on peut définir dessus et d'autres résultats comme la classification des surfaces, qui nous serviront plus tard pour définir correctement la surface de Seifert d'un entrelac.

III.1 Généralités sur les variétés

III.1.1 Variétés

Définition III.1.1. On appelle variété topologique (sans bord) de dimension $n \in \mathbb{N}$ un espace topologique X séparé, donné par une base dénombrable d'ouverts de cartes, muni d'un atlas maximal $(U_i, p_i)_{i \in I}$ tel que $p_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit un homéomorphisme.

Définition III.1.2. Une variété topologique à bord de dimension $n \in \mathbb{N}$ est un espace topologique X séparé, donné par une base dénombrable d'ouverts de cartes, muni d'un atlas maximal $(U_i, p_i)_{i \in I}$ tel que $p_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ soit un homéomorphisme sur son image.

Remarque III.1.3. On décrit généralement une structure de variété par un choix adéquats de cartes qui recouvrent l'espace. Un lemme classique assure que c'est suffisant : il existe un unique atlas maximal qui contient ces cartes. En effet, l'ensemble des atlas contenant ces cartes ordonnés par l'inclusion est inductif, et le lemme de Zorn s'applique alors.

Exemple III.1.4. On appelle surface/courbe (à bord) une variété topologique de dimension deux/un (à bord). On vérifie par exemple que $S^1, [0, 1]$ sont respectivement deux courbes, la seconde ayant un bord, et que S^2 et $S^1 \times S^1$ (le tore !) sont des surfaces (sans bord).

Définition III.1.5. Etant donné une variété V à bord, le bord de V est l'ensemble

$$\partial V := \{x \in V \mid \text{il existe une carte } p \text{ définie au voisinage de } x \text{ telle que } \pi_n(p(x)) = 0\}$$

Remarque III.1.6. La dimension d'une variété topologique connexe est unique, i.e bien définie : c'est le théorème de l'invariance du domaine. Similairement, et, si un point est sur le bord selon une certaine carte, il l'est selon toutes les cartes. On en verra une preuve dans le cas des surfaces.

III.1.2 Opérations sur les variétés

Etant donné les quelques variétés, on peut se demander comment en construire de nouvelles. On va pouvoir y définir un produit, mais plus important on peut également y définir une somme. Etant donné deux variétés sans bords V et W de même dimension n , on définit la somme connexe de V et W , notée $V \# W$:

On choisit arbitrairement $v_0 \in V, w_0 \in W$ et deux paramétrages $p^V : \mathbb{D}^n \rightarrow V, p^W : \mathbb{D}^n \rightarrow W$ d'un voisinage de v_0 et w_0 respectivement. On considère alors V et W privés de l'image intérieure des disques et recollés le long de l'image des sphères qui bordent l'intérieur de ces disques. Concrètement, on prend $V \setminus p^V(\mathring{\mathbb{D}}^n) \sqcup W \setminus p^W(\mathring{\mathbb{D}}^n)$ et on quotiente par la relation $\forall s \in S^{n-1}, p^V(s) \sim p^W(s)$.

Remarque III.1.7. Cette construction est bien définie, i.e à homéomorphisme près le choix des points et paramétrages fournit la même variété. Pour les variétés topologiques en toute généralité, c'était une question ouverte jusqu'à 1982 (et faux sans hypothèse de lissité topologique sur les paramétrages par les disques!). On peut trouver une discussion et des références sur les cas topologiques et lisses [ici](#).

III.2 Interlude : Courbes

Pour se fixer les idées, on va s'attaquer au problème de classifier les variétés compactes de dimensions 1 : les courbes. La manière d'attaquer le problème se transportera à la dimension 2, qui est notre objectif. La démarche sera la suivante :

- 1) Montrer que toute courbe est la réalisation topologique d'un objet combinatoire
- 2) Etudier la combinatoire de cet objet pour s'intéresser aux possibilités dans le monde topologique et lister toutes les situations possibles
- 3) Vérifier que ces situations sont bien toutes deux à deux distinctes.

Remarque III.2.1. Pour la dernière étape, on ne trouvera qu'un seul cas possible..

Remarque III.2.2. Quand on cherche à classifier des variétés, on peut toujours les supposer connexes : Une variété est l'union de ses composantes connexes, qui sont elle mêmes des variétés.

Théorème III.2.3. Toute courbe C compacte est homéomorphe à (la réalisation géométrique d')un graphe.

Démonstration. Autour de chaque point $x \in C$, on choisit un voisinage I_x homéomorphe à $[0, 1]$. Par compacité, C est recouvert par un nombre fini de tels voisinages, disons I_1, \dots, I_n . Dès que $I_i \cap I_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$, C est homéomorphe à la réalisation d'un graphe. On montre qu'on peut se ramener à cette situation :

Si $I_i \subset I_j$, on peut oublier I_i . Sinon, on peut remplacer I_j par $\overline{I_j \cap I_i}$ qui est encore un intervalle fermé.

En répétant l'opération un nombre fini de fois, le processus finit, ce qui conclut. □

Théorème III.2.4. Toute courbe compacte connexe C est homéomorphe au cercle S^1

Démonstration. Par le théorème précédent, on peut voir C comme (la réalisation géométrique d') un graphe. Puisque C est localement $]0, 1[$, on sait que quitte à choisir un voisinage V d'un sommet v de C assez petit, $V \setminus \{v\}$ a exactement deux composantes connexes, d'où $\deg v = 2$. Une récurrence sur le nombre de sommets de C assure alors nécessairement que si C a n sommets, on a

$$C \simeq_{\text{graphe}} D_n \simeq_{\text{topo}} S^1$$

C'est le résultat voulu. □

III.3 Triangulation des surfaces

La première étape annoncée était “ Montrer que toute courbe est la réalisation topologique d’un objet combinatoire ”. Mais quel objet combinatoire? Pour les variétés de dimension 1, les graphes ont rempli ce rôle, et pour les variétés de dimension 2 on parlera de complexe simplicial. Pour définir ce dont il s’agit, on a besoin de la notion de simplexe :

Définition III.3.1. Soient $n + 1$ points a_0, \dots, a_n dans un espace affine, qu’on suppose affinement indépendants, i.e qui ne sont pas contenus dans un sous-espace affine de dimension $n - 1$. Le n -simplexe σ engendré par les points a_0, \dots, a_n est l’enveloppe convexe de ces derniers :

$$\sigma = \text{Conv}(a_0, \dots, a_n)$$

Les $(n - 1)$ -faces de σ sont alors données par

$$\sigma^{(i)} = \text{Conv}(a_0, \dots, \bar{a}_i, \dots, a_n)$$

où $\bar{}$ dénote l’omission. Elles sont elles mêmes des $(n - 1)$ -simplexes.

Remarque III.3.2. On appellera les faces $\sigma^{(i)}$ d’un n -simplexe σ des $(n - 1)$ -faces, puis des $(n - 2)$ -faces les faces des $(n - 1)$ -faces et ainsi de suite, jusqu’aux 0-faces qui seront les points dont on a considéré l’enveloppe convexe.

On peut alors définir

Définition III.3.3. Un complexe simplicial est la donnée d’une famille \mathcal{K} finie ou dénombrable de simplexes de telle sorte que les deux conditions suivantes soient remplies :

- Si $\sigma \in \mathcal{K}$, toutes les faces de σ appartiennent également à \mathcal{K} .
- Si $\sigma, \eta \in \mathcal{K}$, soit $\sigma \cap \eta = \emptyset$, soit $\sigma \cap \eta$ est une face de σ et de η .

La dimension du complexe est le maximum (possiblement infini) de la dimension de ses simplexes. On note $|\mathcal{K}| = \bigcup \mathcal{K}$ la réalisation géométrique du complexe.

Remarque III.3.4. On peut réécrire la seconde condition en disant que $\sigma \cap \theta$ est égal à l’enveloppe convexe des sommets (0-faces) appartenant à l’intersection.

Remarque III.3.5. Un complexe simplicial de dimension 1 est la donnée de la réalisation affine par morceaux d’un graphe au plus dénombrable.

Définition III.3.6. Une variété V est triangulable s’il existe un homéomorphisme $h : |\mathcal{K}| \rightarrow V$. Un tel choix d’homéomorphisme est appelé une triangulation, et dès lors qu’un tel choix est fait, la variété est dite triangulée.

Remarque III.3.7. En vertu de la Remarque III.1.6, une variété de dimension n ne peut être triangulée que par un complexe de dimension n .

Remarque III.3.8. Le Théorème III.5.4 se reformule en : toute courbe compacte est triangulable.

Théorème III.3.9. Toute surface compacte est triangulable, et deux triangulations sont toujours reliées par un raffinement commun.

Remarque III.3.10. *On ne discute pas en détail de la preuve de ce résultat. On peut, entre autres, montrer que toute 2-variété a une unique structure différentielle compatible [Hat], et que toute variété différentielle est triangulable [Mun61], ou approcher la preuve directement [Tho]. Toutes les preuves directes utilisent le théorème de Jordan-Schönflies, dont on trouvera également une preuve dans [Tho].*

Pour l'existence d'un raffinement commun, on esquisse la preuve : on "fait" simultanément les deux triangulations, ce qui va donner une polygonalisation de la surface. Il ne reste alors qu'à trianguler ces polygones.

III.4 L'orientabilité d'une surface

Le ruban de Möbius nous indique qu'il existe des surfaces qui n'admettent pas de choix d'orientation locale qui soit globalement cohérent. On veut donc distinguer les surfaces "orientables" de celles qui ne le sont pas. Pour une surface triangulée, on a

Définition III.4.1. *Soit S une surface triangulée connexe. La surface est dite orientable s'il existe une orientation des triangles de sorte à ce que chaque orientation de deux triangles adjacents orientent le segment commun dans des sens opposés.*

Il y a alors exactement deux orientations possibles, et de plus l'orientabilité ne dépend pas du choix de la triangulation.

Démonstration. S'il existe une orientation, il en existe exactement une autre : on choisit un triangle au hasard et on inverse l'orientation de son bord. De proche en proche, l'orientation de tous les triangles est ainsi entièrement déterminée (puisque notre surface est connexe). L'indépendance vis à vis du choix de la triangulation est garantie par l'existence d'un raffinement commun, sur lequel est induite une orientation (via l'argument du paragraphe III.1.2). \square

En fait, on peut montrer qu'une surface est non-orientable si et seulement si on peut y plonger un ruban de Möbius. C'est ce qui justifie la seconde définition :

Proposition III.4.2. *Une surface S est orientable si et seulement si le groupe $H_1(S)$ est sans torsion. Sinon, la composante de torsion est égale à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et est engendrée par l'équateur d'un ruban de Möbius plongé dans S .*

III.5 Le genre d'une surface

On définit le genre d'une surface à partir de son premier groupe d'homologie

Définition III.5.1. *Etant donné une surface S orientable, on définit son genre orientable comme $g_S := \frac{1}{2} \dim H_1(S, \mathbb{Q}) = \frac{1}{2} \dim H_1(S, \mathbb{Z})$, c'est la moitié de la dimension de son premier groupe d'homologie.*

Remarque III.5.2. *La définition III.5.1 est justifiée d'après la dualité de Poincaré, qui donne la liberté du H_1 et la parité de sa dimension. Cette définition, a priori un peu arbitraire, est en fait équivalente à la suivante : le genre orientable est le nombre maximum de courbes fermées simples disjointes dont on peut priver la surface tout en la gardant connexe.*

Définition III.5.3. *Etant donné une surface S non-orientable, on définit son genre non-orientable $g_S := \dim H_1(S, \mathbb{Q}) - 1 = \dim H_1(S, \mathbb{Z}) - 1$ comme la dimension de son premier groupe d'homologie auquel on soustrait 1.*

On a

Théorème III.5.4. *Soit S_1, S_2 deux surfaces, dont au moins une est orientable. On a alors l'égalité*

$$H_1(S_1 \# S_2) = H_1(S_1) \oplus H_1(S_2)$$

Si S_1 et S_2 sont toutes les deux non-orientables alors il faut remplacer un des deux facteurs $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par un \mathbb{Z} dans l'égalité précédente.

III.6 Quelques surfaces compactes standards

On note, pour $n \geq 1$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Avec ces notations, S^2 (la sphère) et $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ (le tore) sont des surfaces compactes connexes. On peut aussi considérer des sommes connexes de ceux-ci, mais on se convainc que la sphère agit comme un élément neutre de la somme connexe. On obtient donc la famille, indexée par son genre $g \in \mathbb{N}$, de surfaces connexes compactes

$$\Sigma_0 = S^2 \quad \Sigma_{g+1} = \Sigma_g \# \mathbb{T}$$

On appellera Σ_g la surface (orientable (connexe)) de genre g , terminologie justifiée par le théorème de classification qui assure que c'est bien la seule.

Dans le monde des surfaces non-orientable, on a le plan projectif \mathbb{RP}^2 , qui peut être décrit comme le quotient de S^2 par la relation $x \sim -x$. On vérifie que le genre non-orientable de \mathbb{RP}^2 est de 1, et on définit à nouveau une famille de surfaces (compactes connexes) non-orientables de genre $g \geq 1$ en considérant

$$\Gamma_1 = \mathbb{RP}^2 \quad \Gamma_{g+1} = \Gamma_g \# \mathbb{RP}^2$$

Remarque III.6.1. *On a Γ_2 qui est (homéomorphe à) une bouteille de Klein.*

On peut montrer que la liste des classes d'homéomorphisme des surfaces compactes est complète, en triangulant la surface et en simplifiant successivement les arêtes de sorte à obtenir d'abord un énorme polygone à n sommets, puis à identifier des sommets entre eux. On trouvera les détails de la démarche dans [Hua].

Remarque III.6.2. *On a déjà les outils pour vérifier que cette liste ne contient pas de doublons : l'orientabilité distingue clairement nos deux familles, et le genre fait le tri au sein même des familles.*

III.7 Surface de Seifert et genre d'un entrelac

Définition III.7.1. *Une surface de Seifert F d'un entrelac orienté L de \mathbb{S}^3 est une surface compacte, connexe, orientée dans \mathbb{S}^3 telle que L soit le bord orienté de F .*

Théorème III.7.2. *Tout entrelac orienté L de \mathbb{S}^3 admet une surface de Seifert.*

Remarque III.7.3. *La surface de Seifert d'un entrelac n'est pas toujours la surface la plus naturelle, par exemple, dans le cas du noeud de trefle ci-dessous, la surface la plus naturelle est un ruban de Möbius, qui n'est pas orientable. Il faut une construction plus fine pour trouver une surface de Seifert.*

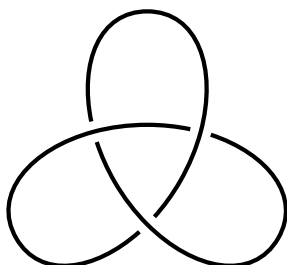


FIGURE 2 – Le noeud de trefle

Démonstration. Soit D un diagramme pour L et \hat{D} le diagramme obtenu en appliquant la transformation ci-dessous. Alors \hat{D} est une union disjointe de lacets continus injectifs disjoints, et admet donc directement une surface de Seifert. On en déduit alors une surface de Seifert sur D (et donc sur L) en racochant bien (on tord la surface si nécessaire pour garder l'orientation).



□

Définition III.7.4. *On définit alors le genre d'un entrelac L par :*

$$g(L) := \min \{g(F) \mid F \text{ surface de Seifert de } L\}.$$

Si deux entrelacs sont équivalents, alors ils sont reliés par un difféomorphisme lisse qui préserve l'orientation, et alors une surface de Seifert du premier entrelac est envoyée par ce difféomorphisme sur une surface de Seifert de même genre du deuxième. Cela implique que le genre est un invariant d'entrelac.

III.8 Factorisation d'un noeud

Tout cela nous permet d'amener des notions arithmétiques sur les noeuds, en exploitant l'opération d'addition des noeuds, qui, comme on va le voir maintenant, est bien transmise par le genre. Certains résultats arithmétiques sur \mathbb{N} pourront alors nous en donner sur les noeuds.

Proposition III.8.1. *Si $g(K) = 0$, alors K est le noeud trivial.*

Démonstration. Si $g(K) = 0$, alors une surface de Seifert du noeud K est le disque \mathbb{D}^2 , et donc K est le bord $\partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1$, donc le noeud trivial. □

Proposition III.8.2. *Pour tous noeuds K_1 et K_2 , on a*

$$g(K_1 + K_2) = g(K_1) + g(K_2).$$

Démonstration. Soient K_1 et K_2 deux noeuds. Soient F_1 et F_2 des surfaces de Seifert respectives de K_1 et K_2 . La somme connexe $K_1 + K_2$ est définie en considérant une petite partie de K_1 et K_2 homéomorphe à $[0, 1]$ via p_1, p_2 , puis en quotientant $K_1 - p_1^{-1}(]0, 1[) \sqcup K_2 - p_2^{-1}(]0, 1[)$ par $p_1^{-1}(1) = p_2^{-1}(0)$ et $p_1^{-1}(0) = p_2^{-1}(1)$. On peut alors prendre des cartes (U_i, q_i) de F_i avec $q_i : U_i \rightarrow \mathbb{D}^n \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ telles que $q_i^{-1}(\{0\} \times [0, 1]) = p_i^{-1}([0, 1])$ et prendre F la somme connexe de F_1 et F_2 en utilisant les paramétrages q_i , pour obtenir une surface de Seifert de $K := K_1 + K_2$. Le théorème III.5.4 donne alors $g(K) \leq g(K_1) + g(K_2)$.

Soit maintenant F une surface de Seifert de genre minimal. On considère un plan (ou une 2-sphère dans \mathbb{S}^3) P dans \mathbb{R}^3 qui sépare K en K_1 et K_2 (c'est-à-dire que si l'on regarde les deux courbes obtenues en regardant chaque composante connexe de $K - (P \cap K)$ et qu'on les quotiente par leur bord, on obtient les noeuds K_1 et K_2) et qui coupe transversalement F . L'intersection de F et S est alors une sous-variété compacte de dimension 1 à une composante de bord, donc une union finie de cercles \mathbb{S}^1 disjoints et d'un segment $[0, 1]$. On note F_1 et F_2 les deux composantes connexes de la surface $F - (P \cap F)$. Le bord de F_i est alors K_i et les cercles \mathbb{S}^1 disjoints, auxquels on peut recoller des disques \mathbb{D}^2 . On a alors deux nouvelles surfaces F'_1 et F'_2 de Seifert de K_1 et K_2 telles que $g(F'_1) + g(F'_2) \leq g(F) = g(K)$. On a alors le résultat voulu :

$$g(K_1 + K_2) = g(K_1) + g(K_2).$$

□

Corollaire III.8.3. *Si $K_1 + K_2$ est le noeud trivial, alors K_1 et K_2 sont tout les deux le noeud trivial.*

Corollaire III.8.4. *Un noeud de genre 1 est premier.*

Corollaire III.8.5. *Il existe un nombre infini de noeuds distincts.*

Démonstration. Le genre du noeud de trefle est 1, donc on peut faire la somme de n noeuds de trefles pour obtenir un noeud de genre n . Or le genre est un invariant de noeud, ce qui conclut la preuve. □

Corollaire III.8.6. *Un noeud s'écrit comme une somme finie de noeuds premiers.*

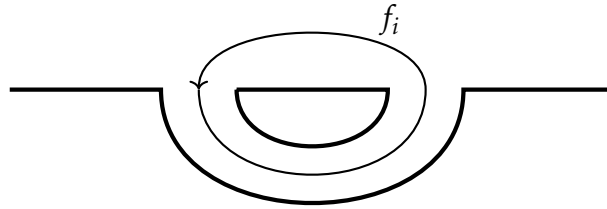
Démonstration. La preuve se fait par une récurrence forte sur le genre que nous ne détailleront pas, mais qui se base sur l'idée que si un noeud n'est pas premier, il s'écrit comme la somme de deux noeuds non triviaux, qui sont de genre strictement inférieur à celui du noeud initial. □

IV Forme et matrice de Seifert et polynôme d'Alexander

IV.1 Forme et matrice de Seifert

Proposition IV.1.1. *Soit L un entrelac à n composantes et F une surface de Seifert sur L . On note g son genre. Alors $H_1(F) = \bigoplus_{2g+n-1} \mathbb{Z}$. On notera $\{f_i\}$ ses générateurs.*

Démonstration. On peut trouver les générateurs : les $(f_i)_{1 \leq i \leq 2g}$ viennent du genre g de la surface de Seifert, et les $(f_i)_{2g+1 \leq i \leq 2g+n-1}$ viennent des n composantes de bord de F . En effet on obtient ces derniers comme sur le schéma ci-dessous. \square



Théorème IV.1.2. Soit F une surface connexe, compacte, orientée, de bord non vide, affine par morceaux de \mathbb{S}^3 . Alors les groupes d'homologie $H_1(\mathbb{S}^3 - F)$ et $H_1(F)$ sont isomorphes, et il existe une unique forme bilinéaire non dégénérée

$$\beta : H_1(\mathbb{S}^3 - F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$$

telle que $\beta([c], [d]) = lk(c, d)$ pour tous lacets injectifs c et d .

Démonstration. On garde les notations de la question précédentes. Soit V un voisinage régulier de F dans \mathbb{S}^3 assez petit, de sorte que V ai exactement un genre égal à $2g + n - 1$. Alors l'inclusion de F dans V est une équivalence d'homotopie, et $H_1(\partial V) = (\bigoplus_{2g+n-1} \mathbb{Z}) \oplus (\bigoplus_{2g+n-1} \mathbb{Z})$

car ∂V est une surface fermée sans bord de genre $2g + n - 1$. On peut prendre les générateurs $\{[f'_i]\}_{1 \leq i \leq 2g+n-1}$ et $\{[e_i]\}_{1 \leq i \leq 2g+n-1}$ de sorte que f'_i soit une longitude de f_i et e_i en soit un méridien. De plus, quitte à prendre \bar{e}_i , on peut supposer que $lk(e_i, f_j) = \delta_{ij}$. Notons V' l'adhérence de $\mathbb{S}^3 - V$. On applique alors le théorème de Mayer-Vietoris qui donne la suite exacte suivante :

$$H_2(\mathbb{S}^3) \rightarrow H_1(\partial V) \rightarrow H_1(V) \oplus H_1(V') \rightarrow H_1(\mathbb{S}^3)$$

qui est en fait la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow H_1(\partial V) \rightarrow H_1(V) \oplus H_1(V') \rightarrow 0.$$

Donc la flèche du milieu est un isomorphisme. On remarque de plus que $H_1(V') = H_1(\mathbb{S}^3 - V)$, donc ce dernier est isomorphe à $\bigoplus_{2g+n-1} \mathbb{Z}$ et est engendré par les $\{[e_i]\}$.

On définit alors β par $\beta([e_i], [f_j]) = \delta_{ij} = lk(e_i, f_j)$.

On trouve alors, la forme β étant bilinéaire, que $\beta([c], [d]) = lk(c, d)$ pour tous lacets injectifs c et d , en décomposants c et d dans les bases qu'on vient d'introduire. \square

Remarque IV.1.3. Si F est une surface de Seifert pour un entrelac L , si N est un voisinage régulier de L et si X est l'adhérence de $\mathbb{S}^3 - N$. $F \cap X$ est alors homotope à F , et on peut alors le voir dans X comme F . On peut trouver dans X un voisinage de la forme $F \times [-1, 1]$ tel que le méridien de chaque composante de L rentre dans le voisinage en $F \times -1$ et sorte en $F \times 1$.

Définition IV.1.4. On définit les deux applications $i^\pm : F \rightarrow \mathbb{S}^3 - F$ par $i^\pm(x) = x \times \pm 1$. De plus, si c est un lacet continu injectif, on notera $c^\pm = i^\pm c$.

Définition IV.1.5. Soit F une surface de Seifert pour un noeud L . On peut lui associer la forme de Seifert :

$$\alpha : H_1(F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$$

définie par $\alpha(x, y) := \beta((i^-)_*x, y)$.

Définition IV.1.6. La matrice de Seifert A est définie par $A_{ij} := \alpha([f_i], [f_j]) = lk(f_i^-, f_j) = lk(f_i, f_j^+)$.

Définition IV.1.7. On dit que deux matrices A et B sur \mathbb{Z} sont S -équivalentes si elles sont reliées

par une séquence d'élargissement (ie remplacer A par $\begin{pmatrix} A & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ y^T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$) ou de remplacement de A par $P^T A P$ où $\det(P) = \pm 1$.

Théorème IV.1.8. Soient A et B deux matrices de Seifert d'un entrelac orienté L . Alors A et B sont S -équivalentes.

Cette preuve longue et trop compliquée pour ce mémoire, basée sur le résultat non trivial suivant : deux surfaces de Seifert différent d'un nombre fini de recollement d'anses, ne sera pas prouvée ici, mais est décrite dans [Lic97].

IV.2 Polynôme d'Alexander

Considérons $Y := X - F \times]-1, 1[$. On remarque que $X = Y/\phi$ où $\phi : F^- \rightarrow F^+$ est l'homéomorphisme naturel entre F , F^+ et F^- .

On considère alors $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ des copies de Y reliées à Y par des homéomorphismes $h_i : Y \rightarrow Y_i$.

Définition IV.2.1. On note X_∞ l'union disjointe des Y_i quotientée par les homéomorphismes $h_{i+1} \phi h_i$ (c'est-à-dire qu'on identifie $h_i F^-$ et $h_{i+1} F^+$).

Proposition IV.2.2. L'application $t : X_\infty \rightarrow X_\infty$ définie par $t|_{Y_i} = h_{i+1} h_i^{-1}$ est un homéomorphisme de X_∞ , appelée translation à droite.

On remarque que \mathbb{Z} agit par homéomorphisme sur X_∞ de manière totalement discontinue via l'application t . Alors $p : X_\infty \rightarrow X_\infty/\mathbb{Z} = X$ est un revêtement galoisien et $Aut(p) = \mathbb{Z} = \langle t \rangle$. On aurait pu alors construire X_∞ en passant par les revêtements galoisiens.

Proposition IV.2.3. L'anneau des polynômes de Laurent en t (on notera t plutôt que t_* par la suite pour des raisons de clareté) $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ agit sur $H_1(X_\infty)$. On en déduit alors que $H_1(X_\infty)$ est un module sur $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$.

Démonstration. Le groupe $\langle t \rangle$ agit sur X_∞ par évaluation $(n, x) \mapsto t^n(x)$, donc $\langle t \rangle$ agit aussi sur $H_1(X_\infty)$, et donc $\mathbb{Z} \langle t \rangle$ (qui est la somme formelle sur \mathbb{Z} des éléments de $\langle t \rangle$) agit sur $H_1(X_\infty)$. Or $\mathbb{Z}[t^{-1}, t] = \mathbb{Z} \langle t \rangle$, ce qui donne le résultat. \square

Définition IV.2.4. Si on a une suite exacte de modules $F \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$, où E et F sont des modules libres de bases finies, et si α est représentée par une matrice A , on dit que A est une matrice de présentation de M .

Remarque IV.2.5. L'application ϕ est une surjection, donc une base de E peut être vue comme des générateurs de M , et les images d'une base de F par A comme les relations entre ces générateurs.

Théorème IV.2.6. Deux matrices de représentation de M diffèrent d'une série finie des modifications suivantes : la permutation de lignes ou de colonnes, l'ajout d'une colonne de zéros, l'ajout du produit d'un scalaire fois une colonne ou ligne à une colonne ou ligne, et la transformation de A en $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La preuve de ce théorème est une preuve de calcul matriciel que l'on peut retrouver dans [Lic97], p.50.

Théorème IV.2.7. Soit F une surface de Seifert pour un entrelac L dans \mathbb{S}^3 et soit A une matrice de Seifert associée (qui dépend de la base de $H_1(F)$ choisie). Alors $tA - A^T$ est une matrice qui présente le $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ -module $H_1(X_\infty)$.

On ne prouvera pas non plus ce résultat, qui se trouve aussi dans [Lic97], p.54.

Définition IV.2.8. Soit M un R -module muni d'une matrice de présentation $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$. Le r -ème idéal élémentaire \mathcal{E}_r de M est l'idéal de R engendré par les mineurs de taille $m - r + 1$ de A .

On remarque que les idéaux élémentaires d'une matrice sont bien définis, car les mineurs de deux matrices de présentation d'un même module sont les mêmes, d'après le théorème IV.2.7.

Définition IV.2.9. Le r -ème idéal d'Alexander d'un entrelac orienté L est le r -ème idéal élémentaire du $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ -module $H_1(X_\infty)$. Le r -ème polynôme d'Alexander de L est un générateur du plus petit idéal principal de $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ qui contient le r -ème idéal d'Alexander. Le premier polynôme d'Alexander est appelé le polynôme d'Alexander et est noté $\Delta_L(t)$.

Proposition IV.2.10. On a à multiplication par $\pm t^{\pm n}$ près, $\Delta_L(t) \doteq \det(tA - A^T)$.

Exemple IV.2.11. Regardons le noeud trivial K . Une surface de Seifert évidente est le disque \mathbb{D}^2 , et l'espace X_∞ est $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$. Dans ce cas, $H_1(X_\infty) = 0$, et le module nulle est représenté par la matrice identité de taille 1, donc $\Delta_K(t) \doteq 1$.

Théorème IV.2.12.

- (i) Pour tout entrelac L , $\Delta_L(t) \doteq \Delta_L(t^{-1})$.
- (ii) Pour tout noeud K , $\Delta_K(1) = \pm 1$.

Démonstration. (i) Soit A une matrice $n \times n$ de présentation de L . Alors

$$\Delta_L(t) \doteq \det(tA - A^T) = \det(tA^T - A) = (-1)^n \det(t^{-1}A - A^T) \doteq \Delta_L(t^{-1}).$$

(ii) Soit A une matrice de Seifert de K pour une base $\{f_i\}$. Alors $\Delta_K(1) = \pm \det(A - A^T)$, et $(A - A^T)_{ij} = lk(f_i^-, f_j) - lk(f_i^+, f_j)$, donc, si g est le genre de la surface de Seifert F de A . Alors $(A - A^T)$ est diagonale par blocs avec g blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\det(A - A^T) = 1$. \square

Proposition IV.2.13. Soient K_1 et K_2 deux noeuds orientés, alors $\Delta_{K_1+K_2}(t) \doteq \Delta_{K_1}(t)\Delta_{K_2}(t)$.

Démonstration. Si A_1 et A_2 sont des matrices de Seifert de K_1 et K_2 , alors $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ est une matrice de Seifert de $K_1 + K_2$. \square

Proposition IV.2.14. *Soit K un noeud. Alors $2g(K) \geq \deg(\Delta_K)$.*

Démonstration. Si A est une matrice de Seifert de K de genre minimal, alors elle est de taille $2g(K) \times 2g(K)$, et donc le degré de $\det(tA - A^T)$ est au plus $2g(K)$. \square

V Sur la signature

On rappelle que la signature d'une matrice hermitienne est définie comme le nombre de valeurs propres strictement positives moins le nombre de valeurs propres strictement négatives. On va maintenant définir un troisième invariant d'entrelacs (après le genre et le polynôme d'Alexander) : la signature.

V.1 Signature d'un entrelac

Définition V.1.1. *Soit L un entrelac orienté dans \mathbb{S}^3 et $\omega \neq 1$ un complexe de module 1. On définit la ω -signature de L , $\sigma_\omega(L)$ comme la signature de la matrice hermitienne $(1 - \omega)A + (1 - \bar{\omega})A^T$ où A est une matrice de Seifert de L .*

Définition V.1.2. *On appelle signature d'un entrelac L l'entier $\sigma_{-1}(L)$.*

Proposition V.1.3. *$\sigma_\omega(L)$ est bien définie comme un invariant de L .*

Démonstration. La signature d'une matrice hermitienne est stable par conjugaison matricielle (d'après le théorème de Sylvester).

Notons $B = \begin{pmatrix} A & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $(1 - \omega)B + (1 - \bar{\omega})B^T = \begin{pmatrix} (1 - \omega)A + (1 - \bar{\omega})A^T & (1 - \omega)x & 0 \\ (1 - \bar{\omega})x^T & 0 & (1 - \omega) \\ 0 & (1 - \bar{\omega}) & 0 \end{pmatrix}$.

Puisque $(1 - \omega) \neq 0$ et $(1 - \bar{\omega}) \neq 0$, on peut par conjugaison matricielle enlever les termes en x et x^T .

De plus, la signature de $\begin{pmatrix} 0 & (1 - \omega) \\ (1 - \bar{\omega}) & 0 \end{pmatrix}$ est nulle car le déterminant de cette matrice hermitienne 2×2 est strictement négatif, donc les valeurs propres sont réelles non nulles de signes différents. Cela conclut la preuve (on fait de même pour le deuxième type d'élargissement). \square

Remarque V.1.4. *On peut écrire $(1 - \omega)A + (1 - \bar{\omega})A^T = -(1 - \bar{\omega})(\omega A - A^T)$, donc la signature est constante par morceaux à valeurs entières, et les points de discontinuité sont en nombre fini et sont parmi les racines du polynôme d'Alexander.*

De plus, si le polynôme d'Alexander n'admet que des racines simples sur le cercle unité, alors en tout point de discontinuité de la signature, elle ne change pas ou augmente ou diminue d'exactly deux.

Proposition V.1.5. Si L est un entrelac orienté dans \mathbb{S}^3 , alors pour tout $\omega \in \mathbb{U} - \{1\}$, on a :

$$\sigma_\omega(L) = -\sigma_\omega(\bar{L}).$$

Démonstration. Si A est une matrice de Seifert de L , alors $-A$ est une matrice de Seifert de \bar{L} . □

V.2 Signature d'une tresse

Définition V.2.1. Comme annoncé lors de la remarque I.1.8, on définit la signature d'une tresse $b \in B_n$ comme la signature de l'entrelac \hat{b} .

Proposition V.2.2. Si $b \in B_n$, alors on a $\sigma_\omega(b) = \sigma_\omega(i_n(b))$.

Démonstration. Si A est une matrice de Seifert pour b , alors $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de Seifert pour $i_n(b)$, ce qui donne le résultat recherché. □

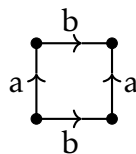
Définition V.2.3. Il est alors licite de définir $\sigma_\omega : B_\infty \rightarrow \mathbb{Z}$ par $\sigma_\omega|_{B_n}$ est la ω -signature sur B_n .

VI Noeud torique

Dans cette partie, nous allons étudier les noeuds toriques et calculer leurs genres, leurs polynômes d'Alexander et leurs signatures. Cela donne une application concrète des objets que nous venons d'introduire.

VI.1 Définitions

Rappel sur le tore : On rappelle que le tore est un CW-complexe fini de dimension 2, et qu'on peut l'obtenir en recollant le disque \mathbb{D}^2 selon le mot $aba^{-1}b^{-1}$ où on a :



Le tore peut aussi être vu comme le quotient de \mathbb{R}^2 par \mathbb{Z} qui agit sur \mathbb{R}^2 par translation.

Définition VI.1.1. Soient $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que p et q soient premiers entre eux. On définit le noeud torique $T(p, q)$ dans le tore $\mathbb{T} \subset \mathbb{S}^3$, comme la droite allant de $[(0, 0)]$ à $[(p, q)]$ dans le quotient $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}$.

Exemple VI.1.2. Dans l'exemple $(p, q) = (2, 3)$, le noeud torique en question est le noeud de trefle.

Remarque VI.1.3. Si l'on ne prend plus p et q premiers entre eux, alors on obtient un entrelac qu'on appellera entrelac torique.

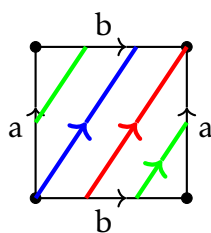


FIGURE 3 – La représentation torique du noeud de trèfle

Exemple VI.1.4. Pour tout entier naturel non nul q , le noeud torique $T(1, q)$ est le noeud trivial.

Exemple VI.1.5. Le noeud torique $T(2, 3)$ est le noeud de trèfle.

Il est aussi possible de définir l’entrelac torique à partir des tresses (on le fait dans le cas $p \in \mathbb{N}^*$, cas dans lequel on se placera à partir de maintenant) :

Proposition VI.1.6 (Autre définition des entrelacs toriques). On considère la tresse $b = (\sigma_1 \dots \sigma_{p-1})^q$ où $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors, $T(p, q)$ est l’entrelac \hat{b} obtenu par la méthode de la remarque 1.1.8.

VI.2 Calcul du genre et polynôme d’Alexander

Lemme VI.2.1. La surface de Seifert du noeud torique $T(p, q)$ obtenue par la construction du théorème III.7.2 est homotope à un graphe biparti à p sommets à gauche et q à droite, qu’on notera $\Gamma_{p,q}$

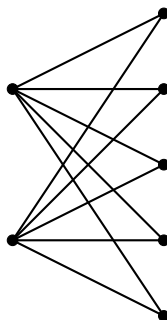


FIGURE 4 – Le graphe $\Gamma_{2,5}$

Démonstration. On regarde le diagramme obtenu à partir de la définition introduite plus tôt du noeud torique par les tresses. Plus particulièrement, on s’intéresse au diagramme obtenu par la construction du théorème III.7.2 et on note F la surface de Seifert de $T(p, q)$ obtenue. F est alors constituée de p disques \mathbb{D}^2 les uns au dessus des autres, reliés par des "twists", et il y a $(p - 1)q$ twists. Plus exactement, il y a q fois une série de $p - 1$ twists qui relient toutes les surfaces. On peut alors considérer un point dans chacun des q twists longs, et un point au centre de chaque un des p disques \mathbb{D}^2 , et on obtient un rétracte par déformation forte de F en reliant par une courbe chacun des q points des twists à chacun des p points des disques \mathbb{D}^2 . On obtient alors l’homotopie voulue. □

Lemme VI.2.2. *Le genre de la surface de Seifert F est égal à $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$.*

Démonstration. On utilise ici la définition homologique du genre : si g est le genre d'une surface S compacte connexe à une composante de bord, alors sa caractéristique d'Euler-Poincaré est $\chi(S) = 1 - 2g$.

On remarque que le graphe $\Gamma_{p,q}$ est un CW-complexe de dimension finie 1 à $p+q$ 0-cellules et pq 1-cellules. Or, pour un CW-complexe fini X , on a $\chi(X) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \alpha_p$ où α_p est le nombre

de p -cellules. On a alors $\chi(\Gamma_{p,q}) = p + q - pq = 1 - 2\frac{(p-1)(q-1)}{2}$, ce qui conclut (puisque la caractéristique d'Euler-Poincaré est invariante par homotopie.) \square

Lemme VI.2.3. *Une matrice de Seifert pour $T(p, q)$ est $-\Lambda_p \otimes \Lambda_q$ où*

$$\Lambda_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{a-1}(\mathbb{R}).$$

Démonstration. On prend toujours F la surface de Seifert obtenue par application du théorème III.7.2, qui est homotope à $\Gamma_{p,q}$. On note $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ les p sommets de gauche et $(f_j)_{1 \leq j \leq q}$ ceux de droite. On note aussi $S_0 := \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \mathbb{Z}e_i$ et $S_1 := \bigoplus_{1 \leq j \leq q} \mathbb{Z}f_j$. Montrons que $H_1(\Gamma_{p,q})$ est engendré par les $([e_i \otimes f_j - e_{i+1} \otimes f_j + e_{i+1} \otimes f_{j+1} - e_i \otimes f_{j+1}])_{1 \leq i \leq p-1, 1 \leq j \leq q-1}$. En effet, on a la suite

de complexe singulier suivante : $S_0 \otimes S_1 \xrightarrow{\partial} S_0 \oplus S_1 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$, où $\partial(e_i \otimes f_j) = f_j - e_i$. On a alors $H_1(\Gamma_{p,q}) = \ker(\partial)$.

Il est direct que pour tous $1 \leq i \leq p-1$ et $1 \leq j \leq q-1$,

$$e_i \otimes f_j - e_{i+1} \otimes f_j + e_{i+1} \otimes f_{j+1} - e_i \otimes f_{j+1} \in \ker(\partial).$$

Soit $c = \sum_{i,j=1}^{p,q} \lambda_{i,j} e_i \otimes f_j \in \ker(\partial)$. Alors pour tout $1 \leq i \leq p$, on a $\sum_{j=1}^q \lambda_{i,j} = 0$. Aussi, $\sum_{i=1}^p \lambda_{i,j} = 0$.

On construit la suite $(\mu_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$ telle que $\mu_{1,1} = \lambda_{1,1}$, pour $2 \leq i \leq p$, $\mu_{i,1} = \lambda_{i,1} + \mu_{i-1,1}$, pour $2 \leq j \leq q$, $\mu_{1,j} = \lambda_{1,j} + \mu_{1,j-1}$ et pour $i, j \geq 2$, $\mu_{i,j} = \lambda_{i,j} + \mu_{i-1,j} + \mu_{i,j-1} + \mu_{i-1,j-1}$. L'hypothèse $c \in \ker(\partial)$ assure que $\mu_{p,j} = \mu_{i,q} = 0$,

$$\text{et on en déduit que } c = \sum_{i,j=1}^{(p-1),(q-1)} \mu_{i,j} (e_i \otimes f_j - e_{i+1} \otimes f_j + e_{i+1} \otimes f_{j+1} - e_i \otimes f_{j+1}).$$

$$\text{Alors, } H_1(F) = H_1(\Gamma_{p,q}) = \bigoplus_{1 \leq i \leq p-1, 1 \leq j \leq q-1} \mathbb{Z}(e_i \otimes f_j - e_{i+1} \otimes f_j + e_{i+1} \otimes f_{j+1} - e_i \otimes f_{j+1}).$$

On a donc trouvé les générateurs de $H_1(F)$. On peut donc étudier la forme de Seifert α associée à F dans cette base. On vérifie que la matrice de la forme bilinéaire α est bien de la forme voulue dans cette base, ce qui conclut notre preuve. \square

Théorème VI.2.4. *Le polynôme d'Alexander du noeud torique $T(p, q)$ est $\Delta_{T(p,q)} = \frac{(t^{pq} - 1)(t - 1)}{(t^p - 1)(t^q - 1)}$*

Démonstration. D'après le lemme VI.2.3, une matrice de Seifert de $T(p, q)$ est la matrice $-\Lambda_p \otimes \Lambda_q$. Or, Λ_a est égale à $P_a \Omega_a P_a^*$ où P_a est inversible et $\Omega_a = \text{Diag}(1 - e^{2i\pi/a}, \dots, 1 - e^{2i\pi(a-1)/a})$. Alors, puisque $\Delta_{T(p,q)} \doteq \det(tA - A^*)$, et parce que $\Delta_{T(p,q)}$ est unitaire, on peut écrire

$$\Delta_{T(p,q)}(t) = \prod_{1 \leq i \leq p-1} \prod_{1 \leq j \leq q-1} \left(t - \begin{pmatrix} 1 - e^{-\frac{2i\pi l}{p}} \\ 1 - e^{\frac{2i\pi l}{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - e^{-\frac{2i\pi k}{q}} \\ 1 - e^{\frac{2i\pi k}{q}} \end{pmatrix} \right) = \prod_{1 \leq i \leq p-1} \prod_{1 \leq j \leq q-1} \left(t - e^{\frac{2i\pi l}{p}} e^{\frac{2i\pi k}{q}} \right)$$

d'où

$$\Delta_{T(p,q)} = \frac{(t^{pq} - 1)(t - 1)}{(t^p - 1)(t^q - 1)}.$$

□

Théorème VI.2.5. *Le genre du noeud torique est $g(T(p, q)) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$.*

Démonstration. D'après le lemme VI.2.2, on a $g(T(p, q)) \leq \frac{(p-1)(q-1)}{2}$. De plus, la proposition IV.2.14 et le théorème précédent montrent l'inégalité réciproque, d'où la conclusion. □

VI.3 Calcul de la signature

On va maintenant pouvoir utiliser la matrice de Seifert que l'on a obtenu précédemment, pour pouvoir calculer la signature du noeud torique.

Théorème VI.3.1. *Soient $\omega = \exp(2i\pi\theta) \in \mathbb{U} - \{1\}$, $0 < \theta < 1$. Alors on a*

$$\sigma_\omega(T(p, q)) = \sum_{1 \leq l \leq p-1, 1 \leq k \leq q-1} \epsilon_\theta[l, k]$$

où

$$\epsilon_\theta[l, k] = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < \theta + l/p + k/q < 1 \pmod{2} \\ -1 & \text{si } 1 < \theta + l/p + k/q < 2 \pmod{2} \\ 0 & \text{si } \theta + l/p + k/q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Démonstration. D'après le théorème VI.2.4, Λ_a est égale à $P_a \Omega_a P_a^*$ où P_a est inversible et $\Omega_a = \text{Diag}(1 - e^{2i\pi/a}, \dots, 1 - e^{2i\pi(a-1)/a})$. Alors, d'après la forme du produit tensoriel de deux matrices, on a :

$$\sigma_\omega(T(p, q)) = \sum_{1 \leq l \leq p-1, 1 \leq k \leq q-1} \text{sign}\left(\text{Re}\left((1 - \omega)(1 - e^{2i\pi l/p})(1 - e^{2i\pi k/q})\right)\right)$$

Or,

$$(1 - \omega)(1 - e^{2i\pi l/p})(1 - e^{2i\pi k/q}) = 8i \sin(\pi\theta) \sin\left(\frac{\pi l}{p}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{q}\right) \exp\left(i\pi\left(\theta + \frac{l}{p} + \frac{k}{q}\right)\right).$$

Cela conclut la preuve du théorème. □

Corollaire VI.3.2. On a alors, dans le cas $\theta = \frac{1}{2}$, la forme de la signature :

$$\sigma_{-1}(T(p, q)) = \sum_{1 \leq l \leq p-1, 1 \leq k \leq q-1} \epsilon_{1/2}[l, k]$$

où

$$\epsilon_{1/2}[l, k] = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < 1/2 + l/p + k/q < 1 \pmod{2} \\ -1 & \text{si } 1 < 1/2 + l/p + k/q < 2 \pmod{2} \\ 0 & \text{si } l/p + k/q \in 1/2 + \mathbb{Z} \end{cases}$$

Corollaire VI.3.3. Pour tout $p, q \geq 2$ premiers entre eux, on a $\sigma_{\omega}(T(p, q)) = \sigma_{\omega}(T(q, p))$

Exemple VI.3.4. Dans le cas du noeud de trèfle, on a :

$$\sigma_{\omega}(T(2, 3)) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < \theta < 1/6 \text{ et } 5/6 < \theta < 1 \\ -1 & \text{pour } \theta = 1/6, 5/6 \\ -2 & \text{pour } 1/6 < \theta < 5/6 \end{cases}$$

Notamment, la signature du noeud de trèfle est -2 .

On retrouve alors bien que les points de discontinuités sont permis (et dans ce cas sont exactement) les racines du polynôme d'Alexander, et que le saut de discontinuité est d'exactly 2 ou -2 .

Proposition VI.3.5. Pour tout entier naturel impair q , on a $T(2, q) = 1 - q$.

Démonstration. Dans ce cas, on a $\epsilon_{1/2}[1, k] = -1$, donc $T(2, q) = 1 - q$. □

Références

- [Lic97] W.B. Raymond Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, Springer, 1997.
- [GG05] Jean-Marc Gambaudo & Etienne Ghys, *Braids and Signatures*, Bulletin de la société mathématique de France, 2005.
- [Kau87] Louis H. Kauffman, *On knots*, Princeton University Press, 1987.
- [Hat] Allen Hatcher, *The Kirby Torus Trick for Surfaces*, <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/Papers/TorusTrick.pdf>.
- [Mun61] James R. Munkres, *Elementary Differential Topology*, Princeton University Press, <https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/munkresdiff.pdf>, 1961.
- [Tho] Carsten Thomassen, *The Jordan-Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces*, <https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/jordan/thomass.pdf>.
- [Hua] Justin Huang, *Classification of Surfaces*, <https://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2008/REUPapers/Huang.pdf>.