

Isopérimétrie

Romane Pagès

Juin 2025

Encadré par Djalil Chafaï

Table des matières

1	Introduction	2
2	Isopérimétrie dans \mathbb{R}^n	3
2.1	Inégalité de Sobolev	4
2.2	Formule de la co-aire	5
3	Isopérimétrie gaussienne	6
3.1	Preuve à partir du cube discret en utilisant le théorème central limite	8
3.2	Preuve avec le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck	10
4	Isopérimétrie dans $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$	12
4.1	Preuve par symétrisation	12
4.2	Passage à l'isopérimétrie gaussienne	14
5	Conclusion	16

1 Introduction

Le problème isopérimétrique classique consiste à déterminer, parmi toutes les formes du plan de même périmètre, celles qui possèdent la plus grande aire.

Dans ce mémoire, nous étudions ce problème dans un cadre plus général, celui des espaces métriques mesurés. On note (X, d, μ) un tel espace, où X est muni d'une distance d et d'une mesure borélienne μ .

Avant tout, il convient de redéfinir rigoureusement la notion de « périmètre » dans ce nouveau contexte. En réalité, on parle plutôt de mesure de bord, que l'on interprète comme l'accroissement infinitésimal de la mesure d'un ensemble lorsqu'on l'élargit de manière uniforme.

Définition 1. Soit A un borélien de (X, d, μ) et $r > 0$.

On appelle r -voisinage de A l'ensemble $A_r = \{x \in X : d(x, A) < r\}$.

On définit la mesure du bord de A par $\mu^+(A) = \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(A_r) - \mu(A)}{r}$.

Le problème isopérimétrique cherche à déterminer $\operatorname{argmax}\{\mu(A) : A \text{ tel que } \mu^+(A) = c\}$ pour un $c > 0$ donné, c'est-à-dire les ensembles A de mesure $\mu(A)$ maximale parmi les ensembles de même mesure de bord $\mu^+(A)$.

Une façon duale et équivalente d'envisager la question revient à chercher les ensembles A de mesure de bord $\mu^+(A)$ minimale parmi les ensembles de même mesure $\mu(A)$. Ce second point de vue nous amène naturellement à introduire la notion de fonction isopérimétrique.

Définition 2. On appelle fonction isopérimétrique la fonction maximale I définie sur $[0, \mu(X))$ qui vérifie l'inégalité, dite isopérimétrique,

$$I(\mu(A)) \leq \mu^+(A)$$

pour tout A borélien.

Lorsque $\mu^+(A) = I(\mu(A))$, A a une mesure de bord minimale parmi les boréliens de même mesure, on dit que c'est un ensemble extrémal.

Dans ce mémoire, on étudiera les inégalités isopérimétriques dans trois espaces : \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue, \mathbb{R}^n muni de la mesure gaussienne, et la sphère $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ muni de la mesure uniforme. Nous établirons que, dans ces différents cadres, certaines familles d'ensembles (les boules euclidiennes, les demi-espaces, ou les calottes sphériques) sont optimales au sens du problème posé.

Au cours de l'étude des deux premiers cas, nous verrons que l'inégalité isopérimétrique admet des formulations fonctionnelles équivalentes, reliant la géométrie des ensembles à des inégalités analytiques. Nous utiliserons ces formulations pour établir le théorème isopérimétrique dans \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue puis de la mesure gaussienne. Ce sont des stratégies de preuve assez modernes, développées au XXe siècle. Historiquement, les premières démonstrations rigoureuses d'isopérimétrie reposaient sur des arguments de symétrisation, notamment celles introduites par Steiner au XIXe siècle. Nous reviendrons à cette approche classique pour établir le théorème isopérimétrique sur la sphère.

2 Isopérimétrie dans \mathbb{R}^n

Fixons $n \geq 1$. On traite ici le cas le plus intuitif, celui de $X = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne et de la mesure de Lebesgue λ_n , où nous considérons les ensembles compacts à bord lisse. La notion de mesure du bord $\lambda^+(A)$ introduite dans la définition 1 coïncide avec $\lambda_{n-1}(\partial A)$ pour A compact à bord lisse.

On notera $\lambda = \lambda_n$ quand il n'y a pas d'ambiguïté. Notons \mathbb{B}^n la boule unité de \mathbb{R}^n .

Remarque. *Le problème isopérimétrique dans \mathbb{R}^2 apparaît dès l'Antiquité sous la forme du mythe de la reine Didon. Selon la légende, quand la reine arriva en Afrique du Nord, elle négocia avec les habitants l'achat d'un territoire « aussi grand que ce que pouvait entourer une peau de bœuf ». Elle utilisa la peau pour délimiter un terrain en forme de demi-disque le long de la mer et maximisa ainsi l'aire de son domaine pour fonder Carthage.*

Théorème 2.1. *La fonction définie par $I_\lambda(x) = n\lambda(\mathbb{B}^n)^{\frac{1}{n}}x^{\frac{(n-1)}{n}}$ est la fonction isopérimétrique sur \mathbb{R}^n .*

i. *Pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$ compact à bord lisse, $I_\lambda(\lambda(A)) \leq \lambda^+(A)$.*

On écrit généralement $\lambda_n(A)^{\frac{(n-1)}{n}} \leq C_n \lambda_{n-1}(\partial A)$ avec $C_n = \frac{1}{n\lambda(\mathbb{B}^n)^{1/n}}$.

ii. *Les boules sont les ensembles extrémaux.*

Démonstration. (ii) $\lambda_n(\mathbb{B}^n) = \int_{\mathbb{B}^n} d\lambda_n = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^1 r^{n-1} dr d\lambda_{n-1} = \frac{1}{n} \lambda_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ □

Notons $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions lisses à support compact sur \mathbb{R}^n . Pour prouver (i), nous utiliserons la formulation fonctionnelle suivante.

Théorème 2.2 (Inégalité de Sobolev L^1). *L'inégalité isopérimétrique sur \mathbb{R}^n ,*

$$\lambda_n(A)^{\frac{(n-1)}{n}} \leq C_n \lambda_{n-1}(\partial A) \quad (1)$$

pour tout A compacts à bord lisse, est équivalente à l'inégalité fonctionnelle

$$\|f\|_{n/(n-1)} \leq C_n \|\nabla f\|_1 \quad (2)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive, où ∇f désigne le gradient de f .

Pour montrer l'implication (1) \Rightarrow (2) nous utiliserons une formule de la co-aire énoncée dans le théorème 2.3, démontré à la fin de cette partie.

Démonstration. (1) \Rightarrow (2) Supposons $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive.

$$\begin{aligned} \|f\|_{n/(n-1)} &\leq \int_0^\infty \|1_{\{f(\cdot) > t\}}\|_{n/(n-1)} dt = \int_0^\infty \lambda_n(\{f > t\})^{(n-1)/n} dt \\ &\leq C_n \int_0^\infty \lambda_{n-1}(\{f = t\}) dt = C_n \int |\nabla f| d\lambda_n = C_n \|\nabla f\|_1 \end{aligned}$$

Pour la première inégalité, on a utilisé $f(x) = \int_0^\infty 1_{\{f(x) > t\}} dt$, la seconde inégalité est donnée par (1) et la formule de la co-aire conclut.

(2) \Rightarrow (1) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ compact à bord lisse. On peut approcher 1_A par une suite de fonctions $(f_n)_n$ dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Avec le théorème de convergence dominée, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{n/(n-1)} = \lambda(A)^{(n-1)/n}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla f_n\|_1 = \lambda^+(A)$. □

2.1 Inégalité de Sobolev

Prouvons l'inégalité de Sobolev (2) en suivant la preuve, attribuée à H. Knothe, formulée dans le livre [11] de L. Saloff. Soit g une fonction positive, localement intégrable à support compact $S \subset \mathbb{R}^n$. Posons $\forall x \in S$,

$$A_i(x) = \{z : \forall j < i, z_j = x_j \text{ et } z_i \leq x_i\} \text{ et } B_i(x) = \{z : \forall j < i, z_j = x_j\} \subset A_i(x).$$

Introduisons $y_g : x \in S \mapsto y \in [0, 1]^n$ définie par

$$y_i = \frac{\int_{A_i(x)} g(z) dz_i \dots dz_n}{\int_{B_i(x)} g(z) dz_i \dots dz_n}.$$

Pour tout i , $\int_{B_i(x)} g(z) dz_i \dots dz_n$ est indépendant de x_i et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{A_i(x)} g(z) dz_i \dots dz_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-\infty}^{x_i} g(x_1, \dots, x_{i-1}, z_i, \dots, z_n) dz_i dz_{i+1} \dots dz_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \dots, x_i, \dots, z_n) dz_{i+1} \dots dz_n \\ &= \int_{B_{i+1}(x)} g(z) dz_{i+1} \dots dz_n. \end{aligned}$$

En particulier, pour $i = n$, $\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{A_i(x)} g(z) dz_i \dots dz_n = g(x)$. Alors,

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_i}(x) = \frac{\int_{B_{i+1}(x)} g(z) dz_{i+1} \dots dz_n}{\int_{B_i(x)} g(z) dz_i \dots dz_n}$$

et $\forall x \in S$, on a le Jacobien $Jy_g(x) = \prod_{i=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_i}(x) = \frac{g(x)}{\int g(z) dz}$.

Soit χ la fonction caractéristique de la boule unité. La fonction $y_\chi : \mathbb{B}^n \rightarrow (0, 1)^n$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. En effet, $\forall x \in \mathbb{B}^n$, $Jy_\chi(x) = \frac{1}{\lambda(\mathbb{B}^n)} > 0$ donc on peut appliquer le théorème d'inversion locale. Ainsi, y_χ est injective et $y_\chi(\mathbb{B}^n) \subset (0, 1)^n$ est ouvert. De plus, $y_\chi(\mathbb{B}^n)$ est fermé car y_χ est continue et \mathbb{B}^n est compact. Donc y_χ est aussi surjective par connexité de $(0, 1)^n$.

Soit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive à support compact $S \subset \mathbb{R}^n$.

Prenons $g = f^{\frac{n}{n-1}} / \|f\|_{\frac{n}{n-1}}^{\frac{n}{n-1}}$, ainsi $\int g(x) dx = 1$. On considère la fonction

$$F = y_\chi^{-1} \circ y_g : S \rightarrow \mathbb{B}^n$$

de Jacobien $JF(x) = (Jy_\chi)^{-1}(Jy_g) = \lambda(\mathbb{B}^n)g(x)$, pour tout $x \in S$, et de dérivées partielles $\frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ positives par construction. On a donc

$$[\lambda(\mathbb{B}^n)g(x)]^{\frac{1}{n}} = (JF(x))^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{1}{n} \operatorname{div} F(x).$$

De plus, par le théorème de la divergence et comme $|F| \leq 1$,

$$\int f(x) \operatorname{div} F(x) = - \int \langle \nabla f(x), F(x) \rangle dx \leq \int |\nabla f(x)| dx.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\|f\|_{\frac{n}{n-1}} &= \|f\|_{\frac{n}{n-1}} \int g(x) dx = \int f(x)g(x)^{\frac{1}{n}} dx \\ &\leq \frac{1}{n\lambda(\mathbb{B}^n)^{\frac{1}{n}}} \int f(x)\operatorname{div}F(x) dx \\ &\leq \frac{1}{n\lambda(\mathbb{B}^n)^{\frac{1}{n}}} \int |\nabla f(x)| dx = C_n \|\nabla f\|_1.\end{aligned}$$

2.2 Formule de la co-aire

Théorème 2.3 (Formule de la co-aire). *Soit $f \in C^\infty$,*

$$\int |\nabla f(x)| d\lambda_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_{n-1}(\{x : |f(x)| = t\}) dt. \quad (3)$$

La preuve suivante est extraite du livre [9] de V. G. Maz'ja.

Démonstration. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive et $\vec{w} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^n$.

Rappelons que, pour μ mesure σ -finie et f positive μ -mesurable, le théorème de Fubini donne $\int_0^\infty \mu(f \geq t) dt = \int_0^\infty \int \mathbf{1}_{f \geq t} d\mu dt = \int \int_0^\infty \mathbf{1}_{f \geq t} dt d\mu = \int f(x) d\mu(x)$.

En intégrant par parties et en appliquant cette formule avec $d\mu(x) = \operatorname{div}\vec{w} dx$,

$$\int \vec{w} \nabla f dx = - \int f \operatorname{div}\vec{w} dx = - \int_0^\infty \left(\int_{f \geq t} \operatorname{div}\vec{w} dx \right) dt + \int_{-\infty}^0 \left(\int_{f \leq t} \operatorname{div}\vec{w} dx \right) dt.$$

Comme $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, pour presque tout $t > 0$, les ensembles $\{x : f(x) = t\}$ sont des variétés lisses. Par la théorème de la divergence, on a

$$\int_{f \geq t} \operatorname{div}\vec{w} dx = - \int_{f=t} \vec{w} \frac{\nabla f}{|\nabla f|} dx \text{ donc } \int \vec{w} \nabla f dx = \int_0^\infty \left(\int_{|f|=t} \vec{w} \frac{\nabla f}{|\nabla f|} dx \right) dt.$$

Posons $\vec{w} = \Phi \frac{\nabla f}{\sqrt{|\nabla f|^2 + \varepsilon}}$ avec $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive et $\varepsilon > 0$. Alors on a

$$\int \Phi \frac{(\nabla f)^2}{\sqrt{|\nabla f|^2 + \varepsilon}} dx = \int_0^\infty \left(\int_{|f|=t} \Phi \frac{(\nabla f)^2}{|\nabla f| \sqrt{|\nabla f|^2 + \varepsilon}} dx \right) dt.$$

Avec Beppo-Levi, en passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient, pour toute fonction $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive, $\int \Phi \nabla f dx = \int_0^\infty \left(\int_{|f|=t} \Phi dx \right) dt$.

On définit une suite $(\alpha_m)_m$ de fonctions positives à support compact sur \mathbb{R}^n telle que $0 \leq \alpha_m \leq 1$, $\cup_m \operatorname{supp} \alpha_m = \mathbb{R}^n$ et $\forall x \in \operatorname{supp} \alpha_{m-1}, \alpha_m(x) = 1$. Alors, $\forall m \geq 0$, $\int \alpha_m \nabla f dx = \int_0^\infty \left(\int_{|f|=t} \alpha_m dx \right) dt$. Puis par Beppo-Levi, en passant à la limite $m \rightarrow \infty$,

$$\int \nabla f dx = \int_0^\infty \left(\int_{|f|=t} dx \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_{n-1}(\{x : |f(x)| = t\}) dt.$$

□

3 Isopérimétrie gaussienne

L'isopérimétrie gaussienne traite le cas $X = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne et de la mesure de probabilité gaussienne $\gamma_n(dx) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/2}$.

Notons Φ la fonction de répartition de la mesure gaussienne γ_1 sur \mathbb{R} :

$$\Phi(x) = \gamma_1([-\infty, x]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Proposition 3.1. *La bijection croissante fournie par $\Phi : [-\infty; +\infty] \rightarrow [0, 1]$ nous permet de définir $I = \Phi' \circ \Phi^{-1}$ sur $]0, 1[$ qui vérifie les propriétés suivantes.*

- i. $I > 0$ sur $]0, 1[$ et $I(0) = I(1) = 0$
- ii. I est C^∞ sur $]0, 1[$.
- iii. $I I'' = -1$.
- iv. I est concave sur $]0, 1[$.
- v. $(I')^2$ est convexe.

Démonstration. (i) $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} > 0$ et $I(0) = I(1) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi'(t) = 0$.

(ii) $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$ est un C^∞ -difféomorphisme.

(iii) $I'(x) = \Phi''(\Phi^{-1}(x)) \times (\Phi^{-1})'(x) = -\Phi^{-1}(x) I(x) \times \frac{1}{I(x)} = -\Phi^{-1}(x)$ donc $I''(x) = -\frac{1}{I(x)} \leq 0$.

Ce qui implique (iv).

(v) $(I'^2)' = 2I'I'' = -2I'/I$ et $(I'^2)'' = -2(I''I - I'^2)/I^2 = 2(1 + I'^2)/I^2 \geq 0$.

□

Théorème 3.2. *La fonction $I = I_\gamma$ définie ci-dessus est la fonction isopérimétrique gaussienne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

i. Pour tout A borélien, $I_\gamma(\gamma_n(A)) \leq \gamma_n^+(A)$.

ii. Pour tout demi-espace $H_{u,h} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq h\}$ avec $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ et $h \in \mathbb{R}$, on a l'égalité $I_\gamma(\gamma_n(H_{u,h})) = \gamma_n^+(H_{u,h})$.

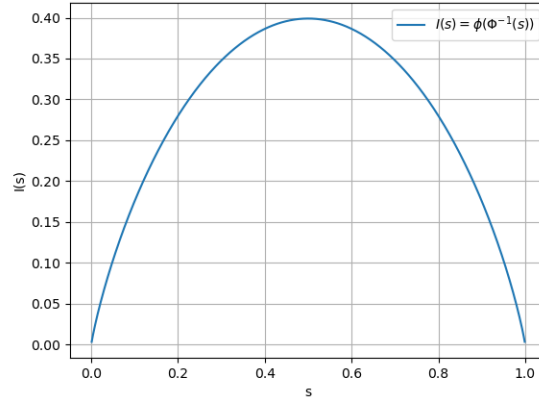


FIGURE 1 – Fonction isopérimétrique gaussienne

Remarque. *On voit graphiquement, et on l'admettra pour la suite, que I_γ est symétrique par rapport à $1/2$, croissante sur $[0; 1/2]$ et décroissante sur $[1/2; 1]$.*

Démonstration. (ii) Comme la mesure gaussienne est invariante par rotation, on peut supposer que $u = e_1$. Alors $\gamma_n(H_{u,h}) = \int_{x_1 \leq h} d\gamma_n(x) = \int_{-\infty}^h d\gamma_1(x_1) = \Phi(h)$.

Puis, comme le r -voisinage de $H_{u,h}$ est $H_{u,h+r}$, on a

$$\gamma_n^+(H_{u,h}) = \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\gamma_n(H_{u,h}) - \gamma_n(H_{u,h+r})}{r} = \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(h) - \Phi(h+r)}{r} = \Phi'(h). \quad \square$$

Pour prouver (i), nous utiliserons la formulation fonctionnelle suivante.

Théorème 3.3 (Inégalité de Bobkov). *L'inégalité isopérimétrique gaussienne,*

$$I_\gamma(\gamma_n(A)) \leq \gamma_n^+(A) \quad (4)$$

pour tout borélien A , est équivalente à l'inégalité fonctionnelle

$$I_\gamma\left(\int f d\gamma\right) \leq \int \sqrt{I_\gamma(f)^2 + |\nabla f|^2} d\gamma \quad (5)$$

pour toute fonction f localement lipschitzienne, où $|\nabla f|$ désigne la norme euclidienne du gradient de f .

Pour montrer le sens direct (4) \Rightarrow (5), il est possible d'utiliser une formule de la co-aire analogue à (3). On pourra notamment trouver cette démonstration dans le mémoire de J. Bureaux [3].

Montrons le sens réciproque, qui nous intéresse particulièrement.

Démonstration. (5) \Rightarrow (4) Soit A un ensemble borélien.

Approchons la fonction indicatrice de A par les fonctions

$$f_h(x) = \max(0, 1 - \frac{1}{h}d(x, A)).$$

On a $f_h = 1$ sur A , $f_h = 0$ en dehors de A^h et f_h décroît linéairement de 1 à 0 sur la couronne $A^h \setminus A$. Ainsi, $\nabla f_h = 0$ en dehors de $A^h \setminus A$. Comme $|\nabla d(\cdot, A)| = 1$ presque partout en dehors de A , $|\nabla f_h| = \frac{1}{h}$ sur $A^h \setminus A$. En particulier, $|\nabla f_h| \leq \frac{1}{h}$ sur \mathbb{R}^n donc f_h est $\frac{1}{h}$ -Lipschitz. Comme $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$, l'inégalité (5) pour f_h implique $I_\gamma(\int f_h d\gamma) - \int I_\gamma(f_h) d\gamma \leq \int |\nabla f_h| d\gamma$.

D'un côté, on a $\int |\nabla f_h| d\gamma = \int_{A^h \setminus A} \frac{1}{h} d\gamma = \frac{\gamma(A^h) - \gamma(A)}{h}$. Ainsi, quand h tend vers 0, le terme de droite devient $\gamma^+(A)$.

De l'autre, comme I_γ est continue et $I_\gamma(0) = I_\gamma(1) = 0$, en appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_h I_\gamma\left(\int f_h d\gamma\right) = I_\gamma\left(\int_A d\gamma\right) = I_\gamma(\gamma(A)) \text{ et } \lim_h \int I_\gamma(f_h) d\gamma = \int I_\gamma(1_A) d\gamma = 0.$$

\square

Donnons maintenant deux preuves différentes de (5). Pour commencer, la preuve de S. G. Bobkov [2] qui établit d'abord l'inégalité analogue sur le cube discret $\{-1, 1\}^n$ et utilise ensuite le théorème central limite. Puis, une preuve par l'étude d'un semi-groupe établie par M. Ledoux dans [7].

3.1 Preuve à partir du cube discret en utilisant le théorème central limite

Lemme 3.4. *La fonction $I = I_\gamma$ est maximale parmi les fonctions $J : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues positives satisfaisant $J(0) = J(1) = 0$ et, pour tous $0 \leq a, b \leq 1$,*

$$J\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\sqrt{J(a)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{J(b)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2} \quad (6)$$

Démonstration. On peut supposer que $a \neq b$, sinon il n'y a rien à faire. Posons alors $c = (a+b)/2$ et introduisons la fonction $g(x) = I(c+x)^2 + x^2$. Si on pose $x = (a-b)/2$, l'inégalité (6) se réécrit sous la forme $\sqrt{g(0)} \leq \frac{1}{2}\sqrt{g(x)} + \frac{1}{2}\sqrt{g(-x)}$, ou encore, en passant aux carrés,

$$4g(0) - (g(x) + g(-x)) \leq 2\sqrt{g(x)g(-x)}.$$

Si le terme de gauche est négatif on obtient immédiatement

$$\sqrt{g(0)} \leq \sqrt{\frac{g(x) + g(-x)}{4}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{g(x)} + \frac{1}{2}\sqrt{g(-x)},$$

et sinon, l'inégalité est équivalente à

$$16g(0)^2 + (g(x) - g(-x))^2 \leq 8g(0)(g(x) + g(-x)).$$

En posant $h(x) = g(x) - g(0) = I(c+x)^2 + x^2 - I(c)^2$, ceci se réécrit sous la forme

$$(h(x) - h(-x))^2 \leq 8I(c)^2(h(x) + h(-x)).$$

Commençons par minorer $h(x) + h(-x)$. On remarque que la fonction $R(x) = h(x) + h(-x) - 2I'(c)^2x^2$ est convexe. En effet, on a $R'(x) = 2I(x+c)I'(x+c) - 2I(x-c)I'(x-c) + 4x - 2I'(c)^2x$ et donc $R''(x) = 4\left[\frac{I'(c+x)^2 - I'(c-x)^2}{2} - I'(c)^2\right] \geq 0$ car $(I')^2$ est convexe. Alors, comme R est paire, on a en particulier $R(x) \geq R(0) = 0$, d'où $h(x) + h(-x) \geq 2I'(c)^2x^2$.

Il reste à majorer le terme $u(x) = h(x) - h(-x) = I(c+x)^2 - I(c-x)^2$. Comme I est symétrique par rapport à $1/2$, quitte à remplacer a et b par $1-a$ et $1-b$, et quitte à les échanger, on peut supposer que $c \leq 1/2$ et que $x > 0$. On a alors $1-(c+x) \geq c-x$ donc, par symétrie, $I(c+x) \geq I(c-x)$ car I est croissante sur $]0; 1/2]$. Inversement, comme elle est convexe et symétrique, la fonction $(I')^2$ est décroissante sur $]0; 1/2]$ et croissante sur $[1/2; 0[$, ce qui montre que $I'(c+x)^2 \leq I'(c-x)^2$. Comme $II'' = -1$, $u''(x) = 2(I'(c+x) - I'(c-x)) \leq 0$, donc u est concave positive sur $[0; c]$. On en déduit que $x \in]0; c] \mapsto (u(x) - u(0))/x$ est décroissante. Or $u(0) = 0$ et $u'(0) = 4I(c)I'(c)$, donc

$$\left(\frac{h(x) - h(-x)}{x}\right)^2 \leq 16I(c)^2I'(c)^2 \leq 8I(c)^2\frac{h(x) + h(-x)}{x^2}$$

ce qui nous permet de conclure. □

Lemme 3.5. *Pour toute fonction $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow [0, 1]$ avec $n \geq 1$,*

$$I\left(\int f d\mu_n\right) \leq \int \sqrt{I(f)^2 + |\nabla f|^2} d\mu_n$$

où μ_n est la mesure produit et ∇f désigne le gradient discret.

Remarque. On définit le voisin d'un point $x \in \{0, 1\}^n$ sur la i -ème coordonnée par $s_i(x)$ tel que $s_i(x)_j = x_j$ si $j \neq i$ et $s_i(x)_i = -x_i$. De façon générale, on peut définir le gradient discret pour $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $|\nabla f|^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n |f(x) - f(s_i(x))|^2$.

Démonstration. Raisonnons par récurrence.

Pour $n = 1$, soit $f : \{-1, 1\} \rightarrow [0, 1]$ quelconque. On peut écrire, grâce à (6),

$$I\left(\frac{f(-1) + f(1)}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \sqrt{I(f(-1))^2 + \left|\frac{f(-1) - f(1)}{2}\right|^2} + \frac{1}{2} \sqrt{I(f(1))^2 + \left|\frac{f(-1) - f(1)}{2}\right|^2}.$$

Notons $\mu = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$ la mesure uniforme sur $\{-1, 1\}$ et ∇f le gradient discret tel que $|\nabla f| = \left|\frac{f(-1) - f(1)}{2}\right|$. On obtient l'inégalité fonctionnelle

$$I\left(\int f d\mu\right) \leq \int \sqrt{I(f)^2 + |\nabla f|^2} d\mu.$$

Supposons le lemme vrai pour n et prenons $f : \{-1, 1\}^{n+1} \rightarrow [0, 1]$. Introduisons, pour $x \in \{-1, 1\}^n$, $f_-(x) = f(x, -1)$ et $f_+(x) = f(x, 1)$ puis $a_{\mp} = \int f_{\mp} d\mu_n$. On a alors

$$\int f d\mu_{n+1} = \mu(\{-1\}) \int f_- d\mu_n + \mu(\{1\}) \int f_+ d\mu_n = \frac{a_- + a_+}{2}$$

$$\text{et } |\nabla f(x, \mp 1)|^2 = |f_{\mp}(x)|^2 + \frac{1}{4}|f_-(x) - f_+(x)|^2.$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{I(f)^2 + |\nabla f|^2} d\mu_{n+1} &= \frac{1}{2} \int \sqrt{I(f_-) + |\nabla f_-|^2 + \frac{1}{4}|f_- - f_+|^2} d\mu_n \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \sqrt{I(f_+) + |\nabla f_+|^2 + \frac{1}{4}|f_- - f_+|^2} d\mu_n \end{aligned}$$

On applique l'inégalité triangulaire $\int \sqrt{u^2 + v^2} \geq \sqrt{(\int u)^2 + (\int v)^2}$ aux deux termes du membre de droite avec $u_{\mp} = \sqrt{I(f_{\mp})^2 + |\nabla f_{\mp}|^2}$ et $v = \frac{f_- - f_+}{2}$.

Par hypothèse de récurrence, $\int u_{\mp} d\mu_n \geq I(a_{\mp})$ et $\int v d\mu_n = \frac{a_- - a_+}{2}$. Donc

$$\begin{aligned} \int \sqrt{I(f)^2 + |\nabla f|^2} d\mu_{n+1} &\geq \frac{1}{2} \sqrt{I(a_-)^2 + \left|\frac{a_- - a_+}{2}\right|^2} + \frac{1}{2} \sqrt{I(a_+)^2 + \left|\frac{a_- - a_+}{2}\right|^2} \\ &\geq I\left(\frac{a_- + a_+}{2}\right) = I\left(\int f d\mu_{n-1}\right) \end{aligned}$$

où la seconde inégalité est donnée par (6). □

Prouvons maintenant (5) dans le cas où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ est deux fois dérivable et ses dérivées partielles premières et secondes sont bornées. Le cas plus général du théorème 3.3 se déduit. En effet, si f est localement lipschitzienne, alors par le théorème de Rademacher elle est presque partout dérivable et on peut l'approcher par des fonctions qui rentrent dans le cas démontré.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ deux fois dérivable avec des dérivées partielles premières et secondes bornées. On applique le lemme 3.5 aux fonctions $f_k : \{-1, 1\}^{nk} \rightarrow [0, 1]$ définies par $f_k(x_1, \dots, x_k) = f\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{\sqrt{k}}\right)$.

Regardons $(x_i)_{i \geq 1}$ comme une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuée de loi uniforme sur $\{-1, 1\}^n$. On a $\mathbb{E}(x_i) = 0$ et $\text{Var}(x_i) = 1$ donc, par le théorème central limite, $X_k = \frac{x_1 + \dots + x_k}{\sqrt{k}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X de loi gaussienne standard sur \mathbb{R}^n . Ainsi, comme f est continue bornée, quand $k \rightarrow \infty$, on a $\mathbb{E}[f(X_k)] = \int f_k d\mu_{nk}$ tend vers $\mathbb{E}[f(X)] = \int f d\gamma_n$. De même, comme I et $|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial e_i} \right|^2$ sont continues bornées, on a $\lim_{k \rightarrow \infty} \int \sqrt{I(f_k)^2 + |\nabla f_k|^2} d\mu_{nk} = \int \sqrt{I(f)^2 + |\nabla f|^2} d\gamma_n$.

Donc en passant à la limite dans (5) pour les f_k , on obtient (5) pour f . \square

3.2 Preuve avec le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck

Introduisons la famille d'opérateurs linéaires définie par, pour tout $f \in L^1(\gamma)$, $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t/2}x + (1 - e^{-t})^{1/2}y) d\gamma(y).$$

Les propriétés suivantes se vérifient immédiatement sur la représentation intégrale de P_t .

Proposition 3.6.

- i. La famille $(P_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe : P_0 est l'opérateur identité et $\forall s, t \geq 0, P_s \circ P_t = P_{s+t}$.
- ii. Dans $L^2(\gamma)$, lorsque t tend vers l'infini, $P_t f$ converge vers $f \mapsto \int f d\gamma$.

Le générateur infinitésimal de ce semi-groupe est l'opérateur L défini pour f de classe \mathcal{C}^2 par

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \Delta f(x) - \frac{1}{2} \langle x, \nabla f(x) \rangle.$$

Il satisfait $\frac{d}{dt} P_t f = P_t Lf = L P_t f$. De plus, par d'intégration par parties on a, pour $f \in L^2(\gamma_n)$ de classe \mathcal{C}^2 telle que $Lf \in L^2(\gamma_n)$ et g de classe \mathcal{C}^1 ,

$$\int f Lg d\gamma = - \int \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\gamma.$$

Prouvons (5) avec le semi-groupe, dit d'Ornstein-Uhlenbeck, introduit.

Démonstration. Soit f une fonction lisse sur \mathbb{R}^n à valeurs dans $[0, 1]$. Introduisons

$$J(t) = \int \sqrt{I(P_t f)^2 + |\nabla P_t f|^2} d\gamma$$

et montrons que cette fonction est décroissante. En effet, si c'est le cas, $\lim_{t \rightarrow +\infty} J(t) \leq J(0)$, ce qui, avec les propriétés élémentaires de P_t rappelées ci-dessus, équivaut à (5).

En utilisant, la formule de dérivation en chaîne, nous avons

$$\frac{dJ}{dt} = \int \frac{I(P_t f) I'(P_t f) L P_t f + \langle \nabla P_t f, \nabla L P_t f \rangle}{\sqrt{I(P_t f)^2 + |\nabla P_t f|^2}} d\gamma.$$

Pour faciliter la notation, écrivons f_t pour $P_t f$ et posons $K(f) = I(f)^2 + |\nabla f|^2$. De plus, supposons $n = 1$, le cas général étant similaire, mais notationnellement plus lourd. Nous avons alors

$$\frac{dJ}{dt} = \int \frac{I(f_t) I'(f_t) L f_t + f_t' (L f_t)'}{\sqrt{K(f_t)}} d\gamma.$$

D'une part, nous avons, par la formule d'intégration par parties,

$$\int \frac{I(f_t)I'(f_t)}{\sqrt{K(f_t)}} Lf_t d\gamma = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{I(f_t)I'(f_t)}{\sqrt{K(f_t)}} \right)' f_t' d\gamma$$

et en utilisant $II'' = -1$ ainsi que $(K(f))' = 2I(f)I'(f)f' + 2f'f''$,

$$\int \frac{I(f_t)I'(f_t)}{\sqrt{K(f)}} Lf_t d\gamma = -\frac{1}{2} \int \left[\frac{I'(f_t)^2 - 1}{\sqrt{K(f)}} f_t'^2 - \frac{I(f_t)I'(f_t)f_t' + f_t'f_t''}{K(f)^{\frac{3}{2}}} I(f_t)I'(f_t)f_t' \right] d\gamma.$$

D'autre part, $(Lf)'(x) = \frac{1}{2}(f''(x) - xf'(x))' = \frac{1}{2}(f'''(x) - xf''(x) - f'(x)) = Lf'(x) - \frac{1}{2}f'(x)$ nous donne

$$\int \frac{f_t'(Lf_t)'}{\sqrt{K(f_t)}} d\gamma = \int \frac{f_t'}{\sqrt{K(f_t)}} Lf_t' d\gamma - \frac{1}{2} \int \frac{f_t'^2}{\sqrt{K(f_t)}}.$$

En utilisant de nouveau la formule d'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{f_t'(Lf_t)'}{\sqrt{K(f_t)}} d\gamma &= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{f_t'}{\sqrt{K(f_t)}} \right)' f_t'' d\gamma - \frac{1}{2} \int \frac{f_t'^2}{\sqrt{K(f_t)}} \\ &= -\frac{1}{2} \int \left[\frac{f_t''^2}{\sqrt{K(f_t)}} - \frac{I(f_t)I'(f_t)f_t' + f_t'f_t''}{K(f_t)^{\frac{3}{2}}} f_t'f_t'' + \frac{f_t'^2}{\sqrt{K(f_t)}} \right] d\gamma. \end{aligned}$$

Le calcul $(I'(f_t^2)f_t'^2 + f_t''^2)K(f_t) - I(f_t)^2I'(f_t)^2 - f_t'^2f_t''^2 = I'(f_t)^2f_t'^4 + I(f_t)^2f_t''^2$ nous permet de conclure, en rassemblant les équations,

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= -\frac{1}{2} \int \frac{I'(f_t)^2f_t'^4 + I(f_t)^2f_t''^2 - 2I(f_t)I'(f_t)f_t'^2f_t''}{K(f_t)^{\frac{3}{2}}} d\gamma \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{[I'(f_t)f_t'^2 - I(f_t)f_t'']^2}{K(f_t)^{\frac{3}{2}}} d\gamma \leq 0. \end{aligned}$$

□

4 Isopérimétrie dans $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$

Théorème 4.1. *Dans le cas $X = \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, muni la distance géodésique et de sa mesure μ_{n-1} invariante par rotation, les ensembles extrémaux sont les calottes sphériques.*

Historiquement, la preuve de ce théorème est attribuée indépendamment à P. Lévy dans son livre [8] et E. Schmidt [12]. Elle a ensuite été généralisée par M. Gromov dans [5] aux variétés riemanniennes compactes de courbure de Ricci positive.

La preuve présentée dans la partie suivante est une preuve par symétrisation, suivant la stratégie de celle de E. Schmidt, contenue dans l'appendix de l'article [4] de F. Figiel, J. Lindenstrauss et V.D. Milman.

Remarque. *L'inégalité isopérimétrique sphérique admet aussi des formulations fonctionnelles, étudiées par F. Barthe dans [1].*

Une fois ce théorème démontré, nous en déduisons une preuve de l'inégalité isopérimétrique gaussienne.

4.1 Preuve par symétrisation

La démonstration que nous présentons ici repose sur une méthode de symétrisation, c'est une approche classique, et même historique, pour la résolution des problèmes isopérimétriques. L'idée générale est de transformer un ensemble arbitraire qui n'est pas une calotte en un ensemble symétrique de même mesure mais de bord plus petit.

Pour cela, on applique sur la sphère une transformation analogue à la symétrisation de Steiner dans \mathbb{R}^n . La symétrisation de Steiner construit, à partir d'un ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et d'un hyperplan donné, un nouvel ensemble $\text{St}(\Omega)$ symétrique par rapport à cet hyperplan et de même mesure. Par exemple, dans le plan, on réorganise chaque section de Ω orthogonale à un axe donné en un segment centré sur cet axe, de même longueur que la section initiale.

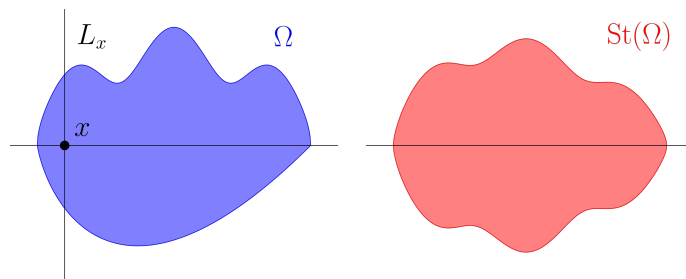


FIGURE 2 – Symétrisation de Steiner associée à l'axe vertical

Pour montrer l'isopérimétrie sphérique, raisonnons par récurrence sur n . Pour $n = 1$, le théorème est trivial. Supposons le théorème vrai pour la sphère \mathbb{S}^{n-1} .

Soit $A \subset \mathbb{S}^n$ fermé. On définit $r(A) = \min\{r : \exists x \in \mathbb{S}^n, A \subset B(x, r)\}$ son rayon. On définit la distance de Hausdroff δ entre deux fermés de \mathbb{S}^n par $\delta(A, B) = \min\{r : A \subset B_r, B \subset A_r\}$.

On note $M(A) = \{C \subset \mathbb{S}^n \text{ fermé} : \mu_n(C) = \mu_n(A) \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \mu_n(C_\varepsilon) \leq \mu_n(A_\varepsilon)\}$.

Lemme 4.2 (Étape 1). *Il existe $B \in M(A)$ de rayon minimal.*

Démonstration. Soit B tel que $r(B) = \inf\{r(C) : C \in M(A)\}$. On considère une suite $(B^k)_k$ de $M(A)$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta(B^k, B) = 0$. Soit $\varepsilon \geq 0$. Pour tout $\eta > 0$, il existe un k tel que $B \subset B_\eta^k$ et donc $B_\varepsilon \subset B_{\eta+\varepsilon}^k$. Alors

$$\mu_n(B_\varepsilon) \leq \mu_n(B_{\eta+\varepsilon}^k) \leq \mu_n(A_{\eta+\varepsilon})$$

Et donc $\mu_n(B_\varepsilon) \leq \inf_{\eta>0} \mu_n(A_{\eta+\varepsilon}) = \mu_n(\bigcup_{\eta>0} A_{\eta+\varepsilon}) = \mu_n(A_\varepsilon)$.

D'une part, pour $\varepsilon = 0$, on a $\mu_n(B) \leq \mu_n(A)$ et, d'autre part,

$$\mu_n(B) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \mu_n(B^k) = \mu_n(A).$$

Donc $B \in M(A)$. □

Soit $\gamma \subset \mathbb{S}^n$ un demi-grand cercle joignant x_0 et $-x_0$.

Pour tout $y \in \gamma$, on notera $H^y \subset \mathbb{R}^{n+1}$ l'hyperplan orthogonal au segment $[-x_0, x_0] \subset \mathbb{R}^{n+1}$, contenant y . L'intersection $\mathbb{S}^n \cap H^y$ est une $(n-1)$ -sphère, notée $S^{n-1,y}$, munie de sa mesure $\mu_{n-1,y}$ invariante par rotation.

Remarque. Pour $C \subset S^{n-1,y}$, C_ε désignera son ε -voisinage dans $S^{n-1,y}$.

Pour chaque $y \in \gamma$, soit B^y une calotte sur $S^{n-1,y}$, de centre y , telle que $\mu_{n-1,y}(B^y) = \mu_{n-1,y}(A \cap H^y)$. On appelle $\sigma_\gamma(A) = \bigcup_{y \in \gamma} B^y$ symétrisation de A associée à γ .

Lemme 4.3 (Étape 2). Pour tout demi-grand cercle γ , $\sigma_\gamma(A) \in M(A)$.

Démonstration. Soit $\gamma \subset \mathbb{S}^n$ comme précédemment.

Notons u le milieu de γ et identifions $S^{n-1,u}$ à \mathbb{S}^{n-1} . Pour tout $y \in \gamma \setminus \{\pm x_0\}$, définissons $\tau_y : S^{n-1,y} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ la projection le long des méridiennes.

Fixons $y_1, y_2 \in \gamma$ et définissons, sans l'expliciter, la fonction f_{y_1, y_2} telle que pour tous $x_1 \in S^{n-1, y_1}$ et $x_2 \in S^{n-1, y_2}$, $d(x_1, x_2) = f_{y_1, y_2}(d(\tau_{y_1}(x_1), \tau_{y_2}(x_2)))$. On sait intuitivement que f_{y_1, y_2} est continue et strictement croissante, à défaut, on peut en établir la preuve.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in A_\varepsilon \cap H^y$, il existe $z \in \gamma$ et $a \in A \cap H^z$ tels que $d(x, a) \leq \varepsilon$ donc $d(\tau_y(x), \tau_z(a)) \leq f_{y,z}^{-1}(\varepsilon) = \eta$ i.e. $\tau_y(x) \in (\tau_z(A \cap H^z))_\eta$.

Réciproquement, pour tout $z \in \gamma$ et $u \in (\tau_z(A \cap H^z))_\eta$, il existe $a \in A \cap H^z$ tel que $d(u, \tau_z(a)) \leq \eta$ donc $d(\tau_y^{-1}(u), a) \leq f_{y,z}(\eta) = \varepsilon$ et $\tau_y^{-1}(u) \in A_\varepsilon \cap H^y$. Donc

$$\tau_y(A_\varepsilon \cap H^y) = \bigcup_{z \in \gamma} (\tau_z(A \cap H^z))_{\eta(y,z,\varepsilon)} = \bigcup_{\substack{z \in \gamma \\ d(y,z) \leq \varepsilon}} (\tau_z(A \cap H^z))_{\eta(y,z,\varepsilon)}.$$

De même, pour $B = \sigma_\gamma(A)$, on a $\tau_y(B_\varepsilon \cap H^y) = \bigcup_{\substack{z \in \gamma \\ d(y,z) \leq \varepsilon}} (\tau_z(B \cap H^z))_{\eta(y,z,\varepsilon)}$.

Pour tout $z \in \gamma$, $\tau_z(B \cap H^z) = \tau_z(B^z)$ est une calotte sur \mathbb{S}^{n-1} , de centre u , telle que $\mu_{n-1}(\tau_z B^z) = \mu_{n-1}(\tau_z A^z)$. Par hypothèse de récurrence, $\forall \eta \geq 0$, $\mu_{n-1}((\tau_z B^z)_\eta) \leq \mu_{n-1}((\tau_z A^z)_\eta)$. Donc

$$\begin{aligned} \mu_{n-1}(\tau_y(B_\varepsilon \cap H^y)) &= \sup_{\substack{z \in \gamma \\ d(y,z) \leq \varepsilon}} \mu_{n-1}(\tau_z B^z)_{\eta(y,z,\varepsilon)} \\ &\leq \sup_{\substack{z \in \gamma \\ d(y,z) \leq \varepsilon}} \mu_{n-1}(\tau_z(A \cap H^z))_{\eta(y,z,\varepsilon)} \\ &\leq \mu_{n-1}(\tau_y(A_\varepsilon \cap H^y)). \end{aligned}$$

C'est-à-dire $\mu_{n-1,y}(B_\varepsilon) \leq \mu_{n-1,y}(A_\varepsilon)$ pour tout $y \in \gamma$. Donc, par le théorème de Fubini, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mu_n(B_\varepsilon) \leq \mu_n(A_\varepsilon)$. \square

Lemme 4.4 (Étape 3). *Si A n'est pas une calotte, alors il existe une famille finie de demi-grands cercles $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $r(\sigma_{\gamma_n} \sigma_{\gamma_{n-1}} \cdots \sigma_{\gamma_1}(A)) < r(A)$.*

Démonstration. Supposons que A n'est pas une calotte. Il existe $a \in \mathbb{S}^n$ tel que $A \subset B(a, r(A))$. Comme A n'est pas une calotte, $G = \partial B(a, r(A)) \setminus A$ est un ouvert non vide de $\partial B(a, r(A))$. Soit γ un demi-grand cercle de centre a , alors la symétrisation de A associée à γ reste dans $B(a, r(A))$. De plus, pour tout $x \in G$, $\sigma_\gamma(A)$ ne contient pas x .

Pour tout $x \in \partial B(a, r(A))$, il existe un demi-grand cercle γ_x tel que x partage sa tranche avec un point de G . Or sur les tranches $S_{\gamma_x}^{n-1,y}$ qui contiennent un point de G , comme la symétrisation centre la masse autour y , les calottes B^y créées sont strictement contenues dans l'intérieur de $B(a, r(A))$. Donc l'ensemble ouvert G_x des points du bord qui partagent une tranche avec un point de G est tel que $G_x \cap \sigma_{\gamma_x}(A) = \emptyset$.

Finalement, $\partial B(a, r(A)) = \bigcup_{x \in \partial B(a, r(A))} G_x$ et, par compacité, il existe une famille finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $\partial B(a, r(A)) = \bigcup_{i=1}^n G_{x_i}$ et $\sigma_{\gamma_n} \sigma_{\gamma_{n-1}} \cdots \sigma_{\gamma_1}(A)$ est disjoint de $\partial B(a, r(A))$ donc a un rayon plus petit. \square

4.2 Passage à l'isopérimétrie gaussienne

À l'image des premières démonstrations de l'isopérimétrie gaussienne, on établit ici une preuve en s'appuyant sur le théorème isopérimétrique sphérique. L'approche proposée est celle de M. Ledoux dans son cours [6].

Notons $\sigma_{\sqrt{N}}^N$ la loi uniforme sur la sphère $S_{\sqrt{N}}^N \subset \mathbb{R}^{N+1}$ de rayon \sqrt{N} et $\Pi_{N+1,n}$ la projection de \mathbb{R}^{N+1} sur \mathbb{R}^n .

Lemme 4.5 (Lemme de Poincaré). *Pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$ borélien,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_{\sqrt{N}}^N(\Pi_{N+1,n}^{-1}(A) \cap S_{\sqrt{N}}^N) = \gamma_n(A).$$

Démonstration. Soit $(g_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoire iid de loi gaussienne standard. Pour tout $N \geq 1$, on pose $R_N^2 = g_1^2 + \cdots + g_N^2$. Alors $\frac{\sqrt{N}}{R_{N+1}}(g_1, \dots, g_{N+1})$ suit la loi uniforme $\sigma_{\sqrt{N}}^N$ sur $S_{\sqrt{N}}^N$. De plus, $\frac{\sqrt{N}}{R_{N+1}}(g_1, \dots, g_n)$ suit la même loi que $\Pi_{N+1,n}(\sigma_{\sqrt{N}}^N)$.

Comme $\frac{R_n^2}{R_{N+1}^2}$ est indépendant de $\frac{(g_1, \dots, g_n)}{R_n}$ et de loi $\beta\left(\frac{n}{2}, \frac{N+1-n}{2}\right)$, pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$ borélien,

$$\begin{aligned} \sigma_{\sqrt{N}}^N(\Pi_{N+1,n}^{-1}(A) \cap S_{\sqrt{N}}^N) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{N}}{R_{N+1}}(g_1, \dots, g_n) \in A\right) \\ &= \mathbb{P}\left[\left(N \frac{R_n^2}{R_{N+1}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{R_n}(g_1, \dots, g_n) \in A\right] \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+1-n}{2}\right)} \int_{S_1^{n-1}} \int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1} (1-t)^{\frac{N-1-n}{2}} 1_A(\sqrt{N}tx) dt d\sigma_1^{n-1}(x). \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $u = \sqrt{N}t$ pour obtenir

$$\sigma_{\sqrt{N}}^N(\Pi_{N+1,n}^{-1}(A) \cap S_{\sqrt{N}}^N) = \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+1-n}{2}\right)} \frac{2}{N^{\frac{n}{2}}} \int_{S_1^{n-1}} \int_0^{\sqrt{N}} u^{n-1} \left(1 - \frac{u^2}{N}\right)^{\frac{N-1-n}{2}} 1_A(ux) du d\sigma_1^{n-1}(x).$$

En faisant tendre $N \rightarrow +\infty$, par le théorème de convergence dominée, on identifie $\gamma_n(A)$ en coordonnées polaires :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_{\sqrt{N}}^N(\Pi_{N+1,n}^{-1}(A) \cap S_{\sqrt{N}}^N) = \frac{2}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(n/2)} \int_{S_1^{n-1}} \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u^2/2} \mathbf{1}_A(ux) du d\sigma_1^{n-1}(x) = \gamma_n(A).$$

□

Prouvons alors le théorème isopérimétrique gaussien.

Remarque. Dans le cas de la sphère, on a vu que les ensembles extrémaux sont les calottes. Or une calotte peut être vue comme l'intersection de la sphère avec un demi-espace. Ainsi, le lemme de Poincaré donne l'intuition que les ensembles extrémaux gaussiens sont les demi-espaces.

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ borélien. Pour $u \in S^{n-1}$ et $h \in \mathbb{R}$, on a vu que $\gamma_n(H_{u,h}) = \Phi(h)$. Choisissons alors h tel que $\gamma_n(A) = \gamma_n(H_{u,h})$ et montrons que, pour tout $r \geq 0$, $\gamma_n(A_r) \geq \gamma_n((H_{u,h})_r) = \Phi(h+r)$.

Soit $a \in]-\infty, h[$. Comme $\gamma_n(A) > \Phi(a)$, par le lemme de Poincaré, pour tout N assez grand,

$$\sigma_{\sqrt{N}}^N(\Pi_{N+1,n}^{-1}(A) \cap S_{\sqrt{N}}^N) > \sigma_{\sqrt{N}}^N(\Pi_{N+1,1}^{-1}(]-\infty, a]) \cap S_{\sqrt{N}}^N).$$

On remarque que $(\Pi_{N+1,n}^{-1}(A) \cap S_{\sqrt{N}}^N)_r \subset \Pi_{N+1,n}^{-1}(A_r) \cap S_{\sqrt{N}}^N$. Et, comme $\Pi_{N+1,1}^{-1}(]-\infty, a]) \cap S_{\sqrt{N}}^N$ est une calotte sur $S_{\sqrt{N}}^N$, le théorème isopérimétrique sphérique nous donne

$$\sigma_{\sqrt{N}}^N(\Pi_{N+1,n}^{-1}(A_r) \cap S_{\sqrt{N}}^N) \geq S_{\sqrt{N}}^N \left[(\Pi_{N+1,n}^{-1}(A) \cap S_{\sqrt{N}}^N)_r \right] \geq S_{\sqrt{N}}^N \left[(\Pi_{N+1,1}^{-1}(]-\infty, a]) \cap S_{\sqrt{N}}^N \right]_r.$$

De plus, un calcul montre que $(\Pi_{N+1,1}^{-1}(]-\infty, a]) \cap S_{\sqrt{N}}^N)_r = \Pi_{N+1,1}^{-1}(]-\infty, a+r(N)]) \cap S_{\sqrt{N}}^N$ avec $r(N) = \sqrt{N} \cos [\arccos(a/\sqrt{N}) - r/\sqrt{N}] - a$. Ainsi, comme $\lim_{N \rightarrow \infty} r(N) = r$, le lemme de Poincaré donne $\gamma(A_r) \geq \Phi(a+r)$. Comme $a < h$ est arbitraire, cela achève la démonstration.

5 Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons exploré le problème isopérimétrique dans différents espaces métriques mesurés : l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \lambda_n)$, l'espace gaussien (\mathbb{R}^n, γ_n) et la sphère $(\mathbb{S}^{n-1}, \mu_{n-1})$. Entre autres, nous avons identifié, dans chacun de ces espaces, les ensembles extrémaux (boules, demi-espaces et calottes sphériques) qui minimisent la mesure de bord à mesure fixée. L'espace euclidien offre un cadre intuitif pour aborder le problème et mène à des formulations fonctionnelles telles que l'inégalité de Sobolev. L'espace gaussien introduit une dimension probabiliste à travers l'utilisation du théorème central limite dans la preuve de S. G. Bobkov. D'autres approches, notamment celle de M. Ledoux, mobilisent des outils analytiques puissants tels que les semi-groupes. La sphère, quant à elle, constitue un exemple naturel de variété riemannienne compacte à courbure positive, cadre dans lequel l'isopérimétrie admet aussi des formulations bien établies. La démonstration que nous avons suivie repose sur des techniques classiques de symétrisation, inspirées des méthodes développées dans le cadre euclidien. Finalement, le lemme de Poincaré, qui permet de voir la mesure gaussienne sur \mathbb{R}^n comme une limite de projections orthogonales de mesures uniformes, nous a permis d'établir un lien entre les problèmes isopérimétriques issus de ces deux espaces.

L'extension des résultats classiques à des cadres plus abstraits demeure un champ de recherche actif. On peut notamment citer l'article [10] de M. Pozzetta qui offre une synthèse sur des développements récents sur le sujet.

Références

- [1] F. Barthe. Log-concave and spherical models in isoperimetry. *Geom. Funct. Anal.*, 12(1) :32–55, 2002.
- [2] S. G. Bobkov. An isoperimetric inequality on the discrete cube and an elementary proof of the isoperimetric inequality in Gauss space. *Ann. Probab.*, 25(1) :206–214, 1997.
- [3] J. Bureaux. Propriétés d'isopérimétrie et de concentration gaussiennes. Master's thesis, Université Paris 6 – Pierre et Marie Curie.
- [4] T. Figiel, J. Lindenstrauss, and V. D. Milman. The dimension of almost spherical sections of convex bodies. *Acta Math.*, 139 :53–94, 1977.
- [5] M. Gromov. Paul lévy's isoperimetric inequality. Technical Report M/80/320, Institut des Hautes Études Scientifiques, 1980.
- [6] M. Ledoux. Isoperimetry and Gaussian analysis. In *Lectures on probability theory and statistics. Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour XXIV – 1994. Lectures given at the summer school in Saint-Flour, France, July 7–23, 1994*, pages 165–294. Berlin : Springer, 1996.
- [7] M. Ledoux. Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities. In *Séminaire de probabilités XXXIII*, pages 120–216. Berlin : Springer, 1999.
- [8] P. Lévy. *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Paris : Gauthier-Villars. vi, 442 p. (1922)., 1922.
- [9] V. G. Maz'ya. *Sobolev spaces. Transl. from the Russian by T. O. Shaposhnikova*. Berlin etc. : Springer-Verlag, 1985.
- [10] M. Pozzetta. Isoperimetry on manifolds with Ricci bounded below : overview of recent results and methods. Preprint, arXiv :2303.11925 [math.DG] (2023), 2023.
- [11] L. Saloff-Coste. *Aspects of Sobolev-type inequalities*, volume 289 of *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* Cambridge : Cambridge University Press, 2002.
- [12] E. Schmidt. The Brunn-Minkowski inequality, its mirror, and the isoperimetric property of the ball in Euclidean and non-Euclidean geometry. I. *Math. Nachr.*, 1 :81–157, 1948.