

# Le théorème de De Giorgi-Nash

Solal EISINGER, Alexis DE TARLÉ

Avril 2025

## Résumé

Dans ce mémoire, nous nous proposons de revisiter la preuve par NASH du théorème de DE GIORGI-NASH sur les solutions d'équations paraboliques dans  $\mathbb{R}^n$ .

Ces solutions sont de la forme  $T : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$\partial_t T = \nabla \cdot (C \nabla T) \quad (1)$$

où  $C = C(t, x)$  est une matrice symétrique positive.

Comme son nom l'indique, ce théorème a été prouvé dans un premier temps par le mathématicien italien Ennio DE GIORGI, puis indépendamment par John Forbes NASH l'année d'après. Les travaux de Nash sont grandement motivés par la physique en particulier dans l'étude des fluides, la plupart des domaines de la mécanique des fluides sont régies par des équations paraboliques. La physique prend aussi une grande part dans l'inspiration et l'intuition de NASH pour construire sa preuve. En effet, il introduit à plusieurs reprises des objets physiques tels que l'entropie et l'énergie d'une solution. Il s'inspire aussi à plusieurs reprises de BOLTZMANN notamment lorsqu'il introduit le logarithme d'une solution. Initialement, la compréhension des équations paraboliques devait servir pour l'étude de l'équation de NAVIER-STOKES cela n'a pas suffi puisque c'est encore aujourd'hui un problème ouvert. Il a cependant eu de grand succès, entre autres, pour la résolution du dix-neuvième problème d'Hilbert sur les minimiseurs de fonctionnelles.

**Théorème** (DE GIORGI (1957), NASH (1958), MOSER (1961)). *Si  $T$  est solution de (1) définie pour  $t > t_0$  telle que  $|T| \leq B$ , et  $C(x, t)$  vérifiant  $\text{Sp}(C(x, t)) \subset [c_1, c_2]$  pour presque tout  $x$  avec  $c_2 \geq c_1 > 0$ , alors, pour tous  $t_1, t_2 > 0$  et  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$|T(t_1, x_1) - T(t_2, x_2)| \leq AB \left\{ \left[ \frac{|x_1 - x_2|}{(t_1 - t_0)^{1/2}} \right]^\alpha + \left[ \frac{|t_2 - t_1|}{t_1 - t_0} \right]^{\frac{1}{2}\alpha/(1+\alpha)} \right\} \quad (2)$$

*$A$  et  $\alpha$  sont des constantes a priori qui ne dépendent que de  $c_1, c_2$  et  $n$ .*

Durant toute la durée de la preuve, NASH n'étudie que les solutions fondamentales (objet défini ci-dessous), ces solutions étant plus simples à appréhender et à contrôler. Il passe d'une solution classique à une solution fondamentale très facilement, ce qui ne restreint donc pas la preuve. Celle-ci se découpe en trois grandes parties.

La première partie se concentre sur l'étude du moment d'une solution fondamentale. NASH introduit pour cela l'énergie et l'entropie d'une solution, concept utilisé principalement en physique à cette époque. Il va minorer l'énergie d'une solution et utiliser cette minoration pour contrôler l'entropie. Il va ensuite encadrer le moment en fonction de l'entropie et pouvoir en déduire la première étape de la démonstration le moment croît en racine de  $t$ . Il utilise dans cette partie en particulier l'inégalité de Nash qui est particulièrement novatrice.

Dans un second temps, NASH emprunte à nouveau des idées tirées de la physique en intégrant au logarithme des solutions. Il va étudier comment la moyenne du logarithme contre la gaussienne évolue. L'idée particulièrement novatrice ici est d'étudier le log d'une solution, la démonstration est plus classique. Elle reste néanmoins très formatrice sur les différents arguments utilisés en théorie des équations aux dérivées partielles. Il utilise alors son contrôle du logarithme de la solution pour estimer l'écart entre deux solutions fondamentales.

Dans la dernière partie, il va utiliser ces deux résultats pour en déduire la continuité en espace et en temps des solutions. Il va pour cela utiliser un argument classique dans l'étude des équations aux dérivées partielles, il va procéder à un argument itératif et utiliser à chaque étape l'estimation de l'écart entre deux solutions.

On remercie Cyril IMBERT pour son aide précieuse tant pour la compréhension de l'article que pour la rédaction de ce mémoire.

## Table des matières

<b>1 Résultats préliminaires</b>	<b>3</b>
<b>2 Contrôle du moment</b>	<b>4</b>
<b>3 Contrôle de la moyenne du logarithme</b>	<b>7</b>
<b>4 Estimation de l'écart</b>	<b>11</b>
<b>5 La continuité en espace</b>	<b>12</b>
<b>6 La continuité en temps</b>	<b>18</b>

# 1 Résultats préliminaires

On réduit la démonstration du théorème au cas où les coefficients  $C_{ij}(x, t)$  de la matrice  $A$  sont uniformément  $C^\infty$  en  $t$  et il existe  $r_0$  tel que pour tout  $|x| > r_0$ ,  $C_{ij} = (c_1 c_2)^{\frac{1}{2}} \delta_{i=j}$ . Ces hypothèses permettent de garantir l'existence de solutions fondamentales (voir [Dressel] et [Eidelman]). On suppose aussi que les solutions considérées sont bornées à  $t$  fixé.

**Définition 1.1** (Solution fondamentale d'une équation aux dérivées partielles). *On appelle solution fondamentale  $T$  d'une équation aux dérivées partielles une solution de l'équation définie pour  $t > t_0$  vérifiant*

$$\int_{\mathbb{R}^n} T(x, t) dx = 1$$

et tel qu'il existe un point  $x_0$  tel que  $T$  converge en tant que distribution quand  $t$  tend vers  $t_0$  vers  $\delta_{x_0}$ , le dirac en  $x_0$ .

On note  $S$  la fonction qui pour  $t > t_0$  vaut

$$S(x, t, x_0, t_0) = T(x, t)$$

où  $T$  est la solution fondamentale convergeant vers  $\delta_{x_0}$  en  $t_0$ .

**Proposition 1.2.**  *$S$  vérifie alors pour tout  $t' > t$*

$$T(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} S(x, t, x', t') T(x', t') dx' \quad (3)$$

pour toute solution  $T$  de l'équation.

**Théorème 1.3** (Inégalité de POINCARÉ pour la gaussienne). *Dans  $\mathbb{R}^n$ , on pose  $\mu(v) = e^{-|v|^2}$ . Soit  $f$  de carré intégrable par rapport à  $\mu$ , dont les dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont de carré intégrable par rapport à  $\mu$ , et telle que sa moyenne est nulle ( $\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = 0$ ). Alors*

$$2 \int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu. \quad (4)$$

**Théorème 1.4** (Inégalité de NASH). *Soit  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  telle que  $f$  soit de carré intégrable et toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et le soient aussi. Alors*

$$\|f\|_2^{1+2/n} \leq K_n \|\nabla f\|_2 \|f\|_1^{2/n} \quad (5)$$

où

$$K_n^2 = 2n^{-1+2/n} \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{1+n/2} \lambda_n |\mathbb{S}^{n-1}|^{-2/n}$$

avec  $\lambda_n = \inf_g [\|\nabla g\|_2 / \|g\|_2]$  pour les  $g$  sphériques symétriques d'intégrale nulle ( $\lambda_n > 0$  par le théorème 1.3).

**Proposition 1.5.** *Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexe, et  $T$  solution de l'EDP (1). Alors  $\varphi(T)$  est sous-solution de (1), i.e.  $\partial_t(\varphi(T)) \leq \nabla \cdot (C\nabla\varphi(T))$ .*

## 2 Contrôle du moment

Dans toute cette partie  $T$  désigne la solution fondamentale associée à  $\delta_0$  au temps nul.

**Définition 2.1.** On appelle et on note  $M$  le moment de la solution  $T$  i.e.

$$M(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|T(x, t)dx .$$

On définit l'entropie  $Q$  d'une solution par

$$Q = - \int_{\mathbb{R}^n} \log(T)Tdx .$$

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant :

**Théorème 2.2.** Il existe deux constantes  $k_1$  et  $k_2$  telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad k_1\sqrt{t} \leq M(t) \leq k_2\sqrt{t} . \quad (6)$$

On commence par minorer l'entropie  $Q$  puis par encadrer le moment  $M$  à l'aide de l'entropie. La première étape est l'étude de l'énergie  $E = \int_{\mathbb{R}^n} T^2 dx$  de la solution.

**Lemme 2.3.** Il existe une constante  $k$  dépendant de  $c_1$ ,  $c_2$  et de la dimension telle que pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $E$  vérifie

$$E \leq kt^{-n/2} \quad (7)$$

*Démonstration.* On cherche à trouver une inéquation différentielle vérifiée par  $E$ . On a

$$E_t = 2 \int_{\mathbb{R}^n} T \frac{dT}{dt} dx = 2 \int_{\mathbb{R}^n} T \nabla \cdot (C \nabla T) dx$$

où la dernière égalité découle de (1). Une intégration par parties sur le dernier terme donne

$$E_t = -2 \int_{\mathbb{R}^n} \nabla(T) C \nabla(T) dx$$

puisque  $C$  est symétrique on a  $\forall X \in \mathbb{R}^n, c_1|X|^2 \leq X \cdot CX \leq c_2|X|^2$  donc

$$-E_t \geq 2c_1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla T|^2 dx \geq 2c_1 \frac{\|T\|_2^{1+2/n}}{K_n \|T\|_1^{2/n}}$$

où la dernière inégalité est l'inégalité de NASH (1.4) appliquée à  $T$ . On a  $\|T\|_1 = 1$  et  $\|T\|_2 = E$  donc

$$-E_t \geq kE^{1+\frac{2}{n}}$$

où  $k$  ne dépend que de  $n$ ,  $c_1$  et  $c_2$ . On en déduit l'équation (7). □

**Corollaire 2.3.1.** *La solution fondamentale vérifie la même estimation i.e. il existe  $k$  dépendant uniquement de  $n$ ,  $c_1$  et  $c_2$  tel que pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  on a*

$$T(x, t) \leq kt^{-n/2} \quad (8)$$

ce qui se traduit pour l'entropie par

$$Q \geq k' + \frac{n}{2} \log(t) \quad (9)$$

où  $k'$  est une constante dépendant uniquement de  $c_1$ ,  $c_2$  et  $n$ .

On essaye à présent de comparer le moment et l'entropie de  $T$ .

**Lemme 2.4.** *On peut relier l'entropie et le moment de la manière suivante*

$$M \geq ke^{Q/n} \quad (10)$$

où  $k$  est à nouveau une constante ne dépendant que de  $c_1$ ,  $c_2$  et  $n$ .

*Démonstration.* Une étude de fonction sur  $x \mapsto x \log(x) + \lambda x$  pour  $\lambda$  fixé montre que  $y \log(y) + \lambda y \geq \min_x x \log(x) + \lambda x = -e^{-\lambda-1}$ . On utilise cette inégalité pour  $y = T(x, t)$  et  $\lambda = a|x| + b$ . En intégrant sur  $x$  on obtient

$$-Q + aM + b = \int_{\mathbb{R}^n} \log(T)T + a|x|T + bT dx \geq - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|-b-1} dx . \quad (11)$$

Un changement de variable dans la dernière intégrale donne

$$- \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|-b-1} dx = -e^{-b-1} a^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|} dx .$$

La dernière intégrale est une constante que l'on note  $I_n$ . On prend alors  $a = \frac{n}{M}$  et  $e^{-b} = \frac{e^{-1}}{I_n} a^n$ . L'équation (11) devient alors

$$-Q + n + b \geq -1 ,$$

ce qui se traduit par

$$n \log(M) + n \geq Q + n \log(n) - \log(C) .$$

On en déduit 2.4. □

On montre un dernier lemme avant de passer à la démonstration du théorème 2.2.

**Lemme 2.5.** *Les dérivées temporelles du moment et de l'entropie vérifient*

$$c_2 \frac{dQ}{dt} \geq \left( \frac{dM}{dt} \right)^2 . \quad (12)$$

*Démonstration.* La dérivée  $\frac{dQ}{dt}$  de  $Q$  vérifie

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dt} &= - \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \log(T)) T_t dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \log(T)) \nabla(C\nabla T) \quad (\text{d'après l'équation (1)}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla(\log(T)) C\nabla T dx \quad (\text{avec une IPP}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla(\log(T)) C \frac{\nabla T}{T} (T dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla(\log(T)) C \nabla(\log(T)) (T dx) .
\end{aligned}$$

On a  $X \cdot c_2 CX \geq X \cdot C^2 X = |CX|^2$  donc en utilisant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ :

$$\begin{aligned}
c_2 \frac{dQ}{dt} &\geq \int_{\mathbb{R}^n} |C\nabla(\log(T))|^2 (T dx) \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^n} |C\nabla(\log(T))|^2 (T dx) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} T dx \\
&\geq \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |C\nabla(\log(T))| (T dx) \right]^2 \\
&\geq \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |C\nabla T| dx \right]^2 .
\end{aligned}$$

On majore maintenant la dérivée  $\frac{dM}{dt}$  de  $M$

$$\begin{aligned}
\left( \frac{dM}{dt} \right)^2 &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |x| \nabla \cdot (C\nabla T) dx \right)^2 = \left( \int_{\mathbb{R}^n} \nabla |x| \cdot C\nabla T dx \right)^2 \\
&\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla |x|| |C\nabla T| dx \right)^2 = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |C\nabla T| dx \right)^2 \\
&\leq c_2 \frac{dQ}{dt} .
\end{aligned}$$

□

On peut maintenant passer à la démonstration du théorème 2.2 :

*Démonstration du théorème 2.2.* En combinant les lemmes 2.4 et 2.5, on déduit que  $M$  et  $Q$  vérifient :

$$k e^{Q(t)/n} \leq M(t) \leq \int_0^t \sqrt{c_2 \frac{dQ}{dt}(u)} du$$

où  $k$  est une constante. Le corollaire 2.3.1 nous donne l'existence d'une constante  $k'$  telle que  $nR = Q - k' - \frac{n}{2} \log(t)$  est une fonction positive sur  $\mathbb{R}^+$ . On a

$\frac{dQ}{dt} = n \frac{dR}{dt} + \frac{n}{2t}$ . Pour  $a$  et  $a+b$  positifs, on a  $a+b \leq a+b + \frac{b^2}{4a} = (\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}})^2$  donc  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$ . on en déduit que

$$\begin{aligned} M &\leq \sqrt{nc_2} \int_0^t \left[ \frac{1}{\sqrt{2u}} + \sqrt{\frac{u}{2}} \frac{dR}{dt}(u) \right] du \\ &\leq \sqrt{2t} + R(t) \sqrt{\frac{t}{2}} - \int_0^t \frac{R(u)}{\sqrt{8u}} du && \text{(avec une IPP)} \\ &\leq \sqrt{2t} + R(t) \sqrt{\frac{t}{2}} && \text{(car } R \text{ est positif) .} \end{aligned}$$

On a  $ke^{Q/n} = k\sqrt{t}e^R$  donc

$$ke^R \leq \frac{M}{\sqrt{t}} \leq \sqrt{2} + \sqrt{2}R .$$

Or

$$\lim_{+\infty} \frac{\frac{k}{2}e^R}{\sqrt{2}(1+R)} = +\infty$$

donc il existe une constante  $R_k$  dépendant uniquement de  $k$  tel que

$$\forall R \geq R_k, \quad \sqrt{2}(1+R) \leq \frac{k}{2}e^R$$

donc en utilisant les deux inéquations

$$ke^R \leq \frac{k}{2}e^R + \sup_{R \leq R_k} (\sqrt{2}(1+R)) = \frac{k}{2}e^R + \sqrt{2}(1+R_k)$$

donc  $e^R$  et donc  $R$  sont bornés par une constante dépendant uniquement de  $k$ . Finalement  $\frac{M}{\sqrt{t}}$  est bornée en haut et en bas par des constantes dépendant uniquement de  $c_1, c_2$  et  $n$ .  $\square$

### 3 Contrôle de la moyenne du logarithme

La solution  $T$  continue d'être la solution fondamentale  $\delta_0$  en temps nul.

**Définition 3.1.** On pose  $U(\xi, t) = t^{\frac{n}{2}}T(\sqrt{t}\xi, t)$  Soit  $\delta > 0$  On définit

$$G_\delta = \int_{\mathbb{R}^n} \log(U(\xi, t) + \delta) e^{-|\xi|^2} d\xi .$$

Pour la suite on note  $d\mu = e^{-|\xi|^2} d\xi$ .

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant

**Théorème 3.2.** Pour  $\delta > 0$  suffisamment petit, il existe une constante  $c$  dépendant uniquement de  $c_1, c_2$  et  $n$  tel que :

$$G_\delta \geq -c\sqrt{-\log(\delta)} . \tag{13}$$

Commençons par regarder quelques propriétés élémentaires de  $U$ .  
D'abord, d'après l'inéquation (8) :

$$\forall \xi, \forall t \quad U \leq k .$$

De plus

**Proposition 3.3.**  $U$  vérifie

$$k_1 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi| U d\xi \leq k_2 ,$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont les constantes du théorème 2.2.  
De plus  $U$  vérifie l'équation

$$2tU_t(\xi, t) = nU(\xi, t) + \xi \cdot \nabla U(\xi, t) + 2\nabla \cdot (C\nabla T) . \quad (14)$$

Pour établir le théorème 3.2, on cherche à ce que  $G_\delta$  résolve une inéquation différentielle.

**Proposition 3.4.** La dérivée  $\frac{dG_\delta}{dt}$  vérifie

$$2t \frac{dG_\delta}{dt} \geq k \log(\delta) - nG_\delta - k' \sqrt{H} + H \quad (15)$$

où  $H \geq 2c_1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \log(U + \delta)|^2 d\mu$  et  $k, k'$  sont des constantes.

*Démonstration.* On utilise l'équation (14) pour dériver  $G_\delta$  :

$$2t \frac{dG_\delta}{dt} = n \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{U}{U + \delta} d\mu}_{\text{noté } H_1} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\xi \cdot \nabla U}{U + \delta} d\mu}_{\text{noté } H_2} + 2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\nabla(C\nabla T)}{U + \delta} d\mu}_{\text{noté } H_3} .$$

On a  $H_1 \geq 0$  et, par intégration par parties,  $H_2 \geq -nG_\delta + n\pi^{n/2} \log(\delta)$ .  
Évaluons  $H_3$  : on vérifie (IPP et CAUCHY-SCHWARZ) que

$$H_3 \geq -\sqrt{4nc_2\pi^{n/2}H} + H$$

où  $H = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \log(U + \delta) C \nabla \log(U + \delta) d\mu \geq 2c_1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \log(U + \delta)|^2 d\mu$ .  $\square$

Le reste de la preuve se concentre sur l'étude de  $H$ .

**Proposition 3.5.**

$$H \geq (k - k'G_\delta)^2 ,$$

avec  $k$  et  $k'$  ne dépendant que de  $c_1, c_2$  et  $n$ .

*Démonstration.* On pose  $f = \log(U + \delta) - \pi^{-n/2}G_\delta$ . Cette fonction est d'intégrale nulle sur  $\mathbb{R}^n$ . On lui applique le théorème de POINCARÉ pour la gaussienne (théorème 1.3) :

$$\begin{aligned} H &\geq 2c_1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu \geq 4c_1 \int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\mu \\ H &\geq 4c_1 \int_{\mathbb{R}^n} [\log(U + \delta) - \pi^{-n/2}G_\delta]^2 d\mu . \end{aligned}$$

Regardons la quantité  $U^{-1}[\log(U + \delta) - \pi^{-n/2}G_\delta]^2$  pour  $U > 0$  : elle tend vers l'infini quand  $U \rightarrow 0$ , s'annule puis atteint un maximum local avant de s'annuler à l'infini. Notons  $U_c$  ce maximum ; on a  $\log(U_c + \delta) - \pi^{-n/2}G_\delta = 2U_c/(U_c + \delta)$ , d'où  $U_c \leq U_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \exp(2 + \pi^{-n/2}G_\delta)$ . Comme  $U$  décroît après  $U_0$  et que  $U$  est bornée (uniformément en temps) par un  $k$ , la quantité est minorée pour  $U \geq U_0$  par  $\frac{1}{k}[\log(k + \delta) - k\pi^{-n/2}G_\delta]^2$ . On a donc

$$H \geq 4c_1 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{k} [\log(k + \delta) - k\pi^{-n/2}G_\delta]^2 U^* d\mu \quad (16)$$

où  $U^* = U \cdot \mathbf{1}_{U > U_0}$ . Pour  $\delta \ll 1$ ,  $G_\delta \ll 0$  donc  $U_0 = U_0(G_\delta)$  deviendra suffisamment petite pour que la quantité de droite dans (16) soit non nulle.

Pour  $\delta$  suffisamment petit,  $\log(k + \delta) - k\pi^{-n/2}G_\delta$  est positive, si bien que  $[\log(k) - k\pi^{-n/2}G_\delta]^2 < [\log(k + \delta) - k\pi^{-n/2}G_\delta]^2$  et on simplifie l'inégalité au-dessus en

$$H \geq (k - k'G_\delta)^2 \int_{\mathbb{R}^n} U^* d\mu \quad (17)$$

où  $k$  et  $k'$  sont de nouvelles constantes découlant des anciennes (donc dépendant uniquement de  $c_1$ ,  $c_2$  et  $n$ ).

Désormais, le seul obstacle est l'intégrale. On va chercher à la minorer par une constante.

**Lemme 3.6.**

$$\int_{\mathbb{R}^n} U^* d\mu \geq \frac{1}{2}$$

pour  $\delta \in ]0, \delta_0[$ , avec  $\delta_0(c_1, c_2, n) > 0$  suffisamment petit.

*Démonstration.* On pose  $\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} U^* d\xi$ .

On remarque d'abord que  $\int_{\xi \leq 2k_2/\lambda} U^* d\xi \geq \frac{\lambda}{2}$ , avec  $k_2$  la constante introduite dans le théorème 2.2 et réutilisée dans la proposition 3.3, puis on déduit

$$\int_{\mathbb{R}^n} U^* d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} U^* \exp(-\xi^2) d\xi \geq \exp(-(2k_2/\lambda)^2) \frac{\lambda}{2}$$

en ne considérant l'intégrale que pour  $\xi \leq 2k_2/\lambda$ , soit  $\exp(-\xi^2) \geq \exp(-(2k_2/\lambda)^2)$ . Reste encore à minorer  $\lambda$ , ce qui revient à majorer  $1 - \lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{U} d\xi$ , avec  $\hat{U}$  défini comme égal à  $U - U^*$ , ou encore  $U \cdot \mathbf{1}_{\{U < U_0\}}$ . On montre d'abord que la fonction  $U_0 \mathbf{1}_{B(0, \rho)}$  pour  $\rho$  bien choisi est un maximisant.

On pose  $N = \text{supp}(\hat{U})$ . Soit  $\mathcal{B} = B(0, \rho)$  telle que  $\int_{\mathcal{B}} |\xi| U_0 d\xi = k_2$ . On va montrer que  $\int_{\mathcal{B}} U_0 d\mu \geq \int \hat{U} d\mu$ . On découpe

$$\int_N \hat{U} d\mu - \int_{\mathcal{B}} U_0 d\mu = \int_{N \cap \mathcal{B}} (\hat{U} - U_0) d\mu + \int_{N - \mathcal{B}} \hat{U} d\mu - \int_{\mathcal{B} - N} U_0 d\mu .$$

D'une part

$$\int_{N - \mathcal{B}} \hat{U} d\mu \leq \frac{e^{-\rho^2}}{\rho} \int_{N - \mathcal{B}} |\xi| \hat{U} d\xi \leq \frac{e^{-\rho^2}}{\rho} (k_2 - \int_{\mathcal{B} \cap N} |\xi| \hat{U} d\xi) .$$

D'autre part

$$\int_{\mathcal{B} - N} U_0 d\mu \geq \frac{e^{-\rho^2}}{\rho} \int_{\mathcal{B} - N} |\xi| U_0 d\xi = \frac{e^{-\rho^2}}{\rho} (k_2 - \int_{\mathcal{B} \cap N} |\xi| U_0 d\xi) .$$

On a utilisé dans ces deux inéquations le fait que tous les éléments intégrés sont supérieurs (resp. inférieurs) à  $\rho$ . On remarque que  $U_0 - \hat{U} \geq 0$  sur  $N \cap \mathcal{B}$  : on établit de même  $\int_{N \cap \mathcal{B}} (U_0 - \hat{U}) d\mu \geq \frac{e^{-\rho^2}}{\rho} \int_{N \cap \mathcal{B}} |\xi| (U_0 - \hat{U}) d\xi$ . En combinant les inégalités, on obtient  $\int_N \hat{U} d\mu - \int_{\mathcal{B}} U_0 d\mu \leq 0$ .

On peut maintenant supposer pour la suite que  $\hat{U} = U_0 \mathbf{1}_{B(0, \rho)}$  où  $\rho$  vérifie  $\int_{|\xi| < \rho} |\xi| U_0 d\xi = k_2$ . Un calcul direct montre que  $\rho$  est proportionnel à  $U_0^{-1/(n+1)}$ . On a alors en général

$$\begin{aligned} 1 - \lambda &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{U} d\xi \leq \mathcal{V}(\text{boule}_n(0, 1)) \rho^n U_0 \\ &\leq k U_0^{1/(n+1)} . \end{aligned}$$

D'après l'expression de  $U_0$ ,  $1 - \lambda$  décroît avec  $\delta$ , donc  $\lambda$  est borné par en-dessous. Pour  $G_\delta$  suffisamment négatif,  $\lambda \geq 1/2$  et on a bien le lemme 3.6.  $\square$

On déduit alors la proposition 3.5 du lemme 3.6 et de l'inéquation (17) (en divisant par 2 les constantes  $k$  et  $k'$ ).  $\square$

On trouve enfin l'inéquation différentielle :

**Proposition 3.7.**

$$\begin{aligned} 2 \frac{dG_\delta}{d(\log t)} &= 2t \frac{dG_\delta}{dt} \geq -nG_\delta + k \log(\delta) + (k - kG_\delta)^2 - k'(k - kG_\delta) \\ &\geq \tilde{k} G_\delta^2 + k \log(\delta) \end{aligned}$$

pour  $-G_\delta$  suffisamment grand.

On pose alors  $G_1(c_1, c_2, n)$  tel que si  $G_\delta < G_1$ , alors  $G_\delta$  est suffisamment petit pour que la proposition 3.7 soit vérifiée. Soit  $G_2(c_1, c_2, n, \delta) = -\sqrt{k}(-\log(\delta))^{1/2}$ , et  $G_3 = \min(G_1, G_2)$ .

On a que  $G_\delta \geq G_3$ , car sinon on peut montrer que  $G_\delta(t) \rightarrow -\infty$  quand  $t \rightarrow 0$  alors même que  $G_\delta \geq \pi^{n/2} \log(\delta)$ . Pour  $\delta$  suffisamment petit,  $G_2 < G_1$  (qui ne dépend pas de  $\delta$ ) et donc  $G_\delta \geq G_3 = G_2$ , ce qui conclut la preuve du théorème 3.2.

## 4 Estimation de l'écart

Dans cette partie, nous utilisons le résultat précédent pour estimer l'écart entre les valeurs que prennent deux solutions fondamentales, ce qui permet après d'obtenir le résultat sur la continuité en espace ; en particulier nous établirons le résultat suivant :

**Théorème 4.1.** *Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux solutions fondamentales de sources respectives  $x_1$  et  $x_2$  en  $t = 0$ , définies pour  $t \geq 0$ . Pour tout  $t > 0$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \min(T_1, T_2) dx \geq \phi \left( \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{t}} \right), \quad (18)$$

où  $\phi$  est une fonction à valeurs dans  $]0, 1]$  continue décroissante.

La démonstration de ce théorème repose surtout sur le résultat précédent et sur une série de manipulations élémentaires sur les minima et maxima.

*Démonstration.* On adapte les notations de la partie précédente : soient  $\xi_i = x_i/\sqrt{t}$  et  $U_i = t^{n/2}T_i(\sqrt{t}\xi, t)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . En appliquant le théorème 3.2 pour ces deux solutions,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{|\xi - \xi_i|^2} \log(U_i + \delta) d\xi \geq -c\sqrt{-\log(\delta)}$$

pour  $i \in \{1, 2\}$ .

En sommant les deux termes

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^* \log(U_{\max} + \delta) d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \log(U_{\min} + \delta) d\xi \geq -2c\sqrt{-\log(\delta)}$$

avec  $f^*(\xi) = \max_i e^{|\xi - \xi_i|^2}$  et  $\hat{f}(\xi) = \min_i e^{|\xi - \xi_i|^2}$ .

La première intégrale vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^* \log(U_{\max} + \delta) d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} f^*(U_1 + U_2) d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} (U_1 + U_2) d\xi = 2.$$

Quant à la seconde,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \log(U_{\min} + \delta) d\xi &\leq \log(\delta) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} d\xi + \max[\hat{f}] \int_{\mathbb{R}^n} \log\left(1 + \frac{U_{\min}}{\delta}\right) d\xi \\ &\leq w \log(\delta) + \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}^n} U_{\min} d\xi \end{aligned}$$

avec  $w = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \min_i e^{|\xi - \xi_i|^2} d\xi$ .

Remarquons que les approximations sur les deux intégrales sont très brutales, ce qui se justifie par le peu d'informations que l'on exige de  $\phi$  à la fin. La

clé est la dernière inéquation faisant ressortir  $\int_{\mathbb{R}^n} \min(U_1, U_2) d\xi$ , qui est égal à  $\int_{\mathbb{R}^n} \min(T_1, T_2) dx$ . Il suffit maintenant de combiner les inéquations pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \min(T_1, T_2) dx \geq \delta \left[ -2 - w \log(\delta) - c\sqrt{-\log(\delta)} \right]. \quad (19)$$

Cette expression est vraie pour n'importe quel  $\delta$  suffisamment petit. On choisit  $\delta = \delta(w)$  tel que l'expression est vraie et la partie de droite est strictement positive (la partie entre crochets étant un polynôme de degré 2 en  $\sqrt{-\log(\delta)}$  avec  $w > 0$  comme coefficient dominant). De plus  $w$  peut s'écrire comme fonction de  $|\xi_1 - \xi_2|$ . On peut donc écrire

$$\int_{\mathbb{R}^n} \min(T_1, T_2) dx \geq \phi(|\xi_1 - \xi_2|) = \phi\left(\frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{t}}\right)$$

où  $\phi$  est une fonction a priori qui est strictement positive, décroissante et continue.  $\phi$  est déterminée par les constantes  $c_1, c_2$  et  $n$ .  $\square$

## 5 La continuité en espace

Ici, nous établirons le résultat suivant :

**Théorème 5.1.** *Sous les hypothèses du Théorème de DE GIORGI-NASH, pour  $x, x' \in \mathbb{R}^n$ , à  $t > t_0 \geq 0$  fixé, on a*

$$|T(x, t) - T(x', t)| \leq BA_1 \left( \frac{|x - x'|}{\sqrt{t - t_0}} \right)^\alpha \quad (20)$$

avec  $A_1$  et  $\alpha$  des constantes qui ne dépendent que de  $c_1, c_2$  et  $n$ .

On fixe donc  $t > 0$  pour toute cette partie.

L'idée est d'exploiter l'écriture de  $T$  avec les solutions fondamentales (équation (3)). On travaille donc ici sur les solutions fondamentales  $T_1$  et  $T_2$  utilisées précédemment. La plus grande partie de la preuve visera à minorer  $A(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |T_1 - T_2| dx$ . Observons que

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [T_1 + T_2 - 2 \min(T_1, T_2)] dx \\ &\leq 1 - \phi(|x_1 - x_2|/\sqrt{t}) \stackrel{\text{(noté)}}{=} \psi(|x_1 - x_2|/\sqrt{t}). \end{aligned}$$

Introduisons d'abord quelques notations : soit  $T_a = (T_1 - T_2)_+$  et  $T_b = (T_1 - T_2)_-$  les parties positive et négative de  $T_1 - T_2$ . On voit que  $\int_{\mathbb{R}^n} T_a dx = \int_{\mathbb{R}^n} T_b dx = A$ . Soit  $\chi(x, \bar{x}, t) = T_a(x, t)T_b(\bar{x}, t)/A(t)$ .

**Lemme 5.2.** *Pour  $x' \in \mathbb{R}^n$  et  $t' > t$ ,*

$$T_1(x', t') - T_2(x', t') = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} [S(x', t', x, t) - S(x', t', \bar{x}, t)] \chi(x, \bar{x}, t) dx d\bar{x}. \quad (21)$$

*Démonstration.* On pose  $T_a^*(x', t', t)$  la solution bornée de (1) sur  $t' > t$  telle que  $T_a^*(\cdot, t, t) = T_a(\cdot, t)$ . On définit de même  $T_b^*(x', t', t)$ .

$$T_a^*(x', t', t) = \int_{\mathbb{R}^n} S(x', t', x, t) T_a(x, t) dx = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} S(x', t', x, t) \chi(x, \bar{x}, t) dx d\bar{x},$$

et de même pour  $T_b^*$ .

On remarque ensuite que  $T_1 - T_2$  et  $T_a^* - T_b^*$  sont toutes deux solutions de (1) pour  $t' > t$  égales par définition en  $t' = t$ . Par principe de superposition  $T_1 - T_2 = T_a^* - T_b^*$  pour  $t' \geq t$ . On réécrit ensuite

$$\begin{aligned} T_1(x', t') - T_2(x', t') &= T_a^*(x', t', t) - T_b^*(x', t', t) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} [S(x', t', x, t) - S(x', t', \bar{x}, t)] \chi(x, \bar{x}, t) dx d\bar{x}, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du lemme.  $\square$

Cela permet d'écrire

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |T_1 - T_2| dx' \leq \iiint [S(x', t', x, t) - S(x', t', \bar{x}, t)] dx' \chi(x, \bar{x}, t) dx d\bar{x}.$$

On en déduit les deux corollaires-clés suivants :

**Corollaire 5.2.1.** *Pour  $t' \geq t$ ,*

$$A(t') \leq \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \psi \left( \frac{|x - \bar{x}|}{\sqrt{t' - t}} \right) \chi(x, \bar{x}, t) dx d\bar{x}. \quad (22)$$

**Corollaire 5.2.2.** *En particulier,  $A(t')$  est décroissante.*

On cherche ensuite à évaluer la vitesse de décroissance de  $A$ . On va pour cela utiliser un argument itératif et construire une suite de temps  $t_n$  sur laquelle  $A$  décroît géométriquement. L'intérêt d'un argument itératif réside dans la possibilité d'écrire la différence des solutions à un temps  $t' \geq t > 0$  en fonction de la différence en  $t$  (équation (22)). On perd alors moins d'information et de contrôle sur les solutions entre  $t$  et  $t'$  qu'entre 0 et  $t'$ .

On prend un réel quelconque  $d \in \mathbb{R}_*^+$  et on pose  $\epsilon = \phi(d)$ , on définit  $\sigma = 1 - \frac{\epsilon}{4}$ . Le but ici est de construire une suite de temps  $t_n$  tel que  $A(t_n) = \sigma^n$ . On procède pour cela par récurrence. La fonction  $A$  étant décroissante et continue il suffit pour trouver  $t_n$  de trouver un temps  $t'$  tel que  $A(t') \leq \sigma^n$ , s'il existe (on montre par la suite que c'est le cas). Le cas  $n = 1$  est facile, en effet

$$A \left( \frac{|x_1 - x_2|^2}{d^2} \right) \leq \psi \left( \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{\frac{|x_1 - x_2|^2}{d^2}}} \right) = \psi(d) = 1 - \epsilon \leq 1 - \frac{\epsilon}{4} = \sigma^1.$$

Pour la suite de la preuve on fixe  $t_n$  tel que  $A(t_n) = \sigma^n$  et on cherche à prouver l'existence de  $t_{n+1}$ .

**Définition 5.3.** On pose  $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$  et  $M_a = \int_{\mathbb{R}^n} |x - x_0| T_a dx$  le moment par rapport au barycentre des sources. On définit  $M_b$  de manière similaire. Enfin on pose  $M_n = \max[M_a(t_n), M_b(t_n)]$ .

L'idée ici est de concentrer notre travail là où le poids des solutions est le plus fort. On cherche donc un rayon  $\rho$  tel que  $\int_{|x-x_0| \leq \rho} T_a(x, t_n) dx \geq \frac{\sigma^n}{2}$ .

**Lemme 5.4.**  $\rho = \frac{2M_n}{\sigma^n}$  convient.

*Démonstration.* On a

$$\rho \int_{|x-x_0| \geq \rho} T_a dx \leq \int_{|x-x_0| \geq \rho} |x - x_0| T_a dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |x - x_0| T_a dx \leq M_n .$$

On veut donc  $\frac{M_n}{\rho} \leq \frac{\sigma^n}{2}$  donc  $\rho = \frac{2M_n}{\sigma^n}$  convient.  $\square$

On définit  $T'_a(x) = T_a(x, t_n) \cdot \mathbf{1}_{|x| \leq \rho}$  de même pour  $T'_b$ . On définit de plus  $\chi_n(x, \bar{x}) = \frac{T'_a T'_b}{\sigma^n}$ , on remarque que  $\chi_n(x, \bar{x}) = \chi(x, \bar{x}, t_n)$  si  $|x - x_0| \leq \rho$  et  $|\bar{x} - x_0| \leq \rho$ .

**Proposition 5.5.** Pour  $t' > t_n$  A vérifie

$$A(t') \leq \sigma^n \left[ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \psi \left( \frac{4M_n}{\sigma^n \sqrt{t' - t_n}} \right) \right] . \quad (23)$$

*Démonstration.* On utilise l'équation (22) en  $t'$  et en  $t_n$  :

$$\begin{aligned} A(t') &\leq \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \psi \left( \frac{|x - \bar{x}|}{\sqrt{t' - t_n}} \right) \chi(x, \bar{x}, t_n) dx d\bar{x} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \psi \left( \frac{|x - \bar{x}|}{\sqrt{t' - t_n}} \right) [\chi(x, \bar{x}, t_n) - \chi_n(x, \bar{x})] dx d\bar{x} \\ &\quad + \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \psi \left( \frac{|x - \bar{x}|}{\sqrt{t' - t_n}} \right) \chi_n(x, \bar{x}) dx d\bar{x} . \end{aligned}$$

Dans le premier terme on a  $\psi \left( \frac{|x - \bar{x}|}{\sqrt{t' - t_n}} \right) \leq 1$  et  $\chi(x, \bar{x}, t_n) - \chi_n(x, \bar{x}) \geq 0$  donc

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \psi \left( \frac{|x - \bar{x}|}{\sqrt{t' - t_n}} \right) [\chi(x, \bar{x}, t_n) - \chi_n(x, \bar{x})] dx d\bar{x} \leq \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} [\chi(x, \bar{x}, t_n) - \chi_n(x, \bar{x})] dx d\bar{x} .$$

Pour le deuxième terme, pour que  $\chi_n$  soit non nul il faut que  $|x - x_0| \leq \rho$  et  $|\bar{x} - x_0| \leq \rho$ ; en particulier  $|x - \bar{x}| \leq 2\rho$ . Or  $\psi$  est croissante donc

$$\psi \left( \frac{|x - \bar{x}|}{\sqrt{t' - t_n}} \right) \leq \psi \left( \frac{2\rho}{\sqrt{t' - t_n}} \right) \text{ et}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \psi \left( \frac{|x - \bar{x}|}{\sqrt{t' - t_n}} \right) \chi_n(x, \bar{x}) dx d\bar{x} \leq \psi \left( \frac{2\rho}{\sqrt{t' - t_n}} \right) \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \chi_n(x, \bar{x}) dx d\bar{x} .$$

On a donc

$$\begin{aligned}
A(t') &\leq \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \chi(x, \bar{x}, t_n) dx d\bar{x} - [1 - \psi\left(\frac{2\rho}{\sqrt{t'} - t_n}\right)] \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \chi_n(x, \bar{x}) dx d\bar{x} \\
&= \sigma^n - [1 - \psi\left(\frac{2\rho}{\sqrt{t'} - t_n}\right)] \sigma^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} T'_a(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} T'_b(\bar{x}) d\bar{x} \\
&\leq \sigma^n - [1 - \psi\left(\frac{2\rho}{\sqrt{t'} - t_n}\right)] \sigma^{-n} \left(\frac{\sigma^n}{2}\right)^2 \\
&= \sigma^n \left[ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \psi\left(\frac{2\rho}{\sqrt{t'} - t_n}\right) \right].
\end{aligned}$$

□

**Proposition 5.6.** *Grâce à la proposition précédente on peut avoir une estimation de l'écart entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$*

$$t_{n+1} \leq t_n + \left(\frac{4M_n}{\sigma^n d}\right)^2 \quad (24)$$

En particulier  $t_n$  existe et est fini pour tout  $n$ .

*Démonstration.* On pose  $t' = t_n + \left(\frac{4M_n}{\sigma^n d}\right)^2$  dans l'équation (23). On a alors

$$\begin{aligned}
A(t') &\leq \sigma^n \left[ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \psi\left(\frac{4M_n}{\sigma^n \sqrt{t'} - t_n}\right) \right] \\
&\leq \sigma^n \left[ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \psi(d) \right] = \sigma^n \left[ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} (1 - \epsilon) \right] \\
&\leq \sigma^n \left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right) = \sigma^{n+1},
\end{aligned}$$

donc par décroissance de  $A$   $t_{n+1} \leq t'$ . □

On est maintenant ramené à étudier la suite  $(M_n)$  que l'on va essayer de majorer.

**Proposition 5.7.** *On rappelle (Théorème 2.2) qu'il existe une constante  $k_2$  dépendant uniquement de  $c_1, c_2$  et  $n$  tel que pour  $t, t'$  et  $x$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x' - x| S(x', t', x, t) dx' \leq k_2 \sqrt{t' - t}.$$

$M_n$  est alors à croissance géométrique vérifiant

$$M_n \leq \frac{|x_1 - x_2|}{2} \left(1 + \frac{4k_2}{d}\right)^n. \quad (25)$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}
T_a(x', t') &= (T_1(x', t') - T_2(x', t'))_+ \\
&= (T_a^*(x', t', t) - T_b^*(x', t', t))_+ \\
&\leq T_a^*(x', t', t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} S(x', t', x, t) T_a(x, t) dx
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
M_a(t') &= \int_{\mathbb{R}^n} |x' - x_0| T_a(x', t') dx' \\
&\leq \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |x' - x_0| S(x', t', x, t) T_a(x, t) dx' dx \\
&\leq \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (|x' - x| + |x - x_0|) S(x', t', x, t) T_a(x, t) dx' dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |x - x_0| T_a(x, t) \left( \int_{\mathbb{R}^n} S(x', t', x, t) dx' \right) dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} T_a(x, t) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |x' - x| S(x', t', x, t) dx' \right) dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |x - x_0| T_a(x, t) dx + k_2 \sqrt{t' - t} \int_{\mathbb{R}^n} T_a(x, t) dx \\
&= M_a(t) + k_2 A(t) \sqrt{t' - t} .
\end{aligned}$$

On utilise la dernière inégalité pour  $t' = t_{n+1}$  et  $t = t_n$ , on a donc

$$M_a(t_{n+1}) \leq M_a(t_n) + k_2 \sigma^n \frac{4M_n}{\sigma^n d} .$$

On a la même inéquation pour  $M_b$  donc en passant au max des deux côtés de l'inéquation on obtient

$$M_{n+1} \leq M_n \left( 1 + \frac{4k_2}{d} \right) .$$

Il reste à calculer  $M_0$ . En  $t = 0$  les solutions fondamentales sont des dirac donc

$$M_a(0) = |x_1 - x_0| = \left| \frac{x_1 - x_2}{2} \right| .$$

On a le même résultat pour  $M_b(0)$  donc  $M_0 = \left| \frac{x_1 - x_2}{2} \right|$ . On en déduit la proposition 5.7.  $\square$

On écrit maintenant la somme des  $(t_{n+1} - t_n)$ , et on déduit

**Proposition 5.8.** *Il existe deux constante  $\eta$  et  $\zeta$  dépendant uniquement de  $c_1, c_2, d$  et  $n$  tel que*

$$\frac{t_n}{|x_1 - x_2|^2} \leq \zeta \eta^n . \quad (26)$$

On contrôle très bien  $A$  sur les  $t_n$  et grâce à sa décroissance on va en obtenir un contrôle global.

**Proposition 5.9.**

$$A(t) \leq \sigma^{-1} \left( \frac{t}{|x_1 - x_2|^2} \right)^{\frac{\log(\sigma)}{\log(\eta)}} . \quad (27)$$

*Démonstration.* On pose  $n(t)$  l'entier tel que

$$\zeta \eta^{n(t)} \leq \frac{t}{|x_1 - x_2|^2} \leq \zeta \eta^{n(t)+1} .$$

On a  $t_{n(t)} \leq t$  d'après l'inéquation (26) et  $A(t) \leq A(t_{n(t)}) = \sigma^{n(t)}$ . De plus, d'après la définition de  $n(t)$ , on a

$$n(t) \geq \frac{\log\left(\frac{t}{\zeta|x_1-x_2|^2}\right)}{\log(\eta)} - 1 ,$$

donc

$$\sigma^{n(t)} \leq \sigma^{-1} \exp \left[ \frac{\log(\sigma)}{\log(\eta)} \log\left(\frac{t}{|x_1 - x_2|^2}\right) \right] .$$

□

On pose  $\alpha = -2 \log(\sigma) / \log(\delta)$ .  $\alpha$  dépend des données du problème et de  $d$ , et en choisissant bien la valeur de  $d$  on peut optimiser la valeur de  $\alpha$ . Il n'est pas ici question de déterminer une valeur optimale de  $\alpha$ , on peut donc choisir  $d$  arbitrairement (par exemple  $d^2 = c_1$ , rendant ainsi  $\alpha$  fonction de  $k_2$  et  $c_1/c_2$ ). On a montré que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |S(x, t, x_1, t_0) - S(x, t, x_2, t_0)| dx \leq A_1 \left( \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{t - t_0}} \right)^\alpha$$

avec  $A_1 = A_1(c_1, c_2, n)$ . Il s'agit d'une simple réécriture de l'inéquation (27). Son équation adjointe s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^n} |S(x_1, t, x_0, t_0) - S(x_2, t, x_0, t_0)| dx_0 \leq A_1 \left( \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{t - t_0}} \right)^\alpha .$$

Concluons désormais la preuve de la continuité en espace : on considère  $T(x, t)$  solution de (1) vérifiant  $|T| \leq B$  définie pour  $t \geq t_0$ . Pour tous  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} |T(x_1, t) - T(x_2, t)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} [S(x_1, t, x_0, t_0) - S(x_2, t, x_0, t_0)] T(x_0, t_0) dx_0 \right| \\ &\leq B \int_{\mathbb{R}^n} |S(x_1, t, x_0, t_0) - S(x_2, t, x_0, t_0)| dx_0 \\ &\leq B A_1 \left( \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{t - t_0}} \right)^\alpha . \end{aligned}$$

On a bien montré le théorème 5.1.

## 6 La continuité en temps

Cette partie conclut la preuve du théorème de DE GIORGI-NASH. Il s'agit de prouver ici le résultat suivant :

**Théorème 6.1.** *Avec les notations du théorème de DE GIORGI-NASH, et pour tous  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $t' \geq t > t_0$ , on a*

$$|T(x, t) - T(x, t')| \leq BA_2 \left[ \frac{t' - t}{t - t_0} \right]^{\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}} \quad (28)$$

avec  $A_2 = A_2(c_1, c_2, n)$  et  $\alpha$  le même que celui obtenu dans la partie précédente.

Ce résultat est en fait assez direct à partir de la continuité en espace.

*Démonstration.*  $T(x, t)$  désigne une solution de (1) bornée par  $B > 0$  pour  $t \geq t_0$ . Soient  $t' > t > t_0$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . On écrit

$$\begin{aligned} T(x, t) - T(x, t') &= \int_{\mathbb{R}^n} S(x, t', \bar{x}, t) [T(x, t) - T(\bar{x}, t)] d\bar{x} && \left( \int_{\mathbb{R}^n} S = 1 \right) \\ |T(x, t) - T(x, t')| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} S(x, t', \bar{x}, t) |T(x, t) - T(\bar{x}, t)| d\bar{x} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} S(x, t', x + y, t) |T(x, t) - T(x + y, t)| dy . \end{aligned}$$

Si on utilise ici la continuité en espace tel quel, on aura un problème avec le  $|y|^\alpha$  qui apparaît dans l'intégrale. On choisit donc de diviser l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}^n} S(x, t', x + y, t) |T(x, t) - T(x + y, t)| dy$  en deux domaines,  $|y| < \rho$  (on notera l'intégrale sur ce domaine  $I_1$ ) et  $|y| \geq \rho$  (on notera l'intégrale  $I_2$ ), avec un  $\rho > 0$  que l'on choisira plus tard pour minimiser la somme.

D'une part :

$$I_1 = \int_{|y| < \rho} S(x, t', x + y, t) |T(x, t) - T(x + y, t)| dy \leq BA_1 \left( \frac{\rho}{\sqrt{t - t_0}} \right)^\alpha$$

en utilisant la continuité en espace et le fait que  $\int_{\mathbb{R}^n} S = 1$ .

D'autre part,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{|y| \geq \rho} S(x, t', x + y, t) |T(x, t) - T(x + y, t)| dy \\ &\leq 2B \int_{|y| \geq \rho} \frac{|y|}{\rho} S(x, t', x + y, t) dy \leq \frac{2B}{\rho} k_2 \sqrt{t - t_0} . \end{aligned}$$

Cette écriture est assez artificielle et tire seulement parti du fait que  $|y|/\rho \geq 1$  sur le domaine considéré. On a aussi utilisé la borne supérieure de la moyenne, qui fait partie du résultat de la première partie.

En sommant on obtient :

$$|T(x, t) - T(x, t')| \leq BA_1 \frac{\rho^\alpha}{(t - t_0)^{\alpha/2}} + \frac{2B}{\rho} k_2 \sqrt{t - t_0} . \quad (29)$$

On choisit  $\rho$  qui minimise la somme, soit celui qui réalise

$$\alpha A_1 \rho^{\alpha+1} = 2k_2 (t - t')^{1/2} (t - t_0)^{\alpha/2} .$$

En substituant  $\rho$  par sa valeur, on obtient

$$|T(x, t) - T(x, t')| \leq BA_2 \left[ \frac{t' - t}{t - t_0} \right]^{\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}} ,$$

avec  $A_2 = (1 + \alpha)A_1 \left( \frac{2k_2}{\alpha A_1} \right)^{\alpha/(1+\alpha)}$  qui ne dépend que de  $c_1, c_2$  et  $n$ .  $\square$

Le théorème de DE GIORGI-NASH se déduit en prenant  $\mathcal{A} = \max(A_1, A_2)$ .

## Références

- [Nash] J. F. Nash jr *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equation* ,  
Amer. J. Math. 80 (1958), 931–954
- [De Giorgi] E. de Giorgi, *Sull'analiticità delle estremali degli integrali multipli*,  
Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Ser. 8, vol. 20 ( 1 9 5 6 ) , pp.  
435-441.
- [Dressel] F. G. Dressel, *The fundamental solution of the parabolic equation*,,  
Duke Mathematical Journal, vol. 7 (1940), pp. 186-203 ; vol. 13 (1940), pp.  
61-70.
- [Eidelman] S. D. Eidelman, *On fundamental solutions of parabolic systems*  
Matematicheskii Sbornik, vol. 38 ( 8 0 ) ( 1 9 5 6 ) , pp. 51-92.